Folytonos idejű rendszerek stabilitása

Összeállította: dr. Gerzson Miklós egyetemi docens
PTE MIK Műszaki Informatika Tanszék

Stabilitás

- egyszerűsített szemlélet
  - példa
  - zavarás után a magára hagyott rendszer
    - visszatér a nyugalmi állapotába
    - kvázistacionárius állapotba kerül
    - „végtelenbe” tart
  - alapjelváltás

Stabilitás

- definíciók

  - BIBO stabilitás – külső stabilitás

    a bementek – kimenetek viszonyára tesz megkötést

  - aszimptotikus stabilitás

    a kimenetek határértékére tesz megkötést

BIBO stabilitás

- BIBO stabilitás definíciója

Egy rendszert BIBO stabilnak nevezünk, ha korlátos bemenet, azaz $|u(t)| < M_1$, valamely $-\infty < t_0 \leq t < \infty$ időintervallum esetén, a kimenete is korlátos: $|y(t)| < M_2$, a $t_0 \leq t < \infty$ időintervallumon (ahol $M_{1,}\ M_2 < \infty$, és t_0 a kezdőidőpont) .

BIBO stabilitás

- Tétel:

Egy rendszer akkor és csak akkor BIBO stabil, ha

$$\int_0^\infty |h(t)|dt < M < \infty$$

azaz a súlyfüggvény abszolút integrálja korlátos.

Aszimptotikus (nulla bemeneti) stabilitás

- Legyen n-ed rendű lineáris, időinvariáns rendszer bemenete zérus, a kimenete pedig a kezdeti értékek miatt $y(t)$. Ekkor $y(t)$ a következő módon fejezhető ki:

$$y(t)=\sum_{k=0}^{n-1} g_k(t)\cdot y^{(k)}(t_0)$$

ahol $g_k(t)$ jelöli az $y^{(k)}(t_0)$ kezdeti értékek miatti, a nulla bemenetre adott válasz $(k+1)$-dik komponensét és

$$y^{(k)}(t_0)=\left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$$

Aszimptotikus (nulla bemeneti) stabilitás

- Nulla bemeneti stabilitás definíciója

Egy lineáris időinvariáns rendszert tetszőleges, nem minden esetben zérus kezdeti feltételek esetén nulla bemeneti stabilitásúnak nevezzük, ha megválasztható egy M korlát

$$\exists M(y(t_0), y^{(1)}(t_0), \ldots, y^{(n\text{-}1)}(t_0)) > 0,$$

úgy, hogy

$$|y(t)| \leq M < \infty, \quad \forall t \geq t_0$$

és

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

Aszimptotikus (nulla bemeneti) stabilitás

- Másképpen:

Ha egy rendszerben konstans nulla bemenet és adott, legalább egy esetben nemzérus kezdeti feltételek esetén a kimenet nullához tart tetszőlegesen nagy idő eltelte után, akkor ezt a rendszert nulla bemeneti stabilitásúnak (vagy aszimptotikusan stabilnak) nevezzük.

Egyébként a rendszer instabil.

Aszimptotikus (nulla bemeneti) stabilitás

- a stabilitás feltétele

$$\left|y(t)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} g_k(t)\cdot y^{(k)}(t_0)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|g_k(t)\right|\cdot\left|y^{(k)}(t_0)\right|$$

mivel a kezdeti feltételek végesek

$$y(t_0),\, y^{(1)}(t_0),\ldots,\, y^{(n\text{-}1)}(t_0) < \infty$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|g_k(t)\right| < \infty, \quad \forall t \geq t_0$$

Stabilitás – Általános feltétel

- Induljunk ki

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_0 u(t)$$

  - inhomogén differenciálegyenlet

    megoldás: homogén általános megoldása +

    inhomogén partikuláris megoldása

Stabilitás – Általános feltétel

- homogén egyenlet:

  egyenlet bal oldala nullával egyenlővé téve

  $$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = 0$$

  bal oldalon kimenet és deriváltjai

  ennek megoldása a magára hagyott rendszer válasza

  nulla bemeneti stabilitás

- inhomogén megoldás: új egyensúlyi állapot jellemzőinek meghatározása

Stabilitás – Általános feltétel

- A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \ldots + c_n e^{p_n t} = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{p_k t}$$

ahol $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a homogén egyenletnek megfelelő karakterisztikus egyenlet gyökei, c_i konstansok

- aszimptotikusan stabil: $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$
- teljesül: ha ezek a gyökök negatív valósak, vagy negatív valós részű komplex gyökpárok:

$$\mathrm{Re}\{p_\mathrm{i}\} < 0, \quad \forall p_i,\ i=1,\ldots,n$$

Stabilitás – Általános feltétel

- Megjegyzés: a homogén egyenlet $y(t)$ megoldása tulajdonképpen a rendszer súlyfüggvénye

(hiszen $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$

így, ha $u(t) = \delta(t)$

akkor $Y(s) = G(s) \Rightarrow \quad y(t) = h(t)$)

azaz a stabilitás $\lim\limits_{t \to \infty} h(t) = 0$

Stabilitás – Általános feltétel

- Operátor tartományban
  - Átviteli függvény

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+\ldots+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_0}=\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{(s-z_1)\cdot\ldots\cdot(s-z_m)}{(s-p_1)\cdot\ldots\cdot(s-p_n)}$$

ahol a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gyökök a nevező polinomjának gyökei, azaz a pólusok, és megfelelnek a homogén differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet gyökeinek

  - Így a rendszer stabilitáshoz ezeknek a gyököknek az előjelét kell ellenőrizni $\Rightarrow$ komplex sík baloldali félsíkjára esnek-e

Stabilitás – Általános feltétel

- Inhomogén egyenlet

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

  - legyen $u(t) = 1(t)$ ugrásjel
  - ekkor a megoldás általános alakja

$$y(t) = K\left(1(t) + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \ldots + c_n e^{p_n t}\right)$$

  ahol $K = b_0/a_0$ a rendszer erősítése

  - így stabil rendszer esetén $\lim_{t\to\infty} y(t) = K$

Stabilitás definíciók összehasonlítása

- BIBO stabilitás: korlátos bemenetre korlátos válasz
- Aszimptotikus stabilitás:
  - nulla bemenet és nem zérus kezdeti feltételek esetén nullához tartó kimenet
  - ugrás jel bemenetre az erősítés által meghatározott végértékhez tartó válasz

$$\Downarrow$$

- Aszimptotikusan stabil rendszer $\Rightarrow$ BIBO stabil is
- BIBO stabil rendszer nem feltétlenül aszimptotikusan stabil

Példák

$$G_1(s)=\frac{20}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$p_1=-1,\ p_2=-2,\ p_3=-3$$

$$G_2(s)=\frac{20}{(s-1)(s^2+2s+1)}$$

$$p_1=1,\ p_{2,3}=-1$$

$$G_3(s)=\frac{20(s+1)}{(s+2)(s^2+4)}$$

$$p_1=-2,\ p_{2,3}=\pm 2j$$

$$G_4(s)=\frac{20}{(s+0{,}5)(s^2-0{,}2s)}$$

$$p_1=-0{,}5,\ p_2=0,\ p_2=0{,}2$$

$$G_5(s)=\frac{20(s^3+1)}{(s+2)(s+4)}$$

nem megvalósítható eset

Stabilitásvizsgálati módszerek

- szükségességük
- fajtáik
  - algebrai: Routh-Hurwitz módszer
  - frekvenciatartomány: Nyquist-kritérium
Bode-kritérium
  - geometriai: gyökhelygörbe módszer

Routh-Hurwitz kritérium

- módszercsalád
- cél:
  - az eredő átviteli függvény karakterisztikus egyenlete alapján a stabilitás meghatározása
  - paraméteres stabilitásvizsgálat
- kiindulás
  - pl. sorba kapcsolt tagok eredője:

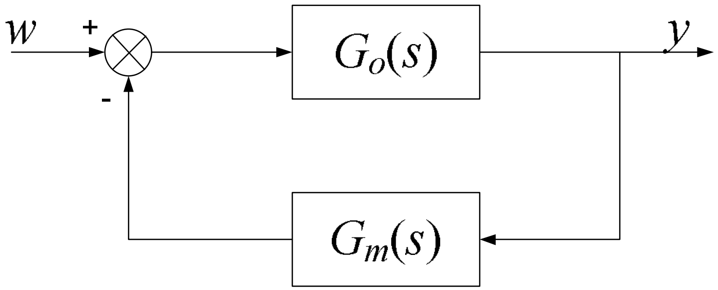
$$G_e(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0}$$

ennek karakterisztikus polinomja

$$K(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

Routh-Hurwitz kritérium

- vagy legyen visszacsatolt rendszer:



$$G_e(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)G_m(s)}$$

az ehhez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$K(s) = 1 + G_o(s)G_m(s)$$

illetve polinom alakban:

$$K(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

Routh-Hurwitz kritérium

- A stabilitás szükséges és elégséges feltétele:
  - Minden együttható legyen pozitív

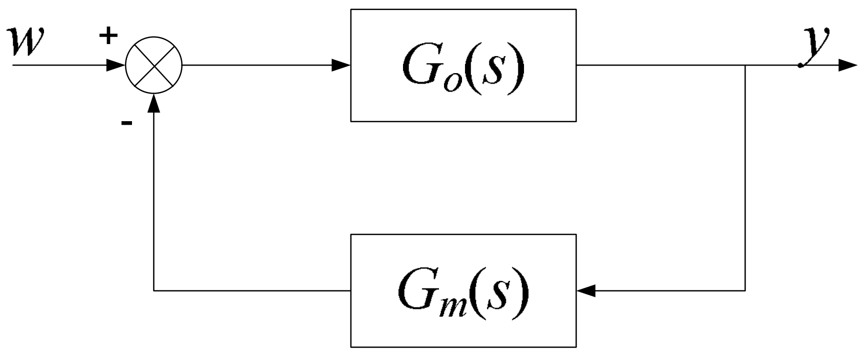
$$\forall a_i > 0,\ \ i = 1,\ldots,n$$

  - A H Hurwitz-determináns valamennyi főátlóra támaszkodó aldeterminánsa legyen pozitív:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & & \Delta_n \end{matrix} \\ \Delta = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & a_0 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \Delta_i > 0,\ \ i = 1,\ldots,n$$

Nyquist-kritérium

- a hurokátviteli függvényen alapuló geometria kritérium
- elv: a felnyitott kör helygörbéjéből következtetünk a zárt rendszer stabilitási viszonyaira
- kiindulás



Nyquist-kritérium

- Az átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)G_m(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_f(s)}$$

ahol $G_f(s)$ a felnyitott kör eredő átviteli függvénye

- A karakterisztikus egyenlet:

$$1 + G_f(s) = 0$$

melyből a pólusokat megkapjuk

- Áttérve frekvenciatartományba

$$1 + G_f(j\omega) = 0$$

Nyquist-kritérium

- Az $1+G_f(j\omega)=0$ összefüggés fizikai értelme:
  - van-e a zárt rendszernek csillapítatlan szinuszos rezgésű állandósult megoldása

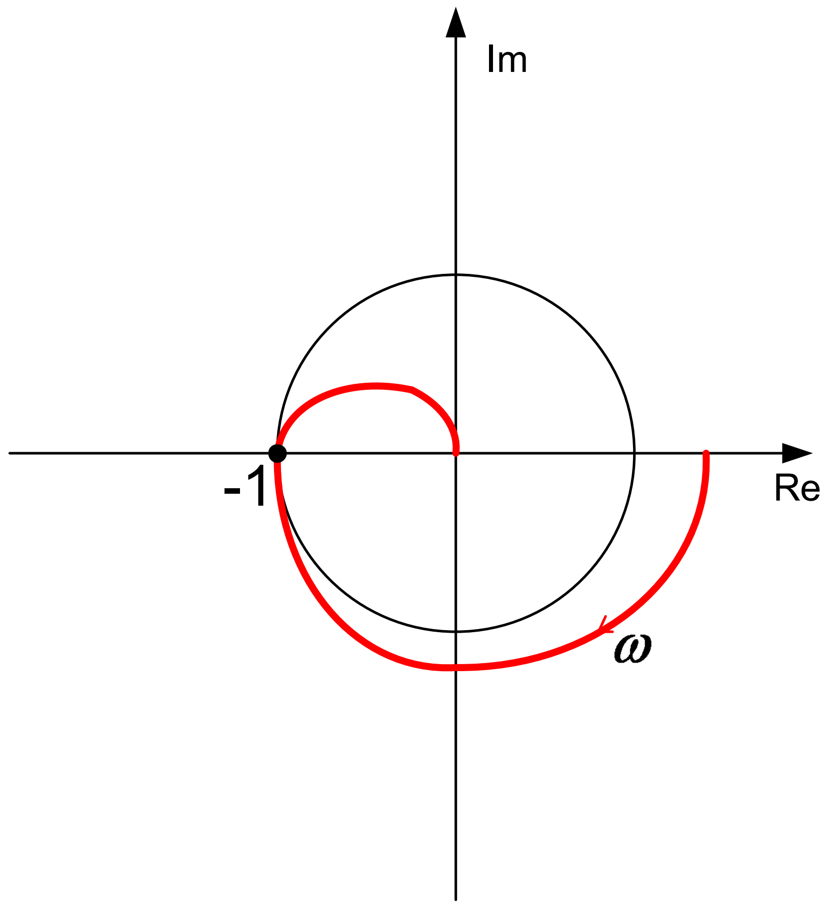
$$\exists \omega_0 : G_f(j\omega_0) = -1$$

  - ha igen: akkor ezzel az ω_0 frekvenciával gerjesztve a zárt rendszert csillapítatlan rezgéseket kapunk

Nyquist-kritérium

- *Kritérium*:

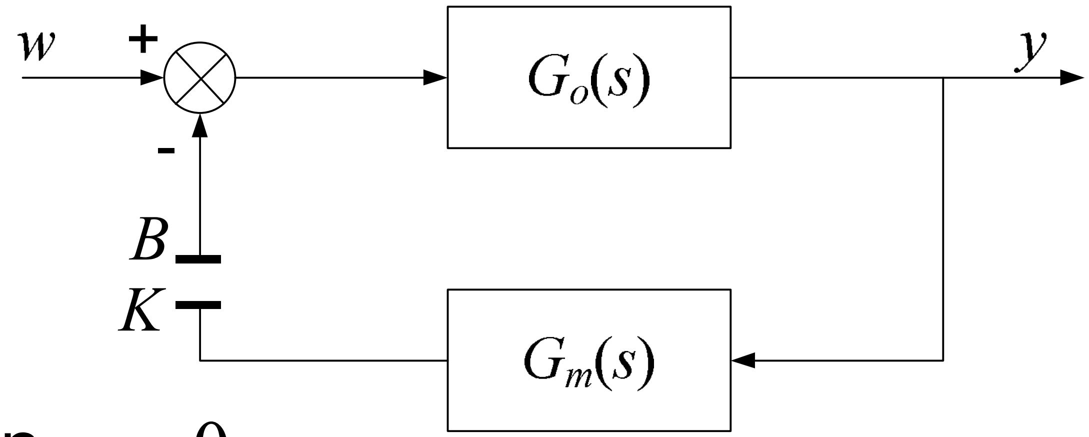
  Ha a felnyitott kör $G_f(j\omega)$ amplitúdó-fázis görbéje – miközben frekvencia $0 \le \omega < \infty$ tartományon változik – éppen áthalad a komplex számsík -1 pontján, akkor a rendszer a stabilitás határán van.



Nyquist-kritérium

- *Magyarázat:*

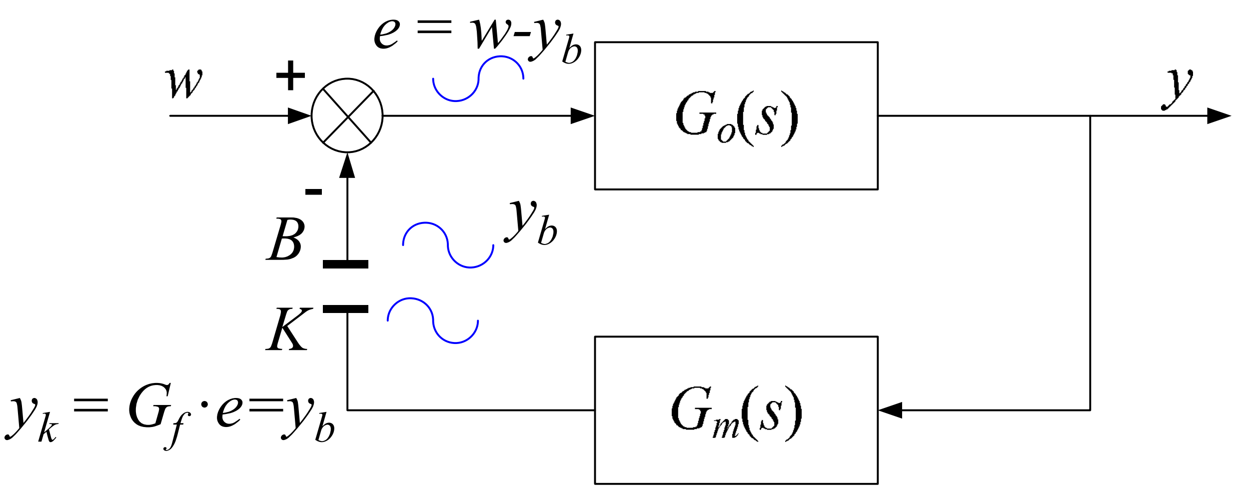
Induljunk ki a visszacsatolt körből:



- legyen $w = 0$
- vágjuk fel a kört a B - K pontok között
- legyen a felnyitott kör Nyquist-diagramja olyan, hogy átmegy a -1 ponton: $G_o(j\omega_0)\cdot G_m(j\omega_0) = -1$

Nyquist-kritérium

- gerjesszük a rendszert a B pontban ω_0 frekvenciájú szinuszos y_b jellel



- a különbségképző után $e = -y_b$
- a K ponton pedig ismét y_b jelenik meg:

$$y_k = G_f(j\omega_0) \cdot (-y_b) = \underbrace{G_o(j\omega_0) \cdot G_m(j\omega_0)}_{= -1} \cdot (-y_b) = y_b$$

Nyquist-kritérium

- összekötés után is fenn marad ez a jel, a gerjesztés megszűnése esetén is
- valós rendszer – egységugrás gerjesztés

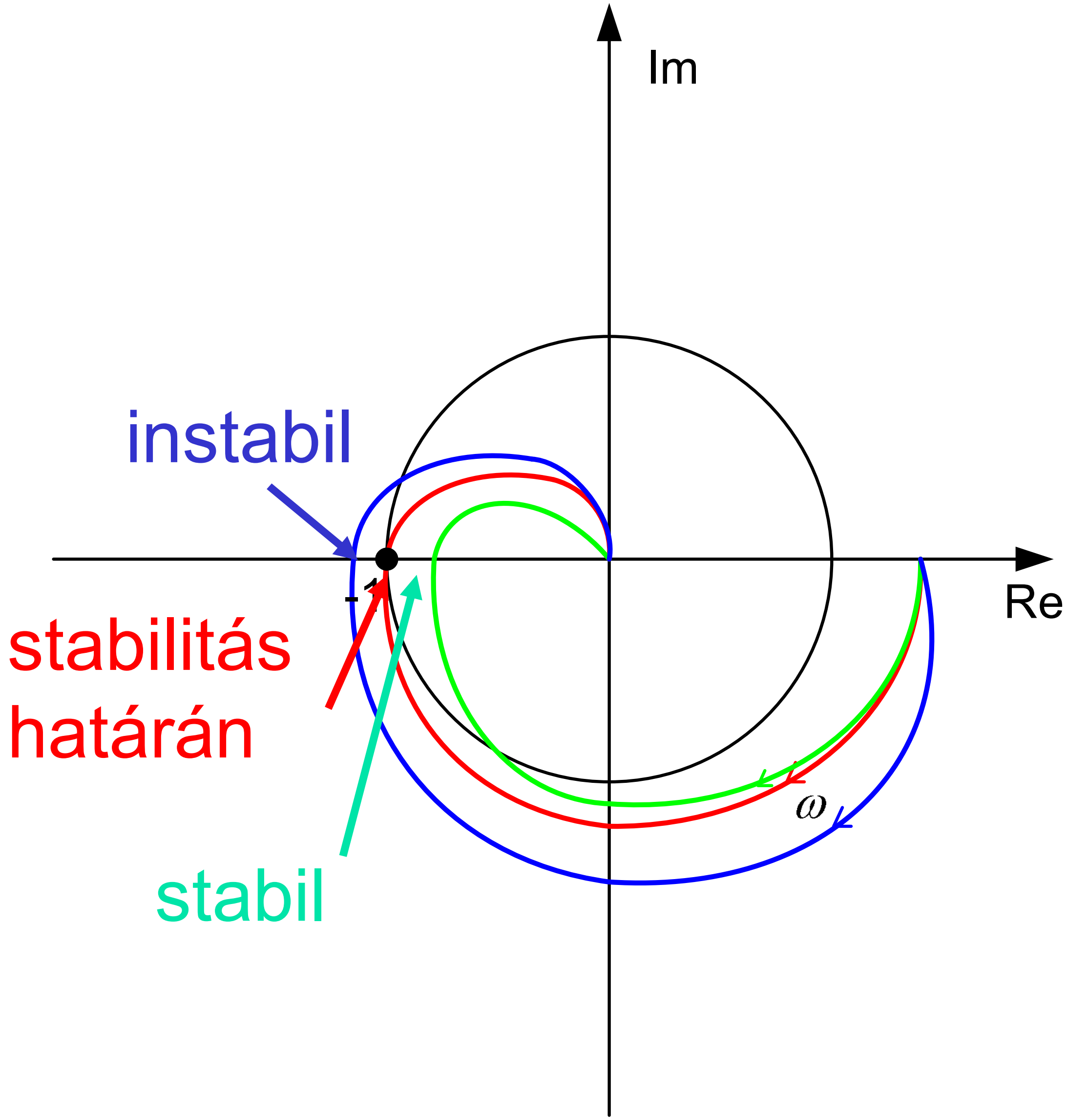
Nyquist-kritérium

- Nyquist-féle stabilitás kritérium

Ha a felnyitott kör Nyquist görbéje a valós tengelyt először

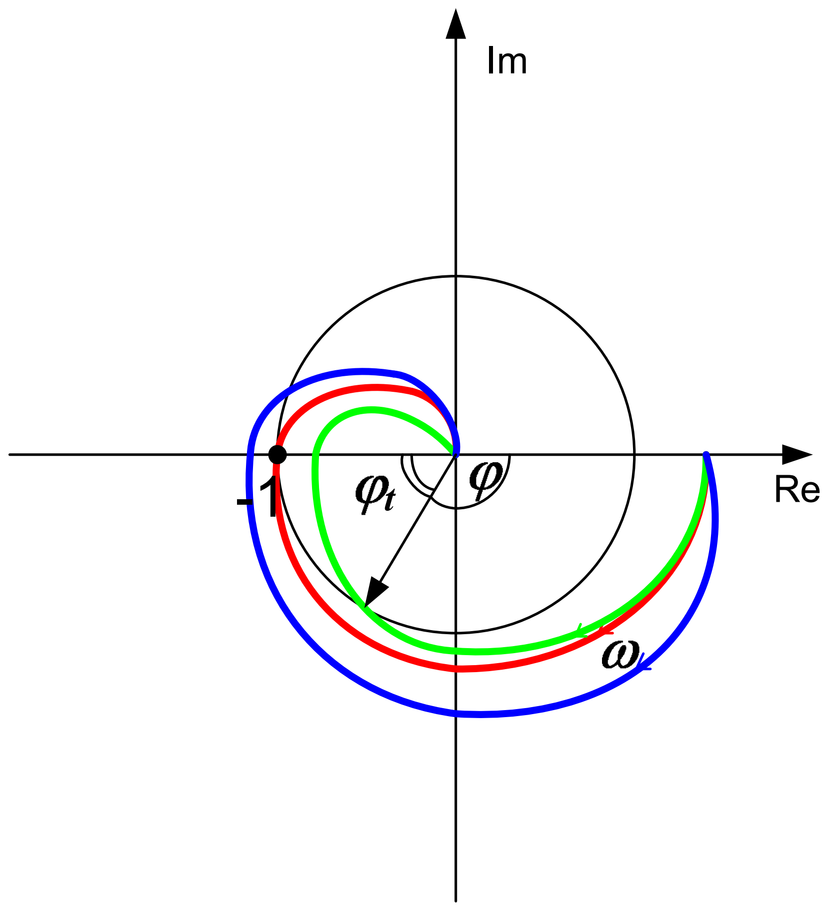
- a -1 ponttól jobbra metszi, azaz a metszéspont 0 és -1 között van, akkor a zárt kör stabil;
- pontosan a -1 pontban metszi, akkor a zárt kör a stabilitás határán van;
- a -1 ponttól balra metszi, azaz a metszés pont -1 és $-\infty$ között van, akkor a zárt kör instabil.

Nyquist-kritérium



Nyquist-kritérium

- fázis tartalék: $\varphi_t = \pi - \varphi$
  - ha $\varphi < \pi$, $\varphi_t > 0 \Rightarrow$ a rendszer stabil
  - ha $\varphi = \pi$, $\varphi_t = 0 \Rightarrow$ a rendszer stabilitás határán
  - ha $\varphi > \pi$, $\varphi_t < 0 \Rightarrow$ a rendszer instabil
  - általában $\varphi_t > \pi/6$ legyen

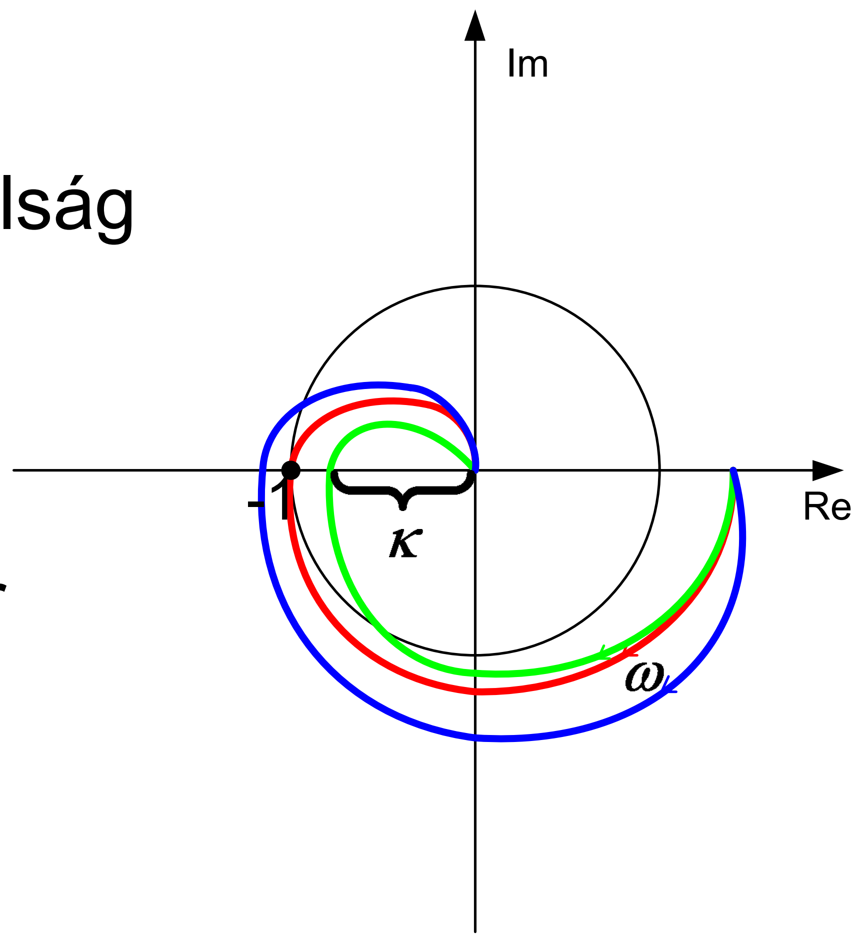


Nyquist-kritérium

- erősítési tartalék

  $\kappa =$ az origó és a metszéspont közötti távolság

  - ha $\kappa < 1 \Rightarrow$ a rendszer stabil
  - ha $\kappa = 1 \Rightarrow$ a rendszer stabilitás határán
  - ha $\kappa > 1 \Rightarrow$ a rendszer instabil



Bode-kritérium

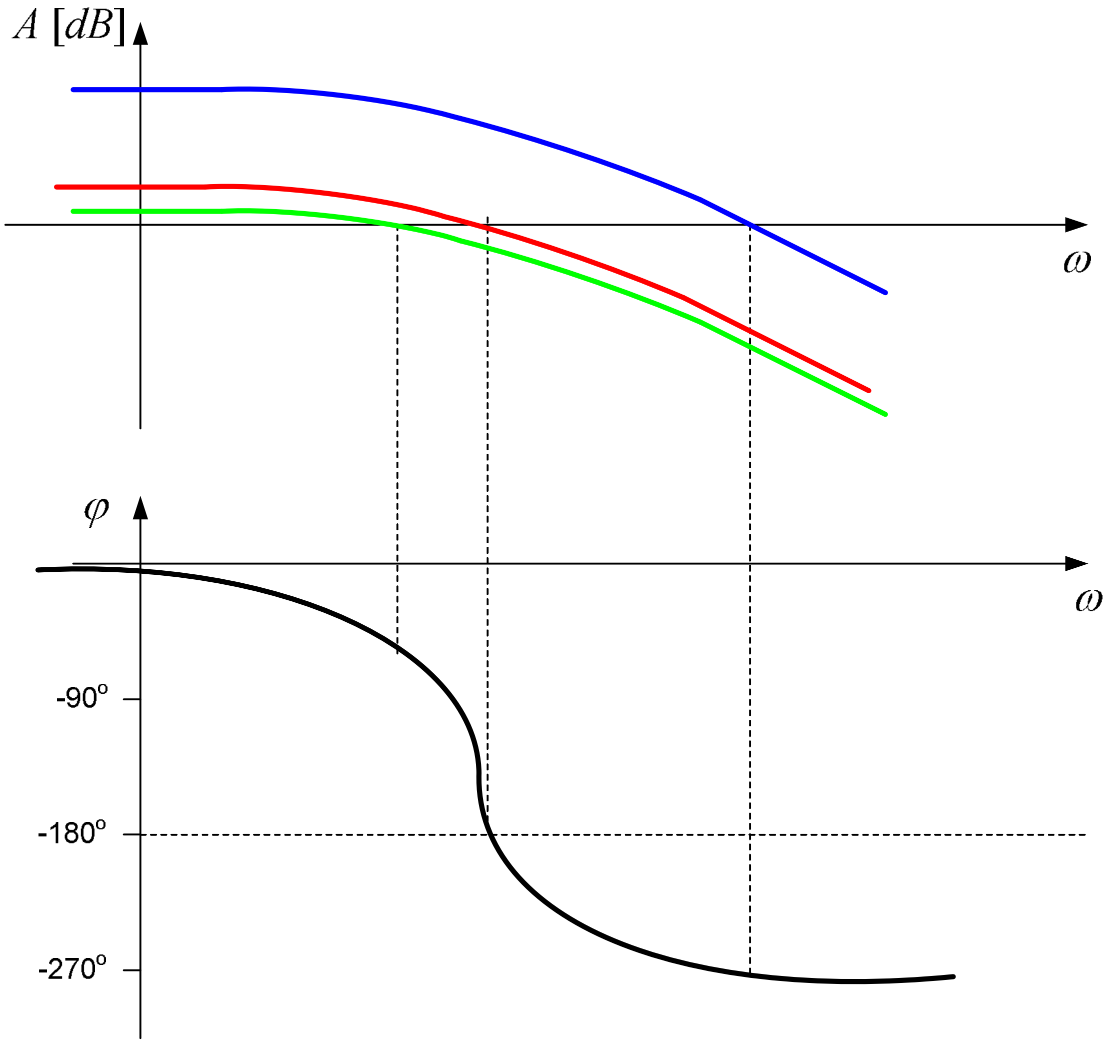
- Bode diagram: a frekvencia függvényében az amplitúdóviszony és fázisszög ábrázolása

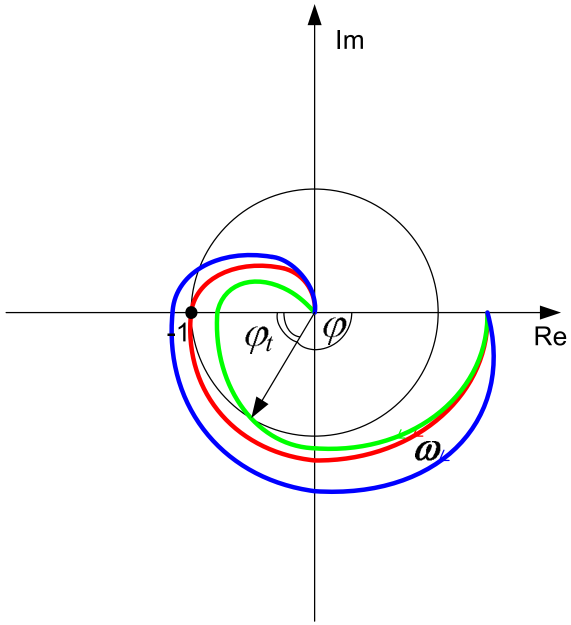
- Nyquist diagram egység sugarú kör $\Rightarrow$

  Bode diagram 0 dB tengely

- Bode kritérium alapja: az amplitúdógörbe és a 0 dB tengely metszés pontjához milyen fázis szög érték tartozik

Bode-kritérium





Bode-kritérium

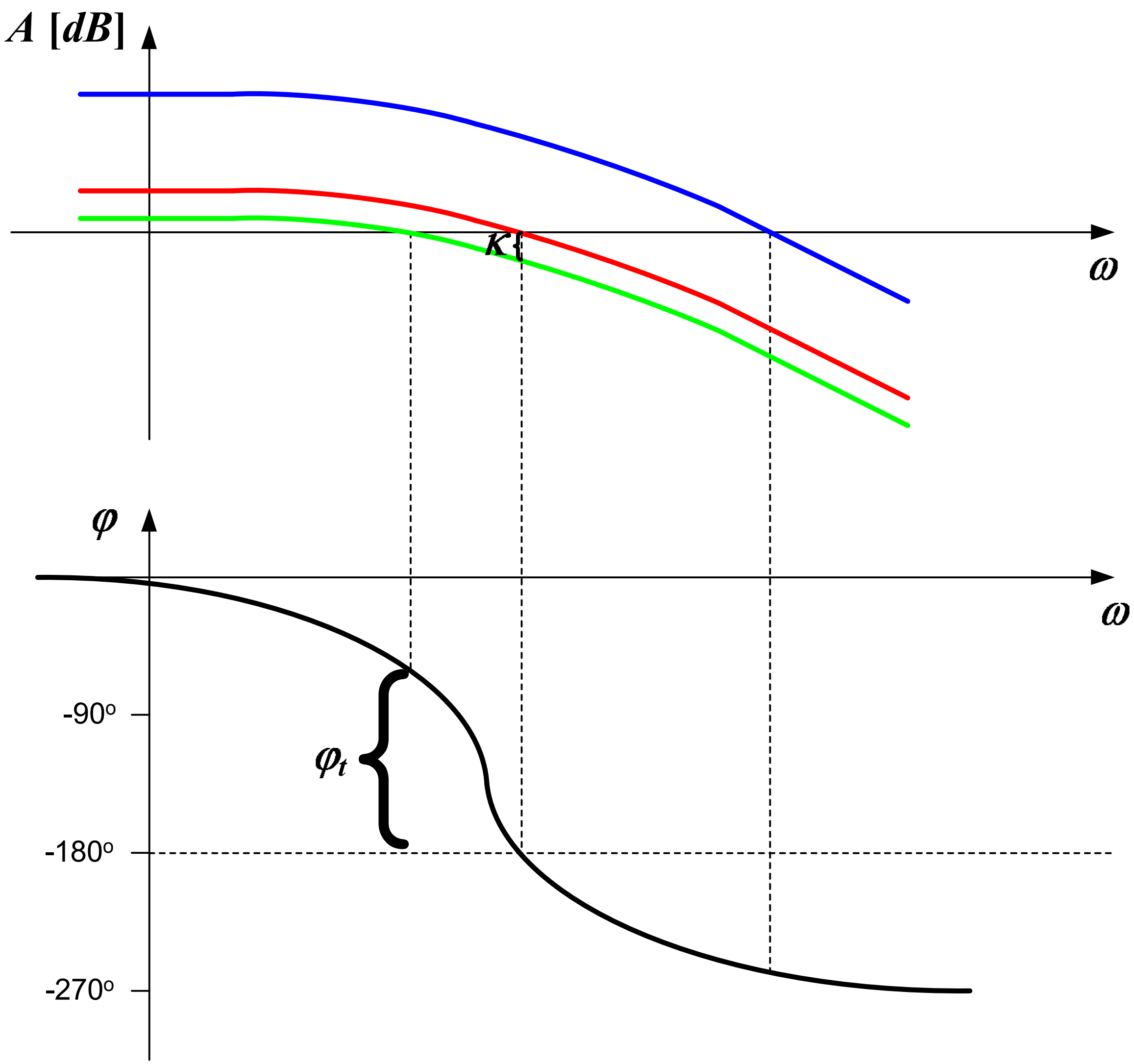
- Stabilitási kritérium:

  Ha az amplitúdógörbe és a 0 dB-es tengely metszéspontjához tartozó φ fázisszög

  - nagyobb -180^o-nál, akkor a rendszer stabil;
  - egyenlő -180^o-kal, akkor a rendszer a stabilitás határán van;
  - ha kisebb -180^o-nál, akkor instabil.

Bode-kritérium

- Fázistartalék
  - φ_t
- erősítési tartalék
  - $|\kappa|$ [dB]
  - fizikai értelmezés



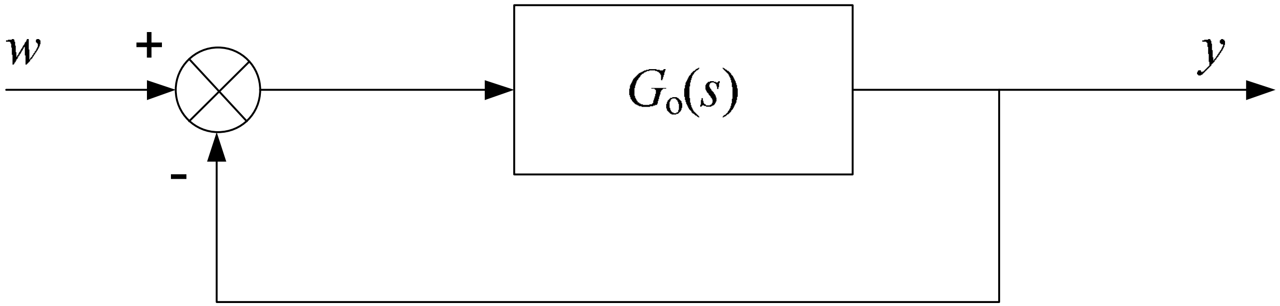
Gyökhelygörbe

- módszer célja:
  - stabilitásvizsgálat
  - minőségi jellemzők hozzávetőleges meghatározása
- Evans, 1948
- alkalmazható SISO és MIMO rendszerekre
- Def.:

A gyökhelygörbe a zárt rendszer pólusainak mértani helye a komplex síkon, miközben a rendszer valamely paraméterét zérus és végtelen között változtatjuk.

Gyökhelygörbe

- kiindulás



- legyen

$$G_o(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdot\ldots\cdot(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdot\ldots\cdot(s+p_n)}$$

ahol K - erősítés,

$-z_1,\ldots,-z_m$ – zérushelyek,

$-p_1,\ldots,-p_n$ - pólusok

Gyökhelygörbe

- a visszacsatolt kör eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{K(s+z_1)\cdot\ldots\cdot(s+z_m)}{(s+p_1)\cdot\ldots\cdot(s+p_n)+K(s+z_1)\cdot\ldots\cdot(s+z_m)}$$

- a karakterisztikus egyenlet:

$$(s+p_1)\cdot\ldots\cdot(s+p_n)+K(s+z_1)\cdot\ldots\cdot(s+z_m)=0$$

azaz a gyökhelygörbe most a karakterisztikus egyenlet gyökeinek mértani helye a komplex síkon, midőn az erősítést 0 és ∞ között változtatjuk

Gyökhelygörbe

- a karakterisztikus egyenletet átalakítva:

$$\frac{K(s+z_1)\cdot\ldots\cdot(s+z_m)}{(s+p_1)\cdot\ldots\cdot(s+p_n)}=-1$$

- azaz $G_o(s)= -1$
- miután általános esetben a gyökök komplexek, és a komplex számok felírhatók $z=A\cdot e^{j\varphi}$ vagy $z=A\angle\varphi$ alakban, így

$$-1 = e^{\pm jl\pi} \quad \text{ahol } l = 1, 3, 5,\ldots$$

vagy $$-1 = 1\angle\pm l\cdot 180^{\circ}$$

Gyökhelygörbe

- Összefoglalva:

A gyökhelygörbe bármely pontjának két feltételt kell kielégítenie: a valós és a képzetes részeknek a

$$\frac{K(s+z_1)\cdot\ldots\cdot(s+z_m)}{(s+p_1)\cdot\ldots\cdot(s+p_n)}=-1$$

egyenlet mindkét oldalán külön-külön meg kell egyezniük. Ennek ellenőrzése:

- szögfeltétel
- abszolút érték feltétel

Gyökhelygörbe

- legyen a k-dik zérushely: $s + z_k = C_k\, e^{j\gamma_k} = C_k \angle \gamma_k$
- legyen a i-dik pólus: $s + p_i = D_i\, e^{j\delta_i} = D_i \angle \delta_i$
- ekkor a szögfeltétel:

$$\angle\gamma_1 + \ldots + \angle\gamma_m - \angle\delta_1 - \ldots - \angle\delta_n = \sum_{k=1}^{m} \angle\gamma_k - \sum_{i=1}^{n} \angle\delta_i = \pm l 180^\circ$$

azaz egy s pont akkor és csak akkor tartozik a gyökhelygörbéhez, ha a zérushelyekből kiinduló és az s-be mutató vektorok szögének összegéből levonva a pólusokból kiinduló és az s-be mutató vektorok szögeinek összegét, akkor $\pm l \cdot 180^{o}$-t kapunk.

Gyökhelygörbe

- az abszolútérték feltétel:

$$\frac{|s+z_1|\cdot|s+z_2|\cdot\ldots\cdot|s+z_m|}{|s+p_1|\cdot|s+p_2|\cdot\ldots\cdot|s+p_n|}=\frac{\Pi_{k=1}^{m}C_k}{\Pi_{i=1}^{n}D_i}=\frac{1}{|K|}=\frac{1}{K}$$

azaz egy s pont akkor és csak akkor tartozik a gyökhelygörbéhez, ha a zérushelyekből az s-be mutató vektorok abszolút értékeinek szorzatát elosztva a pólusokból az s-be mutató vektorok abszolút értékeinek szorzatával az erősítés reciprokát kapjuk meg.

Gyökhelygörbe

- a gyökhelygörbe előállítása
  - karakterisztikus egyenlet megoldásával
  - grafikus úton próbálgatással
  - szerkesztési módszerek
  - számítógépes programok
  - tulajdonságok alapján közelítve

Gyökhelygörbe

- a gyökhelygörbe tulajdonságai

1. A gyökhelygörbének annyi ága van, amennyi a zárt rendszer pólusainak a száma.
2. A gyökhelygörbe mindig szimmetrikus a valós tengelyre nézve.

Gyökhelygörbe

3. Legyen n a pólusok száma, m a zérushelyek száma a felnyitott körben
   - ha $n > m$, akkor a gyökhelygörbe a felnyitott kör pólusaiból indul ki, és m számú ág a felnyitott kör zérushelyeibe, $n - m$ számú ág a végtelenbe tart;
   - ha $n = m$, akkor a gyökhelygörbe teljesen a végesben van;
   - ha $n < m$, akkor $m - n$ számú ág a végtelenből indul ki (nem reális eset).

Gyökhelygörbe

4. A valós tengelyen akkor és csak akkor lehetnek gyökhelygörbe szakaszok, ha a vizsgált ponttól jobbra a pólusok és a zérushelyek együttes száma páratlan.

5. A gyökhelygörbe aszimptótáinak irányát az

$$\alpha = \frac{l \cdot 180^\circ}{n-m} \qquad l = 1, 3, 5, \ldots, 2(n-m)-1$$

összefüggés adja meg.

Gyökhelygörbe

6. A gyökhelygörbe aszimptótái a valós tengelyt az alábbi összefüggés által meghatározott ún. súlypontban metszik. Jelölje p_i a felnyitott kör i-dik pólusát, z_j a felnyitott kör j-dik zérusát. Ekkor a súlypont értéke:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\{p_i\} - \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Re}\{z_j\}}{n-m}$$

Gyökhelygörbe

7. A gyökhelygörbe és a képzetes tengely metszés-pontja, vagyis a stabilitáshatárához tartozó erősítési értékhez tartozó pólusok a korábban ismertetett Hurwitz determináns segítségével határozhatók meg.
8. A gyökhelygörbe kilépése a valós tengelyből, vagyis a valós tengelynek az az x pontja, ahol többszörös gyököket kapunk a következő egyenlet segítségével határozható meg:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - p_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{x - z_j} = 0$$

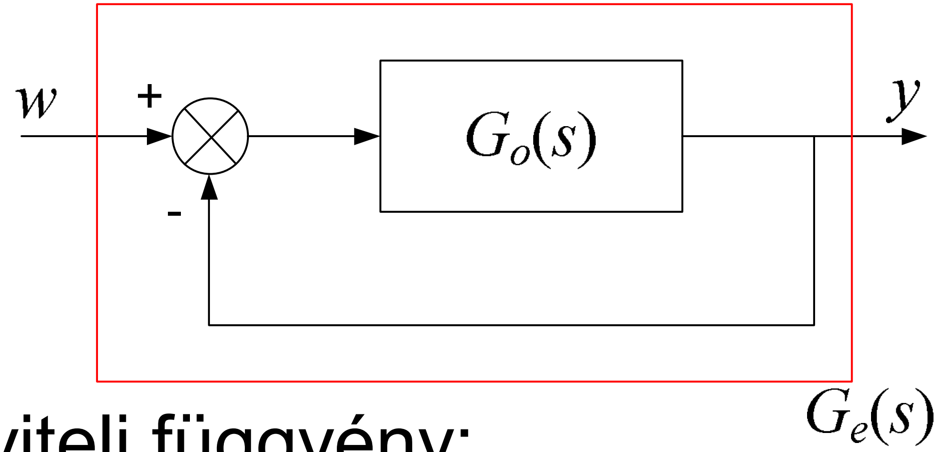
Gyökhelygörbe

9. A gyökhelygörbe kilépése a komplex pólusokból a szögfeltétel segítségével határozható meg, úgy, hogy felveszünk egy pontot a pólushoz közel, és arra nézve megoldjuk a szögfeltételt:

$$\sum_{k=1}^{m} \angle\gamma_k - \sum_{i=1}^{n} \angle\delta_i = -l \cdot 180^\circ \quad \text{ahol} \quad l = 1,3,\ldots,2(n-m)-1$$

Gyökhelygörbe - példák

- példák csoportosítása
  - nevező fokszáma n $(n = 1, 2, 3)$
  - számláló fokszáma m $(m = 0, 1)$
- vizsgált kör

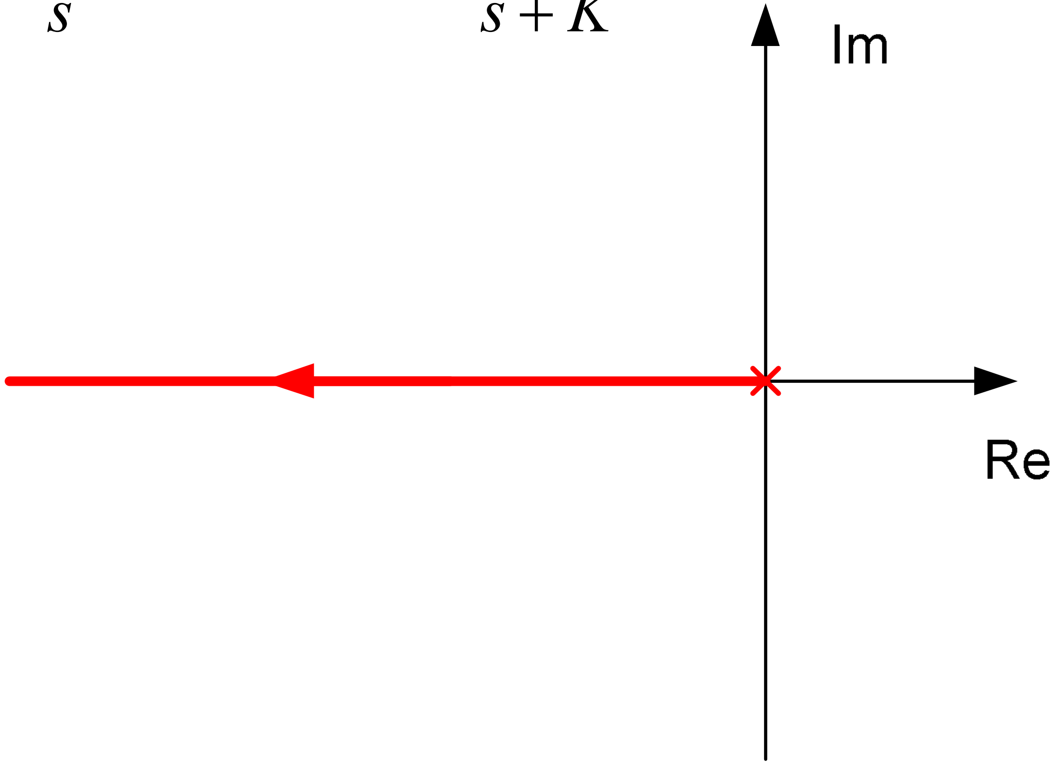


  - az eredő átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}$$

Gyökhelygörbe - példák

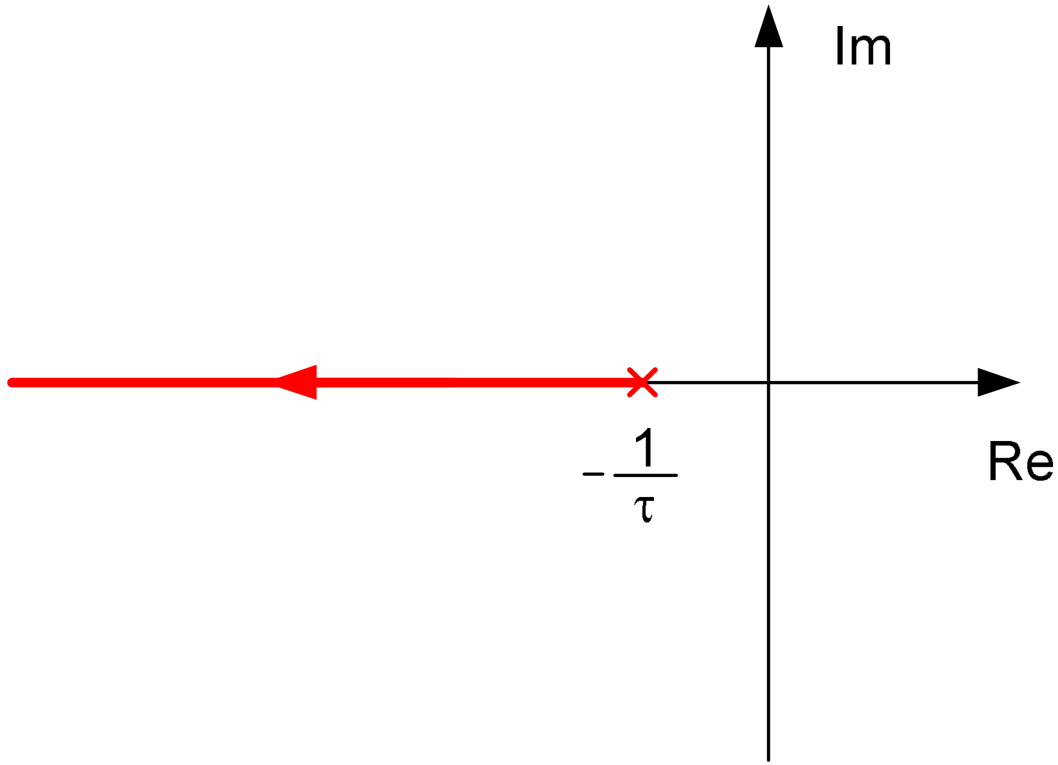
- legyen $n = 1,\ m = 0$
  - ha $G_o(s) = \frac{K}{s} \Rightarrow G_e(s) = \frac{K}{s+K}$



Gyökhelygörbe - példák

- ha

$$G_o(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad \Rightarrow \quad G_e(s) = \frac{K}{\tau s + 1 + K}$$

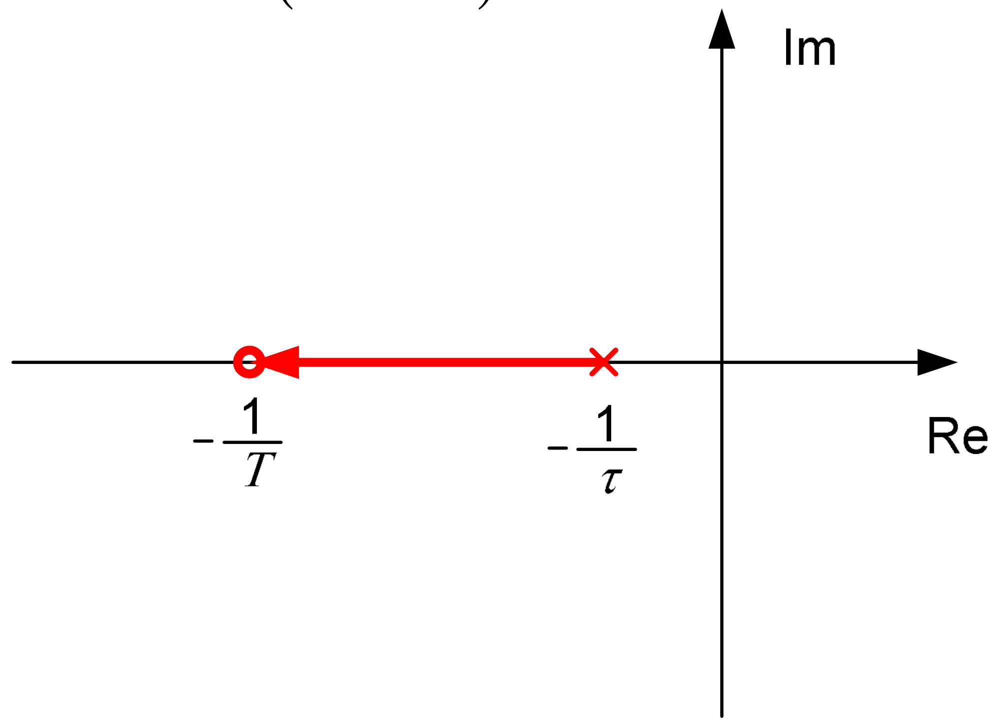


Gyökhelygörbe - példák

- legyen $n = 1,\ m = 1$

$$G_o(s) = \frac{K(Ts+1)}{\tau s + 1} \quad \Rightarrow \quad G_e(s) = \frac{K(Ts+1)}{(\tau + KT)s + 1 + K}$$

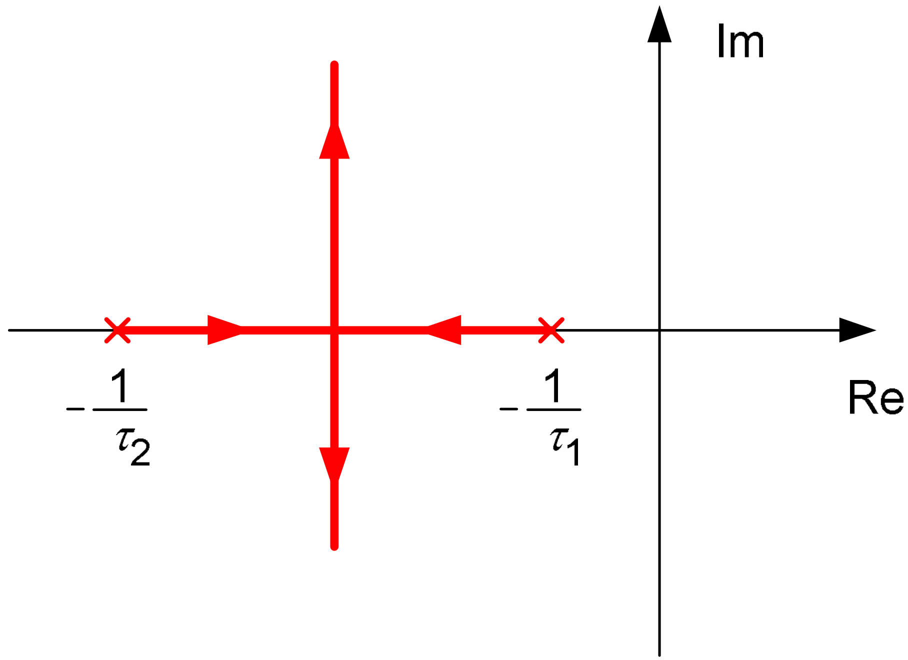
ha $\tau > T$



Gyökhelygörbe - példák

- legyen $n = 2,\ m = 0$ és $\xi > 1$

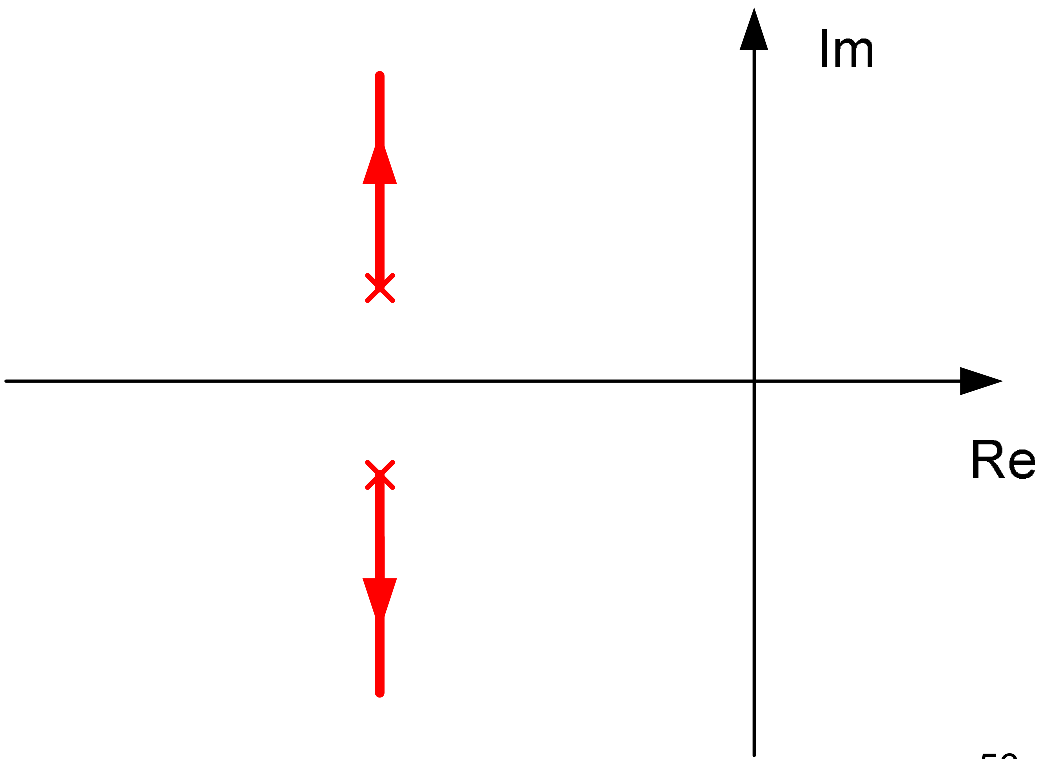
$$G_o(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad \Rightarrow \quad G_e(s) = \frac{K}{\tau_1 \cdot \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1 + K}$$



Gyökhelygörbe - példák

- legyen $n = 2,\ m = 0$ és $0 < \xi < 1$

$$G_o(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \quad \Rightarrow \quad G_e(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1 + K}$$

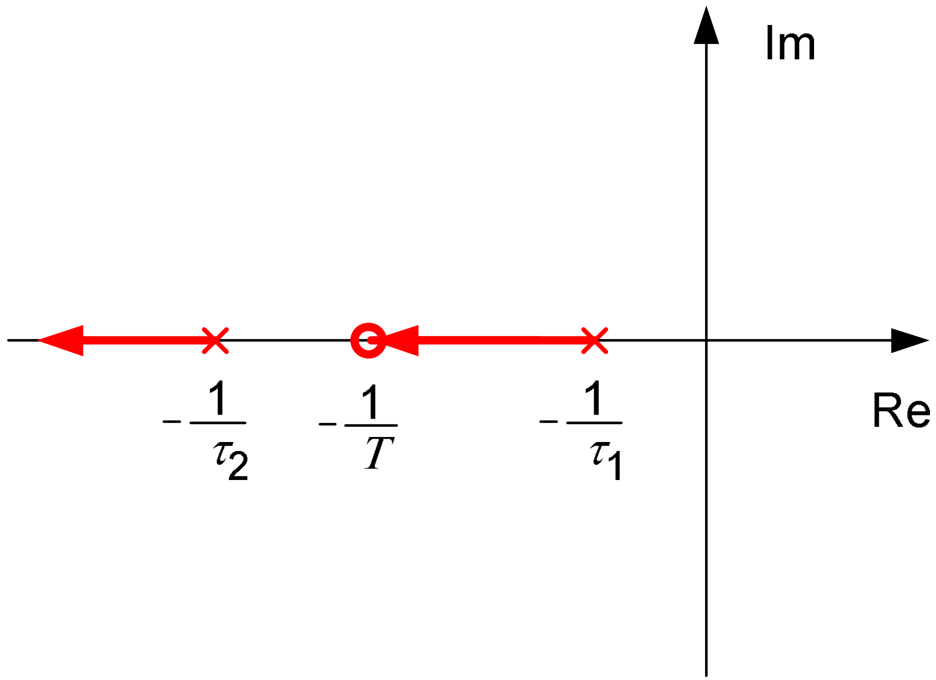


Gyökhelygörbe - példák

- legyen $n = 2,\, m = 1$ és $\xi > 1$

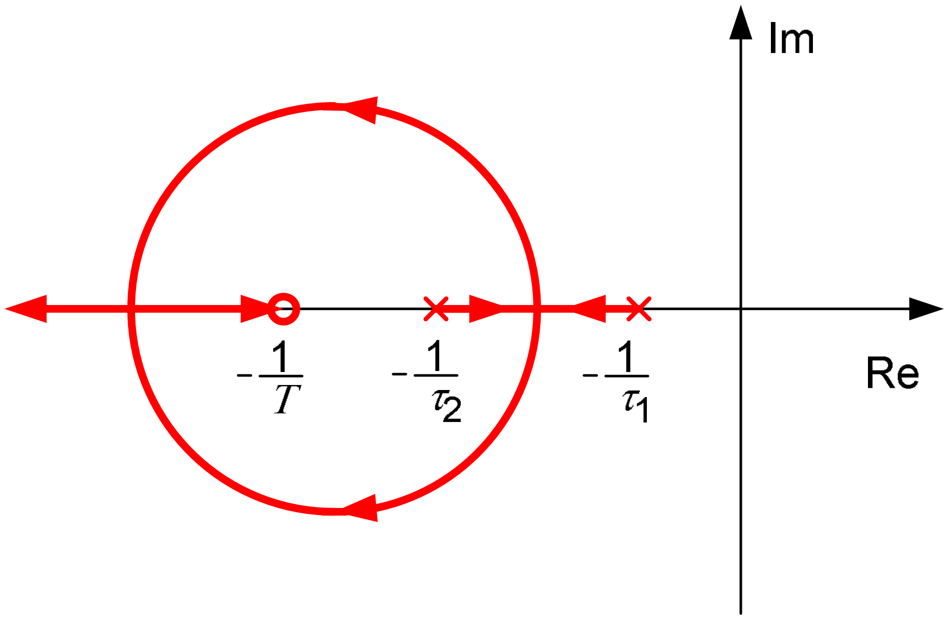
$$G_o(s) = \frac{K(Ts+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \quad \Rightarrow \quad G_e(s) = \frac{K(Ts+1)}{\tau_1 \cdot \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + KT)s + 1 + K}$$

- ha $\tau_1 > T > \tau_2$



Gyökhelygörbe - példák

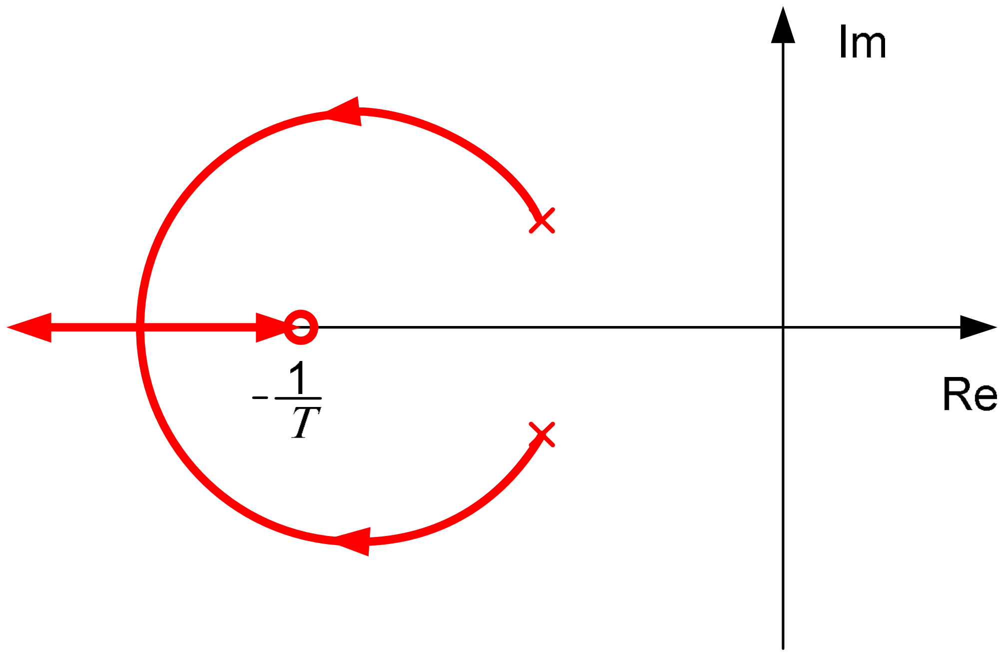
- ha $\tau_1 > \tau_2 > T$



Gyökhelygörbe - példák

- legyen $n = 2,\ m = 1$ és $0 < \xi < 1$

$$G_o(s) = \frac{K(Ts+1)}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad \Rightarrow \quad G_e(s) = \frac{K(Ts+1)}{\tau^2 s^2 + (2\xi\tau + KT)s + 1 + K}$$

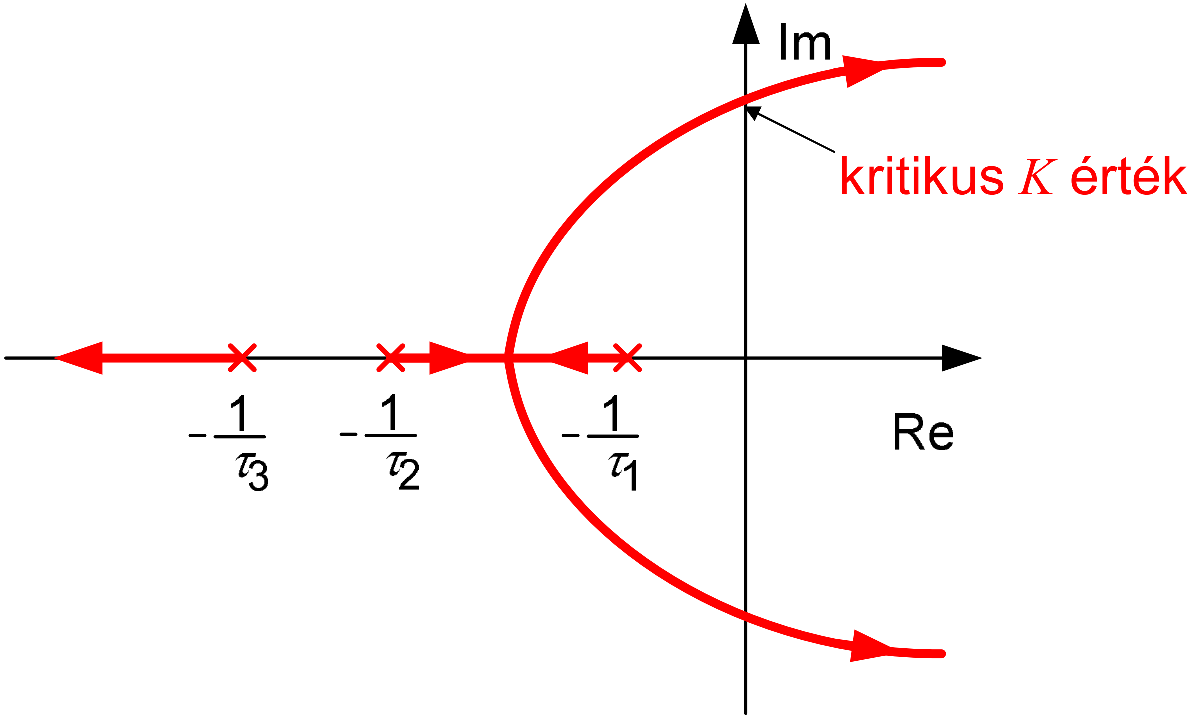


Gyökhelygörbe - példák

- legyen $n = 3,\ m = 0$

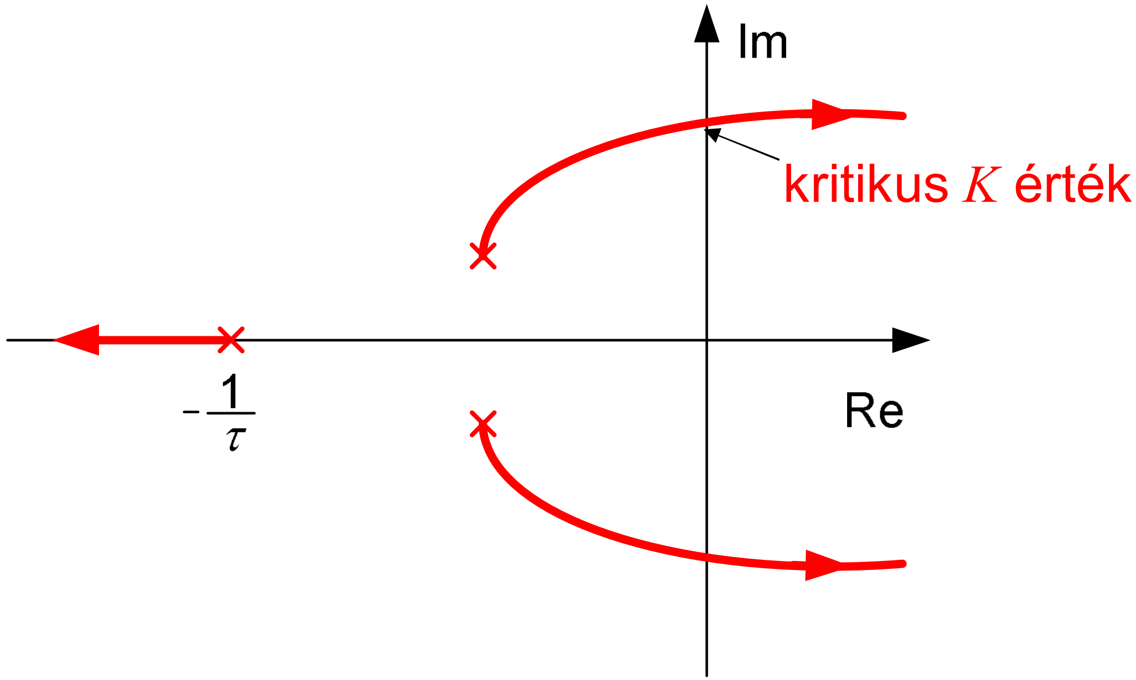
$$G_o(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$$

ha $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$



Gyökhelygörbe - példák

$$G_o(s) = \frac{K}{\left(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1\right)\left(\tau s + 1\right)}$$



Gyökhelygörbe - példák

- legyen $n = 3,\ m = 1$

$$G(s) = \frac{Ts+1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1)} \Rightarrow$$

$$G_e(s) = \frac{K(Ts+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1) + K(Ts+1)}$$

ha $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > T$