Dinamikus rendszerek paramétereinek becslése

Paraméterbecslés a segédváltozók módszerével

Magyar Attila

Pannon Egyetem
Műszaki Informatika Kar
Villamosmérnöki és Információs Rendszerek Tanszék

amagyar@almos.vein.hu

2009 november 6.

Áttekintés

1. Ismétlés: legkisebb négyzetek módszere

2. A segédváltozók módszere
   - Az IV4 algoritmus

Ismétlés: legkisebb négyzetek módszere

- ARX modell prediktív alakja:

$$y(k+1) = -a_1 y(k) - \ldots - a_{n_a} y(k-n_a) + b_1 u(k) + \ldots + b_{n_b} u(k-n_b) + e(k)$$

- Cél az ismeretlen paramétervektor meghatározása:

$$\theta := \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_{n_a} & b_1 & \ldots & b_{n_b} \end{bmatrix}^T$$

- Ehhez a mérési eredményeket használhatjuk fel:

$$D[1,N] = D^N = \{(y(k), u(k)) \mid k = 1, \ldots, N\}$$

Ismétlés: legkisebb négyzetek módszere

- Regreszor:

$$\varphi(t) := \left[\ -y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n_a) \quad u(k) \quad \dots \quad u(k-n_b+1)\ \right]^T$$

- A paraméterekben lineáris prediktor:

$$\hat{y}(k,\theta) = \varphi^T(k)\theta$$

- Becslési hiba:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k,\theta) &= y(k) - \hat{y}^T(k) \\ \varepsilon(k,\theta) &= y(k) - \varphi^T(k)\theta \end{aligned}$$

- A minimalizálandó kritérium a becslési hiba ℓ_2 normája:

$$V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}\mid y(k) - \varphi^T(k)\theta \mid^2$$

Ismétlés: legkisebb négyzetek módszere

- Az optimális paraméter becslés a szélsőértékre vonatkozó $V'_N(\theta, D^N) = 0$ feltételből számítható:

$$\hat{\theta}_N^{LKN} = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi(k)\varphi(k)^T \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi(k)y(k)$$

- Ha a megfigyelt adatokat a valódi ϑ_0 paraméterhez tartozó zajos rendszer generálta:

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta_0 + \nu_0(k)$$

akkor a becslés a következő alakban adódik:

$$\hat{\theta}_N^{LKN} = \theta_0 + \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi(k)\varphi(k)^T \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi(k)\nu_0(k)$$

Ismétlés: legkisebb négyzetek módszere

- Az LKN becsléstől elvárjuk, hogy konvergáljon a valódi θ_0-hoz, a mérésszám növekedésével, $N \to \infty$. Ezzel ekvivalens:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi(k)\nu_0(k) = 0$$

- Vagyis a $\varphi(k)$ megfigyeléseknek és a $\nu_0(k)$ zajnak korrelálatlannak kell lennie.
- Az LKN becslés ezek után a következő alakban is megfogalmazható ($\nu_0(k) = y(k) - \varphi^T(k)\theta_0$ felhasználásával):

$$\hat{\theta}_N^{LKN} = sol\left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi(k)\left[y(k) - \varphi^T(k)\theta_0\right] = 0 \right\}$$

Segédváltozók módszere - alapötlet

- Gyengén csillapított vagy instabil rendszerek identifikációja
- korrelált megfigyelések és zaj
- LKN módszer ebben az esetben nem ad optimális megoldást
- Ötlet: $\varphi(k)$ lecserélése egy alkalmasan választott, $\nu_0(k)$-vel korrelálatlan $\xi(k)$ jelre, az ún. segédváltozóra

Segédváltozók módszere

- Az LKN becslés eredményének analógiájára olyan $\xi(t)$ segédváltozót keresünk, amelyre teljesül:

$$\hat{\theta}_N^{SV} = sol \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi(k) \left[y(k) - \varphi^T(k)\theta_0 \right] = 0 \right\}$$

- Ekkor az SV becslés alakja a következő lesz:

$$\hat{\theta}_N^{SV} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \xi(k)\varphi(k)^T \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi(k)y(k)$$

- Az LKN módszernél ismertetett lépésekkel, nagy N esetén a θ_N becslés valódi θ_0 paraméterhez való tartásának feltételei a következő alakban adódnak:

$$\mathcal{E}\left\{\xi(k)\varphi^T(k)\right\} \quad \text{nemszinguláris}$$
$$\mathcal{E}\left\{\xi(k)\nu_0(k)\right\} = 0$$

Segédváltozók módszere

Az ARX modell másik alakja:

$$A(q)y(k) = B(q)u(k)$$

ebből adódik az ötlet, hogy a segédváltozókat az ARX modellhez hasonlóan generáljuk:

$$\xi(k) = K(q) \begin{bmatrix} -z(k-1) & \dots & -z(k-n_a) & u(k) & \dots & u(k-n_b+1) \end{bmatrix}^T$$

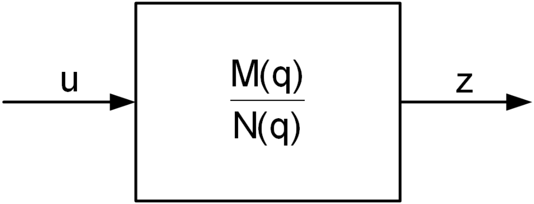
Ahol $K(q)$ alkalmasan megválasztott stabil lineáris szűrő, valamint $z(k)$ egy $u(k)$-vel gerjesztett lineáris rendszer kimeneteként generált:

$$N(q)z(k) = M(q)u(k)$$

és $N(q)$ és $M(q)$ szintén stabil lineáris szűrők.

Lineáris szűrők

- Lineáris szűrő: lineáris operátor
- Realizálás: lineáris rendszer kimeneteként, diszkrét időben



- Nem kívánatos frekvenciák levágása pl: alul áteresztő szűrő, band-stop filter
- Bizonyos frekvenciák kiválasztása pl: band-pass filter

Segédváltozók módszere

A legegyszerűbb alkalmazás esetén az LKN becslés által meghatározott polinomoknak választjuk $N(q)$-t és $M(q)$-t. A segédváltozókat ezek után $K(q) = 1$ választással képezhetjük.
Általában nem zárható ki, hogy $K(q)$, és így $\xi(k)$ is függ a θ paramétertől illetve $K(q)$ ezen kívül u-tól is. Az SV módszer elve ezért a következő:

$$
\begin{aligned}
\xi(k,\theta) &= K_u(q,\theta)u(k) \\
\varepsilon_F(k,\theta) &= L(q)\left[y(k) - \varphi^T(k,\theta)\theta\right] \\
f_N(\theta, D^N) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi(k,\theta)\varepsilon_F(k,\theta) \\
\hat{\theta}_N^S V &= sol\left[f_N(\theta, D^N) = 0\right]
\end{aligned}
$$

Az IV4 algoritmus

1. a modell struktúrát lineáris regressziós alakban írjuk fel, majd meghatározzuk θ LKN becslését és a hozzátarozó átviteli függvényt:

$$\hat{\theta}_N^{(1)} = \hat{\theta}_N^{LKN}, \quad \hat{G}_N^{(1)}(q) = \frac{\hat{B}_N^{(1)}(q)}{\hat{A}_N^{(1)}}$$

2. Képezzük a segédváltozókat:

$$\begin{aligned} z^{(1)}(k) &= \hat{G}_N^{(1)}(q)u(k) \\ \xi^{(1)}(k) &= \begin{bmatrix} -z^{(1)}(k-1) & \dots & -z^{(1)}(k-n_a) & u(t) & \dots & u(k-n_b+1) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

majd meghatározzuk a hozzá tartozó SV becslést és a hozzátartozó átviteli függvényt:

$$\hat{\theta}_N^{(2)} = \hat{\theta}_N^{SV}, \quad \hat{G}_N^{(2)}(q) = \frac{\hat{B}_N^{(2)}(q)}{\hat{A}_N^{(2)}(q)}$$

Az IV4 algoritmus

3. Képezzük az ehhez tartozó modell esetén fellépő egyenlethibát:

$$\hat{w}_N^{(2)}(k) := \hat{A}_N^{(2)}(q)y(k) - \hat{B}_N^{(2)}(q)u(k)$$

és írjunk elő egy $n_a + n_b$ fokszámú AR modellt:

$$L(q)\hat{w}_N^{(2)}(k) = e(k)$$

LKN módszerrel határozzuk meg $L(q)$ becslését: $\hat{L}_N(q)$-t.

4. Képezzük az új segédváltozókat

$$\begin{aligned} z^{(2)}(k) &= \hat{G}_N^{(2)}(q)u(k) \\ \xi^{(2)}(t) &= \hat{L}_N(q)\left[\begin{array}{cccccc} -z^{(2)}(k-1) & \dots & -z^{(2)}(k-n_a) & u(k) & \dots & u(k-n_b+1) \end{array}\right]^T \end{aligned}$$

Az IV4 algoritmus

5. Végül alkalmazzuk az $\hat{L}_N(q)$ előszűrőt és az új segédváltozókat a végső SV becslés alkalmazására:

$$\begin{aligned} \varphi_F(k) &= \hat{L}_N(q)\varphi(k) \\ y_F(k) &= \hat{L}_N(q)y(k) \\ \hat{\theta}_N &= \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\xi^{(2)}(k)\varphi_F(k)^T\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\xi^{(2)}(k)y_F(k) \end{aligned}$$