Bevezetés a lágy számítás módszereibe

Fuzzy logika
Alapfogalmak

Werner Ágnes

Villamosmérnöki és Információs Rendszerek Tanszék

e-mail: werner.agnes@virt.uni-pannon.hu

Bevezetés

$homokkupac - 1 \;\; homokszem = homokkupac$???
$homokkupac = 0$

Homokkupac nincs pontosan definiálva!
Definíció: A homokkupac definíciója legyen az, hogy a homokszem halmaz elemszáma legalább 4 és az elrendezés legyen tetraéderszerű.
Vannak homokszem együttesek, melyeket mindenki minden körülmények között homokkupacnak tekint.
Vannak olyanok, amelyeket soha senki.

A kettő között vannak a félig meddig homokkupacok
$\Rightarrow$ vannak helyzetek, amikor "ez egy homokkupac" állítás nem nevezhető igaznak, de ugyanakkor hamisnak sem

*A részben igaz állításokat is megengedő logika a **fuzzy logika**.*

Boole féle logika

- implikáció $(\longrightarrow)$: A implikálja B-t, azaz ha A igaz, akkor B is igaz $(\overline{A} \vee B)$
- A 3 legelterjedtebb következtetési szabály:
  - Modus ponens:
    $$\frac{\begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$
  - Modus tollens:
    $$\frac{\begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ \overline{B} \end{array}}{\overline{A}}$$
  - Hipotetikus szillogizmus:
    $$\frac{\begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ B \longrightarrow C \end{array}}{A \longrightarrow C}$$
- A *ha* *akkor* típusú szabályok interpretálhatók úgy, mint implikációk: $ha \quad x = A \quad akkor \quad y = B$ röviden: $A(x) \longrightarrow B(y)$

Légkondicionáló

- Egy szabály: Egy légkondicionáló 22 fokos levegőt fúj ki, ha a levegő hőmérséklete meghaladja a 25 fokot.
- Itt x a szoba hőmérséklete, y a légkondicionáló által kifújt levegő hőmérséklete.
- **A**: a 25 foknál magasabb hőmérsékleti tartományt jelölő szimbólum
- **B**: a kifújt levegő 22 fokos hőmérsékletét jelöli
- Hasonló szabályokból felépíthető egy olyan rendszer, amely a légkondicionáló működését irányítja.
- Módosítsuk a B jelentését: $22 - 23$ fok közötti hőmérséklet
- pontosabb irányítás $\Leftarrow$ több tartomány
- **halmazértékű függvény**

Légkondicionáló

- A légkondicionáló modell kisebb szabályszámmal is megvalósítható.
- Legyen pl. B_1 jelentése $23 - 26$ fokos levegő, B_2 jelentése: nincs fújás, B_3 jelentése $20 - 23$ fokos a levegő,
- A teljes modell szabálybázisa legyen:
  $R_i : \{Ha \quad x = A_i \quad akkor \quad y = B_i\} \quad i = 1, 2, 3$
- Felosztás: hűvös, kellemes, meleg
- Az új fuzzy modellnél elegendő 3 szabályt használni:
  {Ha x=hűvös akkor y=meleg
  Ha x=kellemes akkor y=semmi
  Ha x=meleg akkor y=hűvös}

Felhasználási területek

Lotfi Zadeh: 1973 tanulmánya

- ipari alkalmazások (Mandani)
- képfeldolgozási alkalmazások (Zadeh)
- beszédfelismerés (Mori)
- fuzzy irányítású nyomvonal Sendai városában (1984)
- Sony, Hitachi, Panasonic (1987 után): háztartási gépek
- 1989 után
  - pénzügyi előrejelzések
  - együttműködő és kommunikáló robotegyüttesek
  - autómatikus adaptív sebességváltó (Volkswagen)
- napjainkban:
  - további irányítási rendszerek
  - adatbányászat

Alapfogalmak

Hagyományos halmazelmélet

- **alaphalmaz**, amely az adott kontextusban a lehetséges összes elemet tartalmazza (X)
- **üreshalmaz**: $\emptyset$
- **részhalmaz**: Ha az A halmaz minden eleme B halmaznak is eleme. $A \subseteq B$
- **hatványhalmaz**: Egy A halmaz összes részhalmazának halmazát $\rho(A)$-t, az A hatványhalmazának nevezzük.
- **számosság**: $|A|$ az A halmaz elemeinek a száma.
  Ha A véges, akkor $|\rho(A)| = 2^{|A|}$
- **komplemens**: $\overline{A}$ az alaphalmaz A-ban nem szereplő elemeit tartalmazza.

Alapfogalmak

Hagyományos halmazelmélet

- **egyesítés**: $A \cup B = \{x | x \in A \quad \text{vagy} \quad x \in B\}$
- **metszet**: $A \cap B = \{x | x \in A \quad \text{és} \quad x \in B\}$
- **diszjunkt halmazok**: Ha az A és B halmazoknak nincs közös elemük. $A \cap B = \emptyset$
- **partíció**: Valamely A halmaz páronként diszjunkt, nem üres részhalmazainak családját az A egy partíciójának hívjuk, amennyiben ezen részhalmazok uniója A-val egyenlő: $\Pi(A) = \{A_i | i \in I, A_i \subset A, A_i \neq \emptyset, \quad \text{és} \quad \forall i, j \in I, i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset\}$
- **Descartes-szorzat**: $A \times B$ olyan rendezett párokat tartalmazó halmaz, ahol az első elem az A a második a B halmaznak eleme, azaz $A \times B = \{\langle a, b \rangle | a \in A, b \in B\}$.

Fuzzy halmaz fogalma

Az alaphalmaz minden eleméhez valamely rögzített tartományból - ez általában a $[0, 1]$ intervallum - rendelhető érték.
Az érték nagysága a halmazbeli tagság mértékével arányos.

Tagsági függvény: μ

Az általa definiált halmaz a fuzzy halmaz: $\mu_A : x \to [0, 1]$

Műveletek fuzzy halmazokkal

Zadeh-féle fuzzy halmazműveletek

- **komplemens**: Az X alaphalmazon értelmezett $A \in F(x)$ fuzzy halmaz Zadeh-féle komplemense $\overline{A}$, melyet $\overline{A}(x) = 1 - A(x)$ határoz meg
- **metszet**: $A, B \in F(x)$ két fuzzy halmaz
  $(A \cap B)(x) = min[A(x), B(x)], \ \ \forall x \in X - re$ **t-norma**
- **unió**: $A, B \in F(x)$ két fuzzy halmaz
  $(A \cup B)(x) = max[A(x), B(x)], \ \ \forall x \in X - re$ **t-konorma**

Fuzzy komplemensek

Legyen A az X fuzzy halmaza.
Az A halmaz c típusú komplemensét (cA)-val jelölve, $c(A(x))$ az az érték, amilyen mértékben x nem tartozik A-hoz.
definíció: *Fuzzy komplemens*nek nevezzük a $c : [0,1] \to [0,1]$ függvényt, amely minden $A(x)$ tagsági függvényértékhez tetszőleges A fuzzy halmaz esetén a $c(A(x))$ értéket rendeli hozzá olyan módon, hogy teljesüljön a fuzzy komplemens axiómatikus váza.

- **c1 axióma**: $c(0) = 1$ és $c(1) = 0$ (peremfeltételek)
- **c2 axióma**: Minden $a, b \in [0,1]$ esetén, ha $a \leq b$, akkor $c(a) \geq c(b)$ (monotonítás)
- **c3 axióma**: c folytonos függvény
- **c4 axióma**: c involutív, azaz minden $a \in [0,1]$-re $c(c(a)) = a$

Fuzzy metszetek (t-normák)

Általánosan az A és B fuzzy halmazok metszetét az egységnégyzeten való bináris operátorként adhatjuk meg: $t : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$
A fuzzy metszet minimálisan elvárt tulajdonságai:

- **t1 axióma**: $t(a,1) = a \quad \forall a \in [0,1]$-re (peremfeltétel)
- **t2 axióma**: $b \leq c$ -ből következik, hogy $t(a,b) \leq t(a,c)$ $\forall a,b,c \in [0,1]$-re (monotonítás)
- **t3 axióma**: $t(a,b) = t(b,a)$ $\forall a,b \in [0,1]$-re (kommutativitás)
- **t4 axióma**: $t(a,t(b,c)) = t(t(a,b),c) \quad \forall a,b,c \in [0,1]$-re (asszociativitás)
- **t5 axióma**: t folytonos függvény
- **t6a axióma**: $t(a,a) < a$ (szubidempotencia) vagy
- **t6b axióma**: $t(a,a) = a$ (idempotencia)
- **t7 axióma**: Ha $a_1 < a_2$ és $b_1 < b_2$, akkor $t(a_1,b_1) < t(a_2,b_2)$ (szigorú monotonítás)

Fuzzy uniók (t-konormák) s-normák

Általánosan az A és B fuzzy halmazok unióját az egységnégyzeten való bináris operátorként adhatjuk meg:
$s : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$
A fuzzy unió minimálisan elvárt tulajdonságai:

- **s1 axióma**: $s(a,0) = a \quad \forall a \in [0,1]$-re (peremfeltétel)
- **s2 axióma**: $b \leq c$-ből következik, hogy $s(a,b) \leq s(a,c)$ $\forall a,b,c \in [0,1]$-re (monotonítás)
- **s3 axióma**: $s(a,b) = s(b,a)$ $\forall a,b \in [0,1]$-re (kommutativitás)
- **s4 axióma**: $s(a,s(b,c)) = s(s(a,b),c)$ $\forall a,b,c \in [0,1]$-re (asszociativitás)
- **s5 axióma**: s folytonos függvény
- **s6a axióma**: $s(a,a) > a$ (szuperidempotencia) vagy
- **s6b axióma**: $s(a,a) = a$ (idempotencia)
- **s7 axióma**: Ha $a_1 < a_2$ és $b_1 < b_2$, akkor $s(a_1,b_1) < s(a_2,b_2)$ (szigorú monotonítás)

Aggregáció

- A fuzzy rendszerek lényegét adó fuzzy algoritmusok alapvetően **ha   akkor** szabályokból és azok **aggregációjá**ból állnak
- A szabályok matematikailag **relációk**at alkotnak
- A következtetés relációk **kompozíció**ja alakjában jelenik meg
- A fuzzy algoritmusok fuzzy relációk nyelvi, lingvisztikai álruhában
- A relációk **több a többhöz leképezést** valósítanak meg

Az aggregációs operátorok több fuzzy halmaz megfelelő módon történő egyesítése által egyetlen fuzzy halmazt állítanak elő.

Aggregációs operátorok

definíció: A $h : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ függvényt $(n \geq 2)$ fuzzy halmazokon értelmezett aggregációs operátornak nevezzük. Ha a h függvény argumentumai az X alaphalmazon értelmezett $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ fuzzy halmazok, akkor h $\forall x \in X$-re fuzzy halmazt állít elő az argumentumok tagsági értékeinek segítségével, azaz $A(x) = h(A_1(x), \ldots A_n(x))$.
A fuzzy aggregáció elvárt tulajdonságai:

- **h1 axióma**: $h(0, \ldots, 0) = 0$ és $h(1, \ldots, 1) = 1$-re (peremfeltételek)
- **h2 axióma**: Ha adott két tetszőleges n-es $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ és $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$, ahol $a_i, b_i \in [0,1]$ és $a_i \leq b_i \;\; \forall i \in [1,n]$, akkor $h(a_1, \ldots, a_n) \leq h(b_1, \ldots, b_n)$, azaz h monoton növekvő minden argumentumában.
- **h3 axióma**: h folytonos függvény

Fuzzy relációk

- Két (vagy több) halmazbeli elem vagy relációban van egymással, vagy nem
- Ezt a fogalmat általánosítja a fuzzy reláció fogalma
- Egy fuzzy relációhoz való tartozást tagsági értékkel lehet kifejezni
- Az $X_1, \ldots, X_n$ halmazok közötti R reláció: $R(X_1, \ldots, X_n) \subseteq X_1 \times \ldots \times X_n$
- Fuzzy esetben: $R(X_1, \ldots, X_n) = \mu_R\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ (ez a reláció tagsági függvényének értéke az adott argumentumra)
- relációk osztályozása: bináris, ternáris, n-áris

Egy másik reprezentációs módszer a számítógépes modellezésben jelentős: a véges elemszámú halmazok relációit rendezett n-esekként írjuk fel.