

*Bevezetés a lágy számítás módszereibe*

***Fuzzy logika***  
***Fuzzy irányítási rendszerek***

Werner Ágnes

*Villamosmérnöki és Információs Rendszerek Tanszék*

e-mail: [werner.agnes@virt.uni-pannon.hu](mailto:werner.agnes@virt.uni-pannon.hu)

## Felépítés

1. **Szabálybázis:** ez a modell "*Ha a bemenet  $A$ , akkor a kimenet  $B$* " típusú szabályokból áll ( $A$  és  $B$  fuzzy halmazok)
2. **illeszkedési mértéket meghatározó egység:** a szabálybázis *antecedens* elemeit hasonlítja össze az aktuális megfigyelés függvényével vagy konkrét értékével, és a tüzelő szabályoknál meghatároz egy 0 és 1 közötti fuzzy illeszkedési mértéket
3. **következtető gép:** az illeszkedési mérték meghatározása után a kapott súlyokat valamilyen módon a fuzzy szabálybázisban található tüzelő szabályok *konzekvenseivel* általában egy konjunkció segítségével kombinálja
4. **defuzzifikáló egység:** valamilyen módon a kapott fuzzy tagsági függvény legjellemzőbb, valamilyen értelemben vett középértékét választja ki

## A szabálybázis szerkezete

A tudásbázis analízise

Információt gyűjthetünk több féle képpen:

- **közvetlen eljárás:** nyelvi szabályok
- bizonyos ideig **megfigyeljük az operátor munkáját** irányítás közben
- **metaszabálybázis** alkalmazása

A fuzzy szabálybázis alkotói **természetes nyelvi** vagy közvetlenül **fuzzy szabályokkal** kifejezett szabályok:

$R : \text{Ha } x = A \text{ akkor } y = B$

$x \in X$  a bemeneti változó,  $y \in Y$  a kimeneti változó vagy következtetés

$X$  és  $Y$  rendre a bemeneti és kimeneti változók alaphalmaza

$A$  és  $B$  nyelvi változók

$A$  az  $R$  szabály antecedense (előzménye)

$B$  az  $R$  szabály konzekvense (következménye)

Ha a szabályban szereplő nyelvi változók fuzzy halmazok, akkor **fuzzy szabályról** beszélünk.

## Közlekedési lámpa

---

- szabály: "Ha a forgalom erős északi irányból, akkor a lámpa legyen hosszabb ideig zöld."
- $x$  bemenet = északi irányú forgalom
- $y$  kimenet = mi a teendő a zöld lámpával
- $A$  = erős forgalom (fuzzy halmaz)
- $B$  = hosszabb ideig legyen zöld (fuzzy halmaz)

## Több dimenziós szabályok

a rendszernek  $n$  bemenete és  $m$  kimenete van

$R_i$  : Ha  $\underline{x} = \underline{A}_i$  akkor  $\underline{y} = \underline{B}_i$  alakú

ahol  $\underline{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  a bemeneti értékek vektora  $x_j \in X_j$ ,  
 $X = X_1 \times \dots \times X_n$  az alaphalmaz

$\underline{A}_i = \langle A_{1i}, \dots, A_{ni} \rangle$  az antecedens halmazok vektora,  $\underline{A}_i \in X$

$\underline{y} = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$  a kimeneti változók vektora  $y_i \in Y_i$

$Y = Y_1 \times \dots \times Y_m$  a kimeneti változók alaphalmaza

$\underline{B}_i = \langle B_{1i}, \dots, B_{mi} \rangle$  a konzekvens halmazok vektora,  $\underline{B}_i \in Y$  és  
 $i \in [1, r]$ , ahol  $r$  a szabályok száma

## Több dimenziós szabályok

A szabály felírható:

$R_i$ : Ha  $x_1 = A_{1,i}$  és ... és  $x_n = A_{n,i}$  akkor  $\underline{y} = \underline{B}_i$

A kimenő változók értékei függetlenek egymástól:

$R_i \rightarrow \{R_{1,i}, \dots, R_{m,i}\}$  ahol

$R_{1,i}$ : Ha  $x_1 = A_{1,i}$  és ... és  $x_n = A_{n,i}$  akkor  $y_1 = B_{1,i}$

⋮

$R_{m,i}$ : Ha  $x_1 = A_{1,i}$  és ... és  $x_n = A_{n,i}$  akkor  $y_m = B_{m,i}$

## A szabályok ábrázolása fuzzy relációkkal

A konjunkció alapú modell az egyes szabályokat adatpárokként kezeli.

Az  $R_i$  **fuzzy szabály-reláció** az  $X \times Y$  Descartes-szorzáttéren értelmezett **fuzzy halmaz**, amely az

$$R_i(x, y) : \mu_{R_i(x,y)}(x, y) = t(A_i(x), B_i(y)), \quad (x, y) \in X \times Y,$$

ahol  $t$  egy tetszőleges  $t$ -norma

Zadeh-féle  $t$ -norma:

$$\mu_{R_i(x,y)}(x, y) = \min(A_i(x), B_i(y))$$

$R$  fuzzy szabálybázis-reláció:

$$R = \bigcap_{i=1}^r R_i$$

Ha a Zadeh-féle uniót használjuk  $t$ -konormaként, akkor a teljes

$$R \text{ relációt } \mu_{R(x,y)}(x, y) = \max_{i=1}^r (\mu_{R_i(x,y)}(x, y)) = \max_{i=1}^r (\min(A_i(x), B_i(y)))$$

alakban írhatjuk fel.

# Nyelvi változó

- Értékei természetes (vagy mesterséges) nyelvi szavak vagy kifejezések lehetnek
- Fuzzy halmazokkal adhatjuk meg
- Az információ egységeknél minden dimenzióban nyelvi változók értékei felelnek meg
- A nyelvi változók értékei felosztják, részlegesen lefedik a változóhoz tartozó alaphalmazt
- Feltételek a bemeneti nyelvi változókhoz tartozó fuzzy halmazokra:
  - Együttesen fedjék le az alaphalmazt:  $\forall x \in X, \exists i \in [1, n] : A_i(x) \geq \epsilon \quad \epsilon > 0$   
az  $X$  lefedettségének a mértéke
    - Az  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$  fuzzy halmazcsaládot az  $X$  alaphalmaz **fuzzy partíciójának** nevezzük
    - Ha az  $A_i$  halmazok tagsági értékének összege  $\forall x$  alaphalmazbeli elemre vonatkozóan 1, akkor az  $A$  halmazcsalád ún. **Ruspini-partíció**t alkot:  
$$\sum_{i=1}^n A_i(x) = 1, \forall x \in X$$
  - Megfelelő alaphalmaz kiválasztása
  - Az alaphalmaz skálázását úgy kell megoldani, hogy kis számú fuzzy halmazzal lefedhető legyen



## Mamdani-féle fuzzy irányítási rendszerek

- *Zadeh javaslata*: a modellt  $\langle X \times Y, \mu_R \rangle$  formában fuzzy relációként interpretáljuk, ahol  $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$
- A megfigyelés ekvivalencia relációként fogalmazható meg:  $A^* : X \times X \rightarrow [0, 1]$
- Lehetővé válik a következtetés fuzzy kompozícióként való előállítás:  $B^* = A^* \circ R$
- *Mamdani javaslata* a nagy számításigény miatt: több dimenziós  $X$  bemenet esetén nem magán az  $R$  reláción, hanem annak projekcióin működő algoritmust használ
- A következtető algoritmus **1. lépése**: az **aktuális megfigyelés** (bemeneti értékek) és a **szabályok** antecedenseinek **illesztése**

## Mamdani-féle fuzzy irányítási rendszerek

**2. lépés: illeszkedés mértékének meghatározása**  $\implies$  az egyes szabályok milyen mértékben játszanak szerepet a konklúzió megalkotásában

Legyen az  $\underline{A}^* \in X_1 \times \dots \times X_n$  az  $n$  dimenziós megfigyelésvektor az  $r$  szabály:

$R_i$ : Ha  $x_1 = A_{1,i}$  és ... és  $x_n = A_{n,i}$  akkor  $\underline{y} = \underline{B}_i$  alakú az illeszkedés mértéke a  $j$ -edik dimenzióban  $j \in [1, n]$  a  $w_{j,i} = \max_{x_j} \{ \min \{ A_j^*(x_j), A_{j,i}(x_j) \} \}$  **súlyfaktor**

**3. lépés:** az  $R_i$  szabály alkalmazhatósága a súlyfaktorok minimumaként határozható meg

$$w_i = \min_{j=1}^n w_{j,i}$$

**4. lépés:**  $B_i^* = \min(w_i, B_i(y))$

**5. lépés:** összesített következtetés

$$B^* = \cup_{i=1}^r B_i^* \text{ azaz } B^*(y) = \max_{i=1}^r B_i^*(y)$$

## Mamdani-féle fuzzy irányítási rendszerek

Figyeljük meg a módszerben a fuzzy relációk megjelenését. A szabálybázis reláció

$$R(x_1, \dots, x_n, y) = \max_{i=1}^r \{ \min_{x,y} \{ A_{1,i}(x_1), \dots, A_{n,i}(x_n), B_i(y) \} \}$$

$R(\underline{x}, y) = \max_{i=1}^r \{ \min_{\underline{x},y} \{ A_i(\underline{x}), B_i(y) \} \}$  alakban írható fel.

A következőt kapjuk:

$$w_{j,i} = \max_{x_j} \{ \min_{x_j} \{ A_j^*(x_j), A_{j,i}(x_j) \} \}$$

$$\begin{aligned} w_i &= \min_j \{ \max_{x_j} \{ \min_{x_j} \{ A_j^*(x_j), A_{j,i}(x_j) \} \} \} = \\ &= \max_{x_j, j} \{ \min_j \{ \min_{x_j} \{ A_j^*(x_j), A_{j,i}(x_j) \} \} \} = \\ &= \max_{\underline{x}} \{ \min_{\underline{x}} \{ A^*(\underline{x}), A_i(\underline{x}) \} \} \end{aligned}$$

## Mamdani-féle fuzzy irányítási rendszerek

$$\begin{aligned} B_i^*(y) &= \min_y \{ B_i(y), \max_x \{ \min_x \{ A^*(x), A_i(x) \} \} \} \\ &= \max_x \{ \min_y \{ B_i(y), \min_x \{ A^*(x), A_i(x) \} \} \} \\ &= \max_x \{ \min_{x,y} \{ B_i(y), A^*(x), A_i(x) \} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^*(y) &= \max_{i=1}^r \{ \max_x \{ \min_{x,y} \{ B_i(y), A^*(x), A_i(x) \} \} \} \\ &= \max_x \{ \max_{i=1}^r \{ \min_{x,y} \{ A^*(x), \min_{x,y} \{ A_i(x), B_i(y) \} \} \} \} \\ &= \max_x \{ \min_{x,y} \{ A^*(x), \max_{i=1}^r \min_{x,y} \{ A_i(x), B_i(y) \} \} \} \end{aligned}$$

$$B^*(y) = \max_x \{ \min_{x,y} \{ A^*(x), R(x, y) \} \}$$

A Mamdani-módszer következtetési algoritmus által előállított konklúzió a **megfigyelés és a szabálybázis reláció max-min kompozíciója**:

$$B^* = A^* \circ R$$

**Kompozíciós következtetési eljárás**

## Defuzzifikációs módszerek

---

- A következtetési algoritmus eredményül fuzzy halmazt ad.
- **Defuzzifikálás:** a fuzzy konklúzióból ki kell választani egy konkrét értéket, amely az adott fuzzy halmazt a legjobban jellemzi.
  1. Súlypont módszer (COG)
  2. Geometriai középpont módszer (COA)
  3. Maximumok közepe módszer (MOM)
  4. Középső maximum módszer (COM)

## Súlypont módszer (COG)

A módszer alkalmazásának előfeltétele, hogy a  $B^*$  tartója intervallum legyen, valamint a

$MAX(B^*) = \{y \in \text{supp}(B^*) \mid \forall y' \in \text{supp}(B^*) : B^*(y') \leq B^*(y)\}$  halmaz nem üres és Borel-mérhető legyen.

$$y_i^* = \frac{\int_{y \in \text{supp}(B_i^*)} B_i^*(y) y dy}{\int_{y \in \text{supp}(B_i^*)} B_i^*(y) dy}$$

$$w_i^* = \int_{y \in \text{supp}(B_i^*)} B_i^*(y) dy$$

$$y_{COG} = \frac{\sum_{i=1}^r (y_i^* w_i^*)}{\sum_{i=1}^r w_i^*} \quad w_i \text{ a súlyozási faktor}$$

$y_i^*$  a  $B_i^*$  részkonklúzió súlypontja

## Geometriai középpont módszer (COA)

---

A defuzzifikált érték:

$$y_{COA} = \frac{\int_{y \in B^*} B^*(y)y dy}{\int_{y \in B^*} B^*(y) dy}$$

Diszkrét kimenet esetén, ha a  $B^*$  konklúzió az  $\{y_1, \dots, y_m\}$  halmazon van definiálva

$$y_{COA} = \frac{\sum_{i=1}^m B^*(y_i)y_i}{\sum_{i=1}^m B^*(y_i)}$$

## Maximumok közepe módszer (MOM)

---

A defuzzifikált érték a

$$MAX(B^*) = \{y \in \text{supp}(B^*) \mid \forall y' \in \text{supp}(B^*) : B^*(y') \leq B^*(y)\}$$

halmaz középvértéke:

$$y_{MOM} = \frac{\int_{y \in MAX(B^*)} y dy}{\int_{y \in MAX(B^*)} dy}$$

Ha a  $MAX(B^*)$  halmaz véges vagy megszámlálható számosságú, akkor az

$$y_{MOM} = \frac{\sum_{y \in MAX(B^*)} y}{|MAX(B^*)|}$$



## Középső maximum módszer (COM)

---

A következtetés legnagyobb tagsági függvényértékű elemeiből választja ki a középsőt.

Legyen  $h(B^*)$  a következtetés magassága, ekkor

$$y_{COM} = \frac{\inf M + \sup M}{2} \quad \text{ahol } M = \{y | y = h(B^*)\}$$

Diszkrét esetben:

$$y_{COM} = \frac{\min\{y_k | y_k \in M\} + \max\{y_k | y_k \in M\}}{2}$$