



# Automaták és formális nyelvek

---

Bevezetés a számítástudomány alapjaiba

## 2. Automaták



# Automaták - bevezetés

---

- Automaták: információs gépek általános absztrakt modelljei
- Információs gépek:
  - bemenő adat: információ a környezettől
  - kimenő adat: információ a környezet felé
- Automaták osztályozása:
  - működésük jellege (determinisztikus, sztochasztikus)
  - működési képességük (felismerő a., átalakító a., veremautomaták, Turing-gép)



## Véges felismerő automaták

---

- Véges, determinisztikus, felismerő automaták
  - belső állapotaik száma véges;
  - legfeljebb egy következő állapot lehetséges;
  - bemeneten megjelenő jelsorozat felismerésére / elfogadására alkalmasak;
  - szerepük: számítási eljárások, informatikai gépek modellezése.



# Véges felismerő automaták

---

- Véges automaták felépítése:
  - egy **vezérlőmű**, amelynek véges sok különböző belső állapota lehetséges, másképpen véges belső memóriával rendelkezik;
  - egy **bemenő szalag**, mely cellákra van osztva, erre írjuk rá a meghatározott jelekből álló beolvasandó szót;
  - egy **olvasó fej**, amely a bemenő szalag egy cellája tartalmának beolvasására, valamint balról jobbra történő cellánkénti mozgásra képes;



## Véges felismerő automaták

---

- a megengedett bemenő jelek halmaza is véges, ezek a jelek alkotják az automata **bemenő ábécéjét**.



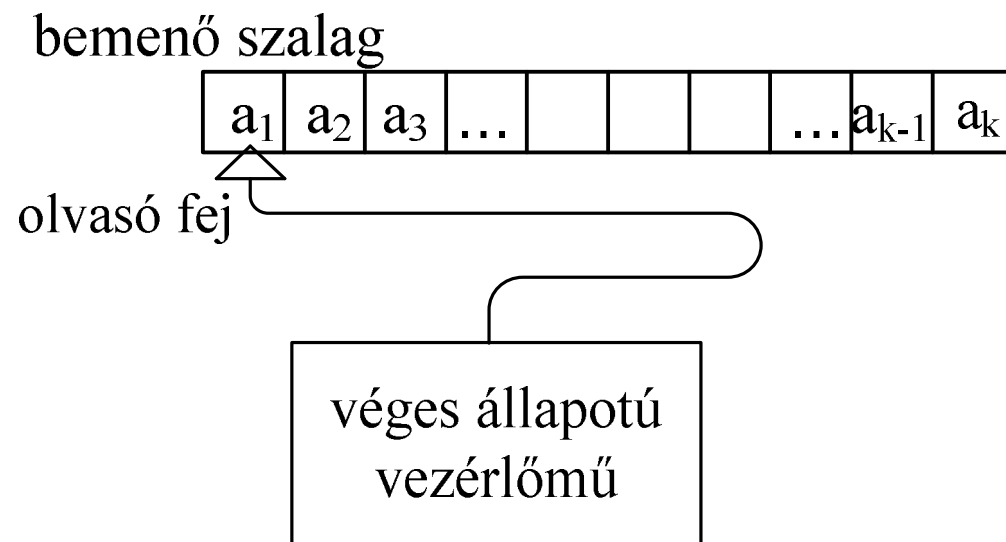
# Véges felismerő automaták

---

- Véges automaták működése
  - **diszkrét** jellegű, azaz az automata működési fázisai egymást követő diszkrét időpillanatokban, ütemekben valósulnak meg;
  - **determinisztikus**, mivel az automaták vezérlőművéhez minden időpillanatban pontosan egy belső állapot rendelhető hozzá.

# Véges felismerő automaták

- Felismerő automata szerkezete:





## Véges felismerő automaták

---

- Felismerő automata működési fázisai
  - bekapcsoláskor a vezérlőmű egy előre rögzített belső állapotba, **a kezdőállapotba** kerül, az olvasó fej a bemenő szalag balról vett első cellájára áll;
  - az automata beolvassa az első cella tartalmát, majd a pillanatnyi belső állapota és beolvasott jel alapján a következő két dolog történhet:





## Véges felismerő automaták

---

- ha az automata definíciójában a pillanatnyi belső állapot és a beolvasott jel alapján van értelmezett következő állapot, akkor a vezérlőmű átkerül ebbe az állapotba, az olvasó fej egy cellával jobbra lép, és az automata ennek megfelelően folytatja a működését;
- ha nincs következő állapot értelmezve, akkor az automata működése megszakad



## Véges felismerő automaták

---

- a felismerő automata leállása:
  - az utolsó jel beolvasása után az automata átkerül az utolsó állapotába, ekkor
    - ha ez az utolsó állapot szerepel az ún. végállapotok halmazában, akkor az automata felismerte (elfogadta) a szót;
    - ha nem eleme az utolsó állapot a végállapotok halmazának, akkor az automata nem ismerte fel (visszautasította) a szót.
  - ha bármely jel beolvasása után nincs értelmezve a következő állapot: az automata nem ismerte fel a szót;



## Véges felismerő automaták

---

- Def.: **Véges, determinisztikus felismerő automata**  $A$ -t a  $V$  ábécével működő determinisztikus, véges automatának nevezzük, ha  $A$  az alábbi rendezett ötös:

$$A = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle$$

ahol

- $K$  a belső állapotok véges, nemüres halmaza, az ún. **állapothalmaz**;
- $V$  a bemenő jelek véges halmaza, a **bemenő ábécé**;



## Véges felismerő automaták

---

- $\delta$  egy  $K$ -ba képező függvény, melynek értelmezési tartománya a  $K \times V$  valamely része, az **átmeneti függvény**;
- $q_0 \in K$ , a **kezdőállapot**;
- $F \subseteq K$ , a **végállapotok halmaza**.



## Véges felismerő automaták

---

- Az automata teljesen definiált, ha a  $\delta$  átmeneti függvény az egész  $K \times V$  tartományon értelmezve van.
- Az automata által felismert nyelvet azok a szavak alkotják, melyet az automata felismer.
  
- Példa



## Véges felismerő automaták

---

- A működés formalizált leírása:
  - Legyen adott egy  $A = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle$  automata a definíciónak megfelelő módon.
  - Legyen adott  $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in V^*$  bemenő szó.
  - A  $q_0$  kezdőállapot és az  $a_{i_1}$  első bementi jel határozzák meg az automata első lépés utáni belső állapotát:

$$p_1 = \delta(q_0, a_{i_1}).$$

- A következő belső állapotot már  $p_1$  állapot és az  $a_{i_2}$  bemenő jel határozzák meg az átmeneti függvény alapján:  $p_2 = \delta(p_1, a_{i_2})$ .



## Véges felismerő automaták

- Végül a  $p_{k-1}$  állapot és az  $a_{i_k}$  bemenő jel határozza meg az automata utolsó állapotát:  $p_k = \delta(p_{k-1}, a_{i_k})$ .
- Ha  $p_k \in F$ , azaz az utolsó állapot eleme a végállapotok halmazának, akkor az automata **felismerte** vagy **elfogadta** az  $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}$  szót.
- Ha  $p_k \notin F$ , azaz az utolsó állapot nem eleme a végállapotok halmazának, vagy pedig működés közben valamely  $\langle p_j, a_{i_{j-1}} \rangle$  párra a  $\delta$  átmeneti függvény nincs értelmezve, akkor az automata **nem ismerte fel** vagy **visszautasította** az  $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}$  szót.



## Véges felismerő automaták

---

- **Def.:** Az  $A$  véges determinisztikus automata által felismert nyelvnek azt a  $T(A)$  nyelvet nevezzük, amely mindazon  $V$ -ből alkotott szavakból áll, melyeket az automata felismer.
- **Tétel:** Az  $A$  determinisztikus véges automata elfogadott  $T(A)$  nyelv **reguláris** nyelv.
- **Tétel:** Minden  $G$  **reguláris grammatiká**hoz lehet olyan véges determinisztikus automatát szerkeszteni, hogy  $T(A)=L(G)$ .





## Véges felismerő automaták

---

- **Def.:** Az  $A_1$  és  $A_2$  véges determinisztikus automatákat akkor nevezzük **ekvivalens**nek, ha  $T(A_1) = T(A_2)$ , azaz ha ugyanazt a nyelvet ismerik fel.
- példa



# Véges felismerő automaták

---

- átmeneti függvény táblázatos megadása
- átmeneti diagram:
  - irányított színezett gráf;
  - csúcsokon a belső állapotok;
  - bemeneti jelekhez élszíneket rendelünk;
  - $p = \delta(q, a)$  esetén a  $q$  és  $p$  csúcsok között berajzolunk egy  $q$ -ból induló és  $p$ -be mutató  $a$  színű élet;
  - a kezdőállapotot egy nyíllal, a végállapotokat pedig dupla körrel külön megjelöljük.



## Nemdeterminisztikus felismerő automaták

---

- Nemdeterminisztikus felismerő automaták
  - alapvető különbség: egy adott belső állapothoz és beolvasott jelhez több rákövetkező állapot tartozhat;
  - átmeneti diagramon: adott csúcsból több azonos élszínű irányított él indulhat ki;
  - ilyen esetekben mintha „klónozná” magát automata, és a több lehetséges következő állapotból külön-külön folytatódik a működés;



## Nemdeterminisztikus felismerő automaták

---

- a bemenő szalagon megadott szó felismerésének feltétele: ha van legalább egy út, mely a végállapotok halmazában szereplő állapothoz vezet.



## Nemdeterminisztikus felismerő automaták

---

- Def.: Véges, **nemdeterminisztikus** felismerő automata

$A$ -t a  $V$  ábécével működő nemdeterminisztikus, véges automatának nevezzük, ha  $A$  az alábbi rendezett ötös:

$$A = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle$$

ahol

- $K$  a belső állapotok véges, nemüres halmaza;
- $V$  a bemenő ábécé;



## Nemdeterminisztikus felismerő automaták

---

- $\delta$  az **átmeneti függvény**, melynek értelmezési tartománya a  $K \times V$  valamely része, **értékeit  $\mathcal{P}(K)$  elemeiből** veszi fel (ahol  $\mathcal{P}(K)$  a  $K$  részalmazainak halmaza, azaz  $K$  hatványhalmaza);
- $q_0 \in K$ , a kezdőállapot;
- $F \subseteq K$ , a végállapotok halmaza.



## Nemdeterminisztikus felismerő automaták

---

- determinisztikus automatánál:

$$\delta(q, a) = p$$

- nemdeterminisztikus automatánál:

$$\delta(q, a) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$$

ahol  $a \in V$ ,  $q, p_1, p_2, \dots, p_k \in K$ .

- gráf megadásnál: a  $q$  csúcsból  $k$  darab  $a$  élszínű irányított él indul ki rendre a  $p_1, p_2, \dots, p_k$  csúcsokba.



## Nemdeterminisztikus felismerő automaták

---

- determinisztikus automaták a nemdeterminisztikus automaták speciális eseteinek tekinthetők.
- példa





## Nemdeterminisztikus felismerő automaták

---

- **Tétel:** Legyen  $L$  olyan nyelv, amelyet valamilyen nemdeterminisztikus automata felismer. Létezik ekkor olyan determinisztikus véges automata, amely szintén felismeri az  $L$  nyelvet.
- **Tétel:** Ha  $L$  tetszőleges reguláris nyelv, akkor találhatóunk olyan nemdeterminisztikus véges automatát, mely felismeri az  $L$  nyelvet.



## Nemdeterminisztikus felismerő automaták

---

- **Tétel:** Ha az  $L$  nyelvet egy determinisztikus véges automata felismeri, akkor létezik olyan reguláris grammatika, amely az  $L$  nyelvet generálja.
- **Következmény:** Reguláris nyelvek az automaták segítségével elemezhetők.



## Véges átalakító automaták

---

- Determinisztikus átalakító automaták
  - cél olyan gép alkotása, ami egyrészt megéri a bementén kapott információt, de ennek hatására nemcsak a belső állapota változik, hanem a kimenetre is kerül információ



## Véges átalakító automaták

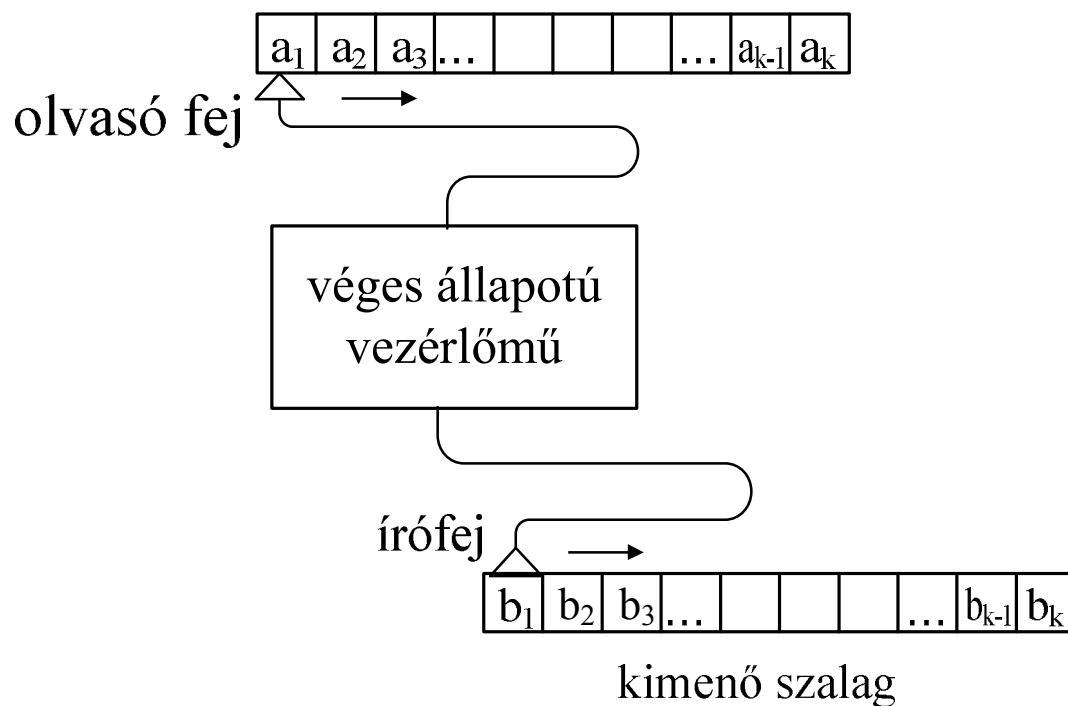
---

- hasonlóság a felépítésben:
  - véges állapotú vezérlőmű
  - cellákra osztott bemenő szalag
  - egyirányban mozgó olvasófej
  - diszkrét, determinisztikus működés
- különbség
  - cellákra osztott kimenőszalag
  - írófej

# Véges átalakító automaták

- átalakító automata felépítése:

bemenő szalag





## Véges átalakító automaták

---

- Átalakító automata működési fázisai
  - bekapcsoláskor a vezérlőmű egy előre rögzített belső állapotba, **a kezdőállapotba** kerül, az olvasó fej a bemenő szalag, az író fej a kimenőszalag balról vett első cellájára áll;
  - az automata beolvassa a cella tartalmát, majd a pillanatnyi belső állapota és beolvasott jel alapján a következő két eset lehetséges:



## Véges átalakító automaták

---

- ha az automata definíciójában a pillanatnyi belső állapot és a beolvasott jel alapján van értelmezett következő állapot, akkor a vezérlőmű átkerül ebbe az állapotba, az olvasó fej egy cellával jobbra lép, az írófej kiír egy jelet a kimenő szalagra majd egy cellával jobbra lép;
- ha nincs következő állapot értelmezve, akkor az automata működése megszakad;



## Véges átalakító automaták

---

- a beolvasási művelet addig ismétlődik
  - amíg van jel a bemenő szalagon
  - vagy meg nem szakad a rákövetkező állapot hiánya miatt
- az automata leáll,
  - ha teljesen beolvasta a bemenő szót, ekkor eredmény a kimenő szalagon megjelenő átalakított szó – az átalakítás sikeres volt
  - ha nincs rákövetkező állapot – az átalakítás nem volt sikeres





## Véges átalakító automaták

---

- átalakító automaták típusai:
  - Mealy-automata: a pillanatnyi állapota és a beolvasott jel alapján dönt a következő állapotáról és a kiírandó jelről
  - Moore-automata: a pillanatnyi állapota és beolvasott jel alapján dönt a következő állapotáról, a vezérlőmű átkerül ebbe az állapotba, és az új állapota alapján dönt a kiírandó jelről
  - a két automata ekvivalens (definícióbeli különbség), itt a Mealy-automatát tárgyaljuk



## Véges átalakító automaták

---

- Def.: Mealy-automata

$M$ -t véges, determinisztikus, átalakító Mealy-automatának nevezzük, ha  $M$  az alábbi rendezett hatos:

$$M = \langle K, V, W, \delta, \lambda, q_0 \rangle$$

ahol –  $K$  a belső állapotok véges, nemüres halmaza, az ún. **állapothalmaz**;

–  $V$  a bemenő jelek véges halmaza, a **bemenő ábécé**;

–  $W$  a kimenő jelek véges halmaza, a **kimenő ábécé**;



## Véges átalakító automaták

---

- $\delta$  az **átmeneti függvény**, értelmezési tartománya a  $K \times V$  valamely része, értékeit  $K$ -ból veszi;
- $\lambda$  a **kimeneti függvény**, értelmezési tartománya a  $K \times V$  valamely része értékkészlete  $W$  elemei;
- $q_0 \in K$ , a **kezdőállapot**;



## Véges átalakító automaták

---

- A működés formalizált leírása:
  - Legyen adott egy  $M = \langle K, V, W, \delta, \lambda, q_0 \rangle$  automata a definíciónak megfelelő módon.
  - Legyen adott  $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in V^*$  bemenő szó.
  - A  $q_0$  kezdőállapot és az  $a_{i_1}$  első bementi jel határozzák meg az automata első lépés utáni belső állapotát és a kiírandó jelet:

$$p_1 = \delta(q_0, a_{i_1}) \quad b_{j_1} = \lambda(q_0, a_{i_1}) .$$



## Véges átalakító automaták

---

- Ezután újabb beolvasás, illetve kiírás következik:

$$p_2 = \delta(p_1, a_{i_2}) \quad b_{j_2} = \lambda(p_1, a_{i_2})$$

- Végül a  $p_{k-1}$  állapot és az  $a_{i_k}$  bemenő jel határozza meg az automata utolsó állapotát és kimenő jelét:

$$p_k = \delta(p_{k-1}, a_{i_k}) \quad b_{j_k} = \lambda(p_{k-1}, a_{i_k}) .$$



## Véges átalakító automaták

---

- Ha az automata valamennyi állapotához és beolvasott betűjéhez létezett következő állapot és kimenő jel, azaz az automata be tudta olvasni a teljes bemenő szót, akkor az átalakítás **sikeres** volt.
- Ha a működés közben volt olyan belső állapot és beolvasott betű páros, amihez nem volt következő állapot és/vagy kimenő jel, akkor az átalakítás **nem volt sikeres**.



## Véges átalakító automaták

---

- A Moore automata különbsége:

$$p_1 = \delta(q_0, a_{i_1}) \quad b_{j_1} = \lambda(p_1)$$

- A Mealy és Moore automata reguláris nyelvet reguláris nyelvvé alakít át.
- példa



# Veremautomaták

---

- Nemdeterminisztikus veremautomaták
  - véges automaták újabb, bővebb osztálya
  - cél: számítástechnikai folyamatok és berendezések, különösen programozási nyelvek elemzése, fordítása
  - hasonlóság a nemdeterminisztikus felismerő automatákhoz:
    - véges állapotú vezérlőmű
    - cellákra osztott bemenő szalag
    - egyirányban mozgó olvasófej





## Veremautomaták

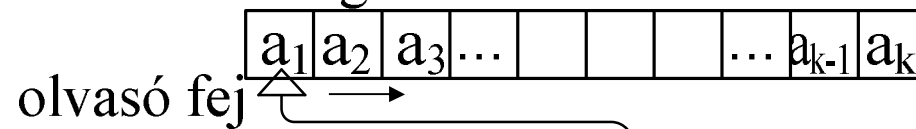
---

- diszkrét működés
- több lehetséges rákövetkező állapot, nemdeterminisztikus jelleg
- különbség
  - cellákra osztott veremszalag/veremmemória (ez hasonló az átalakító automatához)
  - olvasó-írófej, kétirányú mozgás
  - egyszerre egy jelet olvasunk be, mindig a tetejéről kezdve
  - kiírni több jelet is lehet

# Veremautomaták

- A veremautomaták felépítése

bemenő szalag



véges állapotú  
vezérlőmű

olvasó - írófej



veremszalag / veremmemória

- Veremautomata működése
  - a bemenő szalagra a megengedett jelekből egy szó van felírva, a vezérlőmű ezt olvassa be;
  - a véges memóriájú vezérlőmű minden pillanatban meghatározott állapotban van, az állapotok száma véges;
  - a vermet, mint szalagot alkalmazzuk, melyre ráírjuk, illetve melyről beolvassuk a verem ábécé jeleit;

- bekapcsoláskor:
  - a vezérlőmű meghatározott kezdőállapotba kerül;
  - a veremben egy darab jel, az ún. veremalja jel van;
  - az olvasófej a bemenő szó első betűjére, az olvasó – írófej a veremalja jelre mutat.



## Veremautomaták

---

- vezérlőmű minden lépésben a következők közül választhat:
  - beolvas egy jelet a bemenő szalagról és a verem tetejéről és ezek, valamint a pillanatnyi belső állapota alapján dönt a következő állapotáról vagy állapotairól és a verembe írandó jelről és lépteti az olvasófejet;
  - csak a verem tetejéről olvas be jelet és ennek, valamint a pillanatnyi belső állapota alapján dönt a következő állapotáról vagy állapotairól és a verembe írandó jelről, ilyenkor a bemenő szalagnál nincs változás



## Veremautomaták

---

- több lehetséges rákövetkező állapot esetén az automata „klónozódik”, azaz egyes állapotokat külön folytatjuk



## Veremautomaták

---

- az automata leáll:
  - ha nincs értelmezve a következő állapot
  - ha a bemenő szó teljes beolvasása előtt kiürül a verem, és nincs utasítás ilyen esetre
  - ha az automata teljesen be tudta olvasni a bemenő szót, akkor
    - ha a leállási állapota eleme a végállapotok halmazának – **állapotával ismerte fel**
    - ha beolvasás végén – esetleg néhány veremművelet után – a veremszalag kiürül – **üres veremmel ismerte fel a szót**



## Veremautomaták

---

- az automata felismerte a bemenő szót, ha legalább egy olyan ág van, melynek vizsgálata során az automata vagy üres veremmel vagy végállapotával felismeri a szót



- Def.: Veremautomata

$M$ -t véges, nemdeterminisztikus veremautomatának nevezzük, ha  $M$  az alábbi rendezett hetes:

$$M = \langle K, V, W, \delta, q_0, z_0, F \rangle$$

ahol –  $K$  a belső állapotok véges, nemüres halmaza, az ún. **állapothalmaz**;

–  $V$  a bemenő jelek véges halmaza, a **bemenő ábécé**;

–  $W$  a verem jeleinek véges halmaza, a **veremábécé**;



## Veremautomaták

---

- $\delta$  az **átmeneti függvény**, értelmezési tartománya a  $K \times (V \cup \{\varepsilon\}) \times W$ , értékkészlete  $K \times W^*$  ;
- $q_0 \in K$ , a **kezdőállapot**;
- $z_0 \in W$ , a **veremalja jel**;
- $F \subseteq K$ , a **végállapotok halmaza**.



## Veremautomaták

---

- veremautomata konfigurációja, az alábbi rendezett hármas:

$$\langle q, \alpha, \gamma \rangle$$

ahol  $q \in K$  a pillanatnyi belső állapot,  
 $\alpha \in V^*$  a beolvasásra váró szó,  
 $\gamma \in W^*$  a veremben lévő szó

- veremautomata átmeneti diagramja

- **Tétel:** Ha adott egy  $G = \langle V, W, S, P \rangle$  tetszőleges környezetfüggetlen grammatika, akkor létezik olyan nemdeterminisztikus veremautomata, amely üres veremmel felismeri az  $L(G)$  nyelvet.
  
- példa



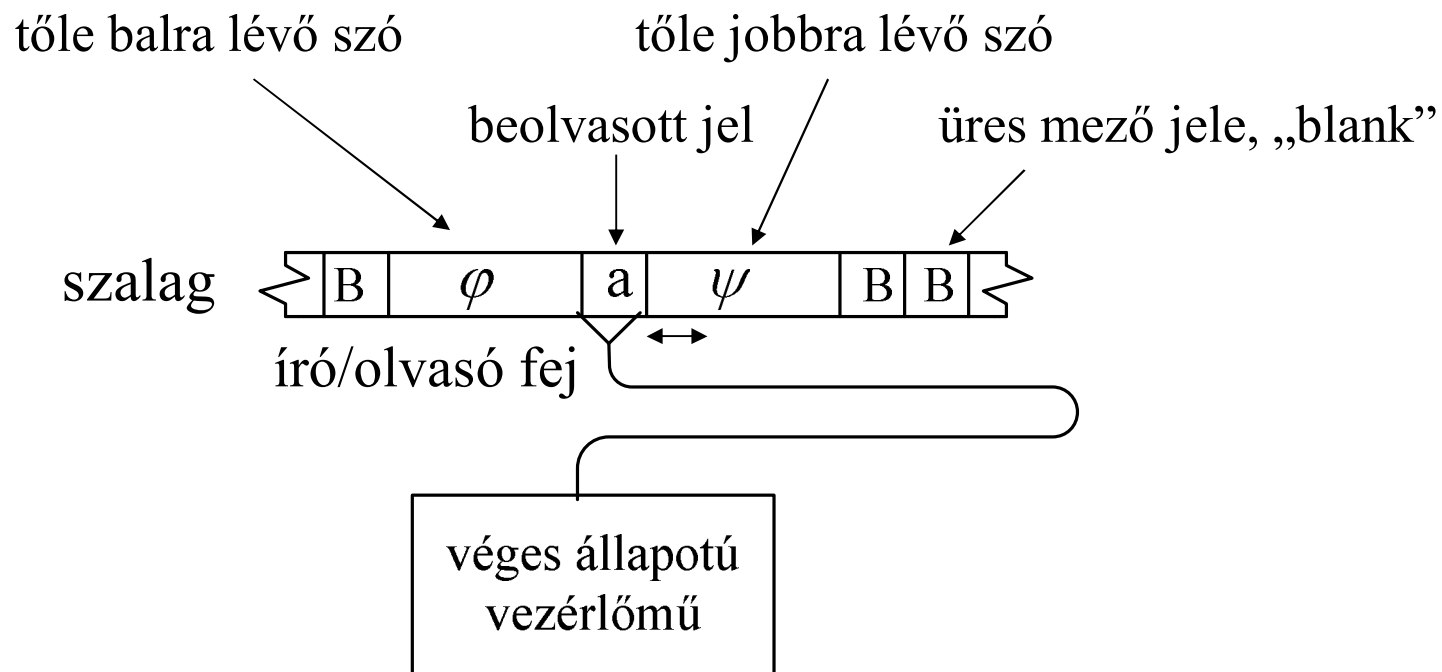
# Turing-gép

---

- Turing-gép
  - A. M. Turing angol matematikus (1912-1954) a modern számítógép működési elvének kidolgozója, (Turing-teszt: Id. MI)
  - Turing-gép:
    - olyan egyszerű matematikai modell, amely elvileg valamennyi, számítógép segítségével megvalósítható eljárás elvégzésére alkalmas
    - segítségével a számítási eljárások hatékonysága vizsgálható
    - modellcsalád, 1936

# Turing-gép

- A Turing-gép felépítése





# Turing-gép

---

- Turing-gép felépítése:
  - **véges memóriájú vezérlőmű**, amely a működés bármely pillanatában véges sok lehetséges belső állapota közül valamelyikben van
  - **véges hosszúságú szalag**, mely mindkét irányban tetszés szerint meghosszabbítható; a szalag mezőkre osztott, egy-egy cellába egy-egy betű kerül



## Turing-gép

---

- a szalagra kerülő jelek a **szalag ábécé** elemei
- a szalag ábécének része a **bemenő ábécé**, ennek elemeiből épülnek fel a bemeneti szavak
- szalag ábécé speciális jele a **blank** ( $B$ ), mely nem eleme a bemenő ábécének; ahova ez kerül, azt a mezőt üresnek tekintjük; ezzel töltjük fel az új szalagrészeket





## Turing-gép

---

- a vezérlőműhöz tartozik egy **író-olvasó fej**, mellyel beolvashatjuk az adott mezőhöz tartozó betűt, és kiírhatunk helyette egy másikat; utána akár jobbra, akár balra léphet egyet
- belső állapotok kitüntetett elemei:
  - **kezdőállapot**
  - **végállapotok**



# Turing-gép

---

- Turing-gép működése:
  - ütemekre bontható
  - bekapcsoláskor:
    - a vezérlőmű a kezdőállapotba kerül,
    - a szalagra a bemenő ábécéből képzett szó van felírva,
    - az író/olvasófej ennek balról vett első betűjén áll
  - a betű szalagról történő beolvasása



## Turing-gép

---

- pillanatnyi állapot és a beolvasott betű alapján az automata dönt :
  - a vezérlőmű következő állapotáról,
  - a szalagra kiírandó jelről,
  - az író/olvasófej léptetésének irányáról.



# Turing-gép

---

- Turing-gép leáll, **ha nincs meghatározva a következő lépés**
  - akár végtelen hosszú ideig dolgozhat!
  - leálláskor végállapotban van-e?
  - Turing-gép **felismerte** a bemenő szót, ha véges sok lépés után egy végállapotban szakad meg a működése (végállapotban áll le)
  - Turing-gép **nem ismerte fel** a szót, ha
    - ha leállás nem egy végállapotban történik
    - végtelen ciklusba kerül



# Turing-gép

---

- Def.: Turing-gép

$M$ -t véges, determinisztikus Turing-gépnek nevezzük, ha  $M$  az alábbi rendezett hetes:

$$M = \langle K, V, W, \delta, q_0, B, F \rangle$$

ahol

- $K$  a belső állapotok véges, nemüres halmaza, az ún. **állapothalmaz**;
- $V$  a bemenő jelek véges, nemüres halmaza, a **bemenő ábécé**;
- $W$  a szalagra írható jelek véges, nemüres halmaza, a **szalagábécé**;



# Turing-gép

---

- $\delta$  az **átmeneti függvény**, értelmezési tartománya a  $K \times W$ , értékkészlete  $K \times W \times \{R, L\}$ ; ( $R, L \notin K \cup W$ )
- $q_0 \in K$ , a **kezdőállapot**;
- $B \in W - V$ , a **blank jel** (üres mező jele);
- $F \subseteq K$ , a **végállapotok halmaza**.

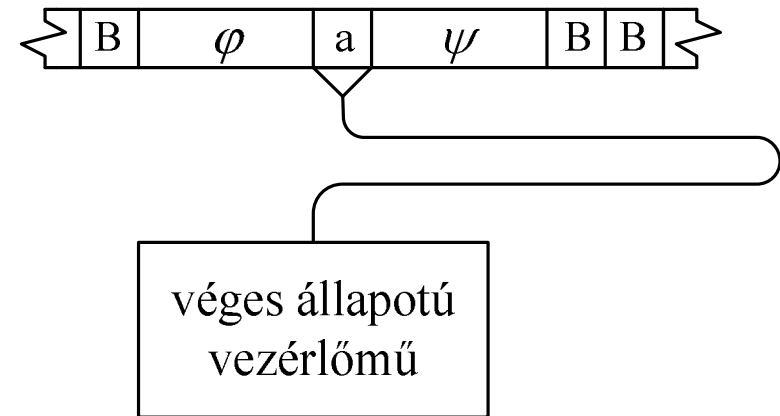
# Turing-gép

- Turing-gép konfigurációja:

$$\langle \varphi, s, a\psi \rangle$$

ahol

- $s \in K$ , a pillanatnyi belső állapot,
  - $a \in V$ , az a jel, amire az író/olvasó fej éppen mutat,
  - $\varphi \in W^*$ , az  $a$  jeltől balra lévő szó,
  - $\psi \in W^*$  az  $a$  jeltől jobbra lévő szó
- és  $\varphi$  nem kezdődik,  $\psi$  nem végződik blank-kel





# Turing-gép

---

- nemdeterminisztikus eset
- módosítások
- átmeneti függvény megadása táblázattal
- átmeneti diagram
- példa