Frekvenciatartomány

Frekvenciatartomány

- bevezetésének indoka:
  - általában időtartománybeli válasz kell
  - alkalmazott tesztjelek is ezt indokolják
  - információs rendszerek esetében a jelek szinuszos komponenseket tartalmaznak
  - másodrendű rendszerek alapján látszik, hogy a paraméterek meghatározása lényeges és nem egyszerű feladat
  - frekvenciatartományban sokféle módszer segíti az analízist és a tervezést

Frekvenciatartomány

- lineáris rendszereknél szoros összefüggés van az időtartomány és a frekvenciatartomány között $\rightarrow$ a frekvenciatartománybeli adatokból következtetni lehet az időtartománybeli viselkedésre
- alkalmazásának indoka összefoglalva:
  - meglévő eszközök alkalmazhatósága
  - jól kiegészíti az időtartománybeli vizsgálatokat
  - érdemes elvégezni olyan rendszereknél is, amelyek soha nem kapnak szinuszos gerjesztést

Frekvenciatartomány bevezetése

- legyen a bemenet R amplitúdójú ω_0 frekvenciájú szinuszos jel:

$$u(t) = R\sin\omega_0 t$$

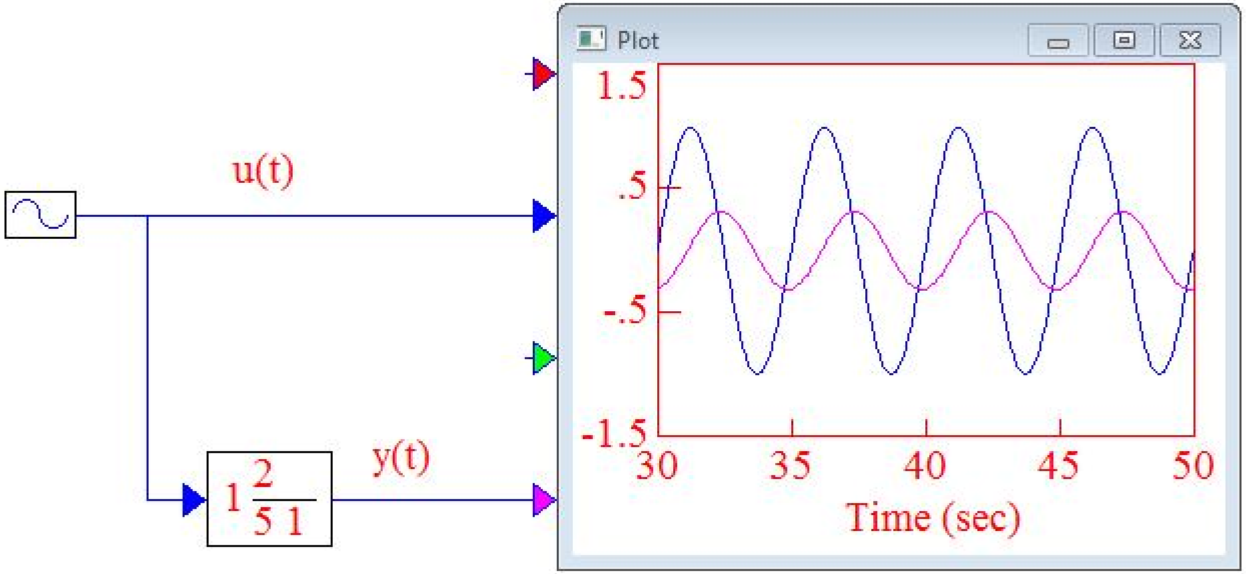
- az „állandósult” állapotbeli kimenet

$$y(t) = C\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

ahol C a kimenet amplitúdója, a φ fázissietés vagy fáziskésés

Frekvenciatartomány bevezetése

- lineáris tag gerjesztése szinuszos bemenettel



- $u(t) = R \sin \omega_0 t, \quad R=1,\ \omega_0 = 0{,}2\text{Hz}$
- $y(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi),$

Frekvenciatartomány bevezetése

- a $u(t)$ bemenet általános alakja frekvencia-tartományban :

$$u(t) = R(\omega)\sin(\omega t+\varphi_b) = \mathrm{Im}(R(\omega)\mathrm{e}^{\,j\varphi_b(\omega)}\,\mathrm{e}^{\,j\omega t}) = \mathrm{Im}(U(j\omega)\,\mathrm{e}^{\,j\omega t})$$

  - ahol $R(\omega)$ bemenet konstans vagy frekvenciafüggő amplitúdója
  - $U(j\omega) = R(\omega)\mathrm{e}^{\,j\varphi_b(\omega)}$ az amplitúdót és a kezdeti fáziseltolás szöget tartalmazó komplex kifejezés, a bemenő jel $t = 0$ időpillanathoz tartozó komplex vektora

- a kimenet általános alakja

$$y(t) = C(\omega)\sin(\omega t+\varphi_k) = \mathrm{Im}(C(\omega)\mathrm{e}^{\,j\varphi_k(\omega)}\,\mathrm{e}^{\,j\omega t}) = \mathrm{Im}(Y(j\omega)\,\mathrm{e}^{\,j\omega t})$$

Frekvenciatartomány bevezetése

- Legyen $G(s)$ a tag átviteli függvénye, ekkor:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)} \quad \Rightarrow \quad Y(s)=G(s)U(s)$$

- Analóg módon képezzük a szinuszos kimenő és bemenő jel exponenciális alakban felírt hányadosát:

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)e^{j\omega t}}{U(j\omega)e^{j\omega t}}=\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

  - ahol $A(\omega)=\dfrac{C(\omega)}{R(\omega)}$ az amplitúdóviszonyt kifejező abszolút érték

    $\varphi(\omega)=\varphi_k(\omega)-\varphi_b(\omega)$ a fáziseltolások különbségét megadó fázisszög

Frekvenciatartomány bevezetése

- Frekvenciatartomány bevezetése az $s = j\omega$ kifejezés behelyettesítésével:

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

- A frekvenciafüggvények szokásos felírása:

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)| \angle Y(j\omega)$$

ahol $|Y(j\omega)|$ a jel amplitúdója

$\angle Y(j\omega)$ a jel fázisa

Frekvenciatartomány bevezetése

- A kimenet meghatározása a

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

összefüggés alapján:

- A kimenőjel amplitúdója:

$$|Y(j\omega)| = |G(j\omega)| \cdot |U(j\omega)| \Rightarrow \quad C(\omega) = A(\omega) \cdot R(\omega)$$

- a fázisa

$$\angle Y(j\omega) = \angle G(j\omega) + \angle U(j\omega) \Rightarrow \quad \varphi_k(\omega) = \varphi(\omega) + \varphi_b(\omega)$$

Frekvenciatartomány bevezetése

- Legyen az átviteli függvény

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdot\ldots\cdot(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdot\ldots\cdot(s-p_n)}$$

- legyen a bemenet

$$u(t)=\sin\omega t$$

azaz az amplitúdó 1, frekvencia ω rad/s

- a bemenet Laplace transzformáltja:

$$U(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Frekvenciatartomány bevezetése

- a kimenet:

$$Y(s) = G(s)\cdot U(s) = \frac{K\omega(s-z_1)(s-z_2)\cdot\ldots\cdot(s-z_m)}{(s^2+\omega^2)(s-p_1)(s-p_2)\cdot\ldots\cdot(s-p_n)}$$

- átírva parciális törtekre

$$Y(s) = \frac{G(s)\cdot\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{A_1}{s-j\omega} + \frac{A_2}{s+j\omega} + \frac{B_1}{s-p_1} + \ldots + \frac{B_n}{s-p_n}$$

- inverz Laplace-transzformálva

$$y(t) = \underbrace{A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}}_{\text{„állandósult” állapotbeli viselkedés}} + \underbrace{B_1 e^{p_1 t} + \ldots + B_n e^{p_n t}}_{\text{tranziens viselkedés (stabil esetben)}}$$

Frekvenciatartomány bevezetése

- Ha $p_1,\ldots,p_n$ negatív valós részű pólusok, akkor

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = A_1 e^{j\omega\cdot t} + A_2 e^{-j\omega\cdot t}$$

- Az együtthatók meghatározásához

$$\frac{G(s)\cdot\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{A_1}{s-j\omega} + \frac{A_2}{s+j\omega}$$

egyenletet szorozzuk meg $(s\text{-}j\omega)$-val és helyettesít-sünk be $s = j\omega$ -t

$$\frac{(s-j\omega)\cdot G(s)\cdot\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)} = A_1 + \frac{A_2(s-j\omega)}{s+j\omega}$$

Frekvenciatartomány bevezetése

$$A_1 = \left.\frac{G(s)\cdot\omega}{s+j\omega}\right|_{s=j\omega} = \frac{G(j\omega)}{2j} = \frac{1}{2j}\left|G(j\omega)\right|e^{j\angle G(j\omega)}$$

- A_2 meghatározásához szorozzuk meg $(s+j\omega)$-val és helyettesítsünk be s=-$j\omega$ -t :

$$A_2 = \left.\frac{(s+j\omega)G(s)\omega}{s^2+\omega^2}\right|_{s=-j\omega} = \frac{G(-j\omega)}{-2j} = -\frac{1}{2j}\left|G(j\omega)\right|e^{-j\angle G(j\omega)}$$

- azaz $\left.y(t)\right|_{t\to\infty} = \frac{1}{2j}\left|G(j\omega)\right|\left(e^{j\omega t+j\angle G(j\omega)} - e^{-j\omega t-j\angle G(j\omega)}\right) =$

$$= \left|G(j\omega)\right| sin(\omega\, t + \angle G(j\omega))$$

Frekvenciatartomány bevezetése

- A rendszer átviteli függvénye ismeretében, szinuszos bemenet esetén a kimenet a $|G(j\omega)|$ amplitúdó-karakterisztika és a $\angle G(j\omega)$ fáziskarakterisztika alapján meghatározható.

Zárt kör frekvenciatartománybeli válasza

- Legyen az eredő átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- szinuszos bemenet esetén, állandósult állapotban $s = j\omega$ behelyettesítéssel:

$$G_e(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

- bontsuk fel G_e-t:

$$G_e(j\omega) = |G_e(j\omega)| \angle G_e(j\omega)$$

Zárt kör frekvenciatartománybeli válasza

- ekkor a zárt kör eredő átviteli függvényének amplitúdója:

$$\left|G_e(j\omega)\right| = \left|\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)H(j\omega)}\right| = \frac{\left|G(j\omega)\right|}{\left|1+G(j\omega)H(j\omega)\right|}$$

- fázisa:

$$\angle G_e(j\omega) = \varphi(\omega) = \angle G(j\omega) - \angle\left(1+G(j\omega)H(j\omega)\right)$$

Frekvenciafüggvények ábrázolási módjai

- Amplitúdó-fázis görbe, Nyquist-diagram
  - frekvenciát $0 \le \omega < \infty$ tartományban változtatva minden ω értékhez meghatározzuk és a komplex síkon ábrázoljuk a

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} =$$

$$= \mathrm{Re}(G(j\omega)) + j\mathrm{Im}(G(j\omega))$$

képletben szereplő $A(\omega)$ abszolút értéket és $\varphi(\omega)$ fáziseltolási szöget.

Frekvenciafüggvények ábrázolási módjai

- Az így kapott pontokat összekötjük és jelöljük a növekvő frekvencia irányát
- A jelleg görbe egyes pontja állandósult (kvázistacionárius) állapotot adnak meg.
- Gyakorlati alkalmazása nehézkes:
  - egy pont meghatározása is sok munka
  - tag paramétere vagy rendszer elemeinek megváltozásakor újra kell szerkeszteni

Frekvenciafüggvények ábrázolási módjai

- Bode-diagram
  - cél a Nyquist-diagram hátrányainak kiküszöbölése
  - az amplitúdó logaritmusát és a fázisszöget a frekvencia függvényében ábrázolva kapjuk a Bode-diagramot
    - $G(j\omega) = A(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} = |G(j\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)}$
    - $\ln G(j\omega) = \ln|G(j\omega)| + j\varphi(\omega)$
  - gyakorlatban az amplitúdóviszonyt decibelben adjuk meg:

$$A(\omega)[\mathrm{dB}] = 20\lg|G(j\omega)|$$

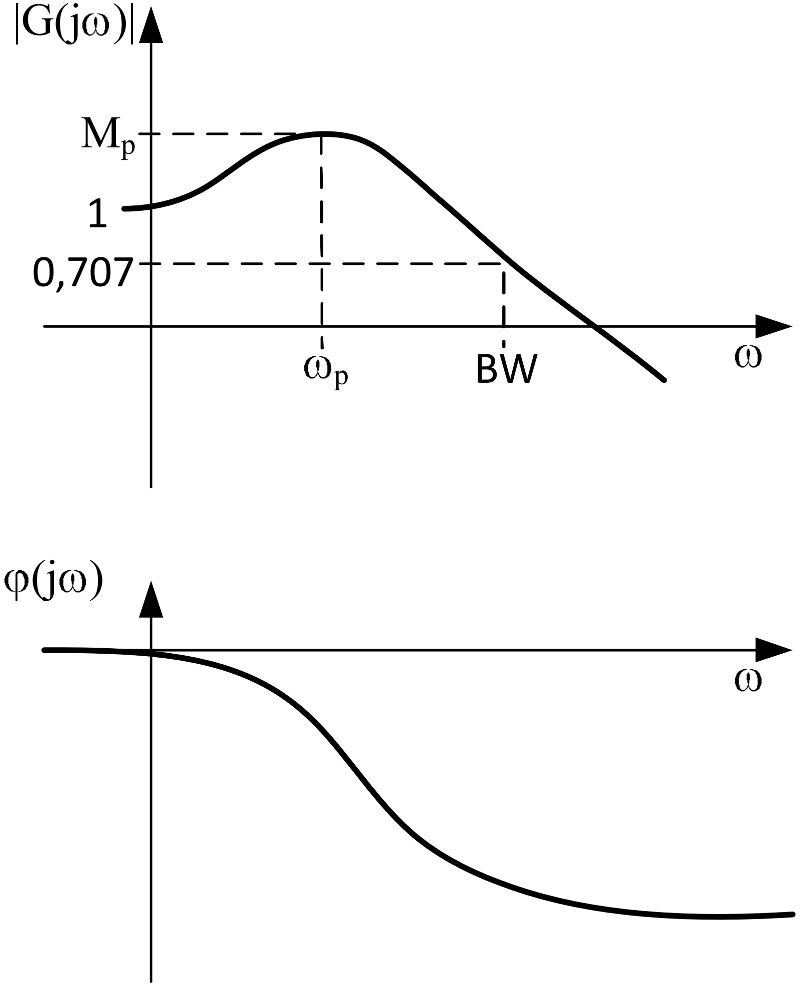
Frekvenciafüggvények ábrázolási módjai

- előnyei:
  - könnyen szerkeszthető görbék
  - szorzat függvények (soros kapcsolás) összeadásra vezethetők vissza:

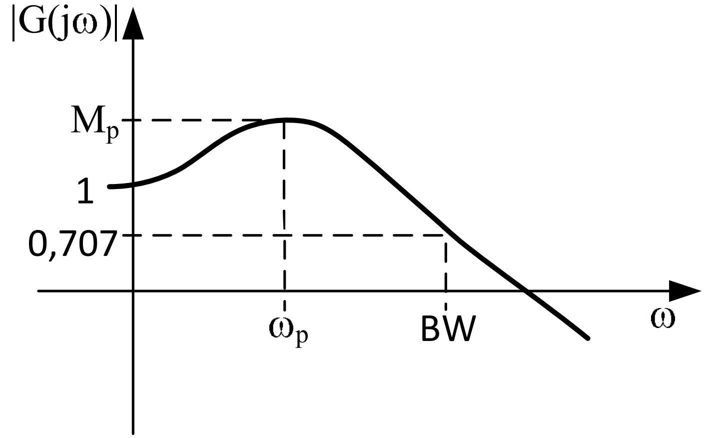
$$20\lg(A_1 e^{j\varphi_1} \cdot A_2 e^{j\varphi_2}) = 20\lg A_1 + 20\lg A_2 + j(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot 20\lg e$$

Frekvenciafüggvények jellemző pontjai

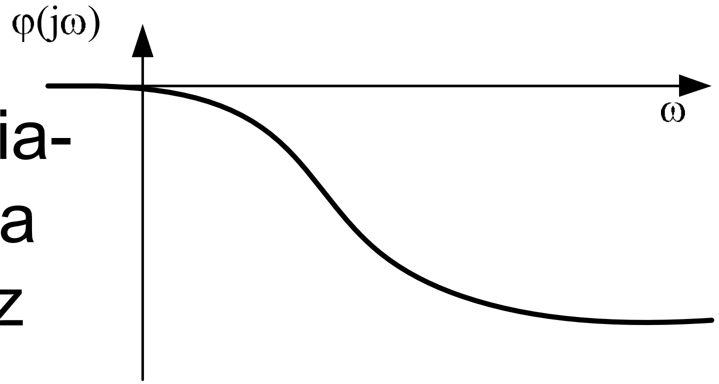
- Legyen egy visszacsatolt kör frekvenciafüggvénye az alábbi:



Frekvenciafüggvények jellemző pontjai



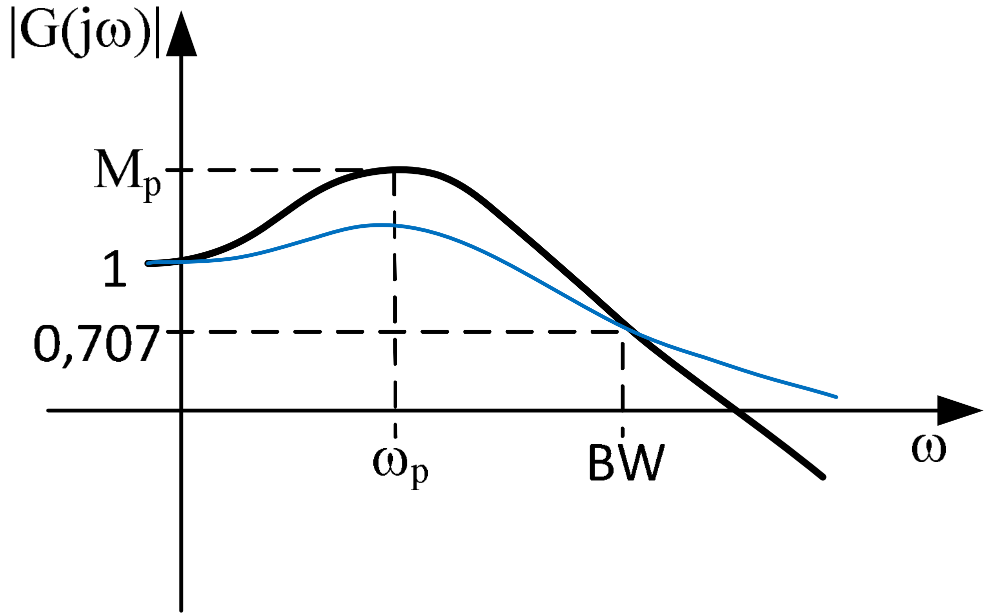
- M_p csúcsrezonancia,
  $G(j\omega)$ maximuma a relatív stabilitásra utal,
  nagy M_p nagy túllendülést jelez
- ω_p rezonanciafrekvencia



- BW sávszélesség, az a frekvencia-érték, ahol az eredeti amplitúdó a 70,7%-ára csökken (3dB-lel lesz kisebb)
  - nagy sávszélesség: gyorsabb felfutás
  - kis sávszélesség: nagy frekvenciájú zajok kevésbé mennek át

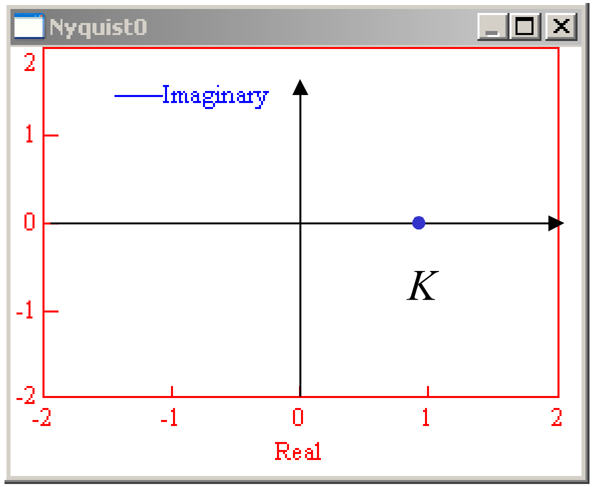
Frekvenciafüggvények jellemző pontjai

- vágási arány: a nagy frekvenciás tartományban a görbéhez húzott érintő meredeksége a szűrő tulajdonságok jobb jellemzésére



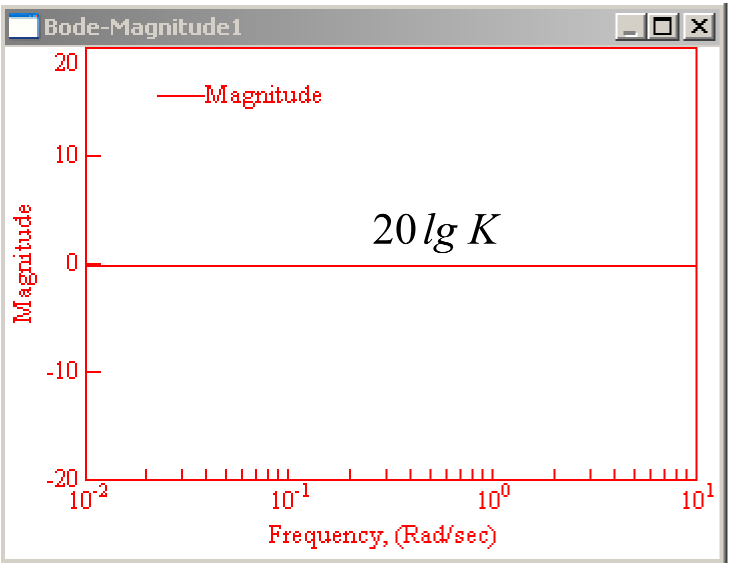
Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

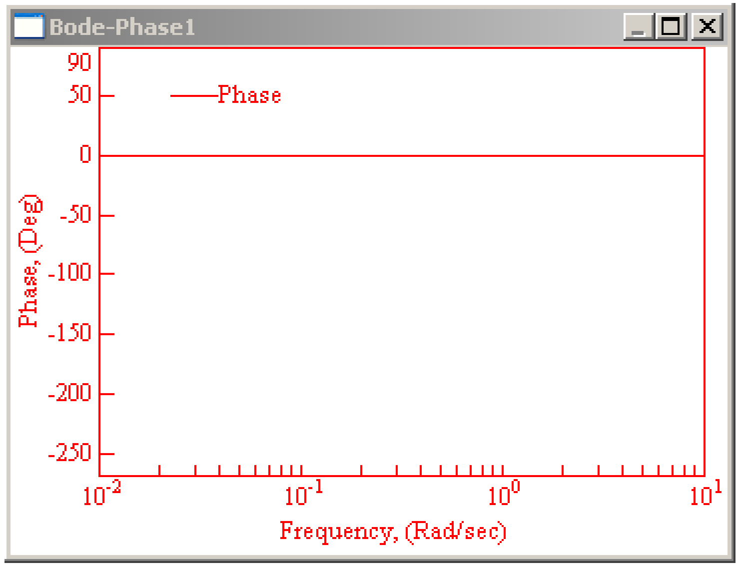
- Nulladrendű tag
  - I/O modell: $y=Ku$
  - átviteli függvény: $G(s)=K$
  - frekvenciafüggvény: $G(j\omega)=K$
  - Nyquist diagram:



Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram:

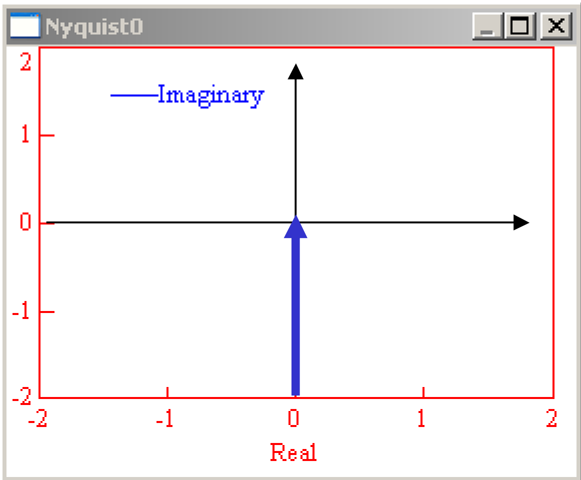




azaz a nulladrendű tag sorba kapcsolás esetén az eredő amplitúdó görbéjét az erősítés logaritmusának megfelelően függőleges irányba eltolja, a fázis görbét változatlanul hagyja

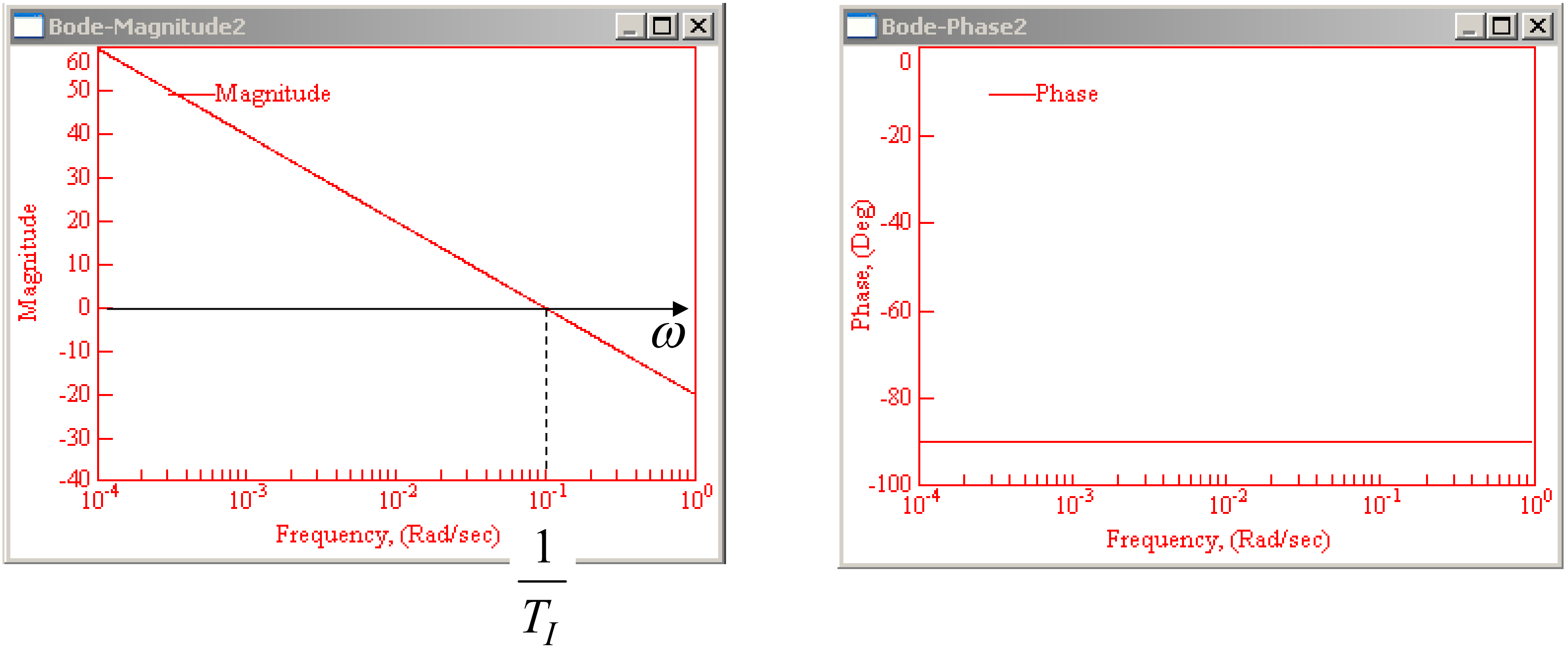
Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Integráló tag
  - I/O modell: $T_I y^{(1)} = u$
  - átviteli függvény: $G(s) = \dfrac{1}{T_I s}$
  - frekvenciafüggvény: $G(j\omega) = \dfrac{1}{T_I j\omega}$
  - Nyquist diagram:



Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram



azaz a integráló tag sorba kapcsolás esetén az eredő amplitúdó görbéjét -20 dB meredekségű egyenessel eltolja, a fázis görbét -90^{o}-kal sietteti

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Elsőrendű tag
  - I/O modell: $\tau\, y^{(1)} + y = Ku$
  - átviteli függvény: $G(s) = \dfrac{K}{\tau s + 1}$
  - az $u(t) = M\sin\omega t$ bemenetre adott válasz:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{\tau s + 1}\,\frac{M\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$y(t) = \frac{MK}{\omega}\left[\frac{\tau\,\omega^2}{\tau^2\omega^2 + 1}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\omega\,sin(\omega\, t + \varphi)}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}\right]$$

tranziens tag
$t \to \infty$ tag$\to 0$

állandósult állapotot
leíró tag

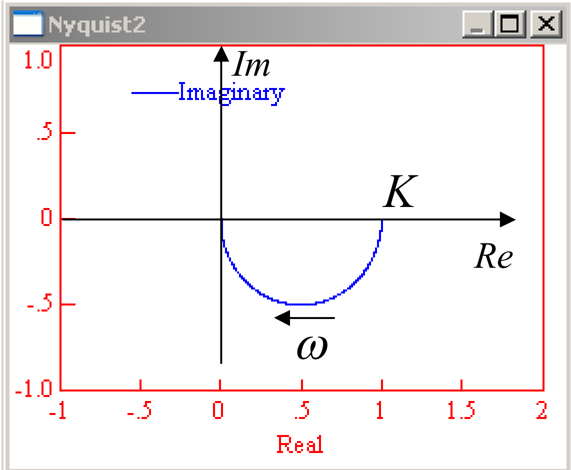
Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- frekvenciafüggvény:

$$G(j\omega)=\frac{K}{\tau j\omega+1}=\frac{K}{\tau^2\omega^2+1}-\frac{Kj\omega\tau}{\tau^2\omega^2+1}$$

valós rész képzetes rész

- Nyquist diagram:



Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram:

$$20\,lg\left|\frac{1}{1+j\omega\tau}\right| = -20\,lg\sqrt{1+\omega^2\tau^2} \quad [dB]$$

- alacsony frekvenciánál ω << $1/\tau$

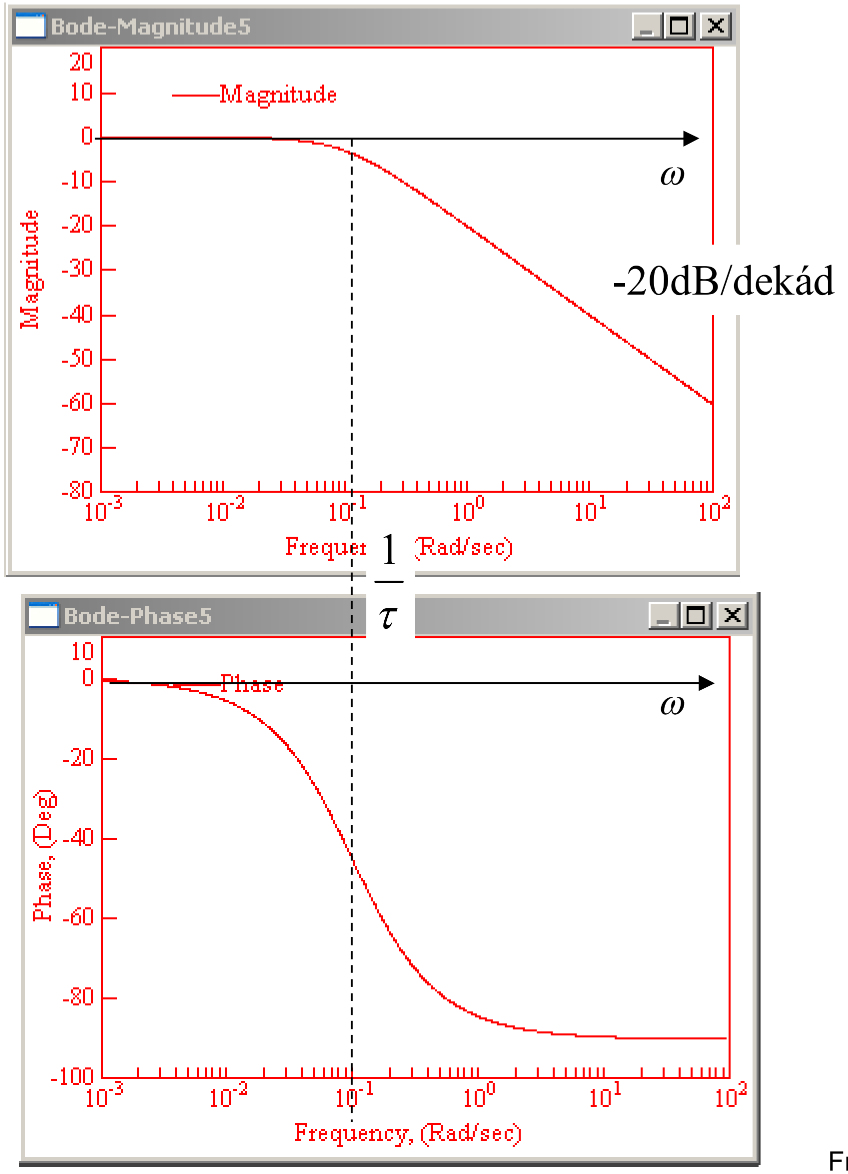
$$-20\,lg\sqrt{1+\omega^2\tau^2} \cong -20\,lg\,1 = 0\,[dB]$$

- magas frekvenciánál ω >> $1/\tau$

$$-20\,lg\sqrt{1+\omega^2\tau^2} \cong -20\,lg\,\omega\tau\,[dB]$$

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram:



$$\varphi = -arctg\,\omega\tau$$

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Másodrendű tag
  - I/O modell: $T_2^2 \cdot y^{(2)} + T_1 \cdot y^{(1)} + y = Ku$

    $$T^2 \cdot y^{(2)} + 2\xi T \cdot y^{(1)} + y = Ku$$

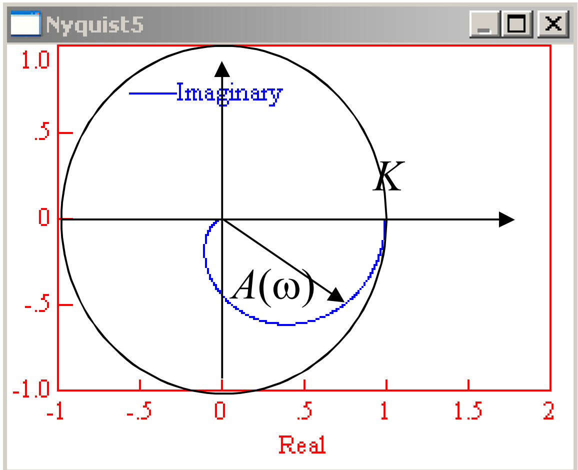
  - átviteli függvény: $G(s) = \dfrac{K}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$
  - frekvenciafüggvény: $G(j\omega) = \dfrac{K}{T^2 (j\omega)^2 + 2\xi Tj\omega + 1}$
  - az esetek szétválogatása ξ értéke alapján, legyen $K = 1$

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- legyen $\xi > 1$, ekkor a másodrendű tag két elsőrendű sorba kapcsolt tagnak felel meg:

$$G(j\omega) = \frac{1}{T_a j\omega + 1} \cdot \frac{1}{T_b j\omega + 1} = G_a(j\omega) \cdot G_b(j\omega)$$

- Nyquist diagram:



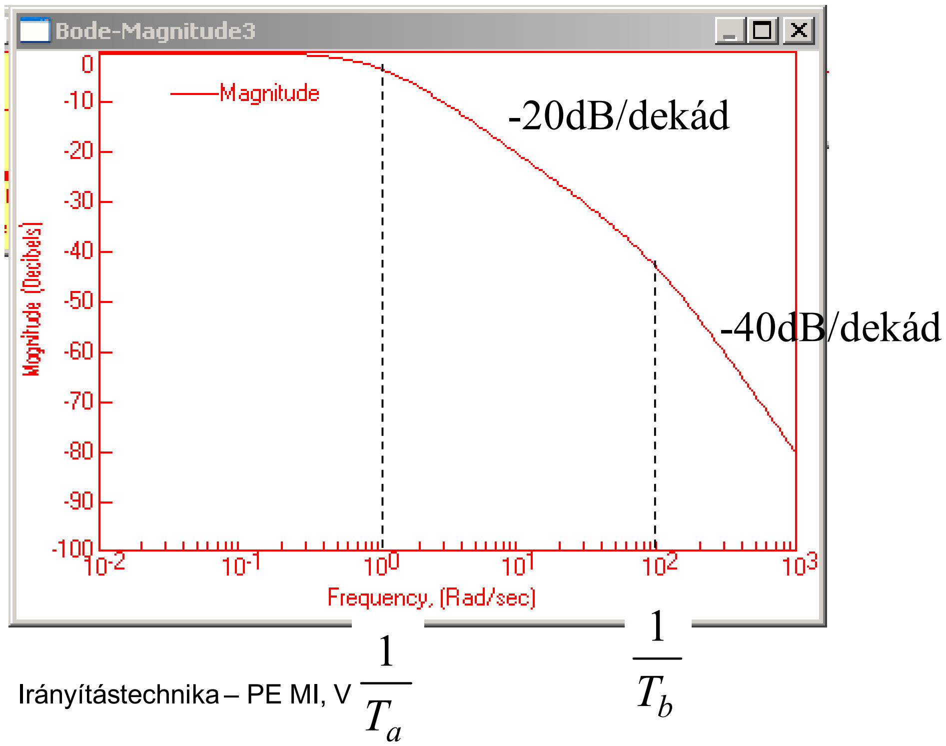
Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

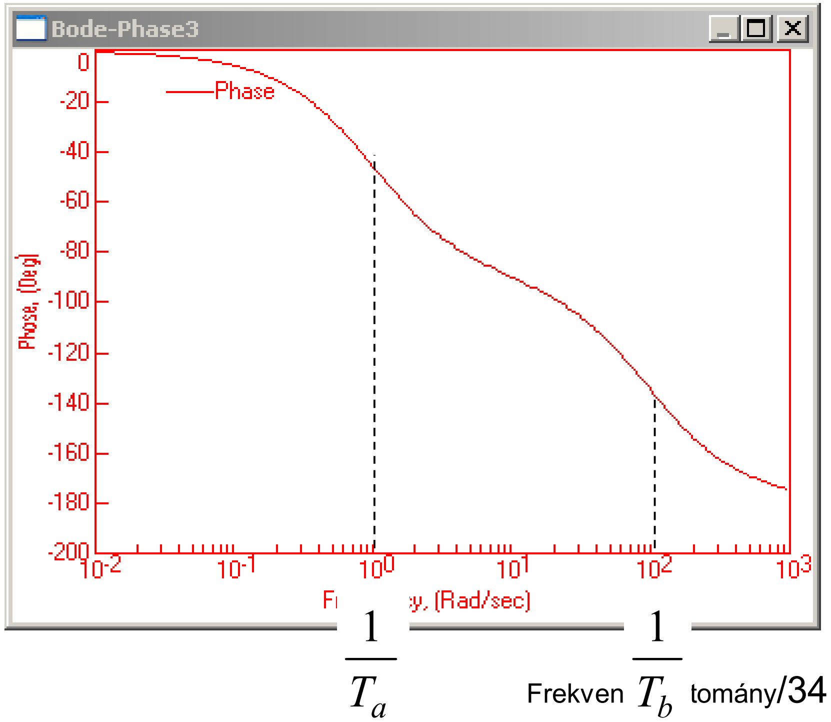
- Bode diagram:

$$\left|G\right|\left[dB\right]=20\,lg\left|G_a\left(j\omega\right)\cdot G_b\left(j\omega\right)\right|=20\,lg\left|G_a\left(j\omega\right)\right|+20\,lg\left|G_b\left(j\omega\right)\right|$$

$$=\left|G_a\right|\left[dB\right]\cdot\left|G_a\right|\left[dB\right]$$

$$\varphi_e=\varphi_a+\varphi_b=-arctg\,\omega\tau_1-arctg\,\omega\tau_2$$





Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

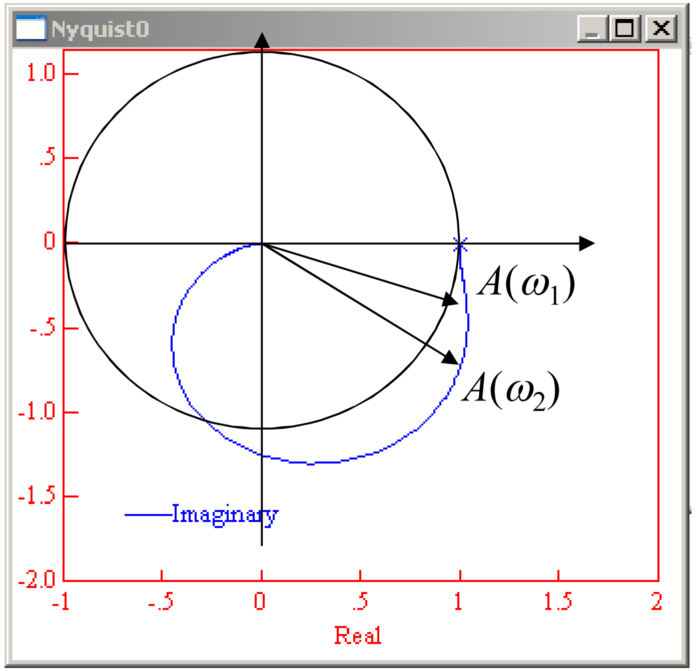
- legyen $0<\xi<1$, ekkor

$$\left|G\right|\left[dB\right]=20\,lg\left|\frac{1}{\left(j\omega\right)^2T^2+2T\xi j\omega+1}\right|=-20\,lg\sqrt{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+\left(2T\xi\omega\right)^2}$$

$$\varphi\left(\omega\right)=-arctg\frac{2\xi T\omega}{1-\omega^2T^2}$$

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Nyquist diagram



Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

$$|G|[dB] = -20\,lg\sqrt{\left(1-\omega^2T^2\right)^2 + \left(2T\xi\omega\right)^2}$$

- Bode diagram:
  - alacsony frekvenciánál, $\omega << 1/T$ az ωT elhanyagolható az 1 mellett, így $|G|[\mathrm{dB}] \approx 0$
  - magas frekvenciánál, $\omega >> 1/T$ az ω^4T^4 tag mellett a többi tag elhanyagolható, így

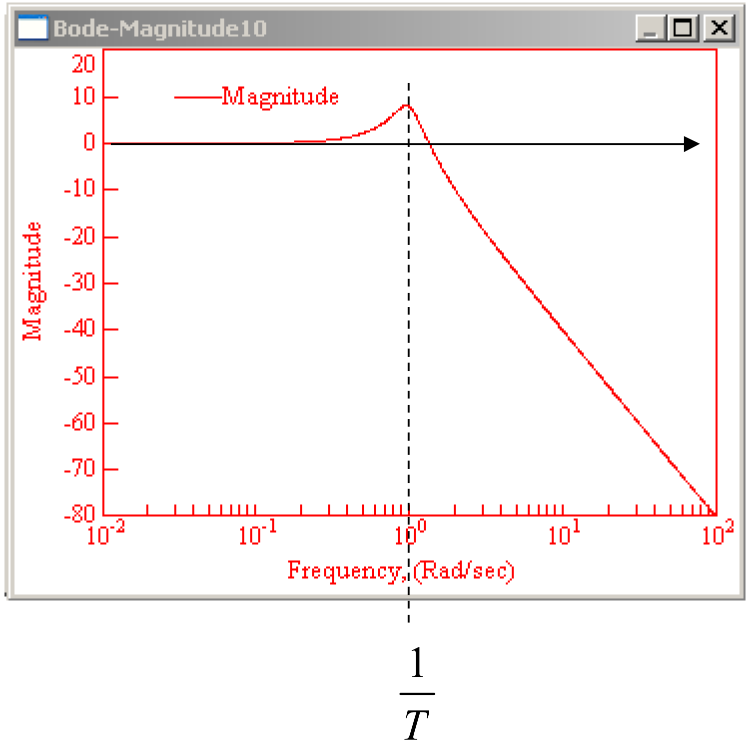
$$|G|[dB] \approx -20\,lg\sqrt{\omega^4T^4} = -40\,lg\,\omega T$$

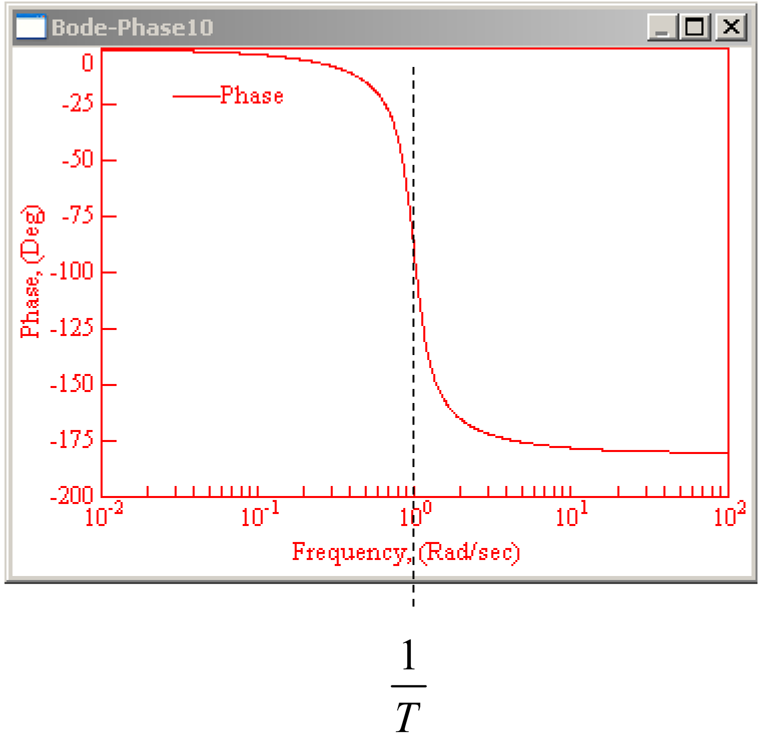
  - legyen $\omega = 1/T$, itt a pontos érték:

$$|G|[dB] = -20\,lg\sqrt{4\xi^2} = -20\,lg\,2\xi$$

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram





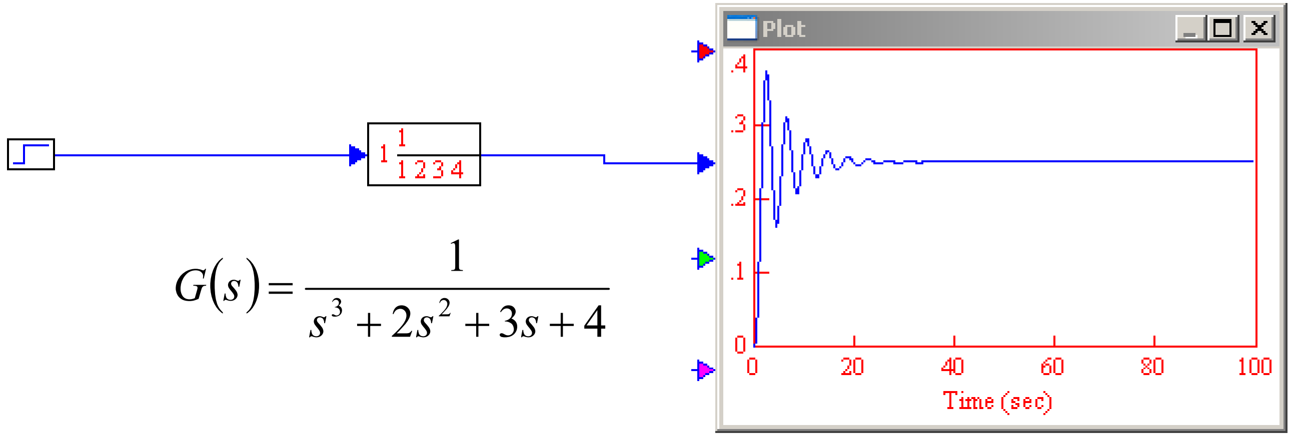
Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Magasabb rendű tag
  - I/O modell: $T_3^3 \cdot y^{(3)} + T_2^2 \cdot y^{(2)} + T_1 \cdot y^{(1)} + y = Ku$
  - átviteli függvény: $G(s) = \dfrac{K}{T_3^3 s^3 + T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}$
  - frekvenciafüggvény:

$$G(j\omega) = \frac{K}{T_3^3 (j\omega)^3 + T_2^2 (j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1}$$

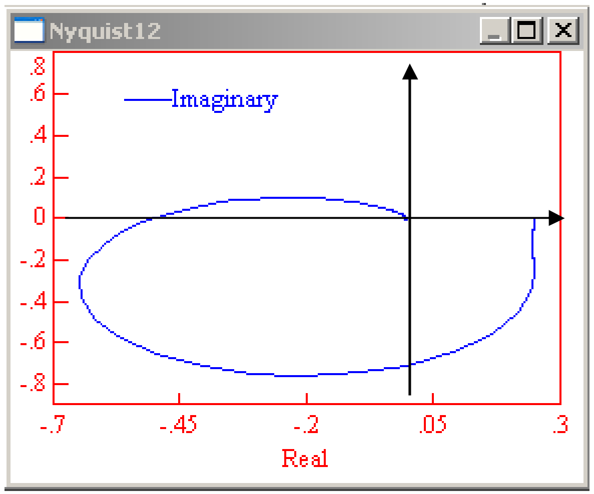
Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- átmeneti függvény:



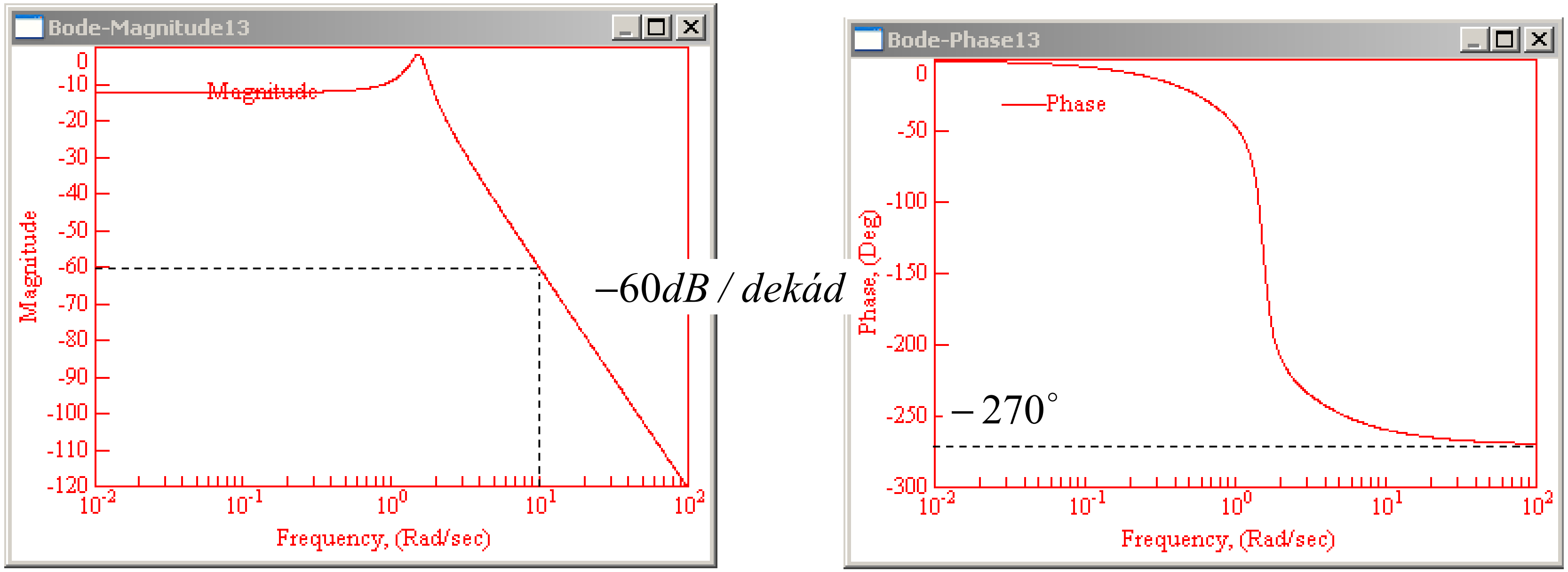
$$G(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+3s+4}$$

- Nyquist diagram



Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram

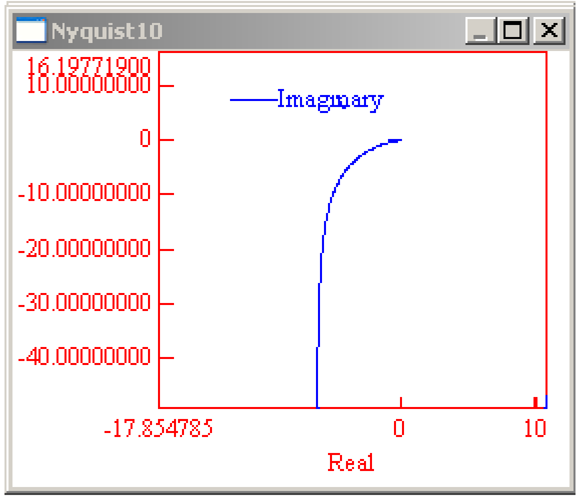


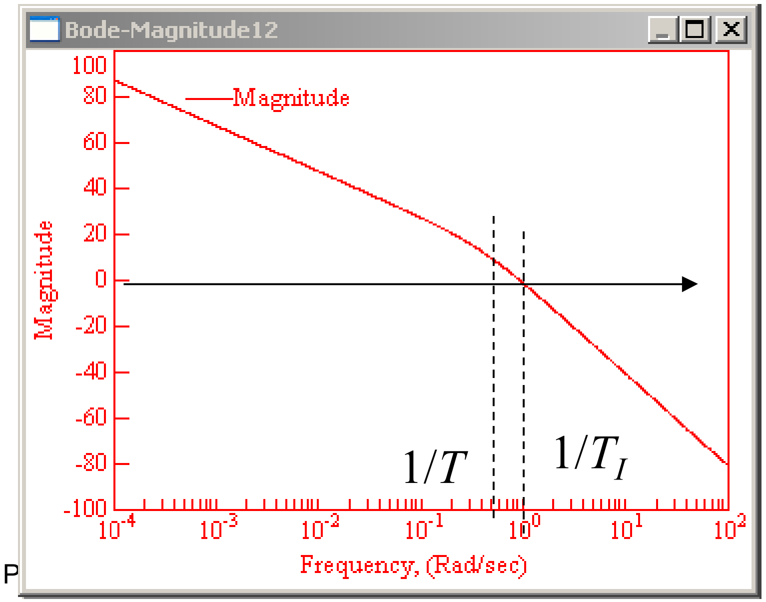
Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

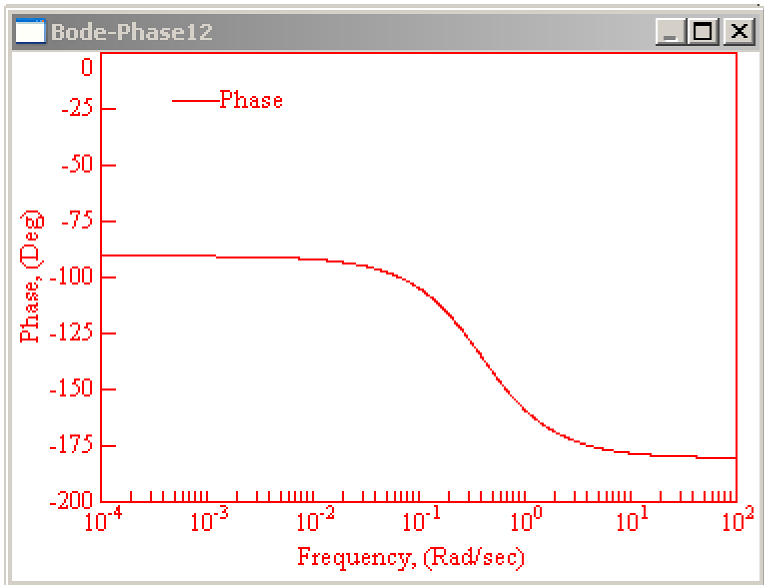
- Egytárolós integráló tag

$$G(j\omega)=\frac{1}{T_2^2(j\omega)^2+T_1 j\omega}=\frac{1}{T_I j\omega}\cdot\frac{1}{Tj\omega+1}$$

  - Nyquist diagram
  - Bode diagram







Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

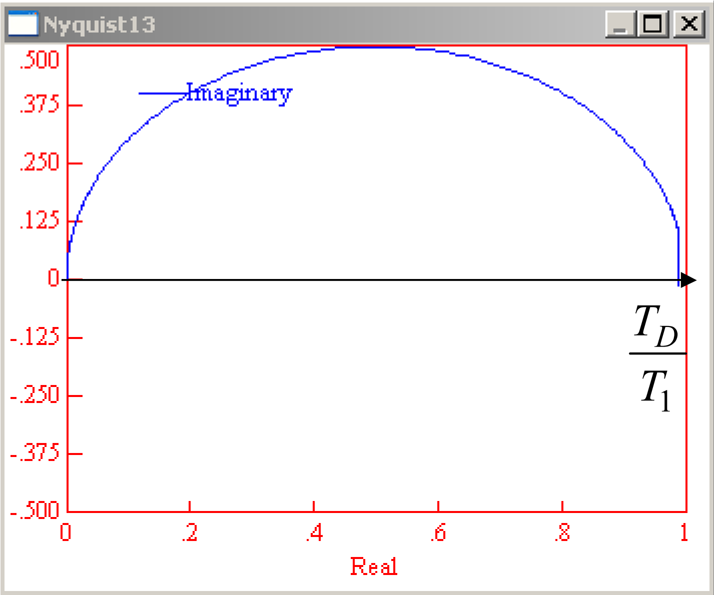
- Deriváló tag
  - I/O modell: $y = T_D u^{(1)}$
  - átviteli függvény: $G(s) = T_D s$
  - frekvenciafüggvény: $G(j\omega) = T_D j\omega$
  - Nyquist diagram:
  - Bode diagram:

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Egytárolós deriváló tag
  - I/O modell: $T_1 y^{(1)} + y = T_D u^{(1)}$
  - átviteli függvény: $G(s) = \dfrac{T_D s}{T_1 s + 1}$
  - frekvenciafüggvény: $G(j\omega) = \dfrac{T_D j\omega}{T_1 j\omega + 1}$

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Nyquist diagram:



Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram