

<Ez a dokumentum a DSP könyv fejezeteit tartalmazza>
< 2.0 verzió >

DSP

Digitális Jelfeldolgozás

(Veszprémi Egyetemi Jegyzet)

írta:
Dr. Fodor Dénes
Tóth Roland

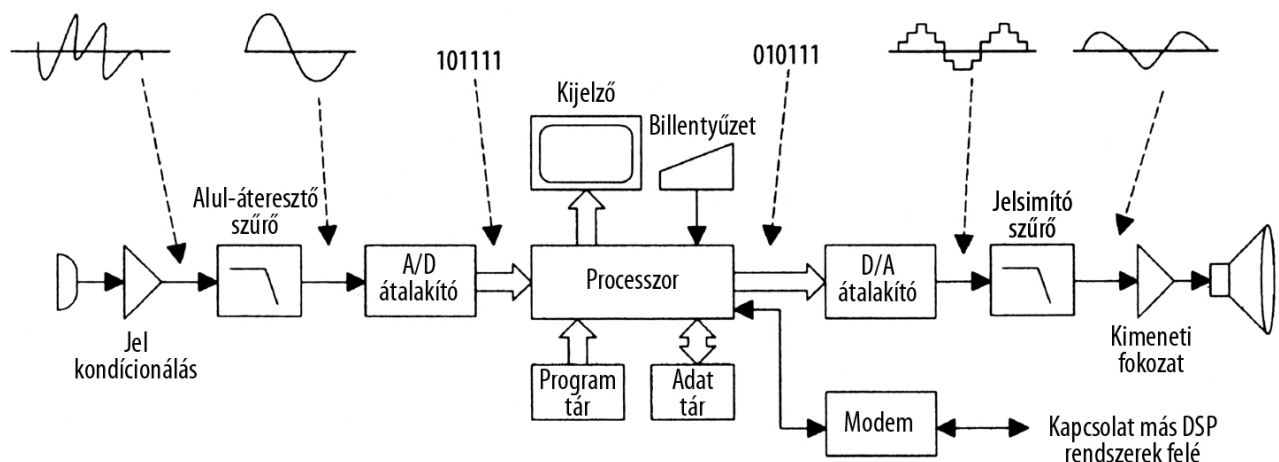
1. Bevezetés (Introduction)

1.1. Mi a fene az a DSP? (What the heck is DSP?)

A DSP (Digital Signal Processing), azaz a digitális jel feldolgozás az egyik leggyorsabban fejlődő ága a modern elektronikának. Mint a modern szórakoztatóipar, mint a kifinomult szabályázástechnika és informatika elengedhetetlen része lett, széleskörű használata szinte nélkülözhetetlenné teszi bármely olyan technológia számára mely a külvilágból érkező hatásokat belső digitális úton kívánja feldolgozni. Ez teszi a DSP elméletét és gyakorlatát olyannyira fontossá, hogy immár észrevétlenül nemcsak technológiáink hanem életünk, civilizációnk részévé is vált. Mikor autóba ülünk, vagy repülőgépen szállunk a felhők közt, hallgatván kedvenc együttesünk CD-jét mind-mind a DSP vívmányai, apró processzorainak zümmögése vesz minket körül, persze nem halljuk őket, s gyakran nem is látjuk, de ott vannak, öröködnék talán nemsokára minden lépésünk felett is.

Ennek a könyvnek a célja, hogy hatásos betekintést nyújtson ebbe a technológiának és elméleti problémakörnek az alapjaiba, megfűszerezve azt a való világ példáival. A könyv kifejezetten a Veszprémi Egyetemen oktatott Digitális Jelfeldolgozás tantárgy hallgatói számára készült, de örömmel ajánljuk minden kedves érdeklődőnek.

1.2. A DSP rendszerek általános modellje (General model of DSP Systems)



1. ábra Általános DSP rendszermodell

Az 1. ábrán egy tipikus Digitális Jelfeldolgozási Rendszer, röviden DSP rendszer modelljének felépítését láthatjuk. A DSP által végzett operációk a következő csoportokba sorolhatóak:

- Analóg jel, jelek fogadása az input csatornán.
- Ezen analóg jelek számokkal való ábrázolása, digitalizálása.
- Bizonyos, a funkciót jelentő számítások elvégzése az így kapott értékhalmon.
- A számok visszakonvertálása analóg jelekké.

Persze közben az információ feldolgozásra kerül, amit megjeleníthetünk, tárolhatunk, vagy továbbíthatunk is. Maga a modell csupán általánosságban vázolja az ilyen rendszerek működését, a megvalósított megoldások szétszedhetők ezen részekre de ezek kivitelezése, már az adott technológiától vagy alkalmazástól erősen függ.

Tekintsük most a jelfeldolgozó rendszer részinek kicsit bővebb magyarázatát:

1.2.1. A bemenet és a jelérzékelő

Minden jelfeldolgozási folyamat egy úgynevezett jel érzékelővel (input transducer) eszközzel kezdődik. Ennek feladata a probléma számára fontos fizikai vagy kémia hatás elektromos jellé való átalakítása. Ezen folyamat közben a mért jellemző egy egységes, folytonos jeltartományba képződik le, amely hűen, a műszer által biztosított pontosságon keresztül követi a fizikai / kémiai paraméter változását, pillanatnyi értékét. Ez az eszköz számtalan formát ölthet, lehet például egy antenna, de akár egy mikrofon is.

1.2.2. Jelrendezés és simítás

A jelrendezés és simítás legfőbb feladata, hogy a jelet, megfelelő tartományba tolja, illetve leképezze, hogy a további fokozatok számára biztosítsa a biztonságos működést, ezenkívül az ártalmas hatások elleni védelem is ezen kezdő fokozatban valósul meg. Általában erősítők és leválasztók pl. optocsatolók képzik ezen fokozatot.

1.2.3. Anti-aliasing szűrés

Maga az anti-aliasing szűrő egy alul áteresztő szűrő. Fő feladata hogy az A/D átalakító, azaz a mintavételezés számára biztosítsa a megfelelő jel sebességet, korlátozva a jel változási sebességét. Ez a része a rendszernek felelős azért, hogy az egész rendszer maga követni tudja a bemeneti jelet és annak változásait. Ha a bemeneti jel túl gyorsan változna, a rendszer képtelen lenne követni azt, s így értékes információk veszhetnének el a jelből.

1.2.4. Analóg / Digitális átalakító

Az A/D átalakítók legfőbb feladata, hogy az analóg, azaz a folytonos világ jeleit számokká, értékekké, vagyis jól meghatározott értékelési rendszerbe alakítsák át, azaz digitalizálják. Tipikusan egy ilyen átalakítás diszkrét elektromos jeltartományba viszi át a jelet, teszi azt a további részrendszerek számára értelmezhetővé. Az A/D átalakítók legfőbb jellemzője a konverzió sebessége (conversion rate) illetve a leképezés pontossága, felbontási finomsága (resolution). Míg az első a sebességét jellemzi a módszernek addig a másik megmondja, hogy a kapott diszkrét értékek mennyire lesznek közel a valós értékhez. Az A/D átalakításnak számtalan módszere létezik, ezek tárgyalásával a villamosmérnöki szakkönyvek foglalkoznak.

1.2.5. Processzor

A „processzor” csak elvi elnevezés, inkább processzálo elemet nem pedig egy ténylegesen működő processzort jelent, például ha célunk a jel erősítése, egy egyszerű erősítő vagy szorzó áramkör is lehet. Ezen rendszerrész fő feladata az elvégezni kívánt funkció, algoritmus megvalósítása az előző fokozat adatai alapján. Lényegében a rendszer lelkét képezi, működésének lényegét definiálja.

1.2.6. Program és adat tárolás

A program tárolása, a kívánt funkciót megvalósító algoritmus tárolását jelenti, míg az adatok ideiglenes tárolása vagy kiértékelése és továbbítása külön történik. A program külön memóriában kerül tárolásra mint az adat, így ez lehetővé teszi a gyorsabb működést, mivel egy utasítás végrehajtási ciklus alatt, az utasításkód begyűjtése és értelmezése mellett (fetch) az adatok külön bus rendszeren

keresztül kerülnek továbbításra vagy beolvasásra. Ezen számítógép architektúrát a Harvard egyetemen fejlesztették ki így kapta a Harvard architektúra nevet, legfőbb ismérve a fent említett adat és program kód külön választása szemben a mai PC-s világ Neumann alapú szervezésével.

1.2.7. Adat továbbítás

Az adat továbbítás és annak megőrzése a legfőbb erőssége a digitális rendszereknek, mert míg az analóg jelek a továbbítás, tárolás, feldolgozás során mindenféleképpen sérülnek, átalakulnak, információt veszítenek, (például a mágnes szalag öregedése, másolása) addig a már digitalizált jelek gond nélkül, megfelelő eszközön akár nagyon hosszú ideig is információvesztés nélkül tárolhatóak és akárhányszor felhasználhatóak műveletvégzés céljából.

1.2.8. Adat megjelenítés és felhasználói interakció

Nem minden DSP rendszer rendelkezik a felhasználói interakció vagy adatmegjelenítés képességével (pl. ABS fékrendszer). Azonban sokszor szükség lehet az emberi felügyeletre, vagy éppen az emberi tájékoztatás a cél. A funkció általában kijelzőkkel, s pár vezérlő eszközzel, (például kapcsolók, billentyűk) megoldható.

1.2.9. Digitális / Analóg átalakító

Sok DSP rendszernek létezik valamilyen analóg kimenete a külvilág felé, ezért a digitális adatokat vissza kell alakítani elektromos jelekké, feszültséggé vagy áramjellé, amit további rendszerekhez juttathatunk el. Ezen feladatot végzik el a D/A átalakítók, melyek különböző rendű tartószervek alapján kerülnek megvalósításra. Tehát a digitális világ jeleit ismét visszahelyezzük valamely folytonos jeltartományba.

1.2.10. Kimeneti simítás

Mivel a D/A átalakítók kimeneti jelei igencsak szögletesek, tüskékkel terheltek, amelyek zavarokat okozhatnak az analóg jeltovábbítás vagy felhasználás területén ezért ezeket a jeleket simítani kell egy alul áteresztő szűrő segítségével. A különböző szűrők, így az alul áteresztők későbbi fejezetek témái lesznek.

1.2.11. Kimeneti erősítő fokozat

Általában teljesítményerősítés, vagy impedancia illesztés a fokozat lényege, a jelet a végső rész felé próbáljuk meg kondicionálni.

1.2.12. Kimeneti adó

A végleges kimeneti jelet visszahelyezzük a környezet valóságába, így a fesz vagy áramjelből más fizikai/kémiai jelet állítunk elő. Pl.: antenna, motor, LED, hangszóró segítségével.

1.2.13. Gyors fejlődés

Mint már a bevezetőből is kiderült ez a terület nemcsak gyorsan fejlődik de igencsak áthatja jelenlegi alkalmazásainkat is. Igen sok nélkülözetlen algoritmust mondhat magáénak a DSP területe:

- FFT (Fast Fourier Transformation)
- Discrete Cosinus Transformation (MPEG)
- Kódolási eljárások (Huffman, Trellis, Runlength ...)
- Szűrők (FIR, IIR, Kalman, Notch ...)

- Vektor műveletek (Dot Products, Cross Product ...)
- Mátrix műveletek
- Konvolúciók
- Numerikus integrálások, deriválások és egyéb algoritmusok

Álljon itt néhány példa a jelen kor alkalmazásaira is informáló jelleggel:

- GPS (Global Positioning System)
- Rakéta célvezetés (Missile Guidance)
- ABS (Adaptive Break System)
- Modem
- Mobil telefonok (Cellular Phones)
- 3D forgatás, grafikai megjelenítés, videó kártyák

1.3. Jelek és Rendszerek (Signals and Systems)

Ezen fejezet a jelekkel és rendszerekkel kapcsolatos alapvető fogalmak tisztázására és azon technikai aspektusok, illetve konkrét technikák kifejlesztésére törekszik, amelyek nélkülözhetetlenek annak az analitikai keretnek a felállításánál, melyekkel a jeleket és rendszereket elemezni tudjuk. Emiatt, először matematikai leírásokat és ábrázolásokat vezetünk be, melyek elengedhetetlenül fontos részét képezik a jelek és rendszerek analízisének. Majd ezekre építve fejlesztjük tovább foglmainkat és ismereteinket a jelek tulajdonságainak és jellemzőinek mélyebb megértése érdekében.

1.3.1. Jelek (Signals)

Elsődlegesen vezessük be az alábbi alapfogalmakat:

1.1 Definíció: A jelhordozó

Jelhordozónak nevezünk minden olyan fizikai, kémiai és gazdasági változót amely a vizsgált rendszerben szerepel.

1.2 Definíció: Jellemző

Minden olyan jelhordozó amely lényeges az adott rendszerben

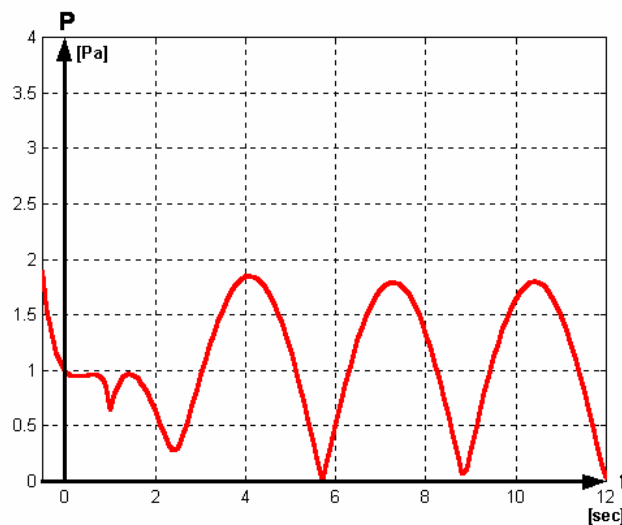
1.3 Definíció: A jel

Jelnek nevezzük a jelhordozó pillanatnyi értékét vagy annak megváltozását.

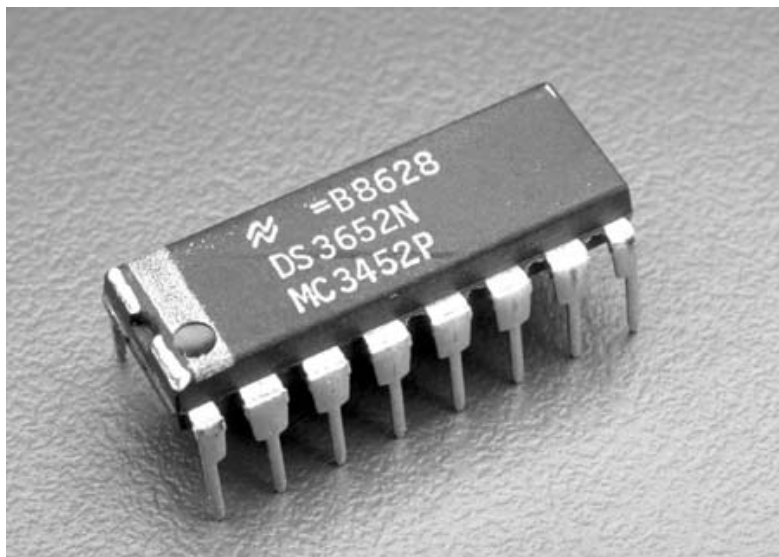
A jelek elég széleskörű fizikai jelenségek sokaságát írhatják le. A jeleket többféleképpen lehet ábrázolni, de minden esetben, a jelben rejlő jellemző változása hordozza az információt, amiről a jelenség viselkedésére, természetére vissza tudunk következtetni. Például az emberi hangképző rendszer úgy generál beszédet, hogy rezegteti a hangszálakat, és ily módon akusztikai nyomás változásokat (fluktuációt) idéz elő. Ezeket a nyomás változásokat nevezhetjük jelen esetben jelnek.

A 2. ábra sémájára, grafikonon ábrázolhatjuk ezeket a nyomásváltozásokat, miután érzékelésük, mérések megtörtént. Egy ilyen mérést könnyen elvégezhetünk például egy mikrofon segítségével. A mikrofonnal az akusztikai nyomást tudjuk érzékelni, és az így felfogott információt a mikrofon feszültség jellé alakítja át. Ezt a feszültség jelet, pedig további feldolgozás gyanánt eltárolhatjuk, vagy továbbíthatjuk, ugyan olyan elvi megfontolások alapján, mint ahogy az emberi hallószervek működnek.

Másik példaként vegyük egy monokromatikus képet, amely a 3. ábrán látható.



2. ábra Akusztikai nyomásváltozások

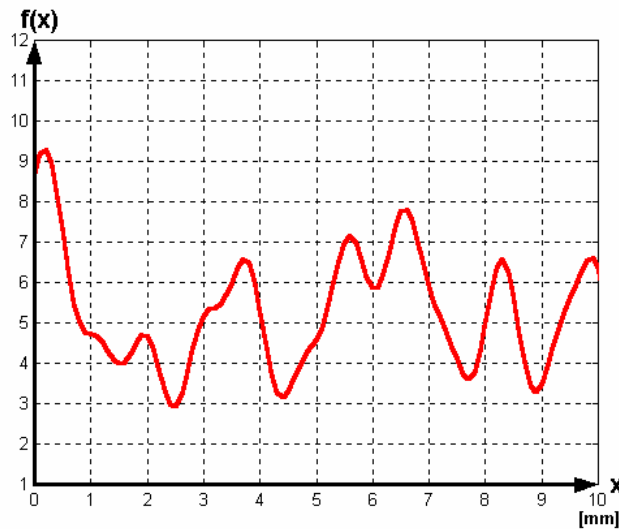


3. ábra Monokromatikus kép

Ebben az esetben a képpontok fényesség változásának mértéke a fontos. Ezen információ hordozónak változását a 2. ábra ábrához hasonlóan szemléltethetjük. Ezt tettük meg a 4. ábrán.

Azonban a jelek leírására nem elég pusztán létezésük ismerete. Ahhoz, hogy egységes leírást tudjunk rájuk bevezetni, mely megfelelő fogalmi és műveleti képességekkel bír, matematikai eszközökhöz kell nyúlnunk. Matematikailag úgy ábrázolhatjuk a jeleket, mint egy vagy több független változónak a függvényeit. Ezen változóknak hatásosnak kell lenniük, azaz megváltozásuktól valamilyen módon függenie kell a jel által hordozott információnak. Erre lehet jó példa a hangjel: Tegyük fel, hogy $p(t)$, az egy pontban mért akusztikai nyomás függvénye az időnek. Mivel az idő előrehaladtával változik a nyomás, az információ átvitelre kerül például a fülünk és a hangszer között. Természetesen tudjuk, hogy a valóságban a mért nyomás nem pusztán az időtől hanem a változást létrehozó hangszertől, a környezettől, a hőmérséklettől és még

számtalan egyéb változótól is függ, de jelen esetben mindezek egységes leírását biztosítja ezen változók hatásainak az idő múlásával való áttanszformálása.



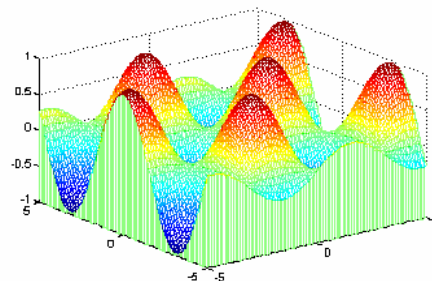
4. ábra Képpontok fényesség változása

Ilyen példa lehet egy pillanatnyi kép is, mintegy fényességfüggvény a dimenzió 2 térbeli változójára nézve:

$$b(x, y) = f(x, y)$$

Mi fejtegetéseinkben általában csak egy független változóval dolgozunk, ami legtöbb esetben az idő t , de más területeken a független változók száma több lehet mint egy, például:

- Geofizikában
 - sűrűség (density)
 - porozitás (porosity)
 - ellenállás (electrical resistivity)
- Meteorológiában
 - légnyomás (air pressure)
 - hőmérséklet (temperature)
 - szélsebesség (wind speed)



5. ábra Többváltozós jel

Az 5. ábra példa ilyen többváltozós jelre. Meteorológiai példát véve a fenti ábra lehet akár a tipikus évi átlagos szélsebesség, mint a magasság függvénye. Az ilyen típusú mérések, és ezek függvényekkénti ábrázolása elengedhetetlen a

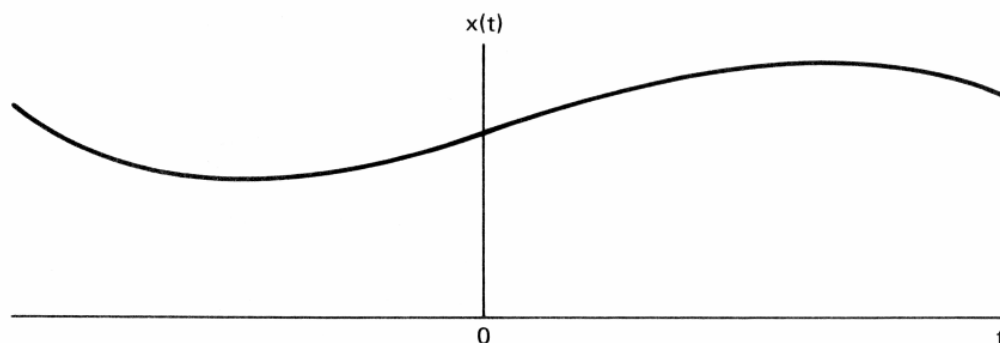
légi közlekedésben, ahol minden magasságon figyelembe kell venni az időminta alapján a szélsőbességet, hisz felszállásnál és leszállásnál ez igen fontos.

1.3.1.1. Jelek csoportosítása

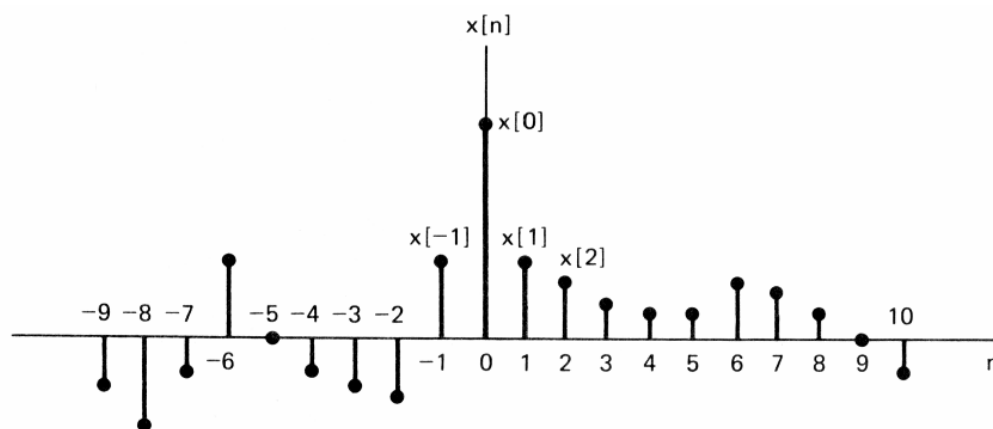
A jelek független változóit matematikailag több féle képen csoportosíthatjuk. Legfőbb csoportosítási módként meg kell különböztetnünk a diszkrét és a folytonos változókat. Azt hogy egy változó diszkrét vagy folytonos minden esetben az dönti el, hogy milyen halmazt tekintünk értékkészletének. A diszkrét változók értékei az egész számok halmazáról kerülnek ki, míg a folytonos változók értékei a valós számok halmazán definiálható intervallumok elemei közül. A változók azon tulajdonságával, hogy milyen intervallumról választják értékeiket a halmazokon belül, nem foglalkozunk.

Ezen elgondolásokra támaszkodva a jeleket két nagy csoportba sorolhatjuk a független változóik alapján:

- **Folytonos változójú jelek.** Olyan jelek, amelyeknek minden független változója folytonos. A mi vizsgálataink szerint az ilyen csupán az időtől folytonosan függő jeleket folytonos idejű jeleknek (Continuous Time Signals) azaz **CT** (jelölés) nevezzük. A folytonos idejű jelek, a saját értelmezési tartományukon belül bármely két időpont között végtelen sok értékre vannak definiálva (folytonosság tulajdonsága), ezért bármely időpontra felvesznek értéket. Ilyen jelle példaként a 6. ábra.



6. ábra Folytonos változójú jel



7. ábra Diszkrét változójú jel

- **Diszkrét változójú jelek.** Olyan jelek amelyeknek minden független változója diszkrét értékű. A mi vizsgálataink szerint az ilyen csupán az időtől diszkrétén függő jeleket diszkrét idejű jeleknek (Discrete Time Signals) azaz **DT** (jelölés) nevezzük. A diszkrét idejű jelek csak diszkrét időkre vannak definiálva, ezért mindig csak meghatározott időközökben vesznek fel értékeket, és az időközök között nem definiáltak. Ilyen jelre mutat példát a 7. ábra.

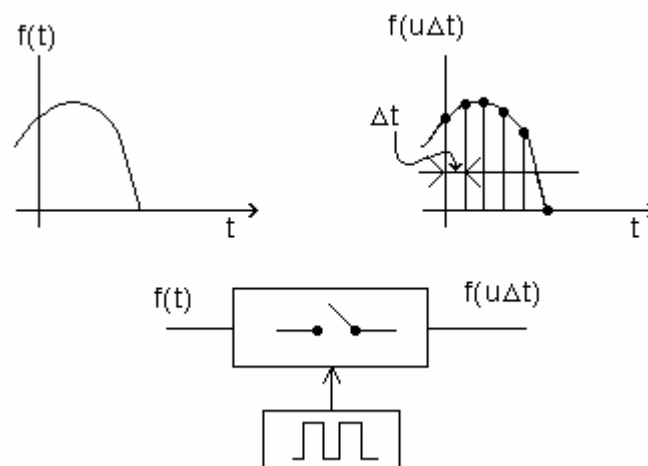
A beszéd hangjele, mint az idő függvénye, vagy a légnyomás mint a magasság függvénye példák folytonos idejű jelekre, de a hetente megjelenő tőzsdei index már a diszkrét idejű jelek osztályába tartozik. Hasonló példákat találhatunk diszkrét jelekre a demográfiai tanulmányokban: iskolázottság, bűnözés, fizetés.

A továbbiakban használjuk az alábbi jelöléseket:

t - folytonos idejű jelek változója. $t \in \mathbb{R}$.

n - diszkrét idejű jelek változója. $n \in \mathbb{N}$.

A diszkrét idejű jelek érdekes tulajdonsága, hogy olyan jelenségeket is le tudnak írni, ahol a független változó az időben folytonos volt, de szukcesszív minta vételezésben részesült. Ilyen mintavételezést mutat be 8. ábra.



8. ábra Szukcesszív mintavételezés

A mintavételezési eljárásokat az alábbi három nagy csoportba sorolhatjuk:

- A jeltől független mintavételezés, ekvidisztáns időközönként. Az ilyen mintavételezést megvalósító rendszert lineáris, rögzített lefolyású mintavevő rendszereknek nevezzük.
- A jeltől függő mintavételezés, amikor a változás sebességének növekedése kiszámíthatatlanul és drasztikusan ingadozik így hol pontosabb, hol kevésbé pontosabb ábrázolást igényel, vagy gazdasági okokból a mintavételezés gyakoriságát valamilyen jellemzőnek a változásához kötjük. Ezeket nem lineáris, jeltől függő mintavevő rendszereknek nevezzük.
- Statisztikai mintavételezés, általában a manuális mintavételezés tartozik ide.

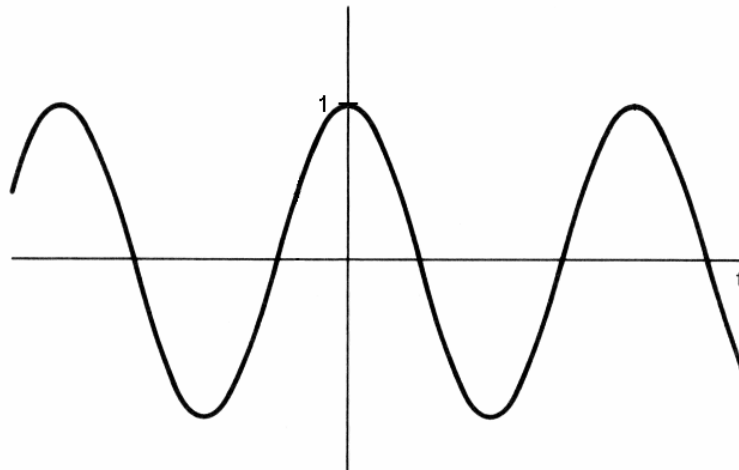
A folytonos és diszkrét jeleket külön, de párhuzamosan fogjuk elemezni, és így ha az egyik elméletében jobban sikerült elmélyedni, akkor a másik megértéséhez is segítséget kaphatunk. A mintavételezésre visszatérünk később.

Tovább vizsgálódva a jelekből felépülő világban láthatjuk, hogy más módon is megkülönböztethetjük őket egymástól, azaz, azok matematikai csoportosítását más úton is megtehetjük.

A jeleket csoportosíthatjuk értékkészletük szerint is, így megkülönböztetünk:

- **Folytonos**

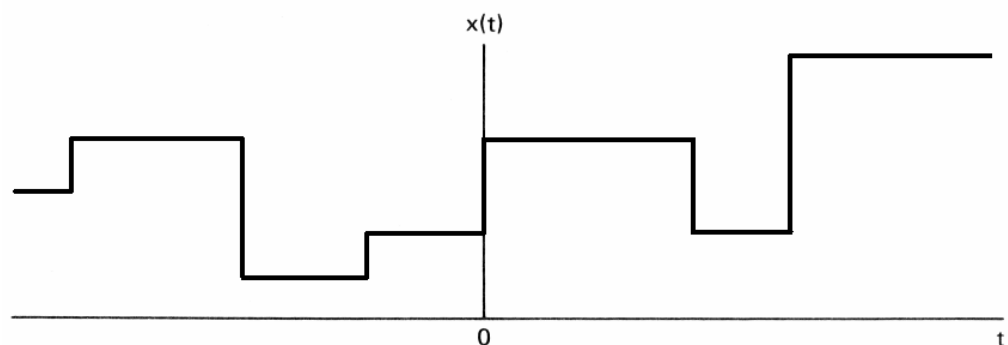
Folytonos értékkészletű jeleknek nevezzük azokat a jeleket, amelyek bármilyen valós értéket felvehetnek egy intervallumon belül, ezért nem definiálható értékkészletük véges halmazként. Például ilyen jel egy egyszerű $f(t) = \cos(t)$ függvény is (9. ábra).



9. ábra Folytonos értékkészletű jel

- **Szakaszos**

Azokat a jelek nevezzük szakaszos értékkészletű jeleknek, amelyek értékeiket csak egy előre meghatározott, véges sok értéket tartalmazó halmazból vehetik fel. Ilyen jelek az ideális bináris jelek, de említhetjük még a konstans, illetve a lépcsős függvényeket is. Ilyen jelre példa a 10. ábra.

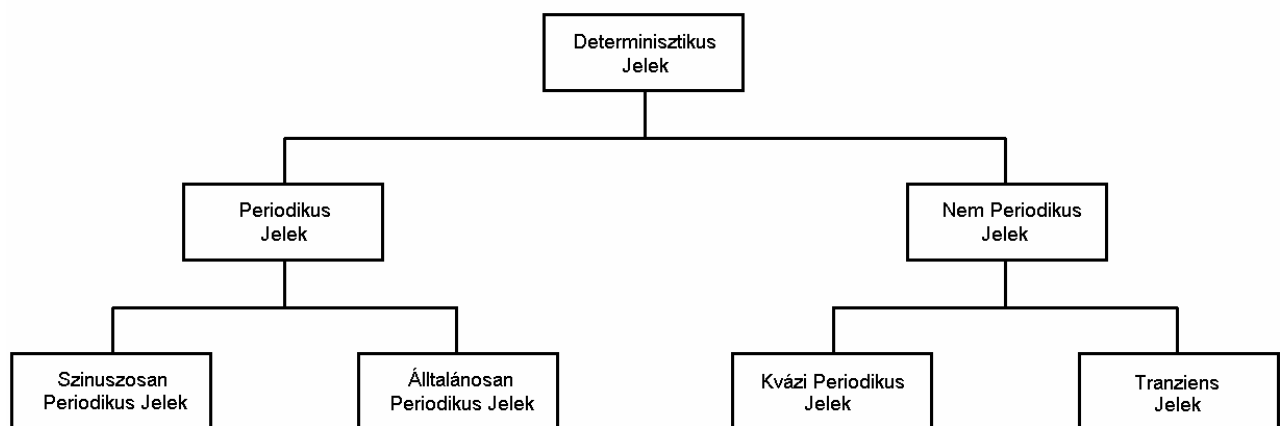


10. ábra Szakaszos értékkészletű jel

Egy újabb csoportosítási lehetőséget ad a jelek határozottsága:

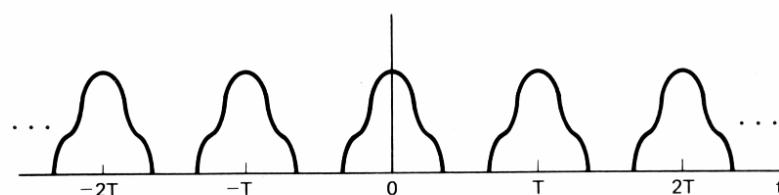
▪ **Determinisztikus**

Determinisztikusnak nevezünk minden olyan jelet, amelyet létrehozó kölcsönhatások a megfigyelő, vagyis az adott rendszer számára egyértelműen és pontosan definiáltak. Ebbe a csoportba tartozik bármely olyan jel, amellyel eddig analízisből vagy a matematika nem valószínűség számításra alapuló részéről foglalkozott a kedves olvasó. Ezen jelek két nagy csoportra oszlanak, a periodikus és a nem periodikus jelek csoportjára. A determinisztikus jelek csoportosítását mutatja be a 11. ábra.



11. ábra Determinisztikus jelek csoportosítása

- **Periodikusnak** nevezünk bármely olyan jelet, amely szabályosan ismétlődő jel részek sorozataként áll elő. Legegyszerűbben úgy definiálhatóak, hogy független változójukon alkalmazott, a jeltől függő T konstans tolás esetén, a jel értékei bármely pontban megegyeznek az eredeti jel értékeivel, azaz $x(t) = x(t + T)$. Erre példa a 12. ábra.



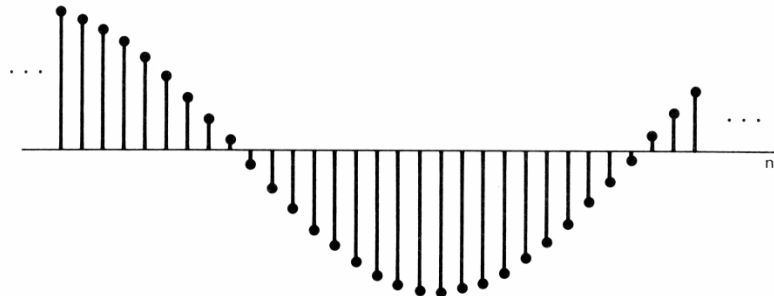
12. ábra Folytonos periodikus jel

Ahol $T > 0$ valós szám. Azt a legkisebb T számot, amelyre ez teljesül a jel *alapperiódusának* nevezzük és T_0 -val jelöljük. Ha a jel periodikus T_0 -val akkor tetszőleges m egész számra igaz, hogy

$$x(t) = x(t + m \cdot T_0), \text{ bármely } t \text{ -re}$$

A periodikusság azonban nemcsak folytonos hanem diszkrét időben is tulajdonsága lehet egy jelnek. Ilyen diszkrét periodikus jel látható a 13. ábrán. Ha viszont periodikus, akkor létezik olyan N természetes szám amelyre:

$$x[n] = x[n + N]$$



13. ábra Diszkrét periodikus jel

Azt a legkisebb N számot amelyre a fenti egyenlet fenn áll a jel *alapperiódusának* nevezzük és N_0 -al jelöljük. Ha a jel periodikus N_0 -al akkor tetszőleges m egész számra igaz, hogy:

$$x[n] = x[n + m \cdot N_0], \text{ bármely } n\text{-re}$$

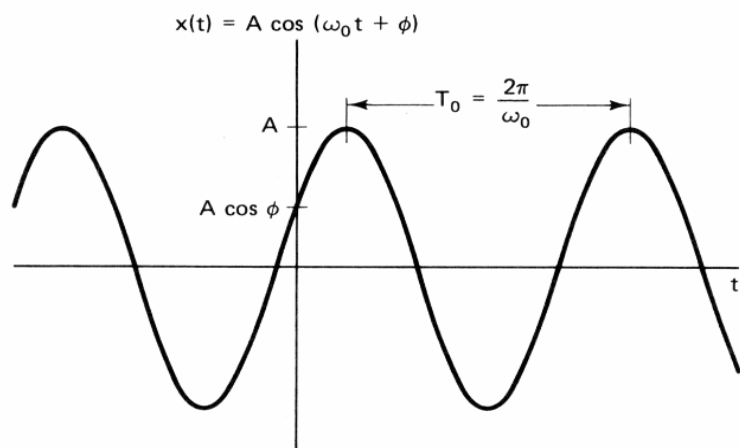
Persze meg kell jegyeznünk, hogy tetszőleges T -re vagy N -re, ha fenn állnak az egyenletek, akkor azok m szorozására is teljesül az egyenlőség. Tehát a jel nem csak az alapperiódusával hanem annak többszöröseivel is periodikus.

Magát a periodikus jeleket két nagy csoportba szedhetjük:

- **Szinuszosan periodikus**-nak nevezzük egy jelet ha folytonos esetben előáll az alábbi alakban:

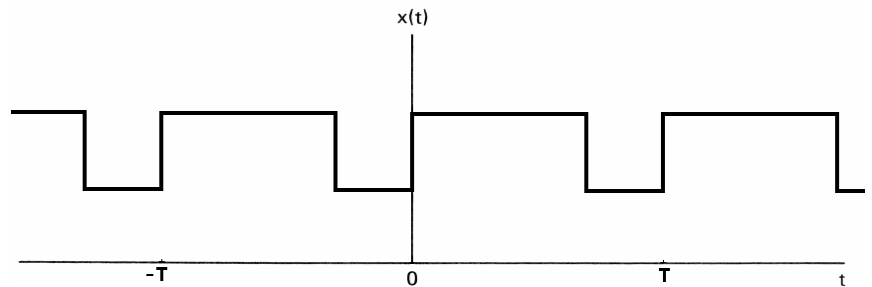
$$x(t) = \operatorname{Re}[A \cdot e^{j(\omega_0 t + \Phi)}]$$

ahol Re a valós részt jelölő függvény, A az amplitúdó, ω_0 az alap körfrekvencia, Φ pedig a kezdőfázis. Ilyen jel látható a 14. ábrán.



14. ábra Szinuszosan periodikus jel

- **Általánosan periodikus** egy jel, ha szinuszosan nem periodikus de létezik olyan $T > 0$ valós szám, hogy: $x(t) = x(t + T)$ bármely t időpillanatban. Ilyen jel a 15. ábrán látható folytonos jel is.



15. ábra Általánosan periodikus jel

Az ilyen jelek felírhatóak az alábbi alakban:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t))$$

$$-\infty < t < +\infty$$

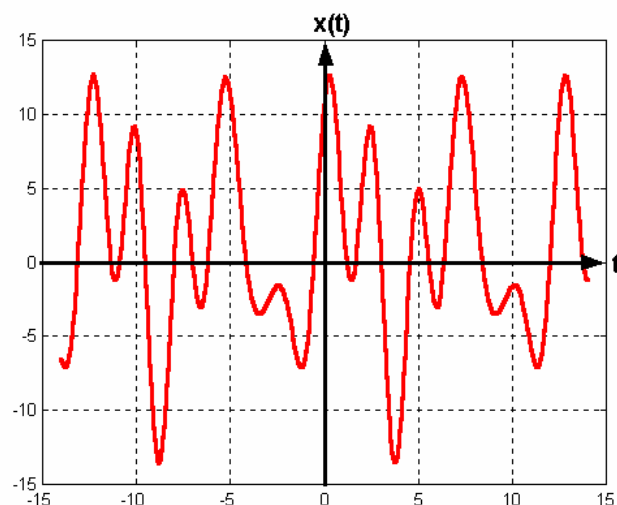
- **Nem periodikus** jelnek nevezünk bármely olyan jelet, amely nem periodikus. Ezeket a jeleket aperiodikus jeleknek nevezzük és az alábbi csoportokba sorolhatjuk.

- **Kvázi periodikus** jelek csoportjába tartozik egy jel, ha az alábbi alakban megadható:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t))$$

$$-\infty < t < +\infty$$

Fontos megjegyezni, hogy a fő különbséget az adja, hogy itt nincs egységes alaphérfvencia, amelynek többszörösein léteznek a felharmonikusok, hanem egyedi hérfvencia komponensek alkotják a spektrumot. Erre példa a 16. ábra.

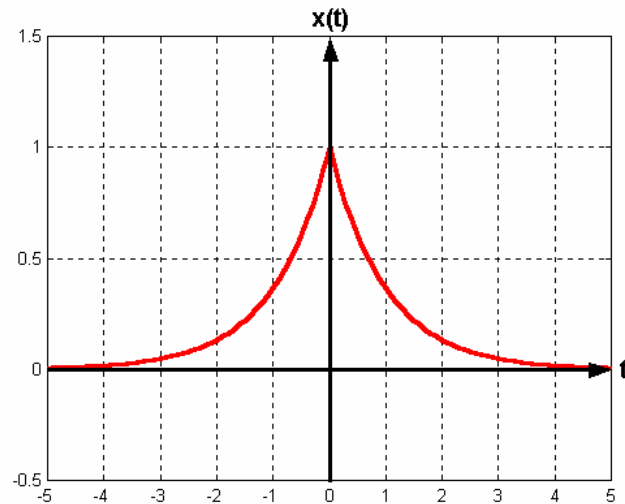


16. ábra Kvázi periodikus jel

- **Tranziens jel**-nek nevezzünk egy jelet ha teljesül rá az alábbi egyenlet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt < \infty$$

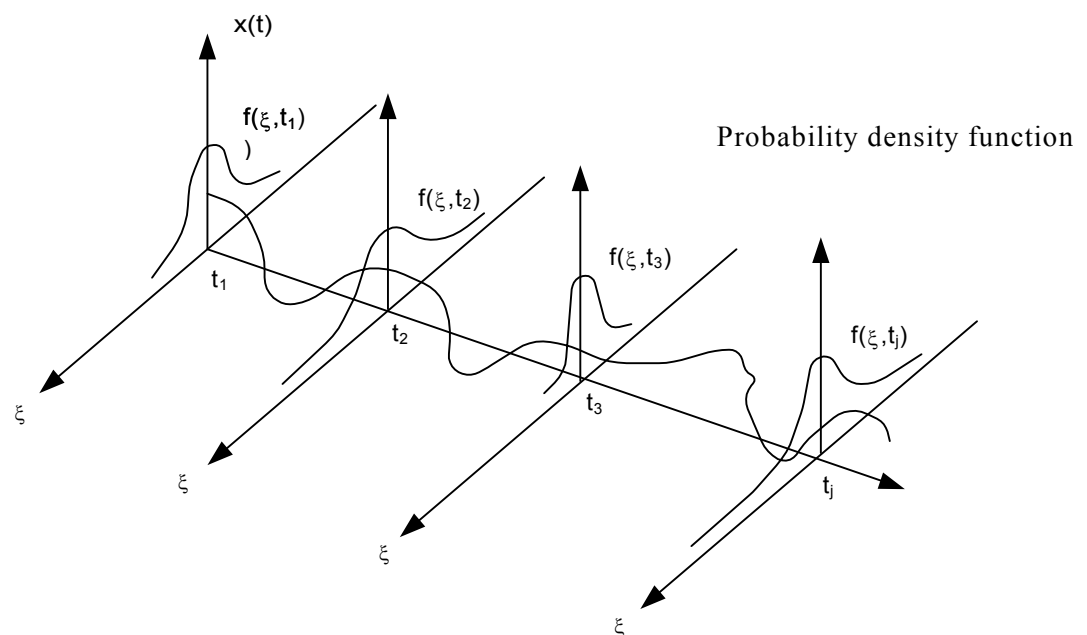
Erre példa a 17. ábra.



17. ábra Tranziens jel

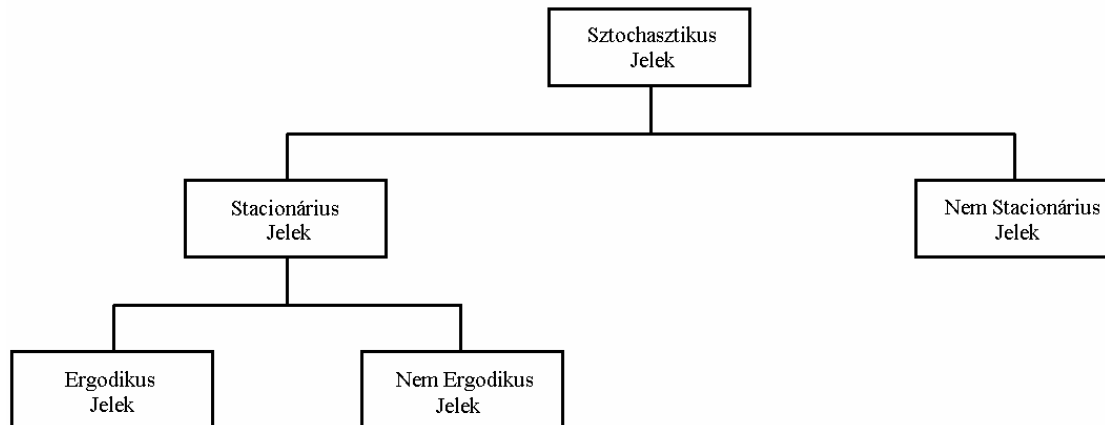
- **Sztocasztikus**

Azokat a jeleket nevezzük sztochasztikusnak, amelyeket létrehozó kölcsönhatások nem, vagy csak részben ismertek a megfigyelő, vagyis az adott rendszer számára. Lehetséges, hogy a jel valójában determinisztikus, de mi mégis sztochasztikusként bányunk vele mivel determinisztikus leírás igen bonyolult lenne. Ilyen jelet mutat be a 18. ábra.



18. ábra Sztocasztikus jel

A sztochasztikus jelek is csoportosíthatóak, mint ahogy azt a 19. ábra is szemlélteti:



19. ábra Sztochasztikus jelek csoportosítása

- **Stacionárius jeleknek** nevezzük azokat a jeleket, amelyek időbeli állandósággal bírnak. A később megismerésre kerülő időinvariancia fogalommal rokon ez a sztochasztikus esetbeli stacionáriusság. Pongyolán fogalmazva: követelmény hogy a folyamat mellyel a jelet leírjuk állandó szórással és várható értékkel rendelkezzen ha létezik szórása és várható értéke.
- **Nem stacionáriusnak** nevezünk minden olyan sztochasztikus jelet amely nem stacionárius.

Az információ megjelenési formája szerint is csoportosíthatunk:

- **Analóg**
Analóg jeleknek nevezzük azokat a jeleket, ahol a reprezentált információ végtelen sokféle képen jelenik meg.
- **Digitális**
Digitális jeleknek nevezzük azokat a jeleket, ahol reprezentált információ valamely előre definiált kódoláson keresztül ábrázolt és jelenített meg, nem maga a jel változása, hanem annak mértéke reprezentálja az információt, az adott ábrázolás értelmében.

1.3.1.2. Műveletek a független változóval

A matematikai leírás során sokszor találkozunk az alábbi problémával. Az adott jel változását valamilyen kiinduló időpontból kívánjuk vizsgálni, azaz például a berendezés beindítása után milyen feszültséget mérünk annak valamelyik kimenetén. Tegyük fel, hogy az itt megjelenő jelet az

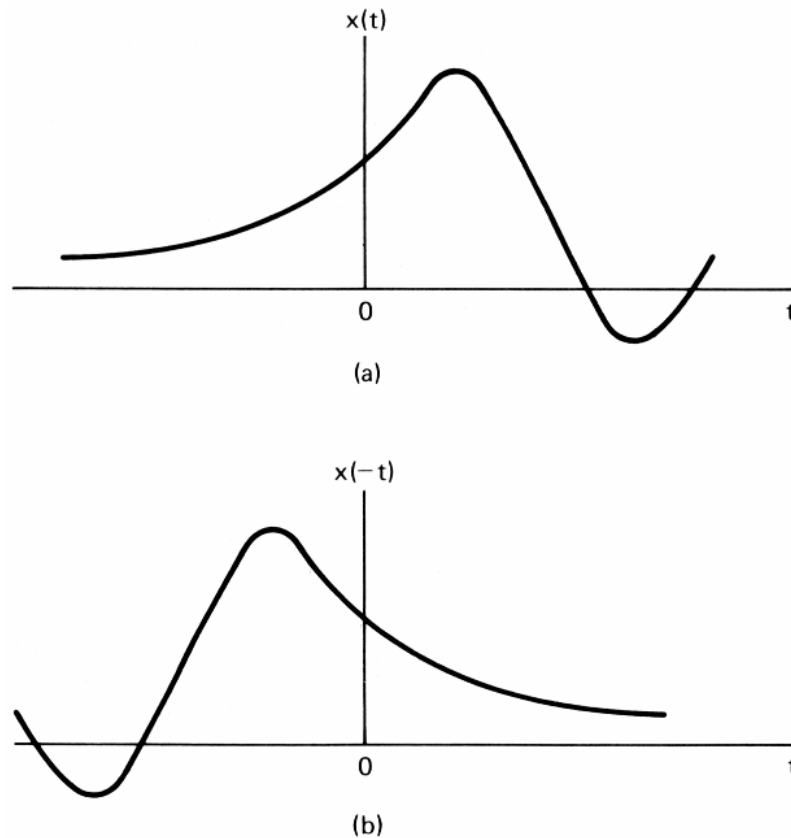
$$x(t) = \cos(t)$$

függvény írja le. Azonban ha mi ezt egy külső időponthoz kívánjuk igazítani, például a ventilátor bekapcsolásának időpontjához, azaz $t=0$ a ventilátor bekapcsolásának idejekor, akkor a $\cos(t)$ jelet megfelelő módon kell korrigálnunk, hogy azaz adott időpontban a helyes értéket mutassa, ezért a független változóját megfelelő nagyságú értékkel el kell tolni. Így látható, hogy csupán ilyen apró probléma máris komolyan indokolja, hogy képesek legyünk a

független változó transzformációjára, hogy a jel a valóságot megfelelően leíró reprezentációjához eljussunk.

1.3.1.2.1. Tükrözés, avagy a független változó előjel váltása

Vannak olyan esetek, amikor a független változó előjelét kell transzformálnunk, például, hogyha $x(t)$ egy audio jel egy kazettán, akkor $x(-t)$ nem más, mint ugyanannak a felvételnek a lejátszása, de visszafelé. Erre példa a 20. ábra.



20. ábra (a) folytonos jel $x(t)$, (b) a jel tükrözése a független változója által

1.3.1.2.2. Tömörítés és nyújtás, avagy szorzás és osztás konstanssal

Ha az előbbi példára gondolunk, akkor

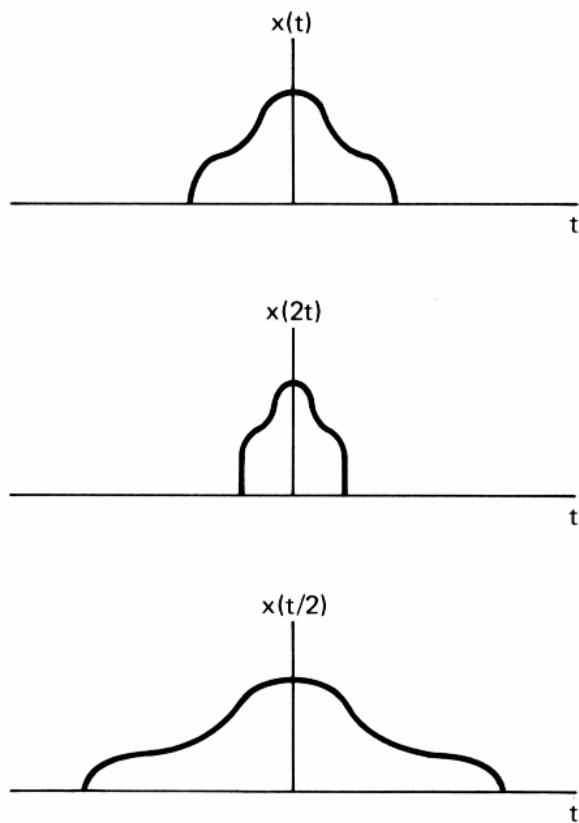
$$x(2t)$$

azt jelenti, hogy dupla sebességgel játszom le a kazettát, míg az

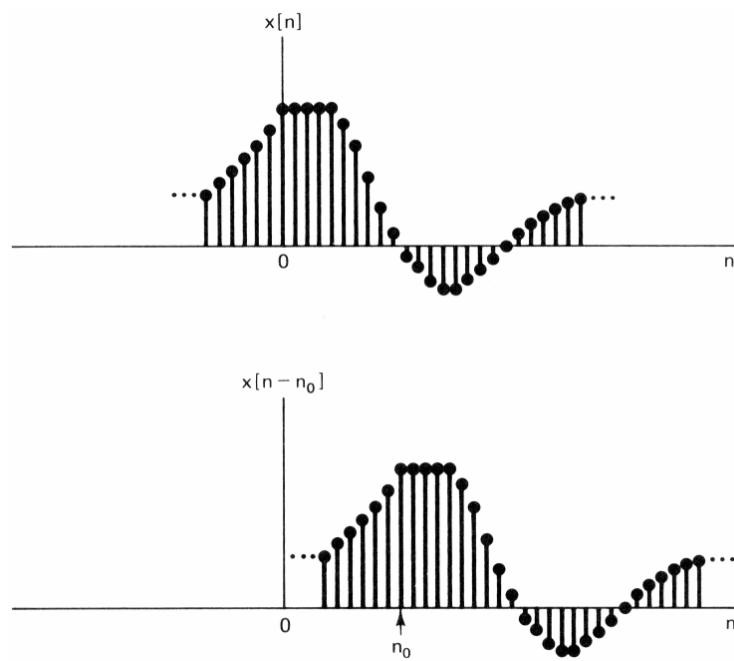
$$x\left(\frac{t}{2}\right)$$

azt, hogy félssebességgel végzem el a lejátszást. Ez alapján tetszőleges c konstanssal szorozva a jel független változóját elmondhatjuk hogy ha

- $|c| > 1$ a jel változási sebességét gyorsítjuk, így a jel 2D koordináta rendszerbe ábrázolva a t tengely mentén zsugorodni látszik (21. ábra)
- Ha viszont $|c| < 1$ akkor a jel változási sebességét lassítjuk, azaz a jel alak szélesedni, hízni látszik. (21. ábra)



21. ábra Folytonos jel tömörítése és nyújtása a független változó skálázása által



22. ábra Diszkrét jel időtolása

1.3.1.2.3. Időtolás, avagy összeadás és kivonás konstanssal

Ha az idő tengely mentén szeretnénk eltolni a jelet, a fenti példa elgondolása alapján, ezt könnyen megtehetjük a jel független változójának és egy konstansnak az összegeként. Így az $x(t)$ jelet t_0 -al késeltetve, azaz a koordináta rendszerbeli szemléletes ábrázolás alapján jobbra tolva kapjuk az $x(t - t_0)$ jelet. Ezt az eltolást mutatja be a 22. ábra.

Azokat a jeleket, amelyeket így fejezünk ki olyan alkalmazásokban használják, mint a szonár, a szeizmikus jelfeldolgozás (seismic signal processing), vagy a radar, ahol a vevők különböző helyeken olyan jeleket érzékelnek, amelyek valamilyen médiumon keresztül hatolnak (víz, kő, levegő). Ezekben az esetekben a jel terjedési idejében keletkező különbségeket kiszámíthatjuk a kibocsátott jel origójától, egy egyszerű időeltolással, a kapott jel és a két vevő által mért jelek között.

1.3.1.2.4. Független változó cseréje

A független változókkal lényegében úgy bántunk, mint a matematikai változókkal. Kicserélhetjük őket tetszőleges más változóra, hogyha fel tudunk írni egy egyenletet az eredeti és az új változó között. Példaként tekintsük az alábbi egyenletet:

$$t = \frac{(u+8)}{4} + \cos(u),$$

ilyen módon a „t” független változót ki tudjuk fejezni, és helyére az egyenlőség jobb oldalát tudjuk illeszteni, míg visszafelé ez már nem lenne lehetséges hisz az „u” változót nem tudjuk kifejezni t által matematikai transzformáció segítségével. Ugyanakkor a független változók cseréjének használata nagyon fontos olyan esetekben, amikor a jelek sajátosabb tulajdonságait próbáljuk meghatározni, mint ahogy ezt az alábbi fogalmak is mutatják.

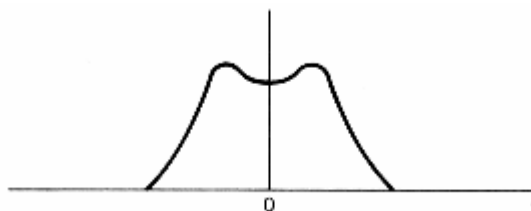
1.4 Definíció: Páros és páratlan jelek

Az $x(t)$ jelet párosnak (even signal) nevezzük, ha az megegyezik az y tengelyre vett tükörképével. Ezt matematikailag megfogalmazva, a jel pontosan akkor páros, hogyha teljesíti az alábbiakat, mind folytonos, mind diszkrét esetben:

$$\text{Ev}\{x(t)\}, \text{Ev}\{x[n]\}$$

$$x(-t) = x(t)$$

$$x[-n] = x[n]$$



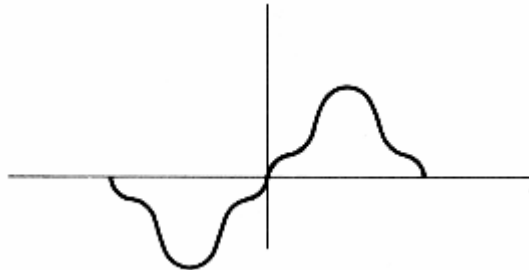
23. ábra Páros folytonos jel

Az $x(t)$ jelet páratlannak (odd signal) nevezzük, ha az megegyezik az origóra vett tükörképével, azaz:

$$\text{Od}\{x(t)\}, \text{Od}\{x[n]\}$$

$$x(-t) = -x(t)$$

$$x[-n] = -x[n]$$



24. ábra Páratlan folytonos jel

A páratlan függvények értéke szükségszerűen 0 a $t = 0$; $n = 0$ időpontban.

A következő állítás igen fontos tény a jelfeldolgozás területén:

1.1 Állítás : Felbontás tétele

Bármely jel szétválasztható páros és páratlan függvények összegére. Két páros, vagy páratlan jel szorzata mindig páros, míg egy páros és páratlan jel szorzata mindig páratlan.

Páros komponense a jelnek:

$$\text{Ev}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

Páratlan komponense a jelnek:

$$\text{Od}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

1.1 Példa: A diszkrét egységugrás jel felbontását láthatjuk a 25. ábrán.

1.3.1.3. Alapvető folytonos jelek

Ebben a fejezetben bevezetésre kerül néhány igen fontos, folytonosidejű jel. Ezek a jelek nem csupán azért fontosak, mert igen gyakran fordulnak elő a természetben, hanem azért is, mert ezek a jelek szolgálnak más jelek építőelemeiként, alapvető részeként. Ebben és a következő fejezetekben látni fogjuk, hogy ezekkel az építő elemekkel létrehozott (felépített) jeleket sokkal könnyebben és mélyebben tudjuk elemezni és megérteni, mind jel és mind rendszer sajátossági szempontból.

Három ilyen alapvető jelet definiálunk:

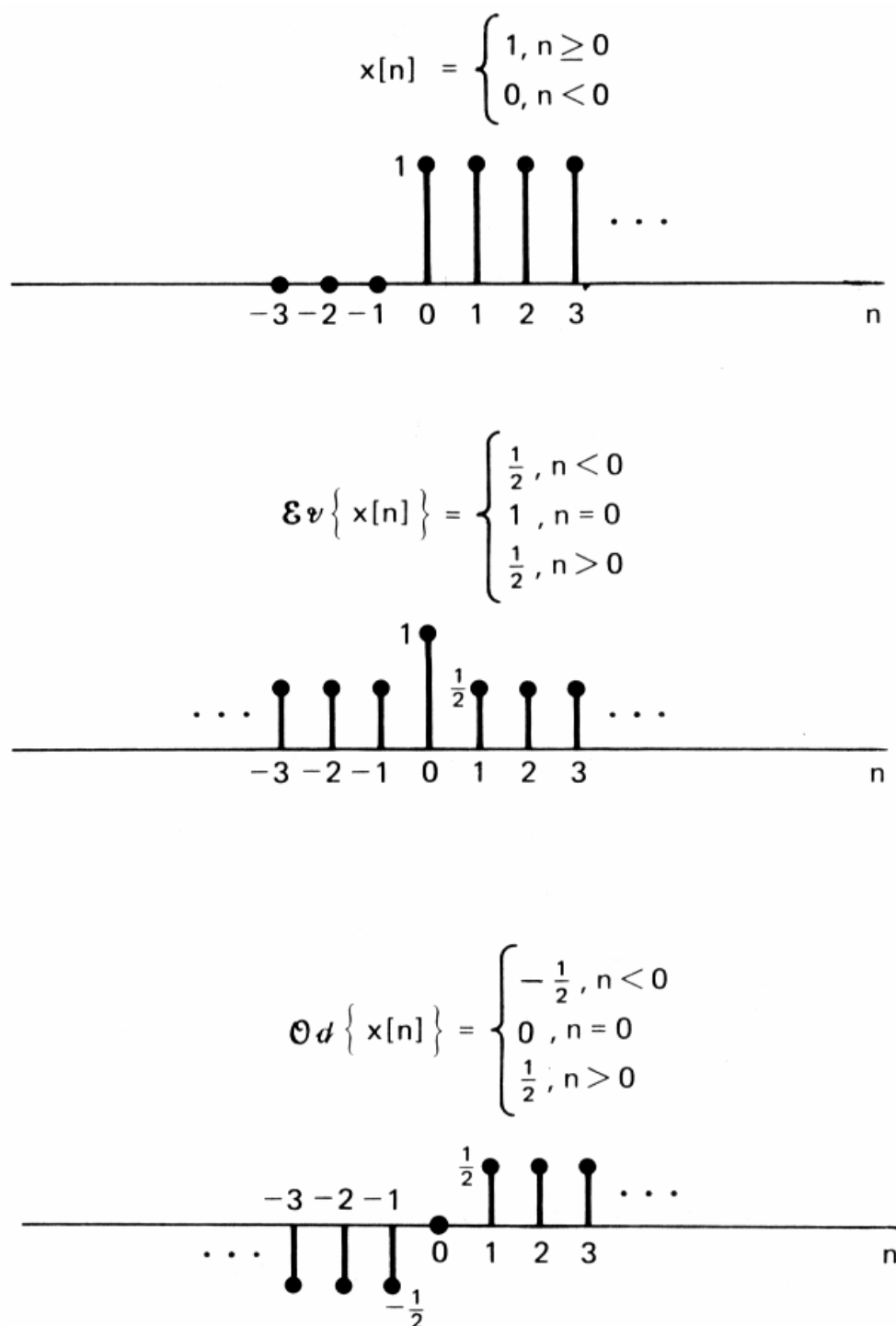
- Folytonos idejű komplex exponenciális függvény
- Egységugrás függvény
- Egység impulzus függvény

1.3.1.3.1. A folytonos idejű komplex exponenciális függvény

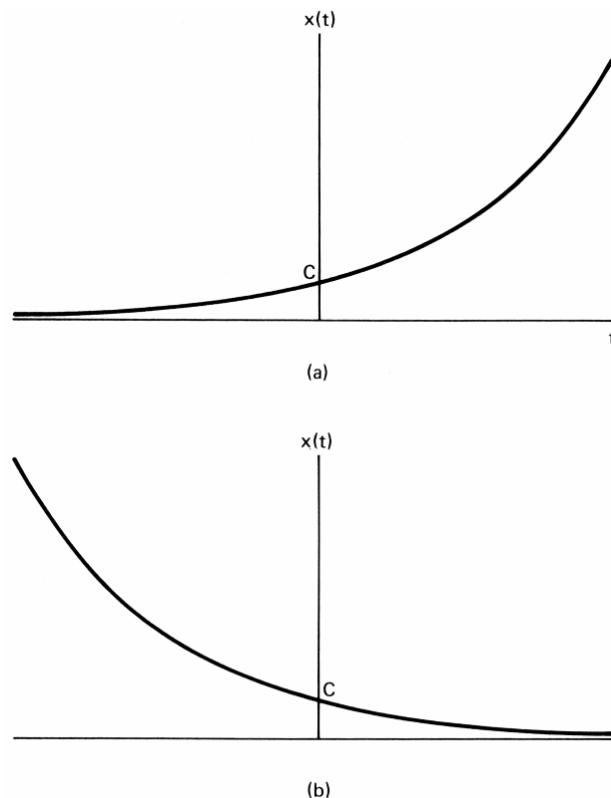
Ezen függvényosztályba tartozó függvények az alábbi képlettel definiálhatóak:

$$x(t) = C \cdot e^{a \cdot t}$$

ahol „C” és „a” valós számok, amelyek mint paraméterek befolyásolják a jel alakját és viselkedését. Ezen paraméterek értékeitől függően a komplex exponenciális jel több karakterisztikát felvehet, ezeket az alakokat a 26. ábrán láthatjuk.



25. ábra A diszkrét egységugrás jel felbontása páros és páratlan komponensre



26. ábra Valós exponenciális jelek (a) $a > 0$ (b) $a < 0$

Ha $a > 0$ akkor a jelet exponenciálisan növekvőnek, ha $a < 0$ akkor exponenciálisan csökkenőnek ha pedig $a = 0$ akkor konstans függvénynek nevezzük.

Ezek a függvények sok a természetben előforduló jelenséget leírnak, mint:

Exponenciálisan növekvő	Exponenciálisan csökkenő
populáció szám atomrobbanásakor	radioaktív bomlás
komplex kémiai reakciók	RC áramkör válasza
ideális önvisszacsatolás	csillapított mechanikai rendszerek

Azonban az „a” paraméter értékének választhatunk komplex számot is így kapva komplex exponenciális függvényt.

$$x(t) = C \cdot e^{(a+jb) \cdot t}$$

Ha viszont teljesen imaginárius lesz a választott „a” paraméterünk akkor az exponenciális jelek egyik igen fontos csoportjához érkezünk el.

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

Ebben az esetben tudjuk matematikából, hogy:

$$x(t) = e^j = 1$$

ha $\omega_0 = 1/T$ -re választjuk akkor

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T} = e^{j\omega_0 t}$$

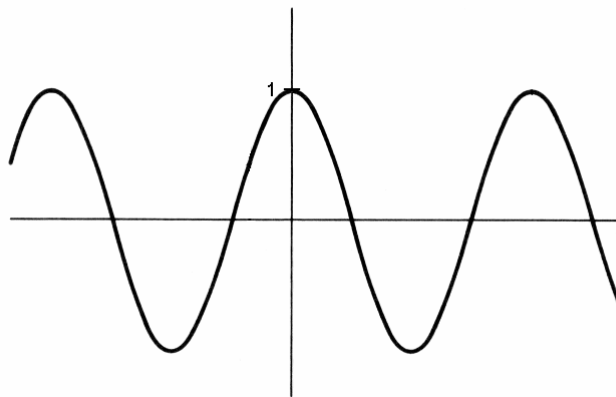
mivel, $e^{j\omega_0 T} = 1$

Így beláttuk hogy ez a jel periodikus, mégpedig $T_0 = 1/\omega_0$ alapperiódussal. Az ilyen jeleket szinuszosan periodikus jeleknek nevezzük, mivel Euler képlete szerint:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j \cdot \sin\omega_0 t$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{+j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}, \quad \cos(\omega t) = \frac{e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

Ezen elgondolások alapján a komplex exponenciális jeleket szinuszos jeleknek tudjuk megfeleltetni. A legegyszerűbb ilyen jelre példa lehet a 27. ábrán ábrázolt $\sin(t)$ függvény.



27. ábra Szinusz függvény

Definiálhatjuk az alábbi fogalmat is:

1.5 Definíció: Frekvencia

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

Ami a ciklusok másodpercenkénti gyakoriságának mérő száma, tehát azt jelenti, hogy hány periódus játszódik le másodpercenként. Mértékegysége Hz (Hertz).

Szinuszos és a komplex periodikus exponenciális jeleket elég sok fizikai folyamat jellemzésére használják:

- Egy LC áramkör válasza szinuszos. Mivel ez az elektronikai elrendezés egy rezgőkört alkot, ahol az energia a tekercsből átvándorol a kondenzátorba és fordítva, közben szinuszos rezgést hozva létre az ide-oda vándorlás hatásaként.
- Egy rugóhoz rögzített test szinuszosan csillapodó harmonikus rezgőmozgást végez.
- Az akusztikus nyomásváltozás, mely egy zenei hangnak felel meg ugyancsak egy szinuszos rezgő mozgás

Bármely szinuszos jel felírható periodikus komplex exponenciálisokkal, ugyancsak az alap periódusra nézve:

$$A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 t}$$

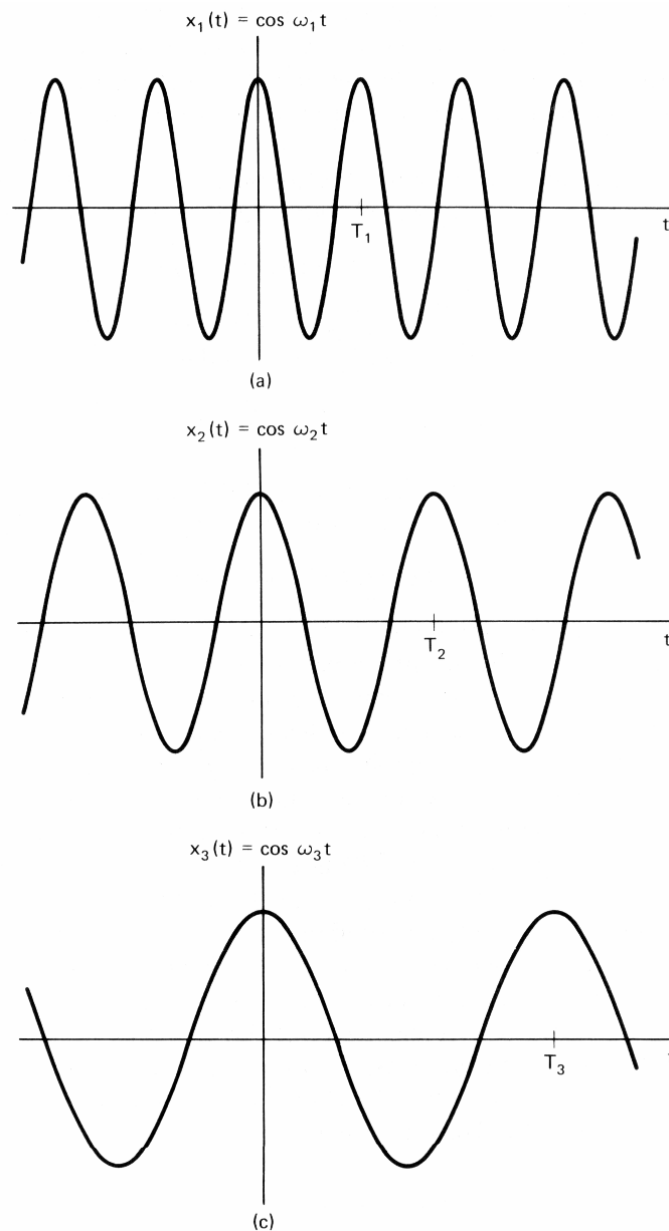
Látszik, hogy a két exponenciálisnak komplex együtthatói vannak. Kifejezhetjük a szinuszos jeleket komplex exponenciális jelekkel is:

$$A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cdot \operatorname{Re} \{ e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \}$$

$$A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) = A \cdot \operatorname{Im} \{ e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \}$$

ahol ha c egy komplex szám, akkor $\operatorname{Re}\{c\}$ a szám valós részét, míg $\operatorname{Im}\{c\}$ a c komplex szám imaginárius részét jelöli.

Megismertük, hogy T_0 alap periódusa egy folytonos idejű szinuszos jelnek, vagy egy periodikus komplex exponenciálisnak, fordítottan arányos az $|\omega_0|$ -al, amit a jel alappfrekvenciájának nevezünk. A 28. ábrán példát láthatunk különböző alapperiódusú jelekre:



28. ábra Különböző alappfrekvenciájú periodikus jelek,
 $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$, azaz $T_1 < T_2 < T_3$

A továbbiakban a periodikus komplex exponenciálisok központi szerepet fognak játszani a jelek és rendszerek tárgyalásában, mivel a folytonos jelek felbonthatóak ilyen exponenciális függvényekre, ha segítségül vesszük a másik két elemi függvényt is, ami a következő részben kerül definiálásra.

Elég sok esetben hasznos a harmonikusan kapcsolt (harmonically related) komplex exponenciálisok fogalmának a bevezetése, ami nem más, mint a periodikus exponenciálisok olyan alapfrekvenciákkal való felírása, amely többszöröse egy pozitív ω_0 frekvenciának:

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ha $k = 0$, akkor $\varphi_k(t)$ konstans értékű jel. Bár a definíció szerint ez is periodikus jelnek számíthatna 0 alapperiódussal, azonban az egyértelműség kedvéért mégsem nevezzük ezen jeleket periodikusnak, mivel ez értelmezési problémákat szülne. Azonban minden más értékre a k -nak, $\varphi_k(t)$ periodikus a $2\pi/(|k| \cdot \omega_0)$ periódussal vagy $|k| \cdot \omega_0$ alapfrekvenciával.

A „harmonikus” szónak, vagy terminusnak, a használata megfelel például a zenében használatos fogalomnak, ahol a tónusokat fejezik ki általa, mely az akusztikus nyomás változásából harmonikusan kapcsolt frekvenciákon keletkezik. Tehát legáltalánosabban a komplex exponenciális kétféleképpen interpretálható:

- valós exponenciális,
- komplex periodikus exponenciális, ami tisztán imaginárius kitevőjű.

Egy tetszőleges komplex exponenciális függvény felbontható harmonikusan kapcsolt alakra. Ez esetben

$$C = |C|e^{j\theta}$$

és

$$a = r + j\omega_0$$

Tárgyaljuk ezt a képletet r szerint:

$$Ce^{at} = |C|e^{j\theta}e^{(r+j\omega_0)t} = |C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

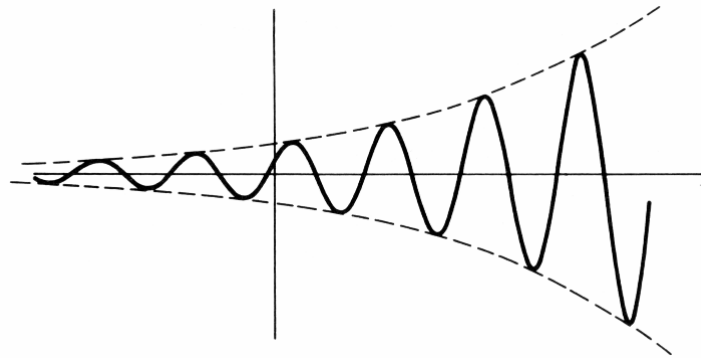
Tehát a valós és imaginárius része a komplex exponenciális függvénynek szinuszoidális.

$$Ce^{at} = |C|e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt} \sin(\omega_0 t + \theta)$$

$$Ce^{at} = |C|e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt} \cos\left(\omega_0 t + \theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

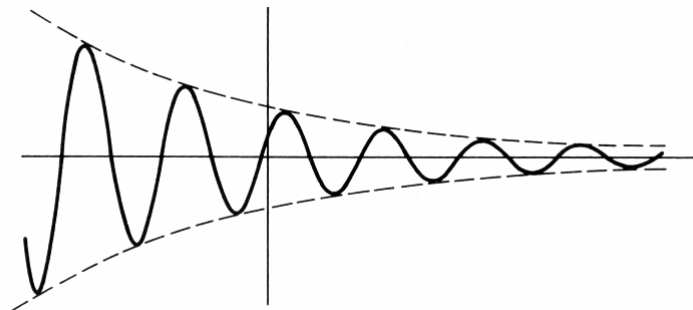
Viszont egy szinuszoidális jel megszorozva egy növekvő exponenciálissal ugyancsak harmonikus exponenciális jelet ad. (29. ábra)

$$x(t) = Ce^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta), \quad r > 0$$

29. ábra Növekvő szinuszoidális, $r > 0$

Egy szinuszoidális jel megszorozva egy csökkenő exponenciálissal is harmonikus exponenciális jelet ad. (30. ábra)

$$x(t) = Ce^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta), \quad r < 0$$

30. ábra Csökkenő szinuszoidális, $r < 0$

Látható, hogy Ce^{rt} a komplex exponenciális nagyságát, avagy amplitúdóját adja meg. Ezért a szaggatott vonalak, azaz ezen függvény értékei, gyakorlatilag burkoló görbéi a szinuszos rezgésnek, olymódon, hogy az oszcilláció csúcsai épp, hogy megérintik a burkológörbét. Ily módon láthatóvá válik az oszcilláció amplitúdó nagyságának változása az idő előrehaladtával.

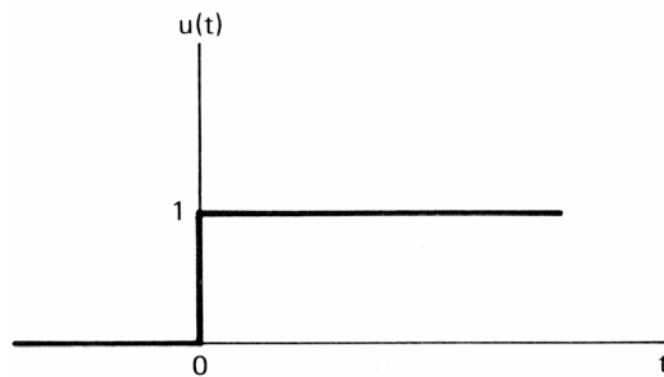
Egy szinuszoidális jel megszorozva egy csökkenő exponenciálissal egy csillapítót (damped sinusoid) szinuszos rezgést ad. Erre a típusú jelre jó példa az elektromos hálózatokból, már igen jól ismert RLC körök válasza, vagy olyan mechanikai rendszereké, ahol a csillapító és visszaható erők egyszerre léteznek, mint például az autó felfüggesztési rendszere.

1.3.1.3.2. A folytonos idejű egységugrás függvény

A jelfeldolgozás területén rendkívül fontos jel az egységugrás függvény. Az egységugrás függvény leginkább egy ideálisan működő kapcsoló kimenetét írja, le ha a bekapcsolás pontosan $t = 0$ -ban történik. A bekapcsolás előtt a kimenet 0 majd a bekapcsolás után pedig 1. A bekapcsolás közben, azaz $t = 0$ -ban a függvény matematikailag nem definiált, azonban mi a továbbiakban úgy vesszük, hogy itt is értelmezett és értéke 1. Így a kapcsolási jelenség 0 idő alatt játszódik le. A fenti módon leírt függvény tehát:

$$f(t) = 1(t) = u(t)$$

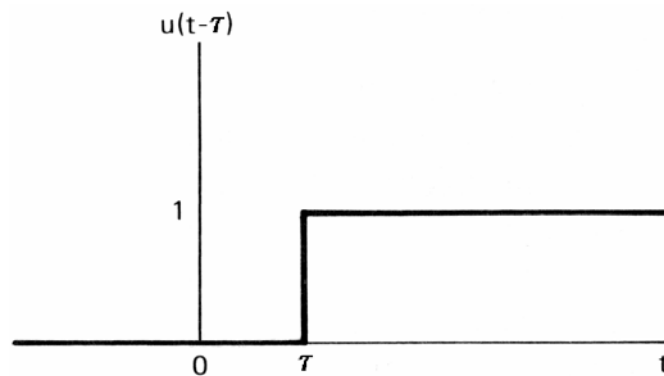
$$u(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ 1; & t \geq 0 \end{cases}$$



31. ábra Folytonos idejű egységugrás függvény

Természetesen alkalmazhatunk az így bevezetett függvényre időtolást, azaz a bekapcsolás idejét nem feltétlenül kell a $t = 0$ időponthoz kötni. Legyen most ez $\tau > 0$ időpontban. Ekkor:

$$f(t) = u(t - \tau)$$

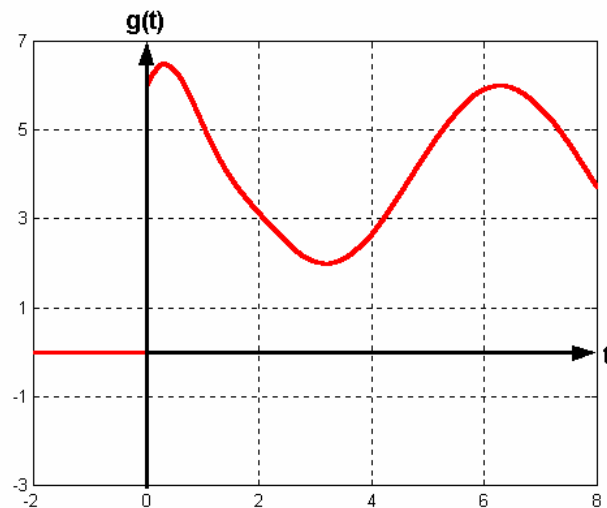


32. ábra Eltoló folytonos idejű egységugrás függvény

Azonban a bekapcsolási jelenségek után ritkán jön létre 1 értékű konstans jel, így ha az $1(t)$ függvényt $c = \text{konstans}$ értékkel szorozzuk akkor tetszőleges konstans függvényben folytatódhat tovább a jel, a bekapcsolás időpontja után. Viszont nem csak konstans értékkel szorozhatunk, tetszőleges $f(t)$ folytonos függvényre, is értelmezhetjük a

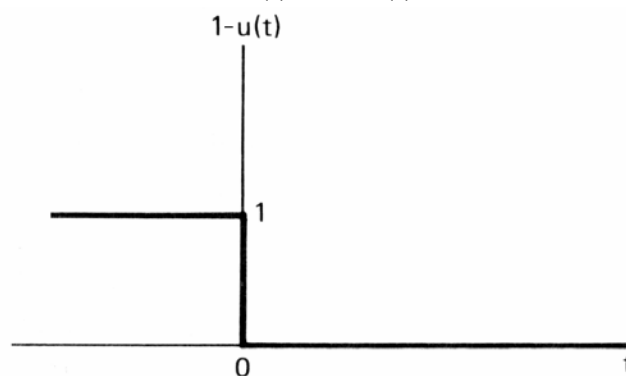
$$g(t) = f(t) \cdot u(t - \tau)$$

úgynevezett bekapcsolási jelenséget. Erre láthatunk példát a 33. ábrán.

33. ábra Példa a $g(t)$ függvényre

De ugyanígy értelmezhetjük a kilépő függvényt is (34. ábra) amelyre:

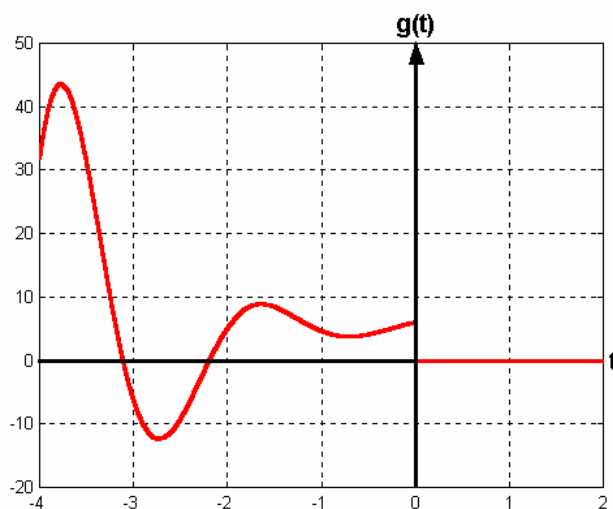
$$f(t) = 1 - u(t)$$



34. ábra Folytonos kilépő függvény

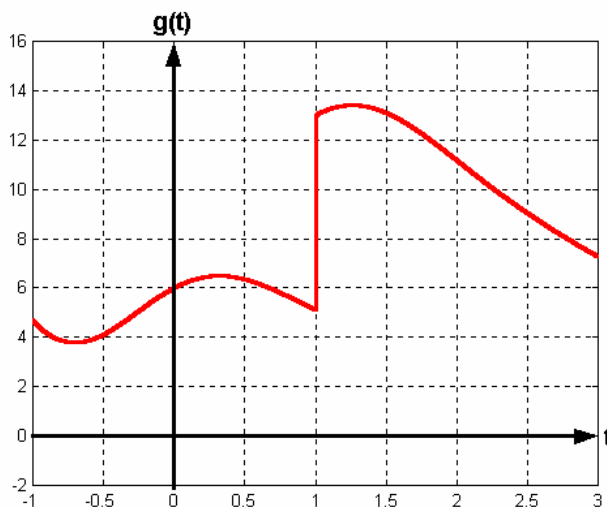
Természetesen tetszőleges $f(t)$ folytonos függvényre, is értelmezhetjük a kilépő függvény által definiált kikapcsolási jelenséget (35. ábra):

$$g(t) = f(t) \cdot (1 - u(t))$$

35. ábra Példa az $f(t)$ függvényre

Így definiálhatjuk az átvitelt okozó függvényt, amely az átkapcsolás jelenségét írja le ideális esetben. Ha $f_1(t)$ és $f_2(t)$ folytonos függvények akkor:

$$g(t) = f_1(t) \cdot (1 - u(t - \tau)) + f_2(t) \cdot (u(t - \tau))$$



36. ábra Példa a $g(t)$ függvényre, $\tau = 1$ esetén

A következőkben vizsgáljuk meg a függvény matematikai tulajdonságait. Az $u(t)$ egységugrás függvény a $t = 0$ időpont, kivételével mindenhol deriválható matematikai értelemben, és deriváltja mindenhol 0. Mivel $t = 0$ -ban a deriváltja $+\infty$ lenne, hisz 0 időegység alatt ugrik fel 1-re, ezért az analízis szabályai szerint itt nem létezik a deriváltja. Azonban bevezetvén egy formális deriváltat, mely megengedi az ilyen véges ugrással rendelkező függvények deriválását, az $u(t)$ függvény derivált függvényeként olyan függvényt kapunk, amely mindenhol 0 értékű kivéve a $t = 0$ pontot ahol értéke $+\infty$. Ezt nevezzük Dirac-delta függvénynek, avagy egység impulzus függvénynek.

1.3.1.3.3. Egység Impulzus függvény

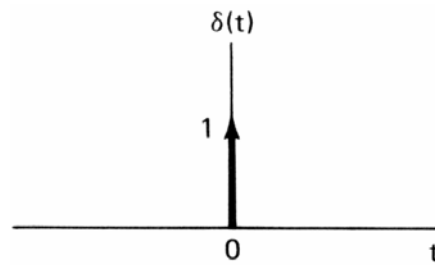
Az előbbieket alapján tehát, ha a formális deriválást „'” szimbólum jelöli akkor, tetszőleges véges ugrásokkal rendelkező $f(t)$ függvényre:

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{df(t)}{dt}, & \text{ha létezik a deriváltja a } t \text{ pontban} \\ \pm\infty, & \text{ha véges ugrást végez a } t \text{ pontban} \end{cases}$$

Így értelmezhetjük $u(t)$ formális deriváltját (a könyv későbbi részeiben a deriválás alatt formális vagy matematikai deriválást értünk az ott értelmezett függvény tulajdonságai értelmében):

$$u'(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \neq 0 \\ 1, & \text{ha } t = 0 \end{cases} = \delta(t)$$

Ezt a derivált függvényt, $\delta(t)$ nevezzük Dirac-deltának, vagy egység impulzus (unit impulse) függvénynek, amit a 37. ábrán láthatunk.



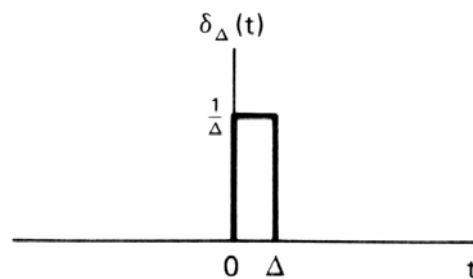
37. ábra Egység impulzus függvény

A fent említettek alapján bevezethetünk egy formális integrálást is, ami szerint:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(s) ds$$

Bizonyítsuk be a fent említett műveletek és állítások létezését:

Definiáljuk először is a $\delta(t, \tau)$ függvényt, azaz a egységnyi intenzitású impulzust:



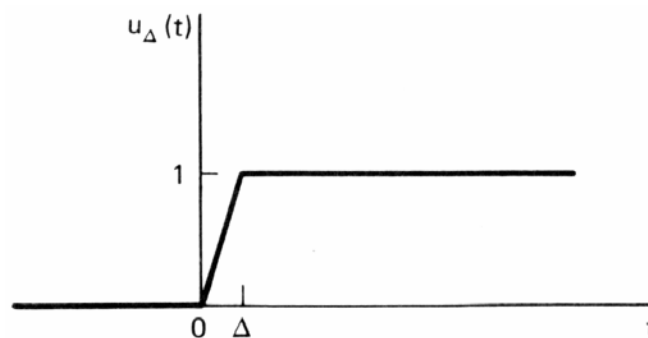
38. ábra Egységnyi intenzitású impulzus függvény

Ezt a függvényt levezethetjük az alábbi módon:

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{\tau} [u(t) - u(t - \tau)]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t, \tau) dt = 1$$

Ugyanígy definiálhatjuk az $u(t, \tau)$ függvényt is:



39. ábra Egység ugrás függvény közelítése

Ekkor az alábbiak következnek:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u(t, \tau) = u(t)$$

$$1(t, \tau) = \int_{-\infty}^t \delta(s, \tau) ds$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} 1(t, \tau) = 1(t) = \int_{-\infty}^t \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta(s, \tau) ds$$

$$1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(s) ds$$

amivel az állításokat igazoltuk.

Most tekintsünk végig a $\delta(t)$ függvény tulajdonságait:

1.2 Állítás:

Tetszőleges folytonos $f(t)$ függvény esetén: $f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t)$

Bizonyítás:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} f(t) \cdot \delta(t, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f(t) \cdot \frac{1}{\tau} [u(t) - u(t - \tau)] = f(0) \cdot \delta(t)$$

1.3 Állítás:

Tetszőleges k valós konstans értékre: $\int_{-\infty}^t k \cdot \delta(s) ds = k \cdot u(t)$

1.4 Állítás: Futó integrálási szabály

Tetszőleges változó csere esetén, ha $\sigma = t - \tau$, akkor a $\delta(t)$ függvényre igaz, hogy

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{\infty}^0 \delta(t - \sigma)(-d\sigma)$$

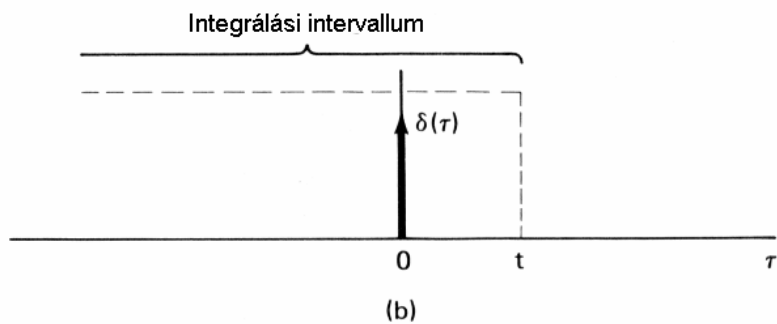
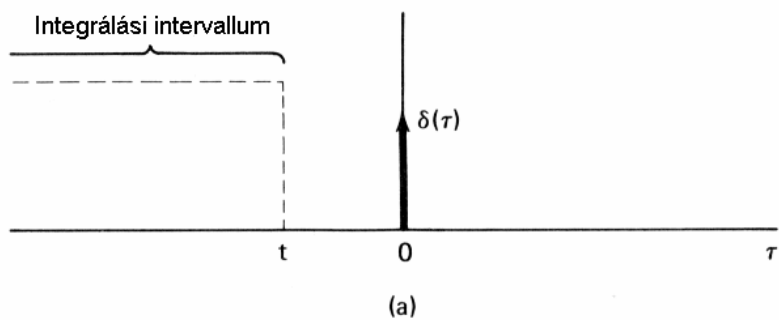
és ebből adódóan, egyszerű transzformációval máris látható, hogy:

$$u(t) = \int_0^{\infty} \delta(t - \sigma) d\sigma$$

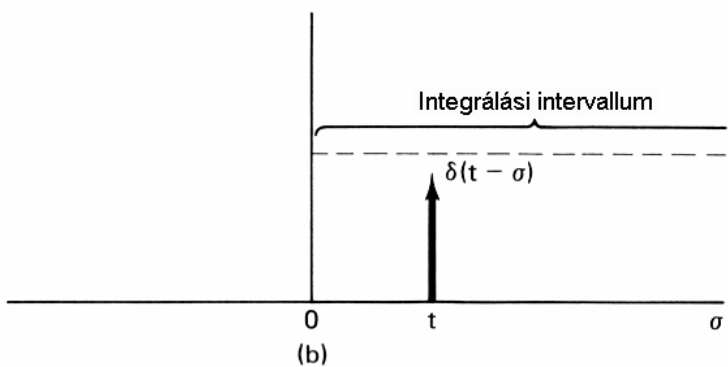
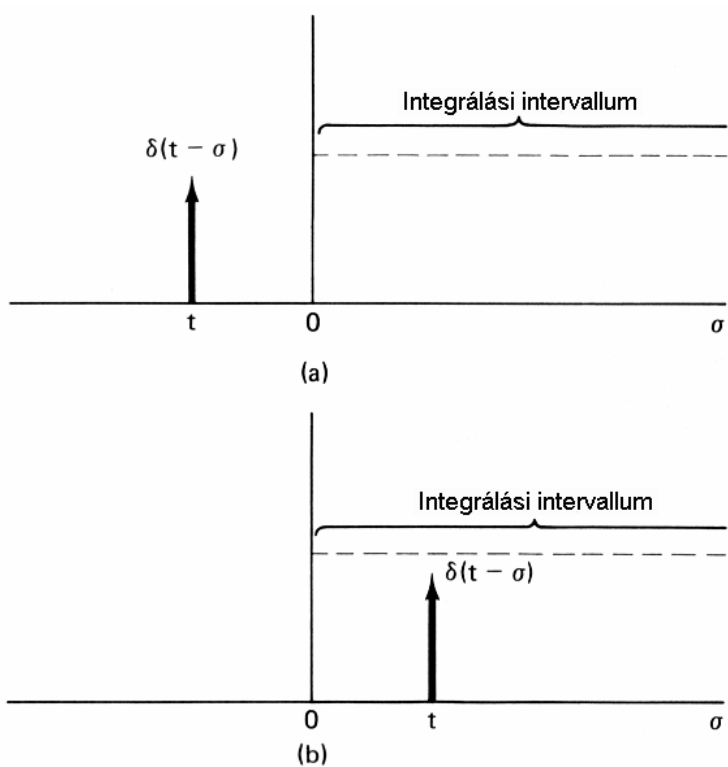
Ennek a 40. ábrán bemutatott grafikus értelmezésén jobban látható az állítás lényege.

Látható, hogy az időben folytonos egység impulzus területe a $\delta(\tau)$ köré koncentrálódik, ezért az integrál értéke 0, ha $t < 0$, és 1, ha $t > 0$.

Ha most végrehajtjuk a $\sigma = t - \tau$ változócsereét akkor látható a 41. ábrán, hogy az egység impulzus függvény területe a σ pontban koncentrálódik. Tehát most is látható, hogy ha $t < 0$ az integrál 0 és ha $t > 0$, akkor az integrál 1. (Később ezt a fontos tételt használni fogjuk a konvolúciós feladatok megoldásánál !)



40. ábra Futó integrálás, (a) $t < 0$, (b) $t > 0$ esetben



41. ábra Változó csere hatása a futó integrálra, (a) $t < 0$, (b) $t > 0$ esetben

1.5 Állítás:

Bármely $f(t)$ folytonos jel felírható az alábbi alakban:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\delta(t-s)ds$$

Bizonyítás:

Mivel az integrálás felírható egy végtelen finomságú összeg határértékén, ezért észrevehető, hogy az integrálás során a $\delta(t-s)$ függvénnyel lényegben végigpásztázunk minden valós pontot az intervallumon. Ha azonban egy ilyen $\delta(t-s)$, eltoló Dirac függvényt, megszorozzunk egy $f(t)$ függvénnyel, akkor a szorzat függvény úgyis csupán az s pontban lesz nem nulla értékű, így minden s -re definiálva a szorzást és ezek szummájának a határértékét véve megkapjuk a fent említett képletet.

1.3.1.4. Alapvető diszkrét jelek

Diszkrét időben is fontos az alapfüggvények ismerete, mivel ezek segítségével bármely jel megkonstruálható a diszkrét idő tartományon, és emiatt igen fontos szerepet játszanak a jelek és rendszerek analízisében. Ezek a jelek egyenes megfelelői az időben folytonos alap jeleknek, és mint látni fogjuk jó néhány tulajdonságuk analóg módon megtalálhatóak a folytonos idejű jelek tulajdonságai között. Mégis van néhány lényeges különbség diszkrét időben, amelyekre rámutatunk, miközben vizsgáljuk ezen jelek tulajdonságait.

1.3.1.4.1. Diszkrét egységugrás függvény

Diszkrét egységugrás függvénynek hívjuk az alábbi képlettel megadott függvényt:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



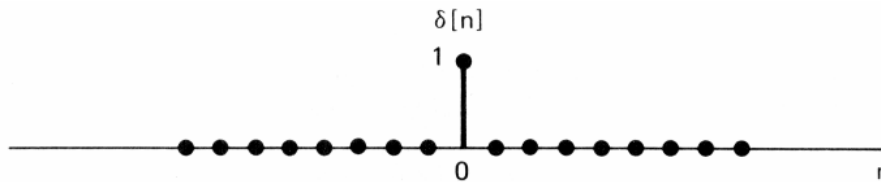
42. ábra Diszkrét egységugrás függvény

Mint láthatjuk, ezen jel nagyon sok rokonságot mutat a folytonos idejű egységugrás jellel. Valójában megfeleltethetjük annak mintavételezett képének a diszkrét időtartományban.

1.3.1.4.2. Diszkrét egység impulzus függvény

A másik nagyon fontos folytonos idejű jelünk: az egység impulzus megfelelője diszkrét időben a diszkrét idejű egység impulzus jel (unit sample), más matematikai elnevezés szerint: Kronecker Delta.

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



43. ábra Diszkrét egység impulzus függvény

Itt nincsenek olyan analitikai problémáink a $\delta[n]$ definíciójával kapcsolatban, mint folytonos időben. Tulajdonságai nagyjából azonosak a folytonos idejű impulzus jelével:

$$x[n] \cdot \delta[n] = x[0] \cdot \delta[n]$$

Az előbbieken tárgyaltak alapján megismertük, hogy a folytonos idejű egységugrás formális deriváltja az impulzus függvény. Diszkrét időben azonban a deriválás fogalma más mint folytonos időben. Itt is a függvény érték növekedés és csökkenés mértékét adja meg, de míg folytonos esetben, ezt bármely pontra definiálva függvényt kaptunk, itt csupán a diszkrét időközökbeli függvény értékek különbsége fogja azt megadni. Mivel a differenciálási tulajdonságot így módon kiterjesztettük diszkrét időre is, ezért az alábbi állítás tehetjük:

1.6 Állítás:

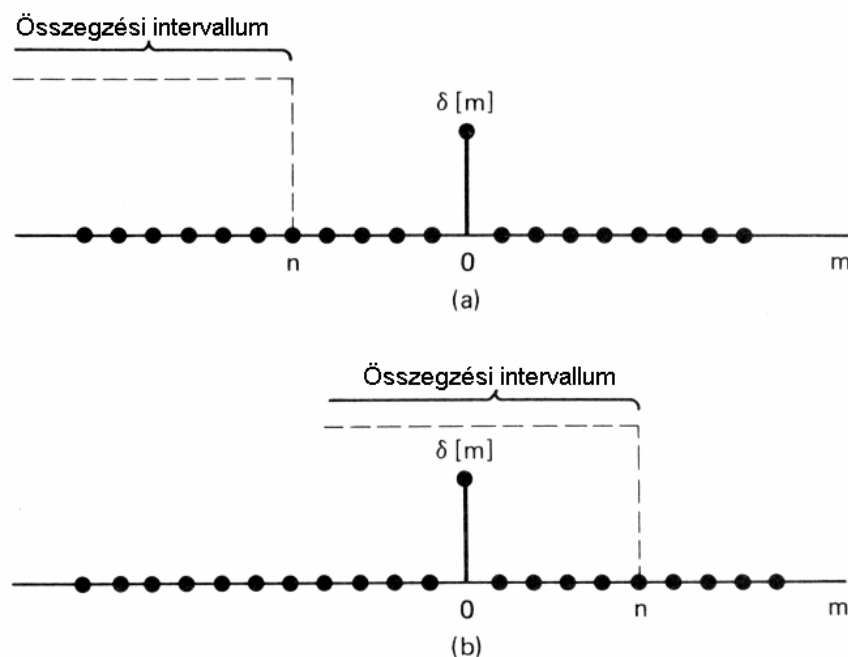
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

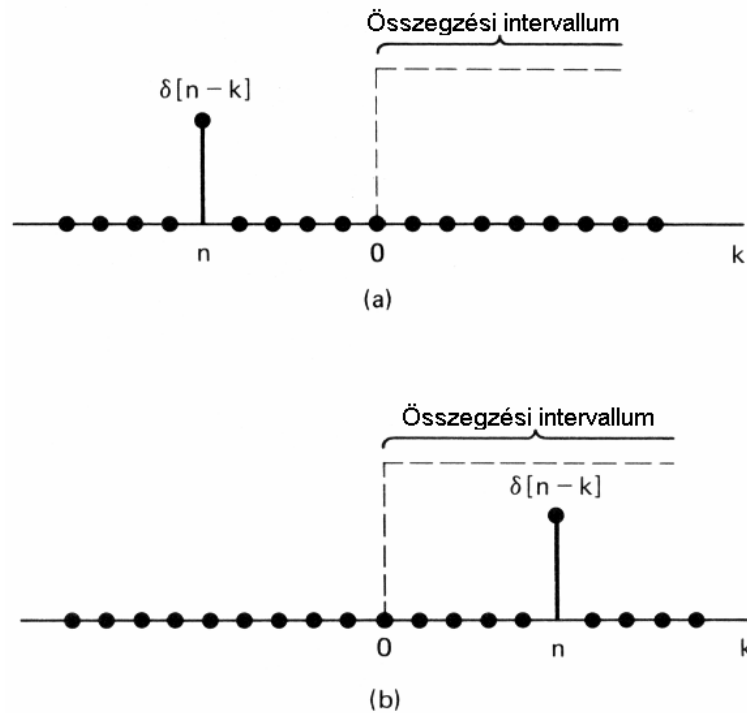
Bizonyítás:

Egyszerűen levezethető a műveletek elvégzésével az egységugrás függvény grafikonján. (Diszkrét időben a bizonyítások általában, egyszerűbb grafikusan megtenni, mert nemcsak szemléletes hanem lényegesen egyszerűbb is így.)

Ugyanígy értelmezhetjük az integrálást mint annak diszkrét idejű megfelelőjét: a sorösszeget (44. ábra). Így az előbbi állításunkból következik, hogy:

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

44. ábra Futó összeg, (a) $n < 0$, (b) $n > 0$ esetben



45. ábra Változó csere hatása a futó összegzésre, (a) $n < 0$, (b) $n > 0$ esetben

Ezt a képletet, mint ahogy azt folytonos esetben megtettük, futó összegnek (running sum) nevezzük, és végrehajtva rajta a $k = n - m$ változócserét:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

Ekkor a 45. ábra szerint módosul a futó összegzés.

Ebből adódóan ugyanígy felírhatjuk a diszkrét jeleket elemi impulzus függvényekkel:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$$

1.3.1.4.3. Diszkrét komplex exponenciális és szinuszoidális jelek

Mint a folytonos időben, diszkrét időben is definiálhatjuk a komplex exponenciális jeleket (complex exponential signals):

$$x[n] = C \cdot \alpha^n$$

ahol C és α komplex számok.

A komplex exponenciális átírható a következő alakba is:

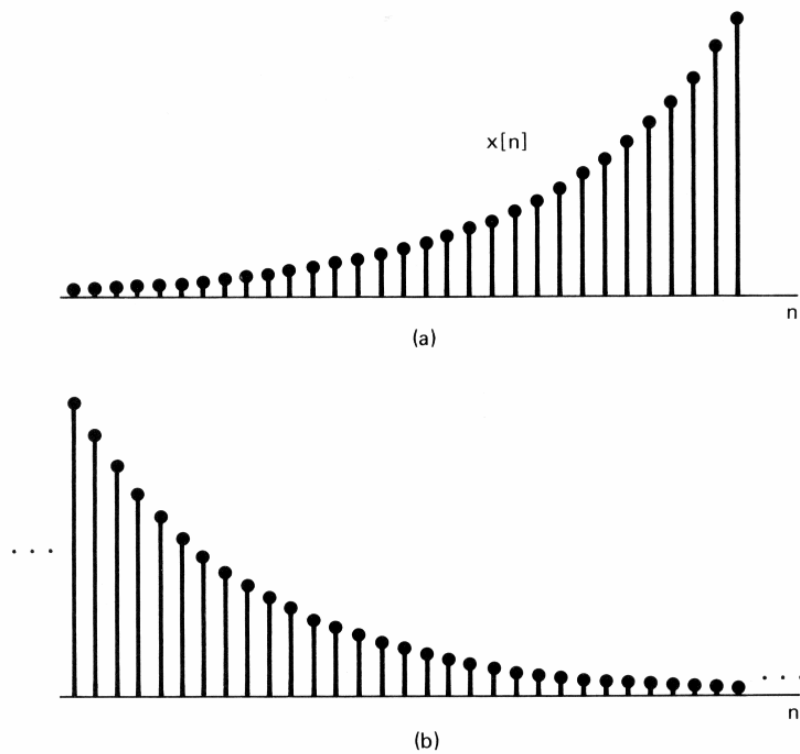
$$\alpha = e^{\beta} \quad x[n] = C \cdot e^{\beta n}$$

Bár ez barátságosabb, hisz ily módon jobban hasonlít folytonos idejű társához, azonban mégis előszeretettel használják az előbbi alakot.

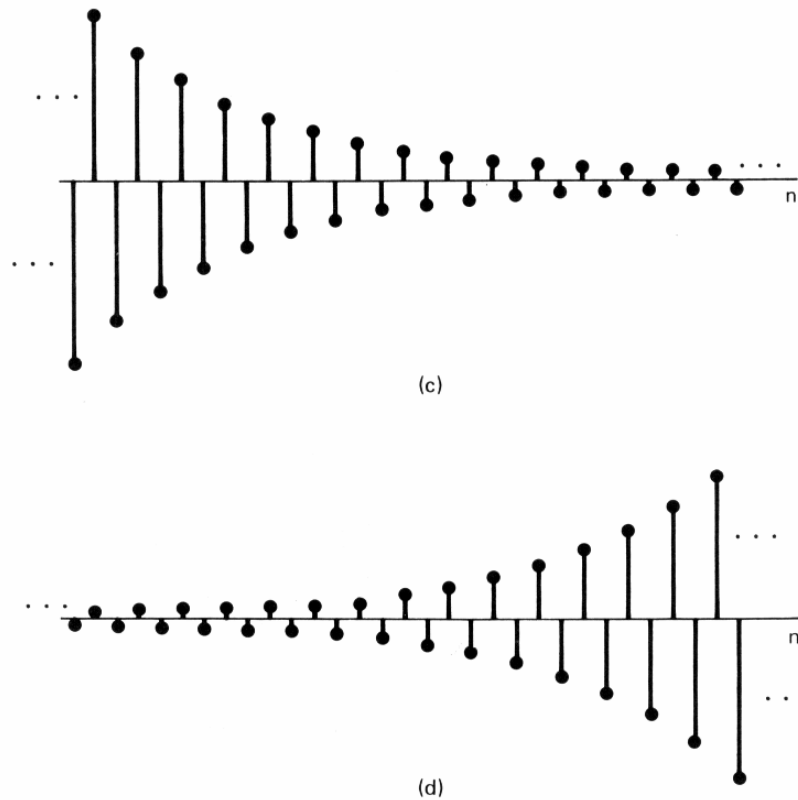
Ha C és α valós számok akkor:

$$x[n] = C \cdot \alpha^n$$

is valós diszkrét idejű függvény lesz, így négy esetet megkülönböztetve és ábrázolva (46. és 47. ábra):



46. ábra Komplex exponenciálisok, (a) $\alpha > 1$, (b) $0 < \alpha < 1$



47. ábra Komplex exponenciálisok, (c) $-1 < \alpha < 0$, (d) $\alpha < -1$

Ha $\alpha = \pm 1$ akkor $x(t) = \pm c$ konstans függvény.

Most vizsgáljuk azt a meghatározóan fontos esetet amikor $\beta = j\Omega_0$, azaz tisztán imaginárius az exponenciális függvény kitevője. Tehát tekintsük:

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

Felhasználva Euler képleteit:

$$e^{\pm j\Omega_0 n} = \cos(\Omega_0 n) \pm j \cdot \sin(\Omega_0 n)$$

Már egyértelmű, hogy az exponenciális jelek diszkrét időben is szoros kapcsolatban állnak a szinuszoidális jelekkel. Tekintve az alábbi jelet meghatározó egyenletet:

$$x[n] = A \cdot \cos(\Omega_0 n + \phi)$$

ahol Ω_0 az alap körfrekvencia és ϕ pedig a kezdeti szög amelyek radiánban adottak.

Az ilyen szinuszoidális jelekre példák a 48. ábrán látható jelek.

Felhasználva Euler képleteit, belátható, hogy:

$$A \cos(\Omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\Omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\Omega_0 n}$$

Ugyanilyen módon egy komplex exponenciális függvény felírható valós exponenciálisok és szinuszoidális függvények reprezentációjaként:

$$C' = |C| \cdot e^{j\phi}$$

$$\alpha' = |\alpha| \cdot e^{j\Omega_0}$$

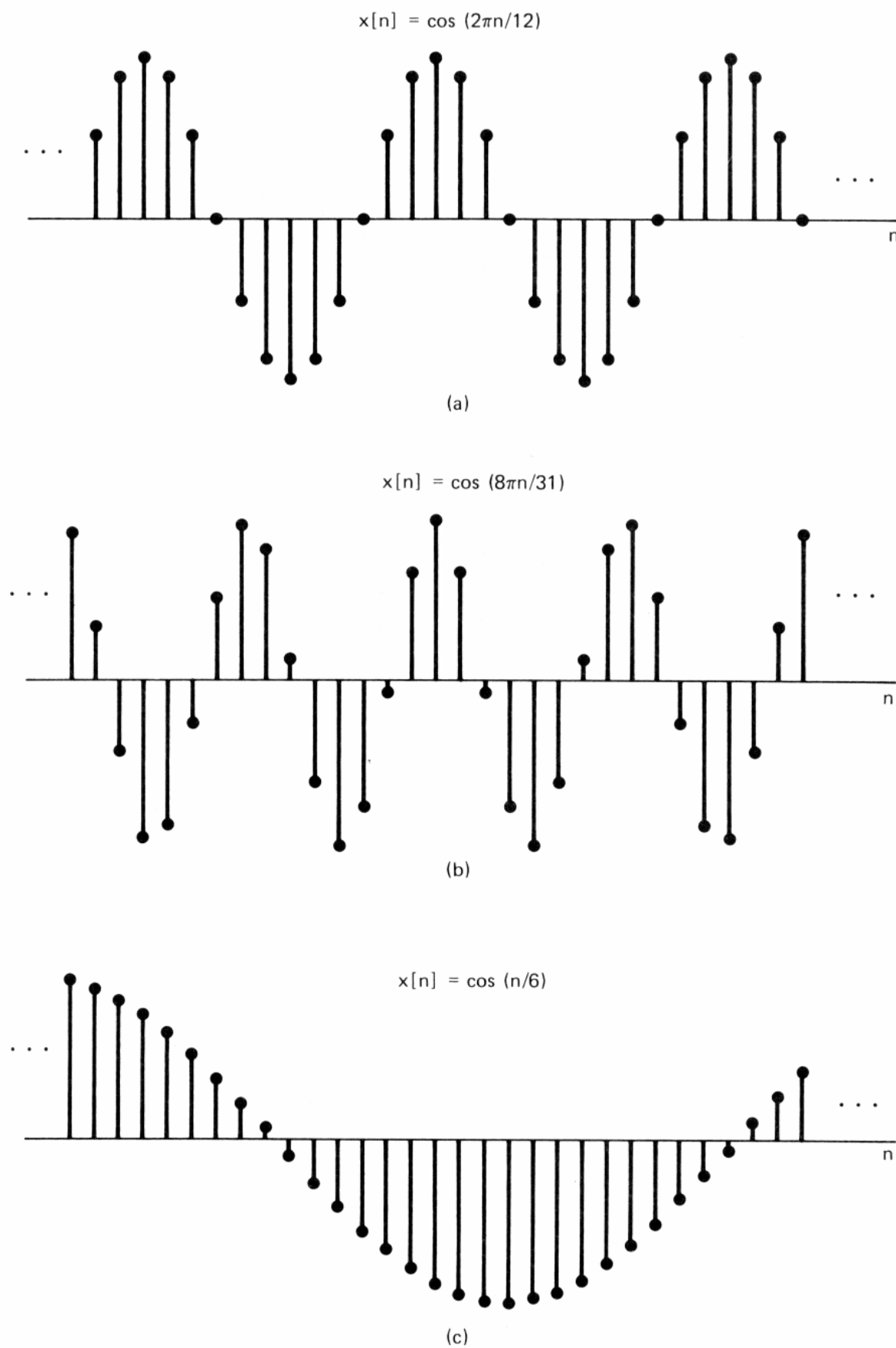
$$C' \cdot (\alpha')^n = |C| \cdot |\alpha|^n \cdot \cos(\Omega_0 n + \phi) + j \cdot |C| \cdot |\alpha|^n \cdot \sin(\Omega_0 n + \phi)$$

Így látható, hogy $|\alpha| = 1$, esetén a valós és képzetes része a komplex exponenciálisoknak tisztán szinuszoidális. Ha $|\alpha| < 1$ akkor a szinuszoidális függvények csökkenő exponenciális függvénnyel szorozódnak, míg $|\alpha| > 1$ esetben pedig növekvővel. A két utóbbi esetet ábrázoltuk a 49. ábrán.

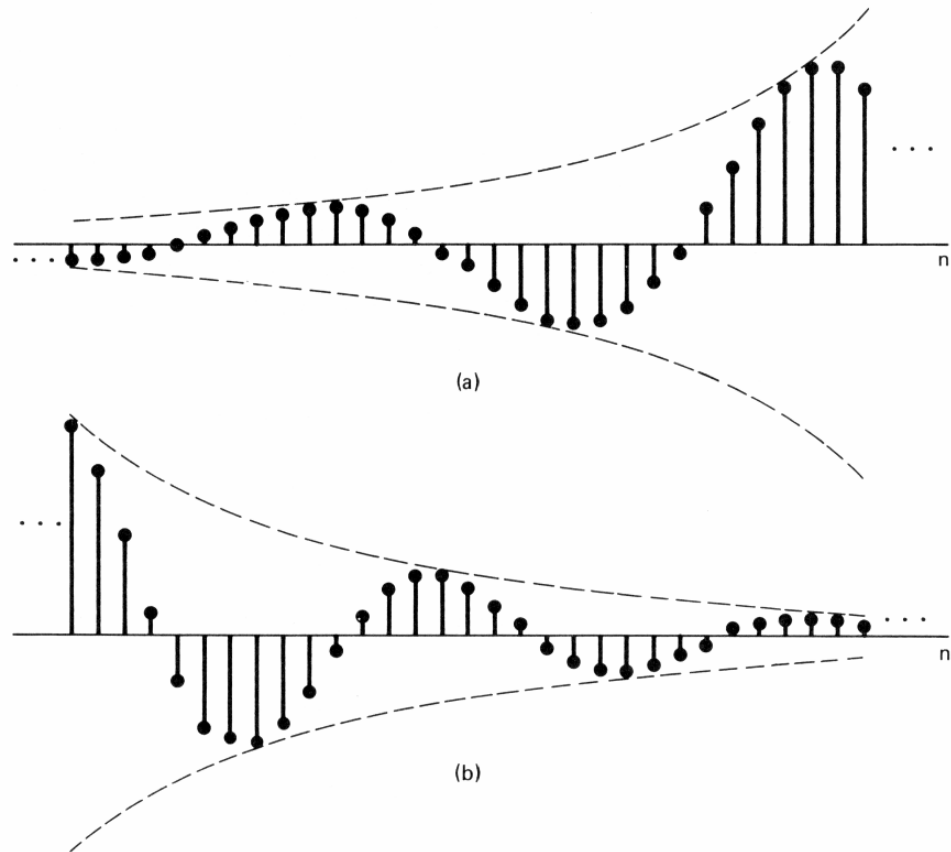
Most pedig vizsgáljuk meg a diszkrét exponenciális függvénynek periodikussági tulajdonságait:

Tekintsük az $e^{j\omega_0 t}$ folytonos jelet először. Tudjuk, hogy ez periodikus jel. Ha növeljük ω_0 értékét akkor a jel periódus ideje lecsökken, azaz a frekvenciája nőni fog. Ha azonban csökkentjük, akkor a periódus idő nőni fog, a frekvencia így csökkeni, míg el nem érünk a 0-át ahol a periódus idő már végtelen hosszú lesz. További észrevételt is tehetünk: ω_0 bármely értékére periodikus a jel.

Azonban mit tapasztalunk ha ezeket a tulajdonságokat értelmezni kívánjuk diszkrét esetben is?



48. ábra Diszkrét idejű szinuszoidális jelek



49. ábra (a) Növekvő, (b) csökkenő diszkrét idejű szinuszoidális függvény

Tekintsük az $e^{j\Omega_0 n}$ diszkrét komplex exponenciális jelet és vizsgáljuk a $\Omega_0 + 2\pi$ frekvenciával:

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 n}$$

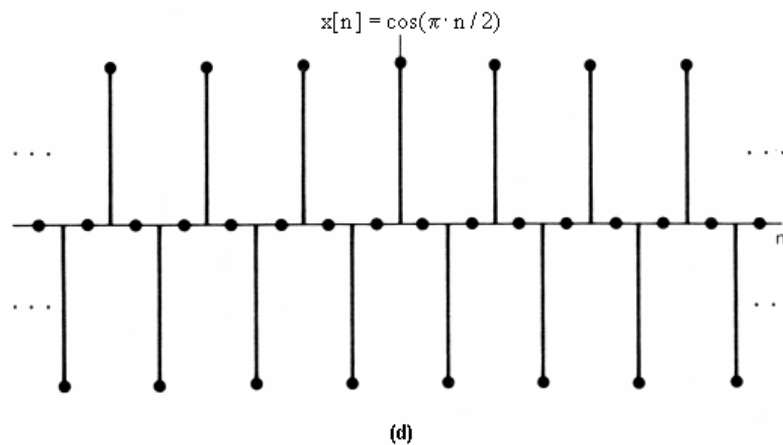
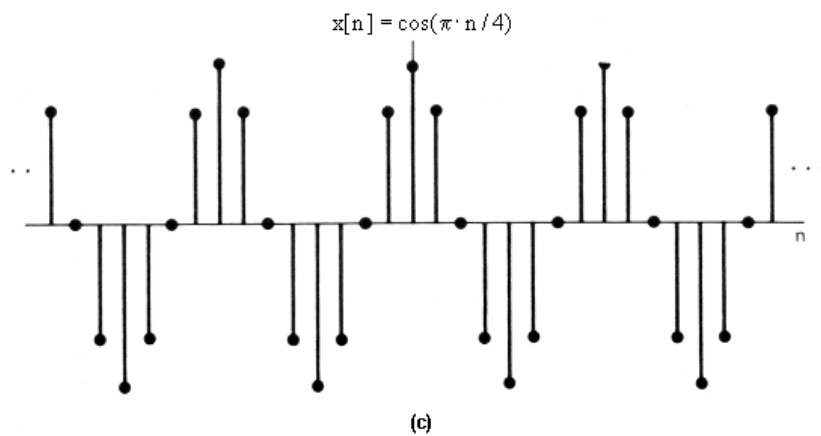
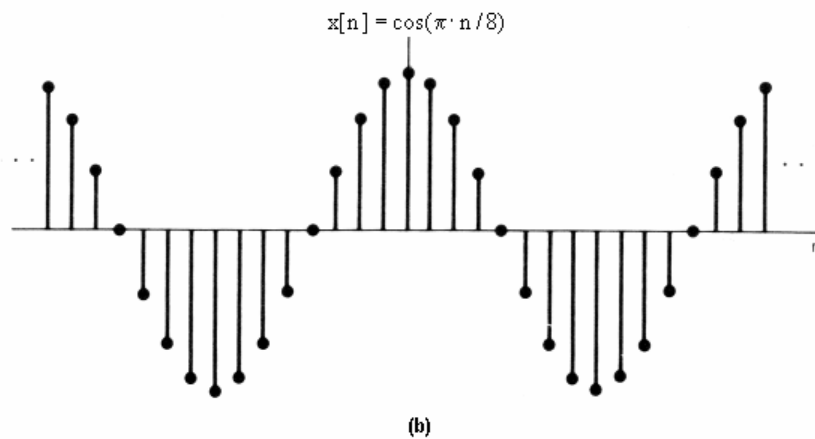
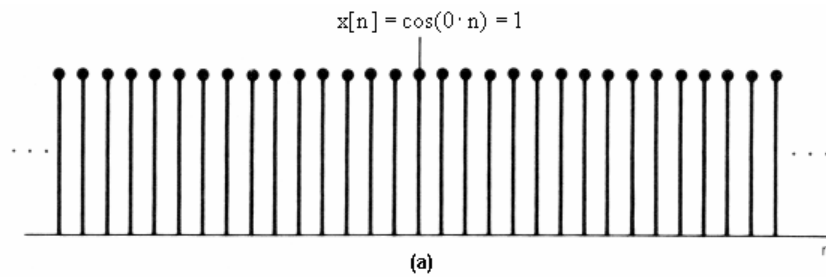
Látható, hogy a diszkrét exponenciális jelünk $\Omega_0 + 2\pi$ frekvenciával megegyezik a Ω_0 alaphfrekvenciával rendelkező jellel. Ebből levonva következtetéseinket, állíthatjuk, hogy diszkrét időben a jelek nem különböznek egymástól ha frekvenciájuk valamely Ω_0 alaphfrekvencia és 2π egész számú többszörösének az összege.

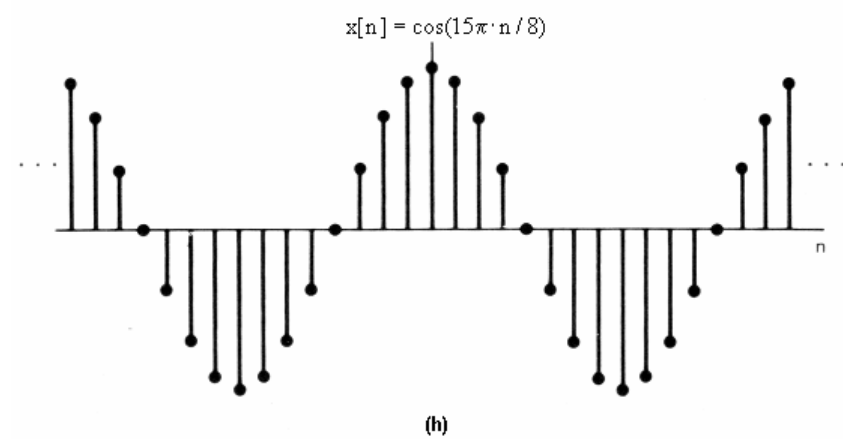
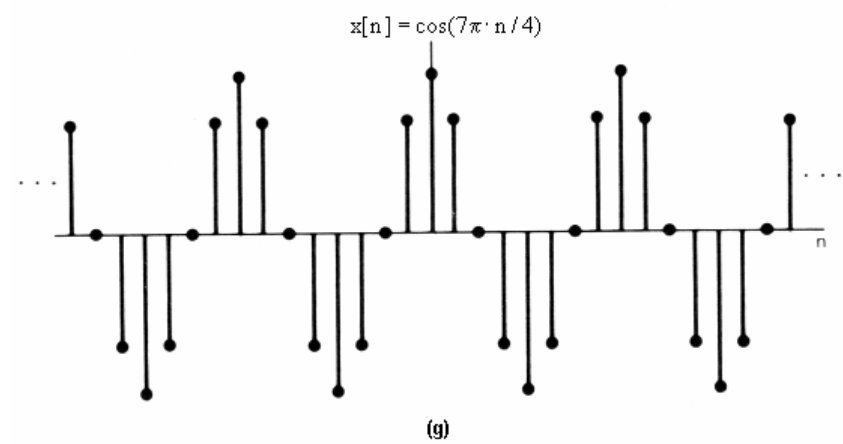
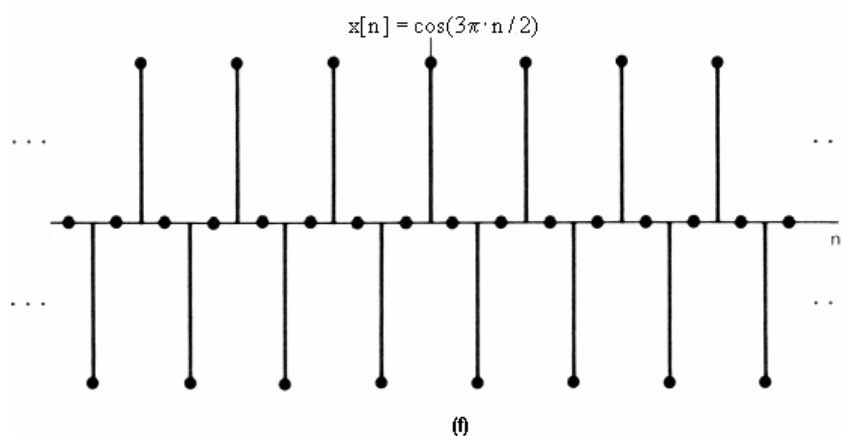
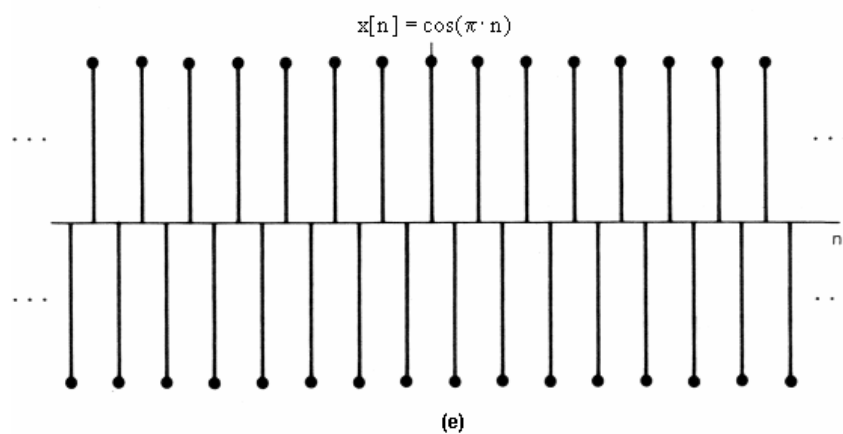
$$(\Omega_0 \pm 2\pi), (\Omega_0 \pm 4\pi), \dots$$

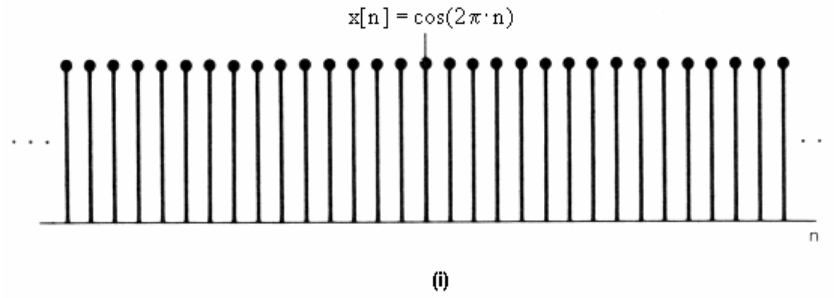
Így lényeges különbséget tártunk fel a folytonos idővel ellentétben, mert itt a jelek nem különböznek, minden különböző frekvencián. Tehát ha diszkrét idejű exponenciálisokkal dolgozunk, elég ha csak a 2π intervallumon vizsgálódunk, melyben kiválasztjuk $0 < \Omega_0 < 2\pi$ vagy $-\pi < \Omega_0 < \pi$, alaphfrekvenciát.

Ezen periodikussági tulajdonság miatt a Ω_0 növelésével nem változik lineárisan a függvény oszcillációinak száma. Ha Ω_0 alaphfrekvenciát, 0-tól indulva növeljük, akkor az oszcillációk száma, a folytonos esetben megszokott módon növekszik, azonban ha elérjük π értékét akkor a növekedés megáll. Ezt a pontot túllépve a Ω_0 növelése csökkenti az oszcillációk számát egészen 2π értékéig ahol ismét visszkapjuk a 0 alaphfrekvenciával már vizsgált jelünket. Általánosan elmondható, hogy kis frekvenciás diszkrét jeleknél Ω_0 értéke $\pm 2\pi$ többszöröse, vagy nullához közeli értékű, míg nagy frekvenciás jeleknél Ω_0 értéke $\pm \pi$

többszöröseihez közeli értékű. Azt is észrevehető, hogy $\pm\pi$ többszöröseivel megadott alaphfrekvenciájú jelek képviselik a jel maximális frekvencián vett alakját, míg $\pm 2\pi$ többszöröseinek értékénél a jel konstans.







50. ábra Diszkrét idejű szinuszoidális jelek különböző frekvenciákon

Vizsgáljuk meg a diszkrét idejű komplex exponenciális periodicitását most a másik irányból, azaz tekintsük meg az előírt frekvencia irányából. Ahhoz, hogy az $e^{j\Omega_0 n}$ jel $N > 0$ -val periodikus legyen:

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n}$$

$$e^{j\Omega_0 N} = 1$$

kell teljesülnie.

Ahhoz, hogy ez fennálljon:

$$\Omega_0 N = 2\pi$$

vagy 2π -nek egész számú többszöröse kell, hogy legyen:

$$\Omega_0 N = 2\pi m \Rightarrow \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

Ezen képlet szerint kimondhatjuk, hogy $e^{j\Omega_0 n}$ csak akkor periodikus, ha $\Omega_0/2\pi$ racionális. Ez érvényes a diszkrét idejű szinuszos függvényekre is. N értékét ezentúl alap periódus időnek (lépésnek) nevezzük.

Használva az előbbi számításokat, elkezdhetjük vizsgálni az alap frekvenciát és periódust a diszkrét-idejű komplex exponenciális jelek esetében.

Ha az $x[n]$ jel periodikus N -alapperiódussal, akkor a jel alapprofrecenciája $2\pi/N$. Ha veszünk egy komplex exponenciális $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$, $\Omega_0 \neq 0$, mely periodikus akkor Ω_0 -nak ki kell elégítenie az előbbi egyenletet m , N egész számokra, ahol $N > 0$. Ha $\Omega_0 \neq 0$ és N és m -nek nincs közös osztója, akkor $x[n]$ alapperiódusa N . Ezt felhasználva következik, hogy az alapprofrecenciája egy periodikus jelnek:

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{\Omega_0}{m}$$

$$N = m \left(\frac{2\pi}{\Omega_0} \right)$$

Az alábbi táblázat segítségével hasonlítsuk össze a folytonos $e^{j\omega_0 t}$ és a $e^{j\Omega_0 n}$ diszkrét exponenciálisok tulajdonságait:

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\Omega_0 n}$
ω_0 különböző értékeire, különböző komplex exponenciális jeleket kapunk	Ω_0 értékeire ugyan olyan komplex exponenciálisokat kapok a 2π szétválasztott alapfrekvenciákon
ω_0 bármely értékére periodikus	Csak $\Omega_0=2\pi \cdot m/N$ -re periodikus, ahol $N>0$ és m egész számok
Alapfrekvencia: ω_0	Alapfrekvencia: Ω_0/m
Alap periódus: $\omega_0 \neq 0$ értékre $T_0=2\pi/\omega_0$ $\omega_0=0$ értékre T_0 nem definiált	Alap periódus: $\Omega_0 \neq 0$ értékre $N_0=m \cdot (2\pi/\Omega_0)$ $\Omega_0=0$ értékre N_0 nem definiált

Mint folytonos esetben, most is hasznosnak ítéljük meg, hogy itt is beszéljünk a harmonikusokkal kapcsolt periodikus jelekről. Ezek olyan periodikus exponenciálisok összegei, amik periodikusak valamely alapperiódus idővel. Ezek az előbbi egyenleteknek megfelelően azok a jelek, amelyeknek frekvenciája $2\pi/N$ többszöröse:

$$\Phi_k[n] = e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Folytonos esetben minden harmonikusan kapcsolt komplex exponenciálisról láthattuk, hogy különböző jelet definiál, $e^{jk(2\pi/T)t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Diszkrét esetben viszont nem ez a helyzet.

$$\Phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = e^{j2\pi n} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Ez azt mutatja, hogy csak N különböző periodikus exponenciális van a definíció szerinti képletben.

Például $\Phi_0[n], \Phi_1[n], \dots, \Phi_{N-1}[n]$ mind különböznek, de minden más $\Phi_k[n]$ valamelyikkel ezek közül megegyezik ($\Phi_N[n] = \Phi_0[n]$; $\Phi_1[n] = \Phi_{N-1}[n]$).

Végül, hogy még mélyebb betekintést nyerjünk a diszkrét idejű komplex exponenciálisok periodicitásának problémájába, tételezzünk fel, hogy adott egy diszkrét idejű sor, melyet egy folytonos idejű exponenciális, $e^{j\omega_0 t}$ mintavételezéséből nyerünk egyenlő időközökkel:

$$x[n] = e^{j\omega_0 nT} = e^{j(\omega_0 T)n}$$

Látható ebből, hogy $x[n]$ saját maga egy diszkrét idejű komplex exponenciális $\Omega_0 = \omega_0 \cdot T$ frekvenciával. Viszont $x[n]$ csak akkor lesz periodikus, ha $(\omega_0 \cdot T)/2\pi$ racionális szám. Ugyanezt mondhatjuk el azokról a diszkrét idejű sorozatokról, (szekvenciákról) melyeket egyenlő időközökben mintavételezett folytonos-idejű periodikus szinusz jelekből nyerünk.

Például:

$$x(t) = \cos 2\pi t$$

$$x[n] = x(nT) = \cos(2\pi \cdot n \cdot T)$$

T különböző értékeit véve.

Ebből jól látszik, hogy habár a mintavételezett jel periodikus, és burkológörbéjét alkotja mintavételezett társának, azonban a mintavételezés idejétől függően a diszkrét jel, lehet periodikus és aperiodikus is, attól függően, hogy teljesíti-e a fenti képleteket. A mintavételezés problémájával a könyv későbbi fejezeteiben bővebben foglalkozunk majd.

1.3.2. Rendszerek (Systems)

Először is kezdjük a rendszer definíciójával:

1.6 Definíció: Rendszer

A rendszer olyan folyamat, amely a jelenen valamilyen transzformációt hajt végre. A rendszer autonóm egész, körülhatárolható (nem feltétlenül fizikai értelemben), s környezetével mindig kapcsolatban van. Ezek a kapcsolatok adják a rendszer bemeneteit és kimeneteit, amin keresztül végzi a jelen transzformációját.

Adjuk meg ezeket a kapcsolatokat:

Ha definiálunk egy bemeneti függvényt:

- Folytonos esetben: $x(t): T \rightarrow U$, ahol T az időtartomány, U pedig a lehetséges bemeneti értékek halmaza.
- Diszkrét esetben: $x[n]: N \rightarrow U$, ahol N a diszkrét időpontok halmaza, U pedig a lehetséges bemeneti értékek halmaza.

Ugyancsak definiálunk egy kimeneti függvényt:

- Folytonos esetben: $y(t): T \rightarrow Y$, ahol T az időtartomány, Y pedig a lehetséges kimeneti értékek halmaza.
- Diszkrét esetben: $y[n]: N \rightarrow Y$, ahol N a diszkrét időpontok halmaza, U pedig a lehetséges bemeneti értékek halmaza.

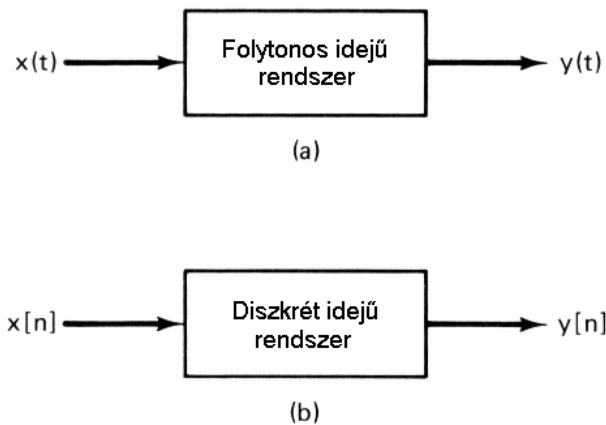
Akkor elmondhatjuk, hogy a rendszer egy olyan operátor (az operátor osztályát és tulajdonságait nem definiáljuk) amelyre:

$$S(x(t)) = y(t)$$

$$S(x[n]) = y[n]$$

A rendszer általános ábrázolását mind folytonos mind diszkrét esetben a 51. ábrán tüntettük fel.

Tehát a rendszer bármely bemeneti függvényhez hozzárendel egy kimeneti függvényt. Minden rendszerhez megtalálható ez az operátor, de sokszor ismereteink kevésnek bizonyulnak meghatározásához, ezért a valószínűség számítás matematikai eszközeihez kell nyúlnunk leírásukhoz. Ilyen rendszerek nem kerülnek itt tárgyalásra, azaz mi csak olyan rendszerekkel fogunk foglalkozni, amelyek kezelhetők a matematikai analízis módszereivel.



51. ábra (a) Folytonos, (b) diszkrét idejű rendszer

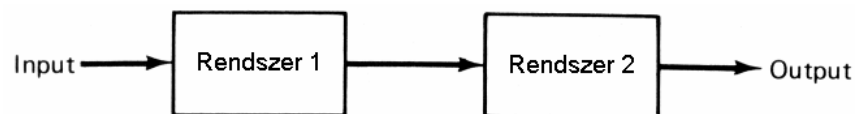
A rendszerek, ha ismereteink elegendőek hozzá, dekomponálhatóak, s az így előálló részrendszerek és kapcsolataik építik fel az eredeti rendszert, folyamatot. Ezen tulajdonság fordítottjaként, rendszerek összekapcsolásával ugyancsak valamilyen rendszert hozhatunk létre.

Ezek alapján szükségünk van a rendszerek kapcsolatainak osztályozására és megismerésére:

1.3.2.1. Sorosan kapcsolt rendszerek

Két rendszer sorosan kapcsolt ha az egyik közvetlenül kapja meg bemenetén a másik kimenetét.

A definíciót a 52. ábra pontosítja:



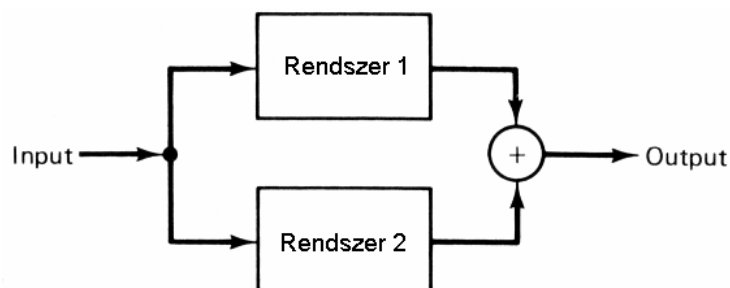
52. ábra Sorosan kapcsolt rendszerek

Ha a két rendszer külön-külön függvénnnyel leírható, akkor a két leképezés együtt a két őket megvalósító függvény kompozíciójaként áll elő.

1.3.2.2. Párhuzamosan kapcsolt rendszerek

Két rendszer párhuzamosan kapcsolt, ha ugyanazon bemenet után a két rendszer kimenete összegződik pozitív vagy negatív előjellel.

A definíciót a 53. ábra pontosítja:



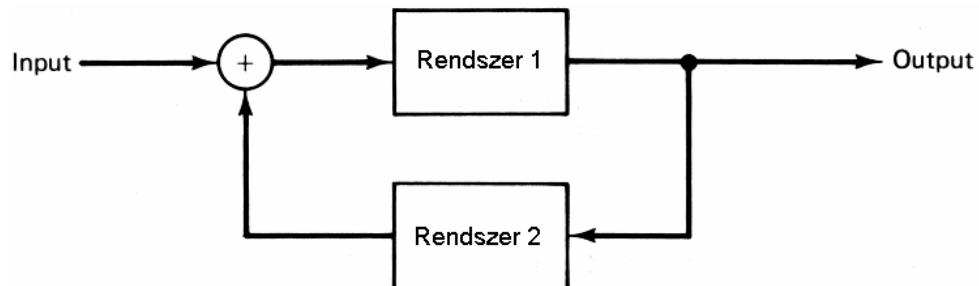
53. ábra Párhuzamosan kapcsolt rendszerek

Itt is elmondható, hogy ha a két rendszer külön-külön függvénnnyel leírható, akkor a két leképezés együtt, a két őket megvalósító függvény összegzéseként áll elő.

1.3.2.3. Visszacsatolt rendszerek

Egy rendszer visszacsatolt, ha bemenete valamely bemeneti jelből és saját kimentének szuperpozíciójából áll össze.

A definíciót a 54. ábra pontosítja:



54. ábra Visszacsatolt rendszer

Ha a rendszer leírható reguláris függvénnyel, akkor a visszacsatolt rendszer rekurzív alakban megadott függvénnyel leírható. (Az így kapott függvény egyszerű esetekben korlátozódik a primitív rekurziókra)

1.3.2.4. Rendszerek felírása kapcsolatok és részrendszerek segítségével

Az alábbiakban példákon keresztül mutatjuk be, hogy mily módon ábrázoljuk a rendszereket és hogyan jelenítjük meg kapcsolataikat.

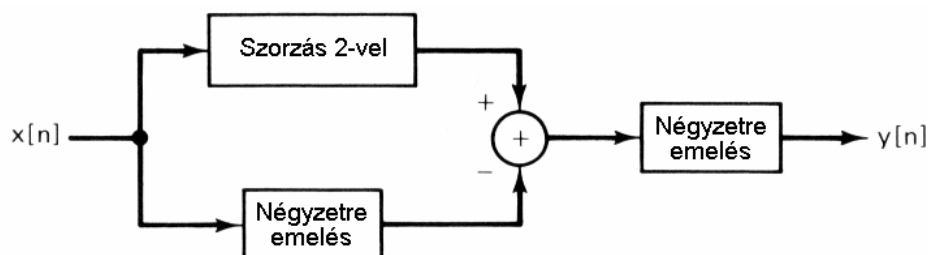
Tekintsünk a továbbiakban egy diszkrét rendszert, amit az alábbi matematikai egyenlettel jellemezhetünk:

$$y[n] = (2x[n] - x[n]^2)^2$$

Építsük fel a rendszert a matematikai jelölésekből adódó szabályok és a mi ábrázolási rendszerünk segítségével:

Először is tekintsük részrendszereinket. A következő észrevételt tehetjük:

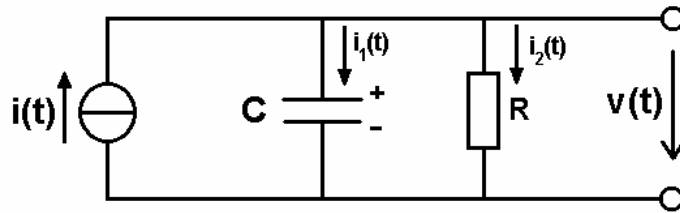
A bementi függvényt $x[n]$ írja le. Ezt a jelet megszorozzuk kettővel egy részeredményt kapunk, míg a másik részeredményt egy négyzetre emelés segítségével számítjuk. Ezeket a műveleteket tekintsük mint a rendszer egységeit. Ekkor mivel mindkét rendszer ugyanazt a bemenetet kapja, és a művelet elvégzése után eredményeik összegződnek egy kivonás segítségével ezért a két rendszer párhuzamosan kapcsolt. Az így előállt eredmény azonban még mindig csak részeredmény. Ezt négyzetre emelvén származtatjuk a végeredményt, ami azt jeleneti hogy egy bementét négyzetre emelő rendszer van sorosan hozzákapcsolva az előtte párhuzamosan kapcsolt fokozathoz. Így előállítottuk rendszerünket és azt ábrázolva a következőt kaphatjuk (55. ábra):



55. ábra A $y[n] = (2x[n] - x[n]^2)^2$ megvalósító rendszer

Bár az előbbi fejtegetés csupán egy nagyon egyszerű példa túlmagyarázásának tűnhet, ennek ellenére fontos szemléletet ad majd számunkra a későbbiekben, hogy jóval bonyolultabb rendszereket szintetizáljunk ily módon.

Tekintsünk most egy másik példát (56. ábra):

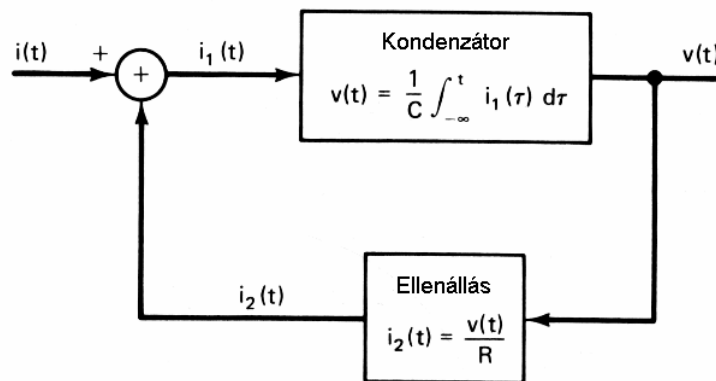


56. ábra RC kör

Az itt látható egyszerű kapcsolási rajz mutatja azt a fizikai rendszert, melyet szeretnénk leírni rendszerelméleti jelölés rendszerünk szerint. Kezdjük most a fent látható probléma megoldását azzal, hogy az ismert fizikai törvényen keresztül matematikai leírásba próbáljuk átranzformálni a rendszert. A kondenzátor feszültségére az alábbi leírást alkalmazhatjuk:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(s) ds$$

Ekkor ha az RC kört kívánjuk leírni mint rendszert, a forrás árama mint bemenet és a kondenzátor feszültsége mint a rendszer kimenete függvényében akkor az alábbi rendszert kapjuk eredményül (57. ábra):



57. ábra RC kör rendszer modellje

1.3.2.5. Rendszerek Tulajdonságai

A továbbiakban a rendszerek tulajdonságaival foglalkozunk. Ezek, mint ahogy a későbbiekben látni fogjuk, leírják és osztályozásra képessé teszik a rendszerek halmazát. Sok problémánál igen fontos lesz, hogy milyen módszerek, csupán milyen tulajdonságú rendszerek által leírt probléma megoldására alkalmazhatóak. Nos, lássuk milyen tulajdonságai lehetnek a rendszereknek:

1.3.2.5.1. Felejtő és Nem Felejtő rendszerek

Egy rendszert pontosan akkor nevezünk felejtőnek, azaz memória nélkülinek, hogyha a rendszer kimenete bármely időpillanatban (azaz a független változó

bármely értékére), csupán a bemenet jelenlegi értékétől függ, tekintet nélkül a rendszer ezt megelőző működésére vagy bemeneteire.
Könnyű ilyen rendszerre példát találni:

$$y(t) = R \cdot x(t)$$

Jól láthatjuk, hogy ha R konstans akkor a kimenet csupán a bemenet valahányszorosa lesz, így bármely időpillanatban a kimenet értéke tényleg csak a bemenet adott pillanatbeli értékétől függ. Tehát egy ilyen ideális ellenállást leíró egyenlet lineáris, és az ezt leíró rendszer is. Ebből kiindulva az alábbi állítást tehetjük:

1.7 Állítás: Bármely olyan matematikai operátor amely lineáris, leírható lineáris rendszerrel.

Azonban ellenpéldákat is könnyen felhozhatunk. Csak vegyünk olyan matematikai egyenletet, amely áthágja a fenti definíciót:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

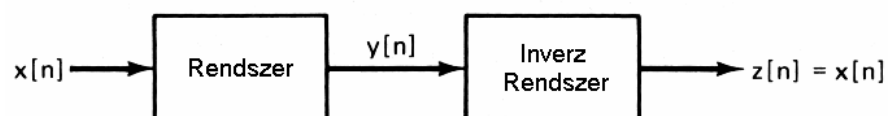
$$y(t) = x(t-1)$$

Jól látható, hogy míg az első egyenlet értelmében a rendszer a vizsgált időpontot megelőző összes bemeneti érték függvénye, addig a második, már folytonos rendszer, egy adott idővel, mely most történetesen 1 egység, késlelteti a kimenetet. De jó példa lehet egy kondenzátor is ilyen nemlineáris rendszerre.

1.3.2.5.2. Invertálhatóság és Inverz rendszerek

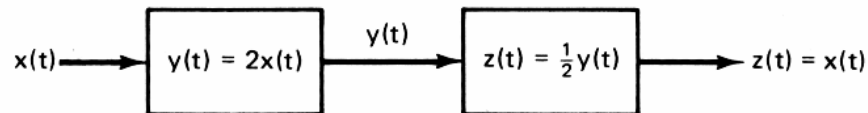
Egy rendszer pontosan akkor invertálható, ha különböző bemenetihez, különböző kimeneteket rendel hozzá. Azaz a leképezés a bemenetek halmazából a kimenetek halmazába injektív. Ha igaz, hogy bármely kimenethez tartozik bemenet akkor bijektív a leképezés. Tehát ha bijektív a leképezés, akkor a kimenetek halmazának leszűkítése nélkül megadható a leképezés inverze, amely a rendszer inverzét valósítja meg.

Most vizsgáljuk meg mit is jelent ez a nagyon egyszerű, mégis csak bonyolultan leírható fogalom számunkra. Először is mellőzve a matematikát kimondhatjuk, hogy a rendszer invertálható, hogyha a bemenetéből egyértelműen megállapítható a kimenete és a kimenetéből is megállapítható, hogy mi volt a bemenete. Ha olyan rendszert hozunk létre, amely az utóbbit megvalósítja, akkor máris megkaptuk a rendszer inverzét. Így az eredeti rendszert és annak inverzét sorba kapcsolva az így előálló rendszer bemenete és kimenete azonos lesz.



58. ábra Invertálható rendszer és inverze

Például egy $y(t) = 2x(t)$ egyenlettel leírható rendszer inverze: $y(t) = 0.5x(t)$
Ezt ábrázoltuk a 59. ábrán:



59. ábra Példa invertálható rendszerre és inverzére

Figyeljük meg, hogy bármely értéket megadva a bemeneten a kimenet is ugyanazon értékeket produkálja.

Most tekintsünk egy olyan rendszert, amelyet az előbbieken nemlineárisnak mondtunk:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

Mivel a fenti egyenletből $x[n]$ értéke kifejezhető, ezért a rendszer invertálható és inverze:

$$z[n] = y[n] - y[n-1]$$

Tehát jól látható, hogy a tulajdonságok amelyek itt felsorolásra kerülnek nem kizáró jellegűek, sőt egymással párhuzamosan létezhetnek, jellemezhetnek egy adott rendszert.

Azonban ellenpélda itt is akad bőven. Tekintsük csak az alábbi rendszereket:

$$y[n] = 0$$

$$y[n] = x^2(t)$$

Látható, hogy egyik kimenetéből sem mondható meg mi volt a rendszer bemenete, persze, hiszen az őket leíró függvények nem injektívek.

1.3.2.5.3. Kauzalitás

Egy rendszer pontosan akkor kauzális ha kimenete bármely időpillanatban csupán a bemenetek jelenlegi és múltbéli értékeitől függ. Azaz a rendszer kimenete nem tesz becslést, jóslást az irányban, hogy a bemenetek jövőbeli értékét meghatározza. Könnyebb kauzális rendszert elképzelni mint egy nem kauzalist. Például egy repülőgép mozgása előre nem sejthető, mivel nem tudjuk felmérni a vezető szándékait. Azonban ha már távolabbról tekintjük a problémát, és tudjuk hogy a repülőgépet egy előre beprogramozott robotpilóta irányítja, akkor a már megkezdett manőver alapján kiszámítható a mozgás egészen a manőver befejezéséig, persze a becslésünk csak ideális körülmények között lesz igaz, hisz egy gyors légáramlat felboríthatja számításainkat.

Nézzünk most két példát nem kauzális rendszerekre:

$$y[n] = x[n] - x[n+1]$$

$$y(t) = x(t + \sin(t))$$

Az első rendszerről tisztán látszik a nem kauzalitás, hiszen $y[n]$ meghatározásához ismernünk kell $x[n+1]$ értékét is.

A második példánkban a rendszer hol prediktív azaz nem kauzális, hol pedig memóriával rendelkező, azaz kauzális, attól függően, hogy a $\sin(t)$ függvény milyen értéket vesz fel. Azonban a kauzalitás tulajdonságának teljesüléséhez elég ha a rendszer egyetlen egy időpontban viselkedik nem kauzálisan, ekkor már

nem kauzális rendszernek nevezzük, függetlenül attól, hogy a többi pontban kauzális volt-e a rendszer vagy sem.

Így a tőzsde indexet is nem kauzális rendszernek nevezzük, hisz képlete az alábbi:

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x[n-k]$$

Ebből a példából levonható az a következtetés is, hogy ha a rendszer memóriával rendelkezik vagy pediglen felejtő, akkor fennáll a kauzalitás tulajdonsága, mivel ez a két tulajdonság nem teljesül ha a rendszer nem kauzális.

1.8 Állítás:

Az összes felejtő és memóriával rendelkező rendszer kauzális, de ez fordítva nem igaz.

Adjunk végül egy egyszerű példát kauzális rendszerre: $y(t) = x(t)$

1.3.2.5.4. Stabilitás

A stabilitás fogalma talán az egyik legfontosabb tulajdonsága rendszernek. Egy rendszer pontosan akkor nevezhető stabilnak, ha a bemenet változása nem vezet olyan kimenethez amely időben divergál.

Magának a stabilitásnak különböző erősségű definíciói és így osztályai vannak. Mi most nézzük a számunkra fontos osztályokat:

- Egy rendszert **lokálisan stabilnak** mondunk ha egyensúlyi helyzetéből, azaz éppen stabil állapotából, kis környezetben kitérítve, azaz a bemenetet megváltoztatva kis környezet elejéig, a rendszer az egyensúlyi helyzet környezetében marad, azaz a kimenet kis környezetben változik. Ilyen rendszerre legegyszerűbb példa egy sík asztalon álló golyó (60. ábra). Ez éppen stabil helyzetben van hiszen áll. Ha picit meglökjük, egy kicsit arrébb gurul, míg a súrlódás fel nem emésztí mozgási energiáját. Ekkor a golyóról elmondhatjuk, hogy kis kitérítés hatására az eredeti egyensúlyi helyzetének kis környezetébe marad, tehát lokálisan stabil. Ha viszont nagy erővel lökjük meg a golyót akkor szinte biztosra vehetjük, hogy nem csak kis környezetét fogja elhagyni, hanem az asztal felületét is.



60. ábra Lokálisan stabil rendszer

- Egy rendszert **BIBO** (bounded input – bounded output) **stabilnak** nevezünk ha a bemenetek korlátos változása a kimeneten korlátos változást hoz létre. Ez a stabilitási fogalom lesz a számunkra a legfontosabb, ekkor mi már stabilnak nevezünk egy rendszert, hiszen ha a bemenetet korlátos jelekkel bombázzuk, azaz végtelen értékű jeleket mellőzzük, akkor a kimenet soha nem fogja elérni véges időn belül a végtelen értéket, mivel minden pillanatban korlátos lépésekkel változik.
- Egy rendszert **lokálisan aszimptotikusan stabilnak** nevezünk ha a rendszert egyensúlyi helyzetének kis környezetében kitérítve, a rendszer

eredeti egyensúlyi helyzetébe tér vissza. Ilyen rendszerre nagyon egyszerű példa egy tál alján lévő golyó esete, ahol ha a golyót kitérítjük maximum a tál széléig akkor visszagurulva ide-oda mozog a tányérban míg a súrlódás által felemésztett mozgási energiája el nem vész és megállapodik a tál alján újra (61. ábra).



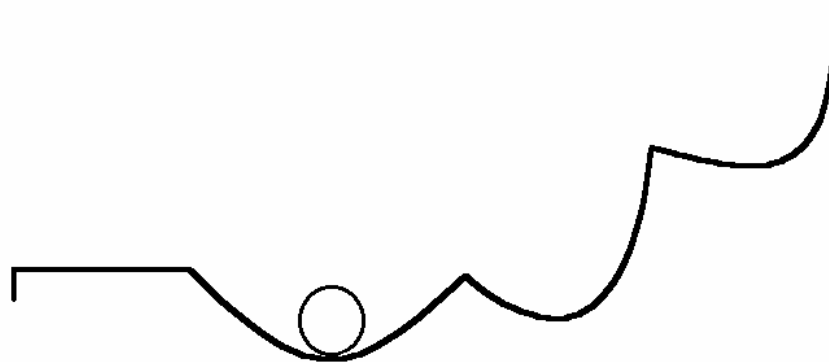
61. ábra Lokálisan aszimptotikusan stabil rendszer

- Egy rendszert **globálisan aszimptotikusan stabilnak** nevezünk, hogyha egyensúlyi helyzetéből kitérítve (akármilyen mértékben) visszatér eredeti egyensúlyi helyzetébe. Ilyen rendszerre példa egy végtelen nagy tál és az alján álló golyó esete (62. ábra). A tálnak végtelen nagy a magassága, így bárhogy térítjük is ki a golyót az vissza fog térni eredeti egyensúlyi helyzetébe, azaz a tál aljára bizonyos idő elteltével.



62. ábra Globálisan aszimptotikusan stabil rendszer

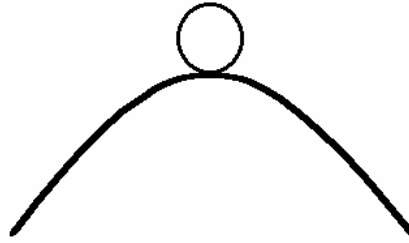
Persze egy rendszernek nem biztos, hogy csupán egy egyensúlyi helyzete van (63. ábra), és az sem biztos, hogy ezek az egyensúlyi helyzetek ugyan-olyan stabilitási tulajdonságokkal bírnak, de mi ezzel a problémával itt most nem foglalkozunk.



63. ábra Több egyensúlyi helyzettel rendelkező rendszer

Az is elmondható, hogyha egy rendszer magasabb stabilitási osztályba tartozik akkor bármely alacsonyabb stabilitási osztálynak is része. Azaz az egyre magasabb stabilitási osztályok részhalmazai a gyengébb stabilitást megkövetelő osztályoknak.

- Egy rendszert **instabilnak** nevezünk ha egyensúlyi helyzetének nincs olyan környezete amelyből kitérítve nem divergálna a kimenete, vagy pedig a rendszernek nem létezik egyensúlyi helyzete.
Az alábbi rendszernek (64. ábra) van egyensúlyi helyzete mégis a golyót, még ha csak kicsit is mozdítjuk meg, az lefelé indul el a végtelen magas csúcs tetejéről.



64. ábra Instabil rendszer

Nézzünk most egy példát, hogy hogyan lehet meghatározni egy rendszerről, hogy stabil-e vagy sem:

$$x[n] = u[n]$$

$$|u[n]| < 1 \quad \forall n - \text{re}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = (n+1)u[n] \rightarrow \infty$$

Láthatjuk, hogy bár a bemenet változása korlátos volt, és, hogy a rendszernek létezik egyensúlyi állapota a 0 pontban (azonosan nulla bemenet esetén), azonban nincs az egyensúlyi pontnak olyan környezete, amelyben kitérítve a bemenet jelet (az egész bemeneti jelet nemcsak annak egy részét) elmondható lenne, hogy a jel az egyensúlyi helyzet környezetében marad.

1.3.2.5.5. Idő invariancia

Egy rendszert pontosan akkor nevezünk időinvariánsnak ha egy időtolás a bemeneten ugyan akkora időtolásként jelentkezik a kimeneten. Magyarán szólva ha a bemeneten a jel késik például egy másodpercet, akkor a kimeneti jel is pontosan egy másodpercet fog késni.

Adjuk meg a definíciót képletekkel is:

Legyen $x[n]$ az input és $y[n]$ az output.

Ekkor ha $\begin{matrix} x[n] \rightarrow y[n] \\ x(t) \rightarrow y(t) \end{matrix}$ leképzéssel megadott rendszer időinvariáns akkor:

$$\begin{cases} y[n - n_0] \\ y(t - t_0) \end{cases} \quad \text{ha} \quad \begin{cases} x[n - n_0] \\ x(t - t_0) \end{cases}$$

Most nézzünk példát ilyen rendszerekre:

A vizsgált rendszerünk legyen a $y(t) = \sin[x(t)]$ képlettel leírható.

Ekkor adott $x_1(t)$ bemenetre: $y_1(t) = \sin[x_1(t)]$

Vegyük most $x_1(t)$ jel t_0 -al való eltolását: $x_2(t) = x_1(t - t_0)$

Ekkor erre a jelre alkalmazva a rendszer leképezését:

$$y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t - t_0)]$$

De mivel: $y_1(t - t_0) = \sin[x_1(t - t_0)] \Rightarrow y_2(t) = y_1(t - t_0)$

Ezzel beláttuk, hogy vizsgált rendszerünk idő invariáns.

Most nézzünk egy nem időinvariáns rendszert: $y[n] = n \cdot x[n]$

Ekkor alkalmazva a fenti eljárást:

$$y_1[n] = n \cdot x_1[n]$$

$$x_2[n] = x_1[n - n_0]$$

$$y_2[n] = n \cdot x_2[n] = n \cdot x_1[n - n_0]$$

$$y_1[n - n_0] = (n - n_0)x_1[n - n_0] \neq y_2[n]$$

Ebből jól látható, hogy a rendszer kimenete erősen függ az időtől, tehát idő variáns.

1.3.2.5.6. Linearitás

Azok a rendszerek lineárisak, melyek tartalmazzák a szuperpozíció tulajdonságát: Ha egy bemenet több jel súlyozott összegéből áll, akkor a kimenet egyszerű szuperpozícióval kapható meg, ami a súlyozott összege, a külön-külön vett bemenő jelekre kapott rendszerválaszoknak. A szuperpozíció elvének teljesüléséhez két tulajdonsággal kell rendelkeznie a rendszernek, ezek az Additivitás és a Homogenitás.

Vizsgálva két tetszőleges bemeneti jelet:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

A rendszer akkor lineáris, ha

- Additív: $x_1(t) + x_2(t) = x(t) \rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t)$
- Homogén: $a \cdot x_1(t) = x(t) \rightarrow y(t) = a \cdot y_1(t)$, $\forall a \in \mathbb{C}$ konstansra

Az következő állítások a fenti definíció alapján kézenfekvők:

1.9 Állítás:

Egy rendszer lehet lineáris, anélkül, hogy idő-invariáns lenne, vagy lehet idő-invariáns anélkül, hogy lineáris lenne.

1.10 Állítás:

Lineáris rendszer bemenete ha 0 akkor kimenete is 0.

$$0 = 0 \cdot x_1(t) = x(t) \rightarrow y(t) = 0 \cdot y_1(t) = 0$$

Természetesen a szuperpozíció elve akárhány jelre alkalmazható ha a rendszer lineáris, ebből adódóan tekintve egy diszkrét rendszert:

Ha a rendszer bemenetei: $x_k[n]$, $k = 1, 2, \dots$

Ezeknek megfelelő kimenetek: $y_k[n]$, $k = 1, 2, \dots$

Akkor a teljes rendszere nézve:

$$\begin{cases} x[n] = \sum_k a_k \cdot x_k[n] = a_1 \cdot x_1[n] + a_2 \cdot x_2[n] + a_3 \cdot x_3[n] + \dots \\ y[n] = \sum_k a_k \cdot y_k[n] = a_1 \cdot y_1[n] + a_2 \cdot y_2[n] + a_3 \cdot y_3[n] + \dots \end{cases}$$

Mivel bármely diszkrét függvény felbontható diszkrét impulzus függvények összegére ezért ily módon lineáris rendszerek esetén elég csak ezekkel az impulzus függvényekkel számolnunk, mert a kimenet előáll az ezekre adott válaszok szuperpozíciójaként.

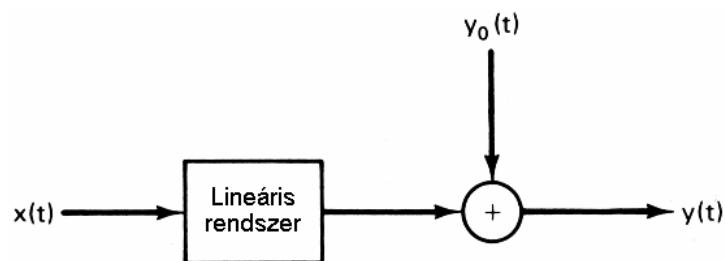
Tekintsük az alábbi példát:

$$y[n] = 2x[n] + 3$$

Vizsgáljuk meg lineáris e a rendszerünk:

$$0 = x[n] \rightarrow 2x[n] + 3 = 3 = y[n] \neq 0$$

Annak ellenére, hogy a fenti egy lineáris egyenlet mégis nem lineáris rendszert definiál. Ezen típusú rendszerekre mondjuk, hogy szakaszosan lineáris rendszerek (incrementally linear systems). Ezek alapvetően mind a folytonos mind a diszkrét időben lineárisan válaszolnak a bemenet változásokra, és ezért az ilyen rendszerek felbonthatóak egy lineáris és egy maradék tagra. Ekkor a 65. ábrán feltüntetett módon ábrázolhatjuk rendszerünket:



65. ábra Szakaszosan lineáris rendszer

Ha megvizsgáljuk az ilyen rendszerek tulajdonságait

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n]$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n]$$

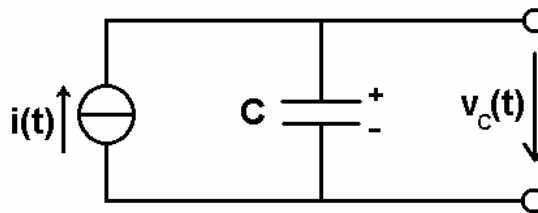
Akkor láthatjuk, hogy

- Az additivitás nem teljesül
 $x_1[n] + x_2[n] = x[n] \rightarrow y[n] = 2 \cdot (x_1[n] + x_2[n]) + 3 \neq$
 $\neq 2x_1[n] + 2x_2[n] + 6 = y_1[n] + y_2[n]$
- Homogenitás sem teljesül:
 $a \cdot x_1[n] = x[n] \rightarrow y[n] = a \cdot 2x_1[n] + 3 \neq a \cdot 2x_1[n] + a \cdot 3 = a \cdot y_1(t)$

a rendszer egészére. Azonban a rendszer részeire teljesülnek ezek a tulajdonságok. Ezért a szakaszosan lineáris rendszereket úgy is elemezhetjük, hogy csak a lineáris részükkel törődünk.

1.3.2.5.7. Példa probléma és tulajdonságai:

Adott az alábbi kapcsolási rajz.



66. ábra Töltődő kondenzátor

Határozzuk meg a rendszert leíró átmenetet:

Ha C -vel jelöljük a lineáris időinvariáns kondenzátor kapacitását, akkor C konstans értékű, ebből adódóan, ha a rendszer inputjának a kondenzátor áramát és kimenetének pedig a feszültségét tekintjük:

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\delta) d\delta$$

Képlettel adhatjuk meg a rendszer leképezését leíró függvényt.

Adjuk meg most, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkezik a rendszer:

- A rendszer nem felejtő, hisz az integrálás során a jelenleginél régebbi bemenetek is részeivé válnak a kimenetnek. Tehát, a kondenzátor memóriával rendelkező elektronikai egység.
- A rendszer kauzális, hisz kimenete nem függ a bemenet jövőbeli értékétől. A kondenzátor jelenlegi feszültségére nincsen hatással, hogy a jövőben mi fog történni.
- Vizsgáljuk meg a rendszer linearitását:

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t [\alpha_1 x_1(s) + \alpha_2 x_2(s)] ds = \frac{\alpha_1}{C} \int_{-\infty}^t [x_1(s)] ds + \frac{\alpha_2}{C} \int_{-\infty}^t [x_2(s)] ds = \\ &= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \end{aligned}$$

Ebből adódóan jó látható módon teljesül a szuperpozíció elve. Így rendszerünk lineáris tulajdonságú.

- Tegyük fel, hogy $x(t)$ bemeneti jelre a választ $y(t)$ írja le, ekkor, ha vizsgáljuk az $x_1(t) = x(t - t_0)$ jelet azt várjuk, hogy az erre adott válasza a rendszernek $y_1(t) = y(t - t_0)$ lesz. Ekkor neveznék a rendszert időinvariánsnak. Lássuk teljesül-e ez:

$$y_1(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(s - t_0) ds = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\eta) d\eta = y(t - t_0)$$

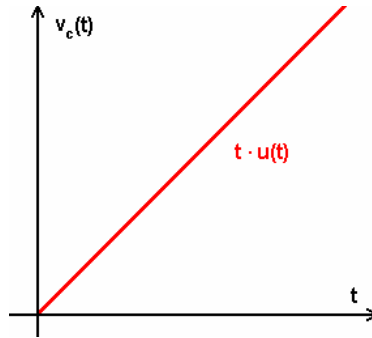
Tehát a rendszerünk időinvariáns is.

- Vizsgáljuk most a stabilitását:

Legyen a vizsgáló jelünk a $x(t) = k \cdot u(t)$ ahol $k \neq 0$ konstans szám.

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t k \cdot u(s) ds = \frac{k}{C} \int_0^t ds = \frac{k}{C} \cdot t \cdot u(t)$$

Ez az egység sebességugrás függvény (ramp signal). Tehát a rendszerünk nem BIBO stabil.



67. ábra A rendszer kimenete a bemenetre adott egységugrás esetén

2. Lineáris Időinvariáns Rendszerek (Linear Time Invariant Systems: LTI)

Eddig nagy általánosságban vizsgáltuk a rendszereket és tulajdonságaikat. Most a rendszerek egy csoportjával az úgynevezett lineáris és időinvariáns rendszerekkel vizsgálódunk tovább.

Ahogy az előző fejezet kapcsán kiderült, a lineáris rendszerek sajátossága, hogy kimenetük a bemenetre adott jelek kompozíciója esetén, a kimeneten az egyes jelekhez tartozó kimenetek szuperpozíciójaként áll elő.

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots$$

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \dots$$

Ha ezt a tulajdonságot annak a tükrében vizsgáljuk, hogy a jelek felírhatóak impulzus függvények összegeként,

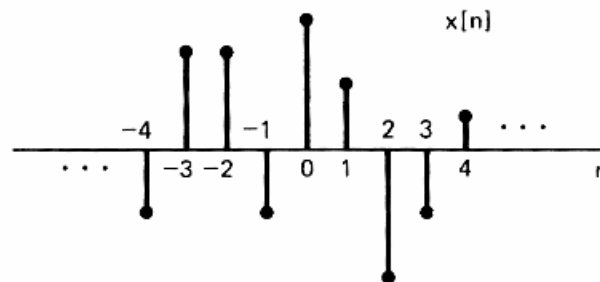
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \delta(t-s) ds$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$$

Akkor egyértelmű, hogy elég csupán ilyen elemi függvényekre vizsgálni a tulajdonságokat és az átvitelt, mert ezekből majd tetszőleges jelre származtathatók a rendszer tulajdonságok és a rendszer által adott válaszok is. Persze sose feledjük, hogy LTI rendszereket vizsgálunk. Amely tulajdonságok és tételek itt kimondásra kerülnek nem biztos, hogy más nem LTI rendszereknél, vagy problémáknál is használhatóak.

2.1. Jelek reprezentációja impulzus függvényekkel (Time representation of signals in term of impulses)

Nézzük meg, a fent említett tulajdonságot egy kicsit bővebben. Tekintsünk egy tetszőleges, diszkrét $x[n]$ jelet ahogy azt a 68. ábra is mutatja:



68. ábra Diszkrét jel

Szorozzuk be a fenti jelet a $\delta[n]$ függvény időbeli eltoltaival, ahogy azt a felbontási képletben is tettük. Ekkor:

$$x[-1] \cdot \delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

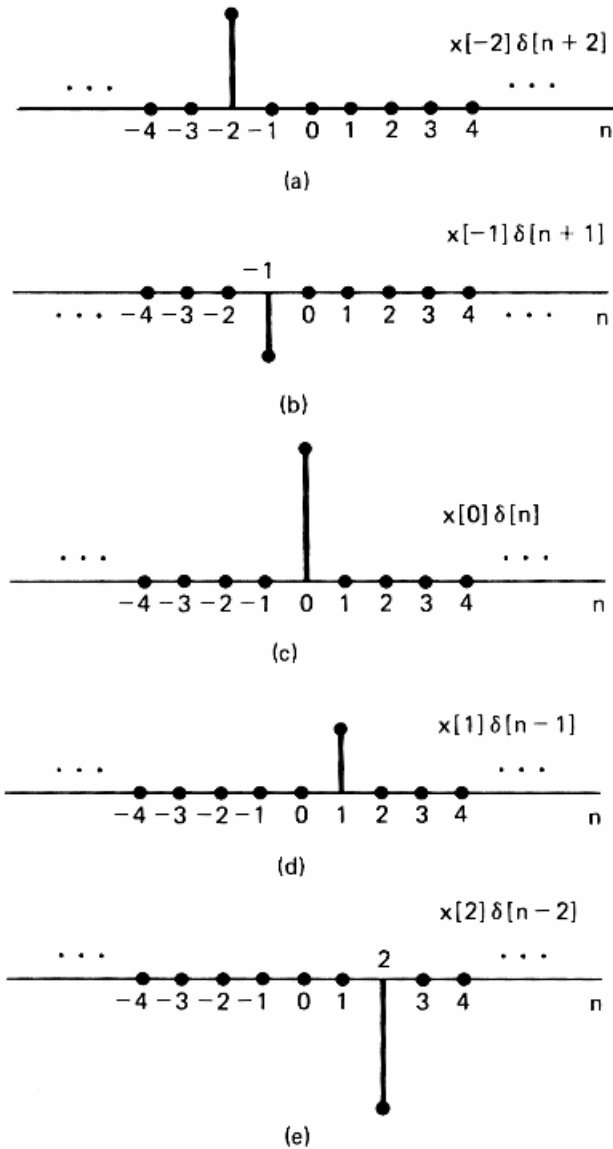
$$x[0] \cdot \delta[n] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1] \cdot \delta[n-1] = \begin{cases} x[1], & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

Így ezen függvények összegét véve:

$$x[n] = \dots + x[-1] \cdot \delta[n+1] + x[0] \cdot \delta[n] + x[1] \cdot \delta[n-1] + \dots$$

alakban előáll a jel, ha a ezt az eljárást minden lehetséges n időpontra elvégzem. Az egyes összegtagokat megvalósító függvényeket ábrázolja a 69. ábra.



69. ábra A diszkrét jel dekompozíciója súlyozott impulzusok összegére

A fenti képletet átírhatjuk egy kompaktabb, mozgó összeg formába:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k],$$

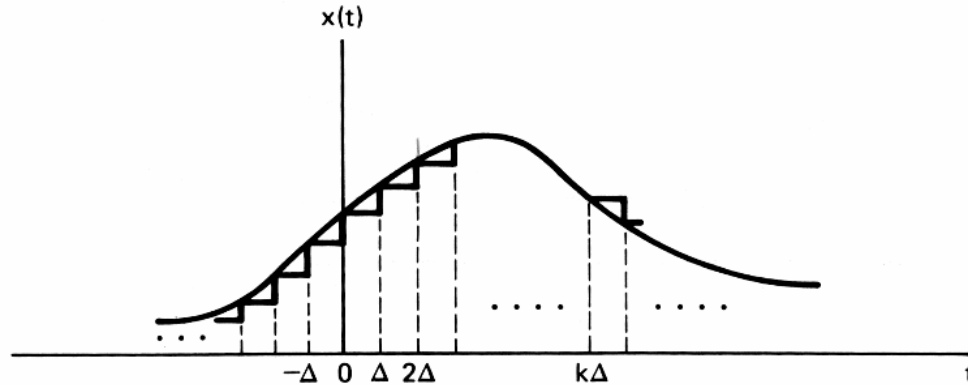
Ezúton beláttuk a jelfelbontási képletünk helyességét és megvilágítottuk annak értelmét.

Ha viszont $x[n] = u[n]$, akkor a képlet redukálódik a

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] = u[n]$$

alakra. Ezt vezettük le az előző fejezetben is. Ezt a tulajdonságát az egység impulzus függvények: Eltolási Tulajdonságnak (Shifting Property) nevezzük.

Vizsgáljuk meg ugyanezt folytonos esetben is. Itt is tekintsünk egy tetszőleges $x(t)$ folytonos függvényt, amit a 70. ábrán ábrázoltunk:



70. ábra Folytonos jel, és annak lépcsős impulzus összeg közelítése

A diszkrét esetben tett megfigyeléseinkre alapozva itt is egységnyi területű impulzus jelek összegére bontva tekintjük az $x(t)$ jelet, ahogy az már a fenti ábra alapján sejthető.

Az egységnyi területű, impulzus definíció szerint:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$$

Ekkor az $x(t)$ jel közelítéseként, ahogy azt a Riemann integrálás definíciójának bevezetésekor teszünk analízisben, az $\hat{x}(t)$ közelítő jel adható meg az alábbi összegként:

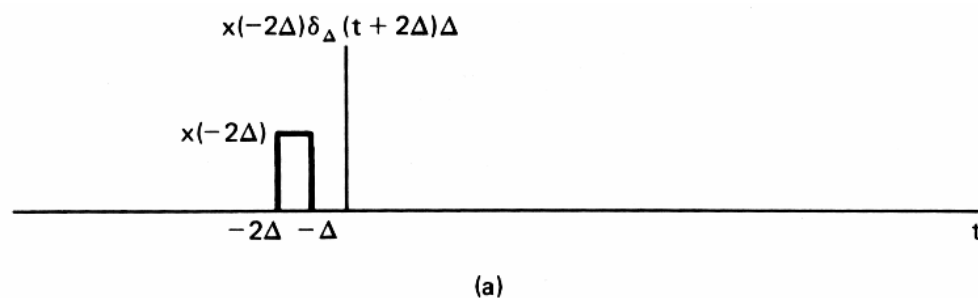
$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$$

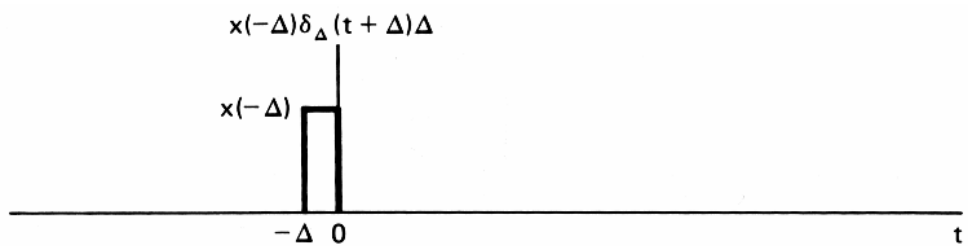
ahol $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$ egységnyi amplitúdójú.

Ha most Δ tartajuk a 0-hoz, akkor:

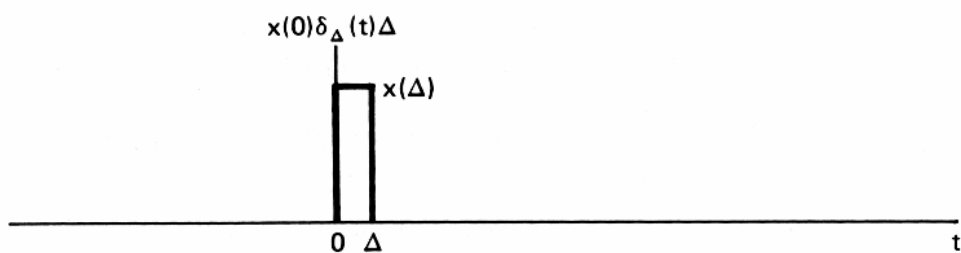
$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{x}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$$

A fenti közelítés alapján látható, hogy a lépésköz, azaz a bontás finomságának csökkenése, egyre jobb közelítést tesz lehetővé, míg el nem jutunk a pontos alakhoz, amit egy integrál képvisel. A 71. ábra szemlélteti a 70. ábrán szereplő jel felbontását.

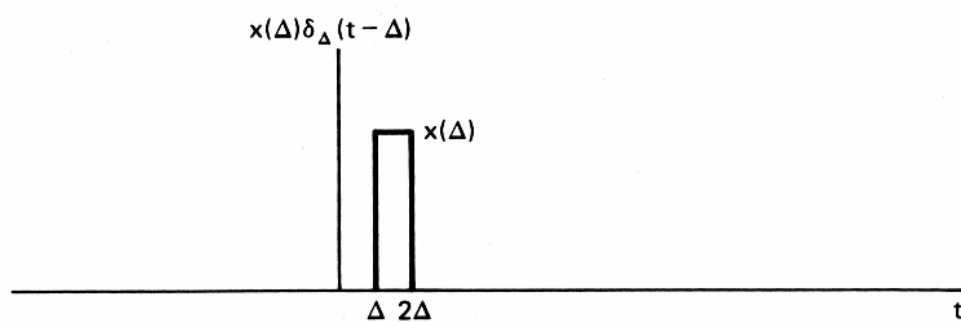




(b)

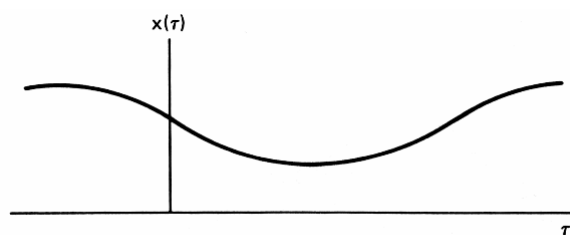


(c)

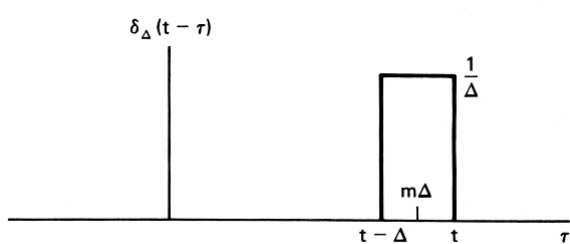


(d)

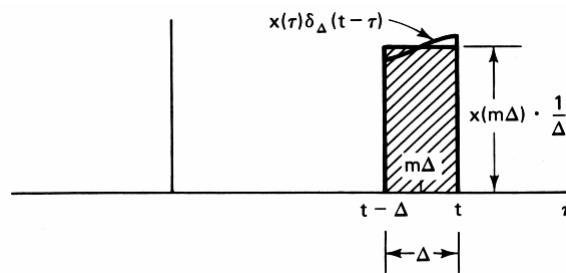
71. ábra A jel felbontásában szereplő impulzus függvények



(a)



(b)



72. ábra Grafikus ábrázolása a felbontás finomságának

Itt csupán a $t - \Delta < m\Delta < t$ intervallumon nem nulla az adott függvény, de ezen az időszeleten, közelítését adja az eredeti függvény által felvett értékeknek. Ha az időszelét nagyságát tartatjuk a 0-hoz akkor, egyrészt végtelen sok időszeletünk lesz, másrészt pedig az adott impulzus függvények már a pontos értéket fogják adni a 0 hosszú időszelteken. Ezeket összegezve kapjuk az eredeti függvényt, azonban az ilyen végtelen piciny felbontású összegzés pont a Riemann integrálást jelenti. Így nincs más teendőnk mintsem, hogy leírjuk amire jutottunk, azaz:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Ahogy diszkrét esetben láttuk itt is él a „tolási tulajdonság”, mégpedig:

$$x(t) = u(t)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) d\tau$$

2.2. Konvolúciós összeg (The Convolution Sum)

Először foglalkozzunk a konvolúció műveletével diszkrét esetben. Ez a művelet meghatározó fontosságú a rendszer átvitelének, leképezésének leírásában.

Ahogy az az előbbi fejezet során láthattuk, a diszkrét jelek felbonthatóak egy futó összeg segítségével diszkrét impulzus jelek összegére.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n - k]$$

Ebből a felbontásból származik azaz ötlet, hogy ha már így felbontható a jel, akkor tekintsük külön az összeg tagjait és a rendszer által rájuk adott válaszokat. Tehát ezek a jelek mind-mind egység impulzus függvények, amelyeknek csupán az amplitúdója különbözik, de mivel a rendszerünk LTI ezért elmondhatjuk, hogy azonos jelre bármely időpontban azonos a válasz, sőt az amplitúdója a válasznak pedig egyenesen arányos a bemeneti jel amplitúdójával. Így elég vizsgálatainkat csupán az egység impulzus jel átvitelével kapcsolatban elvégezni.

2.1 Definíció:

Diszkrét LTI (SISO) rendszer esetén, az energiamentes, azaz alapállapotú rendszer bemenetét, ha egység impulzus függvénnyel gerjesztjük, akkor a

kimenet válaszát a rendszer súlyfüggvényének, vagy más néven impulzus válasz függvényének (impulse response function) nevezzük, és $h[n]$ -el jelöljük.

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

A súly függvény teljes mértékben jellemzi a rendszert, és pontosan egy olyan LTI rendszer van, amely adott súlyfüggvényt valósít meg.

Ha a rendszer nem LTI minden egyes állapothoz és időponthoz más és más impulzus válasz függvény tartozik, így azokat már nem írhatjuk le egyetlen átviteli függvénnyel és ezért nem is nevezhetjük őket súlyfüggvénynek, inkább impulzus átviteli függvényeknek, vagy impulzus átviteli karakterisztikának nevezzük.

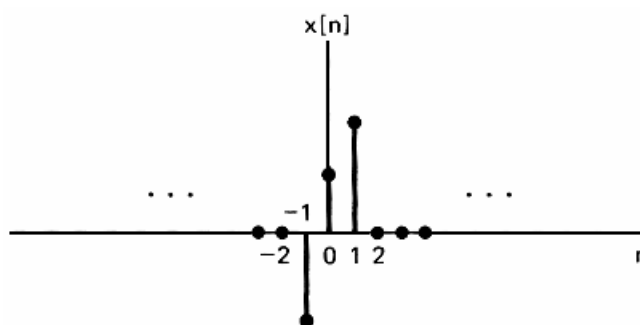
Ezen súly függvény segítségével tetszőleges bemenet esetén leírható a kimenet a futó összeg alapján. Mivel mindegyik impulzusfüggvényre ugyanaz az impulzus átviteli függvény a válasz, így írhatjuk, hogy a kimenet nem lesz más mint:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_k[n]$$

ahol $\delta[n - k] \rightarrow h_k[n] = h[n - k]$

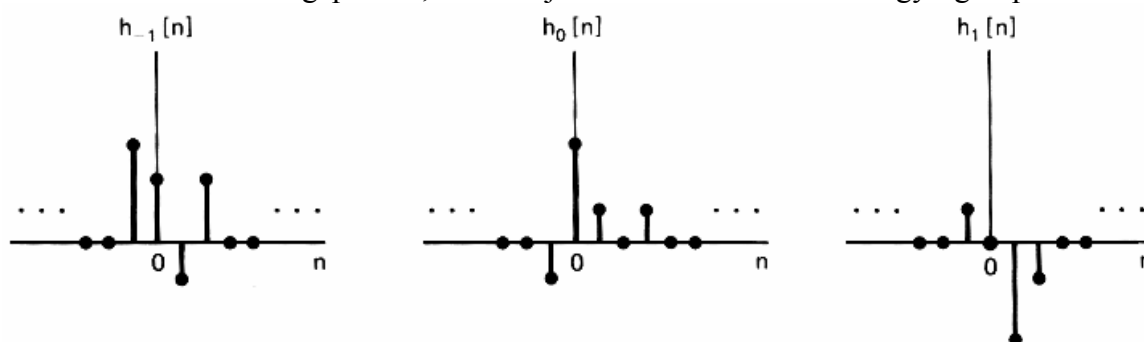
Így tetszőleges probléma kapcsán ha a rendszer LTI, nem kell mást cselekednünk mint kiszámítani a súly függvényt, azaz $h[n]$ -et, és összegezni azt minden egyes időpontra adott válaszként, a jel amplitúdóival szorozva.

Ha a rendszerünk nem LTI, csupán lineáris, akkor természetesen ezek a $h_k[n]$ súly függvények minden k esetén különbözőek lesznek. Azonban ekkor is él a szuperpozíció tulajdonsága, tehát a kimenet előáll a válaszok összegeként, ahogy azt a 74., 75. ábrásor is mutatja, egy tetszőleges $x[n]$ jelet (73. ábra) véve alapul.



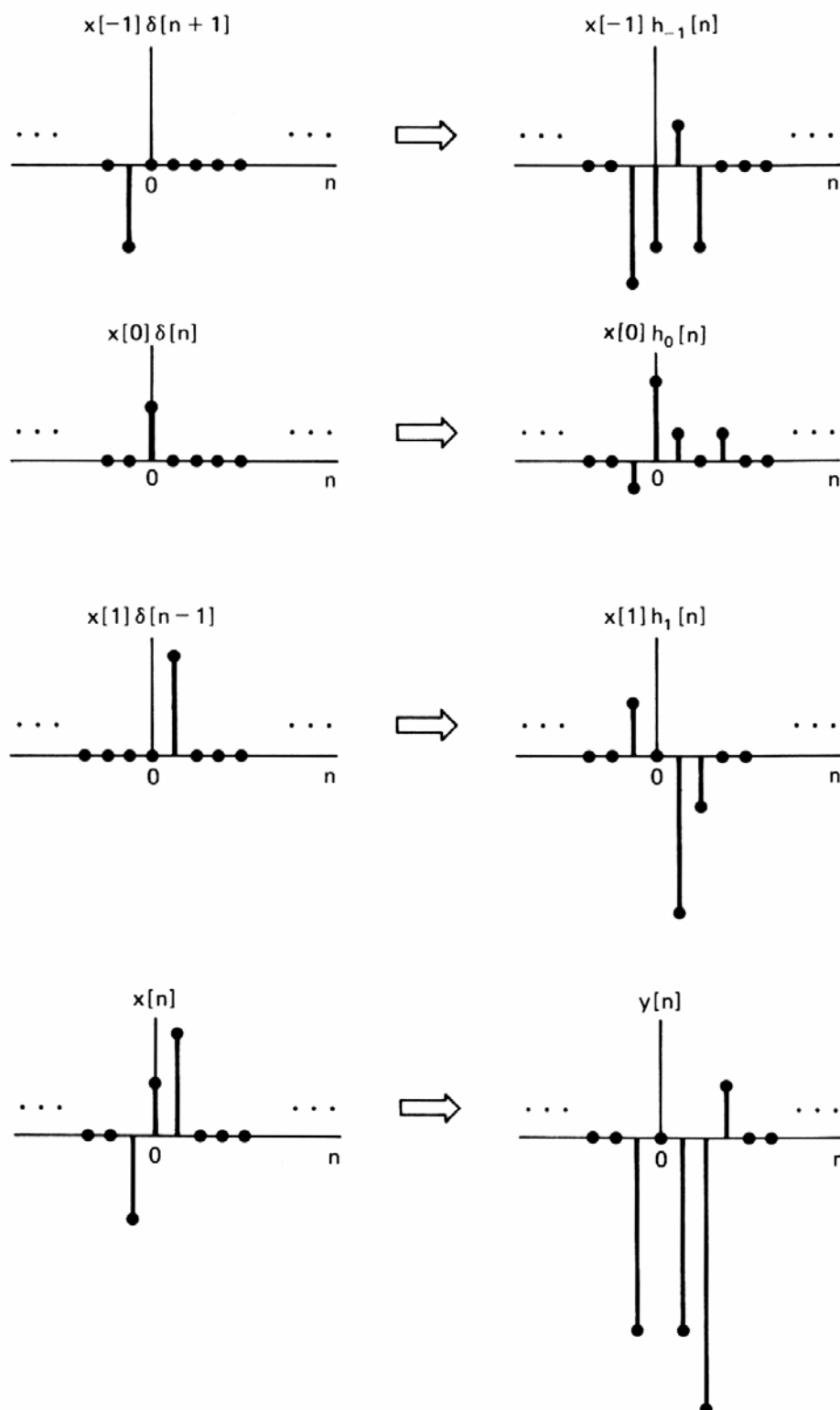
73. ábra Diszkrét jel

A válasz megépíthető, ha ismerjük a rendszer válaszát az egység impulzusokra:



74. ábra Az idővariáns rendszer impulzus válasz függvényei különböző időpontokban

És ezekből szuperpozícióval előáll a válasz:



75. ábra A jel összetevőkre adott válaszok és az azokból előálló kimeneti jel

Azonban mi is az a konvolúció, ami-e rész címét adja. Nos, mivel a fentiekben megismerkedtünk azzal a ténnyel, hogy

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n - k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_k[n]$$

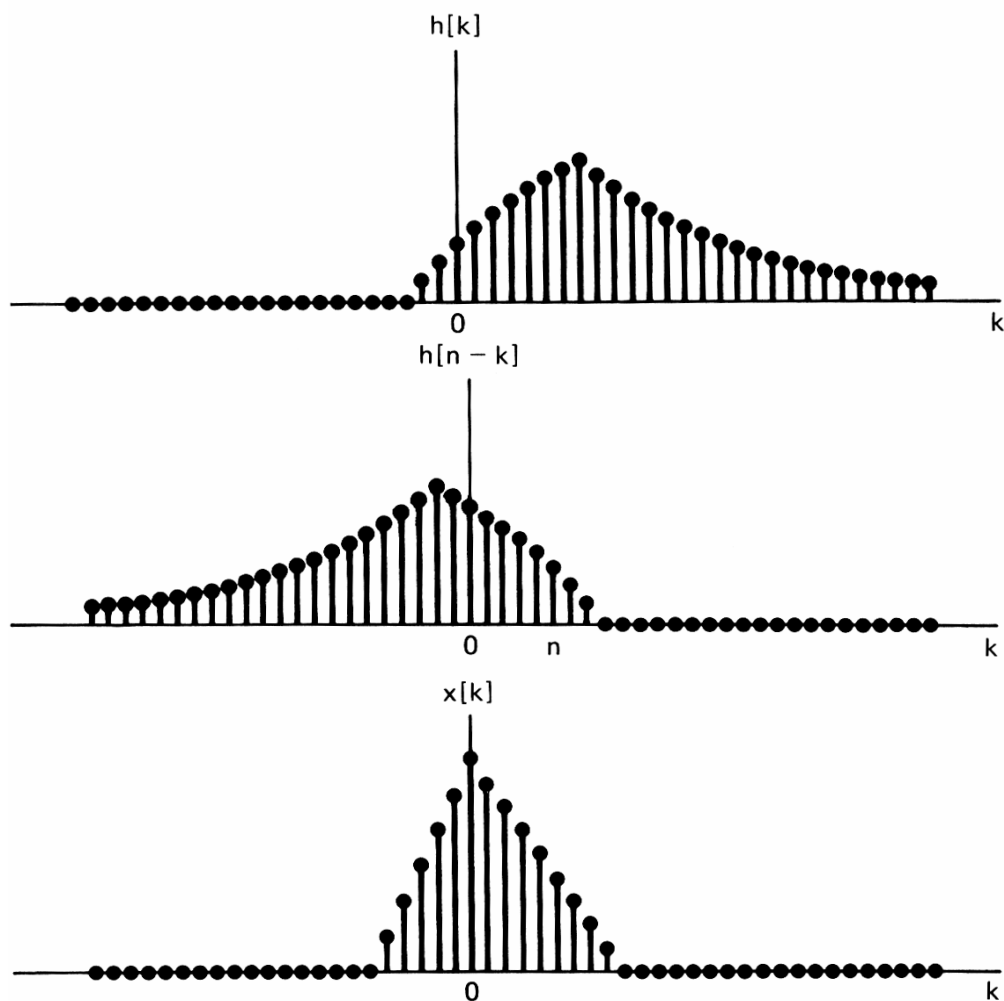
kifejezi egy lineáris, időinvariáns diszkrét rendszer válaszát egy akármilyen bemenetre, mintegy az impulzusfüggvényekre adott válaszáinak összegeként, így elmondhatjuk, hogy egy LTI rendszert teljes mértékben meghatározza impulzus válasza.

Ekkor viszont a futó összegzés leírható egy általunk definiált művelettel, amit nevezzünk ezentúl konvolúciónak, és jelöljünk:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k]$$

módon.

Nézzük ennek grafikus értelmezését a 76. ábrán.



76. ábra A rendszer átviteli függvénye, annak $h[n-k]$ tükörképe és eltoltja, és a rendszer bemenete

Adott $h[n]$ esetén állítsuk elő az origóra nézve reflexióval $h[n-k]$, ahogy azt az ábrán is láthatjuk. Ekkor az $x[n]$ -jelre adott választ kiszámíthatjuk, ha az $x[n]$ jel minden egyes k -adik pontjába odaillesztjük a $h[n-k]$ függvényt megszorozva $x[k]$ -val és ezeket a függvényeket összegezzük.

A fenti számítási módszer, bár elsőre igen bonyolultnak tűnik, mégis egyszerűen kivitelezhető. Az ember számára talán leginkább úgy modellezhetjük, hogy elképzelünk egy hatalmas pályaudvart, ahol egymással párhuzamosan sok ezer sín, és ezekre merőlegesen egy sín pár fut. A párhuzamos sorokon, minden vágányon álljon egy-egy kocsis rakomány nélkül. Tudjuk, hogy egy adott pontban a jel amplitúdóját a kocsis megpakoltsága jelzi. Legyen adott egy bizonyos kocsis szerelvény amelyben a kocsik megrakottsága különböző. Nos a szerelvény beáll a merőleges sín párokon a sorba sorakozó kocsik mellé úgy, hogy a saját szerelvény tagjainak mindegyike egy kocsis mellett álljon. Ekkor átpakolják a párhuzamos síneken várakozó kocsikba a szerelvényből a rakományt. A szerelvény mozdonya, mindig különböző kocsinál áll meg ami a párhuzamos síneken várakozik, és minden rakodás után visszatér a telephelyre, ahol a szerelvény ugyanúgy feltöltik. Ezután pedig visszamegy a kocsikhoz és megint beáll valaki mellé, aki mellett még nem állt meg. Így ha ezt minden kocsira elvégzi, akkor elvégezte a konvolúció műveletét, ahol egy kocsira, azaz impulzusra, egy szerelvény volt a válasz. Ha az impulzus nagyságát is értelmezzük, akkor a kocsik végső rakományát még meg kell szorozni kocsinként az eredeti jelben vett impulzusok nagyságával. Ezt értelmezhetjük a kocsik színével, azaz, ha csak 0,1,2 nagyságú impulzusok lehetnek, akkor a sárga kocsis rakománya olyan mintha nem is lenne, a kék kocsis rakományát normál módon, míg például a piros kocsis rakományát duplán számoljuk az értékelésnél. Persze mivel végtelen sok nagyságú impulzus előfordulhat ezért végtelen sok szint és értelmezési szabályt is kéne definiálnunk.

2.1 Példa:

Tekintsük végig a fenti okfejtésünket most egy példán:

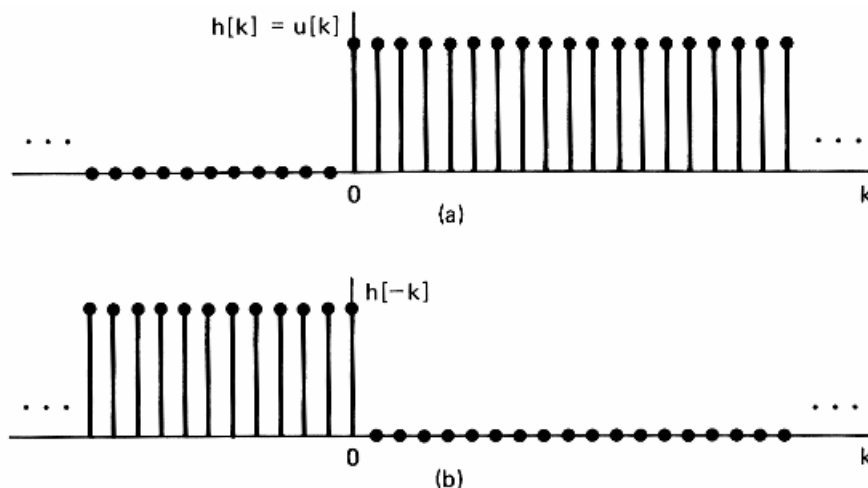
Legyen adott

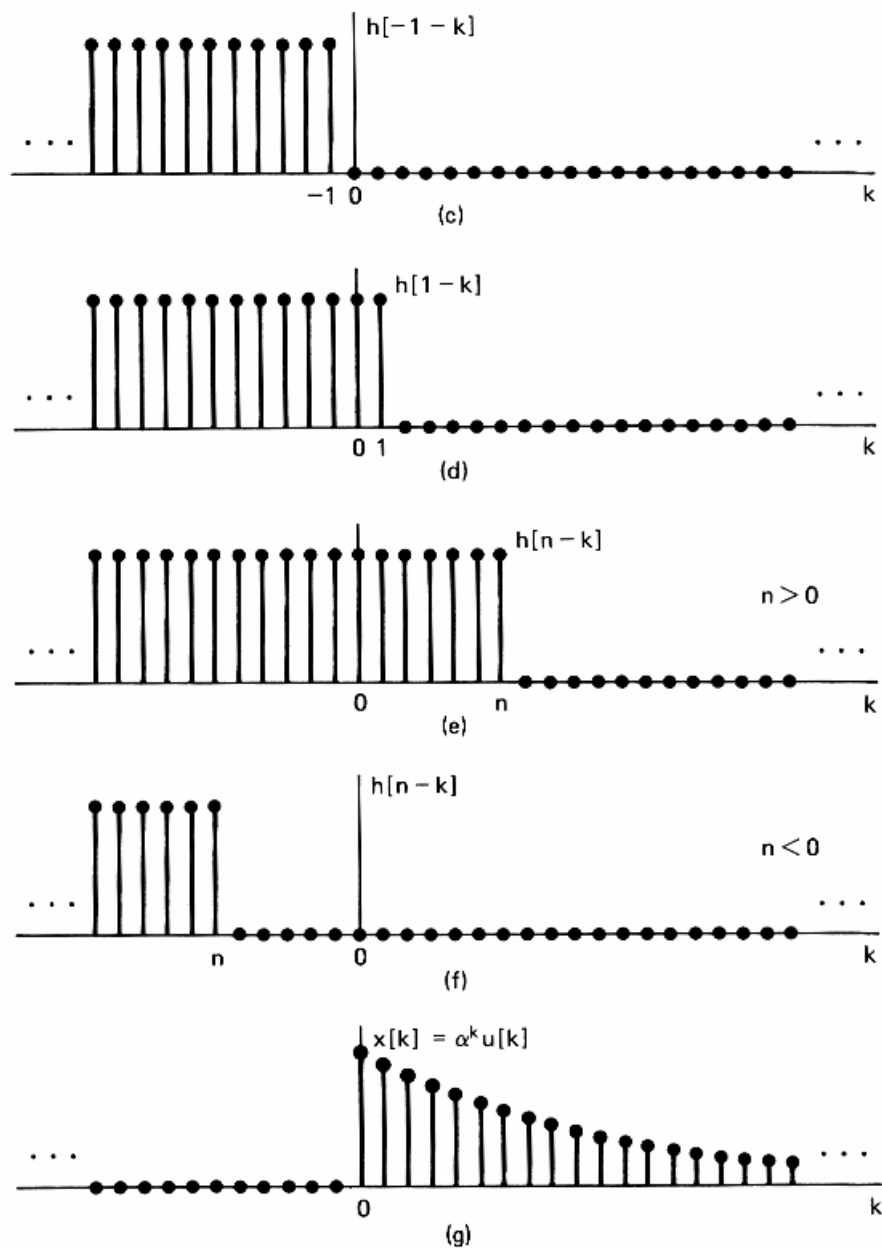
$x[n] = \alpha^n u[n]$ input függvény, ahol $0 < \alpha < 1$.

$h[n] = u[n]$ pedig az átviteli függvény.

Számoljuk ki a konvolúció műveletével az $y[n]$ választ!

A 77. ábrán feltüntettük $h[k]$, $h[-k]$, $h[-1-k]$, $h[1-k]$, és $x[k]$ jeleket.





77. ábra A konvolúció számításához szükséges jelek

Érdemes részekre bontani vizsgálódásunkat:

I. $n < 0$

Észrevehető, hogy $h[k]$ -nak nulla az értéke $n < 0$ -ra, ebből következik, hogy mivel a jel is csupán 0-ban lép be ezért $n < 0$ -ra a válasz is nulla lesz.

$$x[k] \cdot h[n - k] = 0$$

$$y[n] = 0$$

II. $n \geq 0$

Mindig úgy számolunk, hogy a vizsgált intervallumokon, melyeken a kimenet hasonló jellegűen számolható, a tükrözött és eltoló $h[n - k]$ jelet utaztatjuk $x[k]$ -ban, összeszorozva közös részüket, ez lesz az adott pillanatbéli kimenet értéke:

$$x[k] \cdot h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{másra} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k$$

mivel:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N, & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

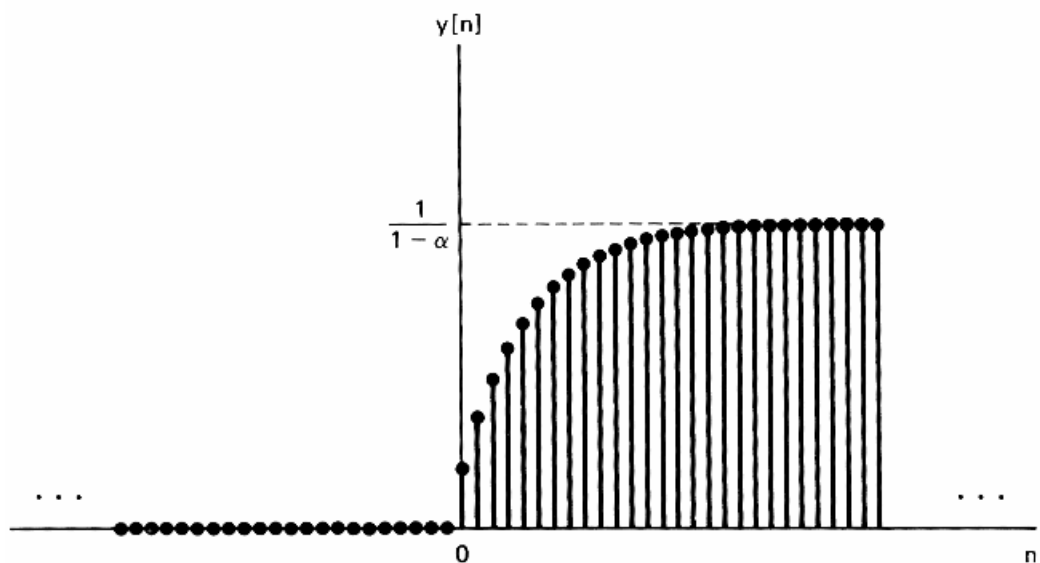
ezért:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}, \quad \text{ha } |\alpha| < 1$$

$$y[n] = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Ezért a probléma megoldása (78. ábra):

$$y[n] = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \cdot u[n]$$



78. ábra A példa rendszer kimenete

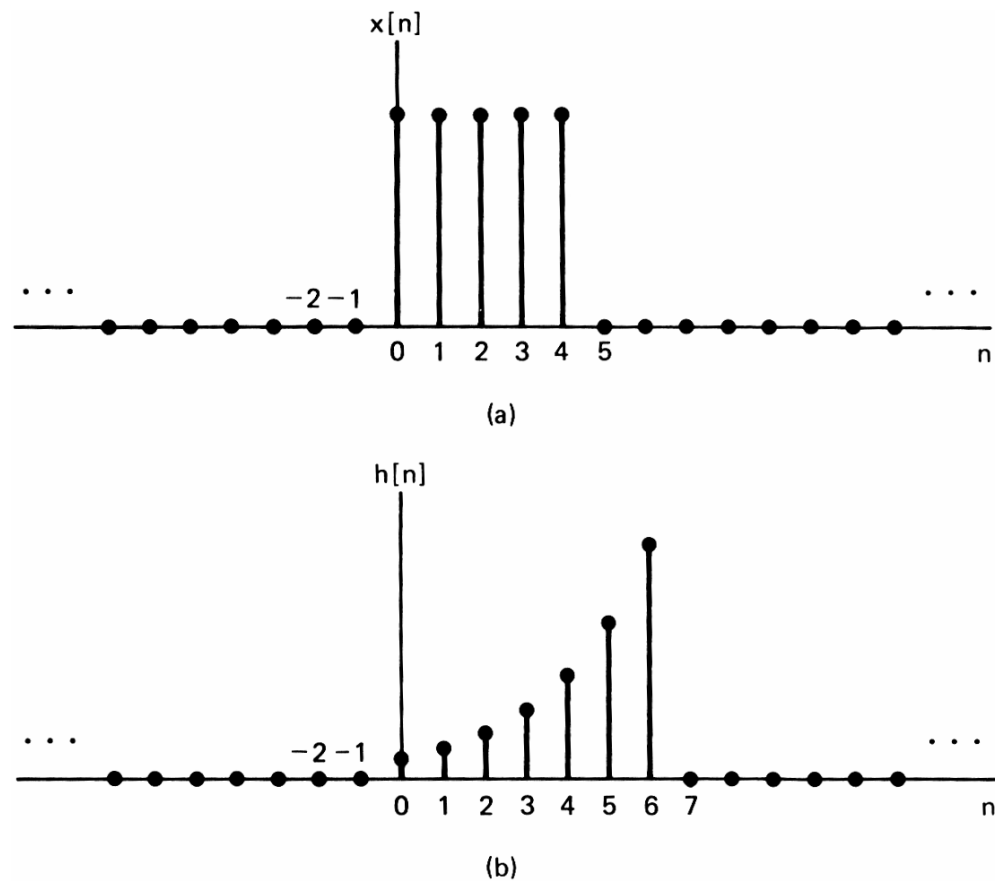
2.2 Példa:

Tekintsünk most egy másik példát:

Legyen adott:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{másra} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{másra} \end{cases}$$



79. ábra Konvolúcióban résztvevő jelek: a rendszer (a) bemenete, (b) impulzus válasz függvénye

Most is kényelmesebb, ha intervallumonként számolunk:

I. $n < 0$

Itt is igaz, hogy az súly függvény nulla értékű nullánál kisebb időpontokra.

$$x[k] \cdot h[n - k] = 0$$

$$y[n] = 0$$

II. $0 \leq n \leq 4$

$h[n-k]$ kezd belépni az $x[k]$ jelbe.

$$x[k] \cdot h[n - k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{másra} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} = \sum_{r=0}^n \alpha^r = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, \text{ mivel } r = n - k$$

III. $4 < n \leq 6$

$h[n-k]$ utazik az $x[k]$ jelben.

$$x[k] \cdot h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{másra} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^4 \alpha^{n-k} = \alpha^n \cdot \sum_{k=0}^4 (\alpha^{-1})^k = \alpha^n \cdot \frac{1 - \alpha^{-5}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

IV. $6 < n \leq 10$

$h[n-k]$ már kezd kifelé haladni az $x[k]$ jelből.

$$x[k] \cdot h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & n-6 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{másra} \end{cases}$$

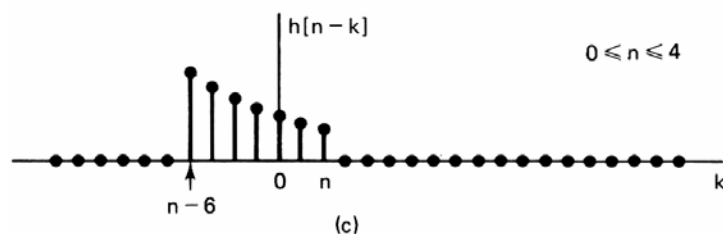
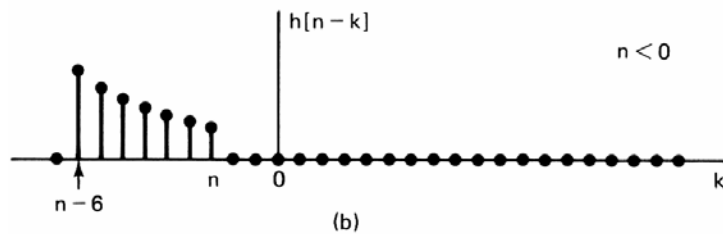
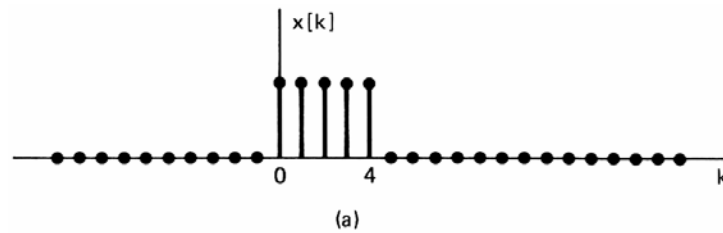
$$y[n] = \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{n-k} = \alpha^n \cdot \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{-r} = \alpha^6 \cdot \frac{1 - \alpha^{n-11}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}, \text{ mivel } r = k - n + 6$$

V. $10 < n$

Ekkor már $h[n-k]$ és $x[k]$ nem zérus részeinek nincs közös része így

$$y[n] = 0$$

A példában szereplő konvolúciós művelet grafikus interpretációját mutatja be a 80. ábra.

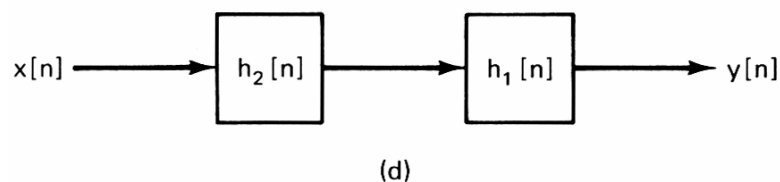
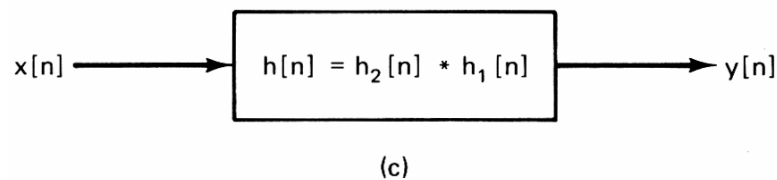
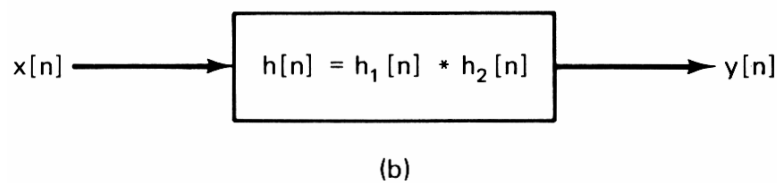
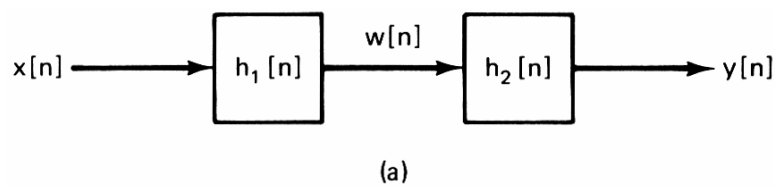


Ez alapján azt is észrevehetjük, hogy egy LTI rendszer válasza az $x[n]$ bemenő jel és $h[n]$ egységimpulzus függvényválasz konvolúciójával írható le, akkor a rendszer kimenete identikus azzal az LTI rendszer kimenettel, melynek bemenete $h[n]$ és egységimpulzus válasza $x[n]$ -el egyenlő.

Tehát az előbbi példában úgyis kiszámíthattuk volna a konvolúciós összeget, hogy először tükrözzük és tologatjuk az $x[k] \rightarrow x[n-k]$ jelet, majd megszorozzuk $h[k]$ -val és ezt összegezzük minden k -ra.

2.2.1.2. Asszociativitás (Associativity)

Tekintsünk két LTI rendszert amelyeket sorba kötünk. Vajon függ-e sorrendjüktől a kimenet, ha mindkét esetben ugyanazon bemeneti jelet adjuk meg a sorba kapcsolt rendszerük bemenetére. Mert ha nem, akkor összevonhatóak egyetlenegy rendszeré sorrendjüktől függetlenül.



82. ábra A kommutativitás és az asszociativitás következménye sorosan kapcsolt rendszerekre

A felcserélhetőség bizonyításához használjuk ki a konvolúció kommutativitását:

$$y_1[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = w[n] * h_2[n]$$

$$y_2[n] = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] = v[n] * h_1[n]$$

Azonban a kommutativitás miatt:

$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = x[n] * (h_2[n] * h_1[n])$$

Ebből viszont következik, hogy:

$$y_1[n] = y_2[n]$$

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

Azaz a rendszerek sorrendjétől független a kimeneten kapott válasz függvény és ezért különböző sorrendben összevonva őket egyetlenegy rendszerré ugyanazt az eredményt kapjuk.

Ezen tulajdonság alapján az alábbi kijelentést tehetjük:

Mivel az LTI rendszerek impulzus válasza teljes mértékben jellemzi a rendszer viselkedését ezért a sorba kapcsolt rendszerek egyetlen rendszerré összevonhatók, amelynek súly függvénye a két rész rendszer súly függvényének konvolúciója.

$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n]$$

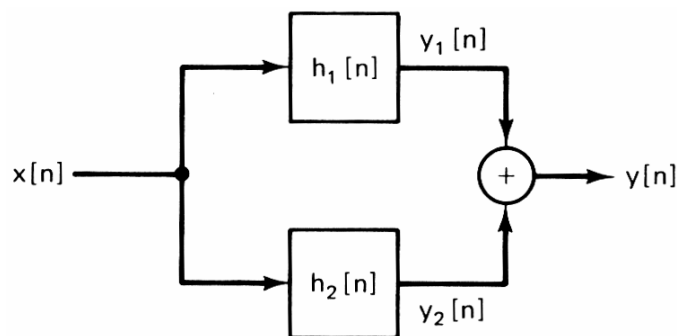
2.2.1.3. Disztributivitás (Distributivity)

Legyen adott két párhuzamosan kapcsolt rendszer. Ha az így kapott összetett rendszer bemenetére egységimpulzus függvényt adunk, akkor mindkét rész rendszer a saját súlyfüggvényével válaszol rá, amelyek összegződnek és így érik el a teljes rendszer kimenetét (83. ábra).

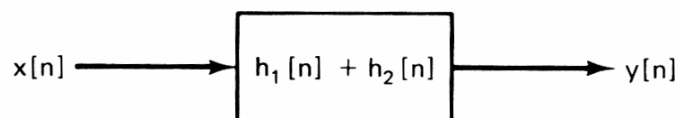
$$y_1[n] = x[n] * h_1[n] \quad y_2[n] = x[n] * h_2[n]$$

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$$



(a)



(b)

83. ábra A konvolúció disztributivitásának következménye párhuzamosan kapcsolt rendszerekre

Így máris beláttuk, hogy:

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

Tehát LTI rendszerek párhuzamos kapcsolata leírható egyetlen rendszerrel melynek súly függvénye a párhuzamosan kapcsolt rendszerek súly függvényének összege.

Azonban ne felejtsük el, hogy a fenti esetekben mindig LTI rendszereket tekintettünk. Viszont nem LTI rendszereknél az impulzus válaszfüggvény nem kezelhető ilyen egyszerűen, mivel annak minden időpillanatban más az alakja. Ezért idővariáns esetben a konvolúció művelete, nem lineáris esetben pedig tulajdonságainak kiaknázása hibás megoldást eredményez ha azt a fenti módon tesszük meg. Természetesen egy impulzus válasz karakterisztikával is lehet konvolúciót végezni, azonban ez már lényegesen bonyolultabb pontonkénti műveletet eredményez.

2.3 Példa:

Tekintsük az alábbi nem LTI rendszert:

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Tudjuk, hogy pontosan egy LTI rendszer létezik amelynek ez az átviteli függvénye, ez pedig nem más mint:

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

Azonban ez az egyértelmű megfeleltetés nem LTI rendszerekre nem igaz. Nagyon sok olyan rendszer létezhet, amely egy adott impulzus átviteli függvényt valósít meg. Például ugyanezt valósítják meg az alábbi nem LTI rendszerek is:

$$\begin{aligned} y[n] &= (x[n] + x[n-1])^2 \\ y[n] &= \max(x[n], x[n-1]) \end{aligned}$$

Ezen felül ha két nemlineáris rendszert kapcsolunk sorba mint például:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= 2 \cdot x[n] \\ y_2[n] &= (x[n])^2 \end{aligned}$$

Akkor nem mindegy milyen sorrendben kapcsoljuk össze őket. Hisz 1-2 estén: $y[n] = 4x[n]^2$, míg 2-1 esetén: $y[n] = 2x[n]^2$ lesz a kimenet.

2.3. A konvolúciós integrál (The Convolution Integral)

Mint ahogy azt diszkrét esetben is megtettük, folytonos esetben is értelmezhetjük a konvolúció műveletét.

Tudjuk, hogy folytonos esetben is felbonthatóak a jelek impulzus függvények összegének határértékére, azaz integráltjára.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma) \cdot \delta_{\sigma}(t) d\sigma = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \cdot \Delta \\ \hat{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \cdot \Delta \end{aligned}$$

Nos ezen lépcsős közelítés alapján, az egyes egységnyi területű δ_Δ függvényekre adott válasza az LTI rendszernek legyen $\hat{h}(t)$, a folytonos impulzus átviteli függvényt közelítő függvény. Ekkor, a rendszer válasza bármely intervallum osztáson értelmezett δ_Δ függvényre:

$$\delta_\Delta(t - k\Delta) \rightarrow \hat{h}_{k\Delta}(t)$$

lesz. Ezek az átviteli válaszok lehetnek különbözőek, nem LTI esetben, de LTI rendszert figyelembe véve ezek identikusak.

Ekkor a szuperpozíció elvét felhasználva, a rendszer kimenete:

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \cdot \hat{h}_{k\Delta}(t) \cdot \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma) \cdot h_\sigma(t) d\sigma \\ \hat{y}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \cdot \hat{h}_{k\Delta}(t) \cdot \Delta \\ \delta(t) &\rightarrow h_0(t) \\ \delta(t - \sigma) &\rightarrow h_\sigma(t) \end{aligned}$$

A fenti levezetést szemlélteti a 84. ábra. A felbontás finomságának hatását pedig a 85. ábrán láthatjuk.

Mivel LTI rendszerünk időinvariáns ezért:

$$\begin{aligned} h_0(t) &= h(t) \\ h_\sigma(t) &= h(t - \sigma) \end{aligned}$$

Ahol $h(t)$ a folytonos időben értelmezett impulzus függvényre adott válasza a rendszernek, azaz súly függvénye. Így a konvolúció az alábbi formulával adható meg folytonos időben:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma) h(t - \sigma) d\sigma = x(t) * h(t)$$

2.3.1. A konvolúciós integrál tulajdonságai (Properties of the Convolution Integral)

A diszkrét esettel párhuzamosan itt is ugyanazon tulajdonságokat tudjuk értelmezni.

2.3.1.1. Kommutativitás (Commutativity)

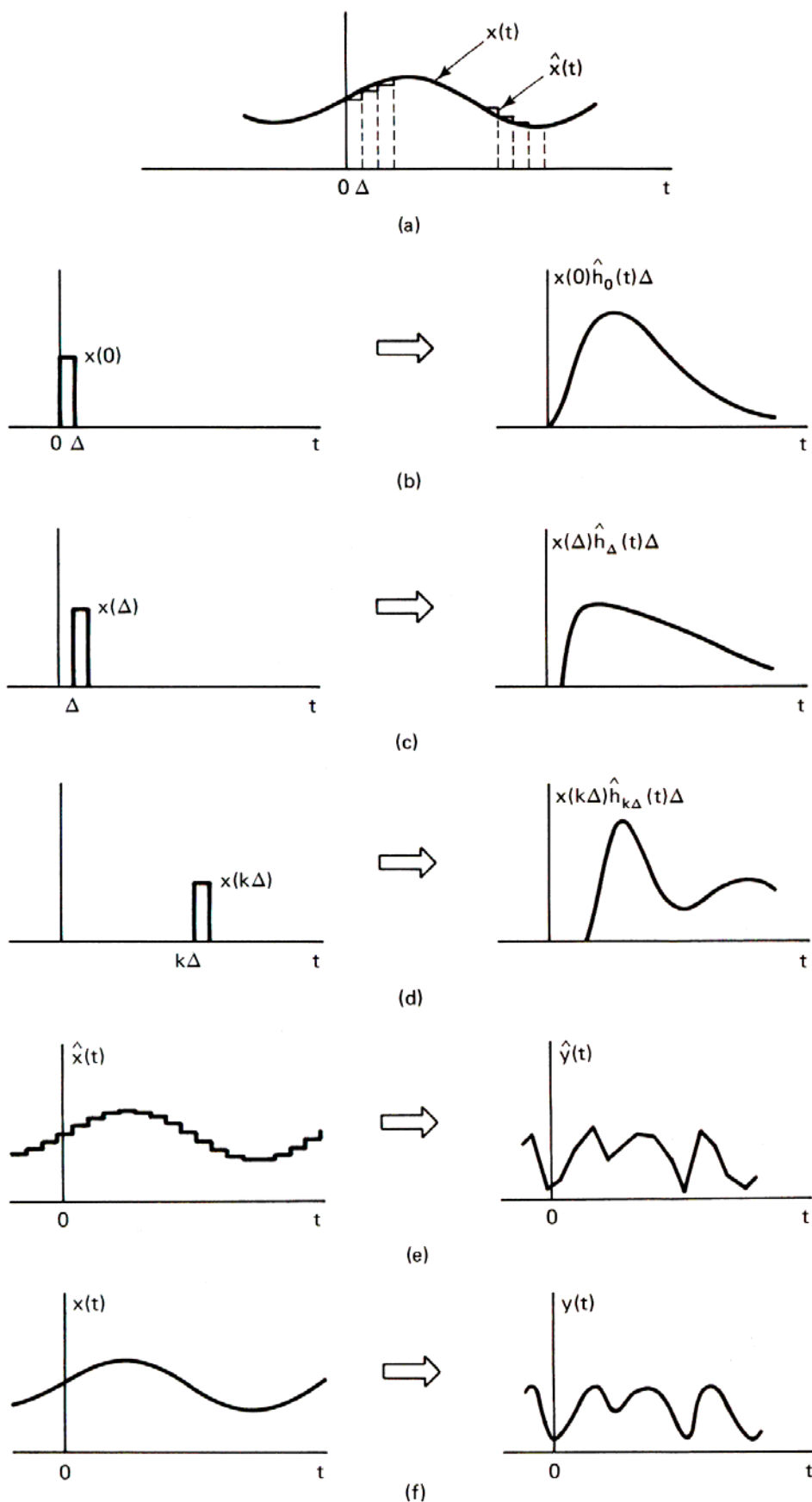
$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Az impulzus átviteli függvény és a bemenő jel felcserélhető.

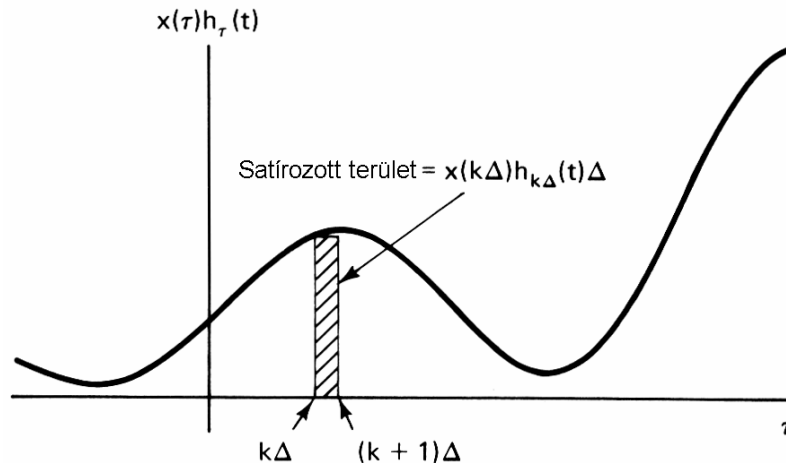
2.3.1.2. Asszociativitás (Associativity)

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

Soros kapcsolat kiváltható egyetlen rendszerrel, amelynek impulzus átviteli függvénye a részrendszerek impulzus átviteli függvényeinek konvolúciója.



84. ábra Grafikus reprezentációja a folytonos rendszer válaszfüggvény közelítésének



85. ábra A válasz közelítésének finomítása

2.3.1.3. Disztributivitás (Distributivity)

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) + (x(t) * h_2(t))$$

Párhuzamos kapcsolat kiváltható egyetlen rendszerrel, amelynek impulzus átviteli függvénye a részrendszerek impulzus átviteli függvényeinek összege.

Tekintsünk most példákat a folytonos esetre is. Elöljáróban meg kell jegyeznünk, hogy sokszor megéri a grafikusan számolni, mert máskülönben könnyen eltéveszthetők az intervallumok.

2.5 Példa:

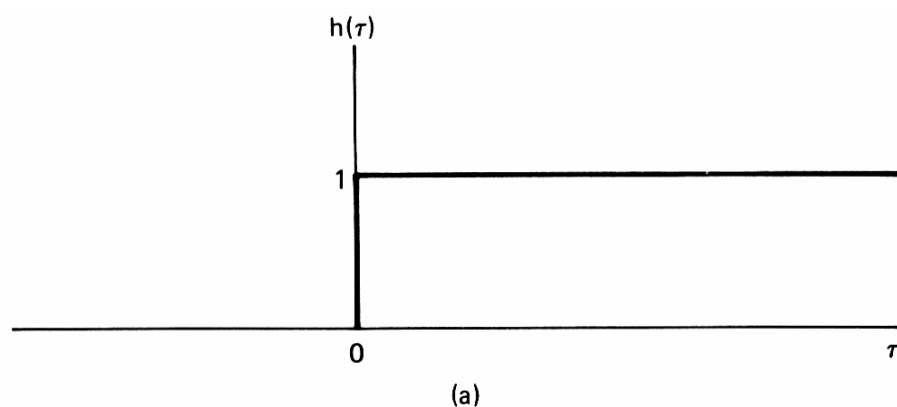
Legyen adott egy LTI rendszerünk, amire

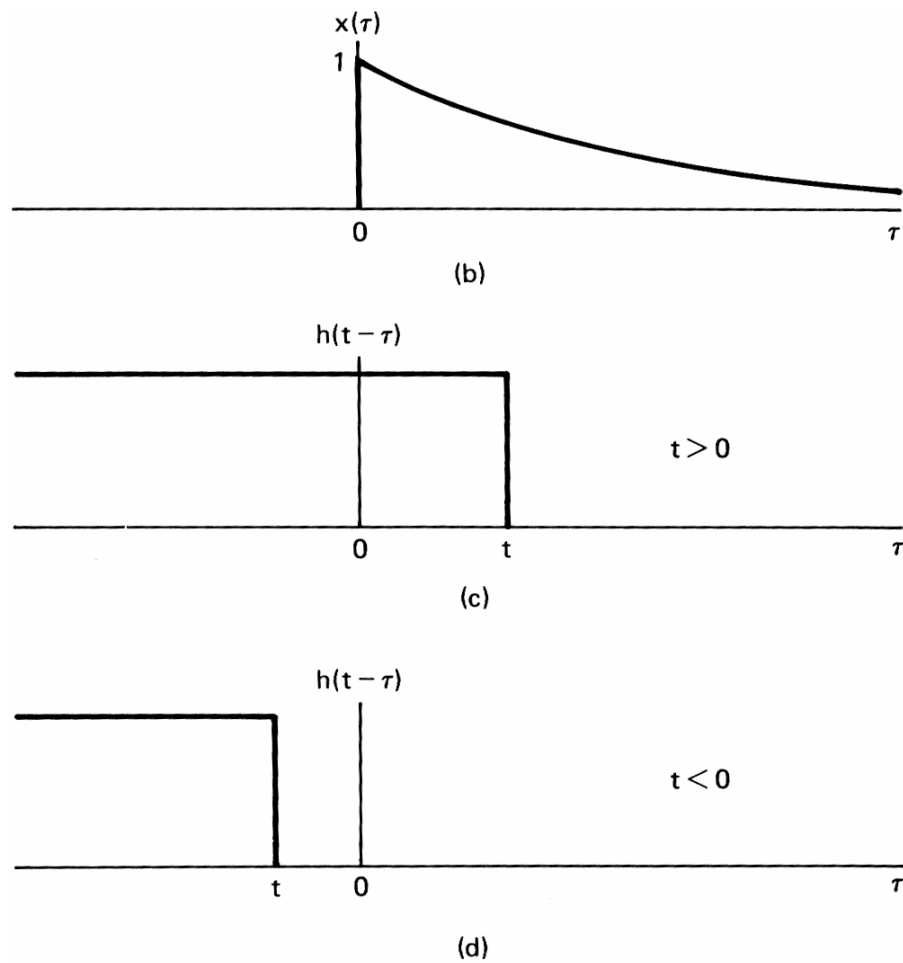
$$h(t) = u(t)$$

Gerjesszük a rendszert az alábbi bemeneti függvénnyel:

$$x(t) = e^{-at} \cdot u(t), \quad a > 0$$

Ekkor:





86. ábra A példa konvolúciójában szereplő jelek

Szakaszonként felírva a megoldást (86. ábra):

I. $t < 0$

$h(t)$ -nek minden értéke nulla, ha $t < 0$ ezért:

$$x(\sigma) \cdot h(t - \sigma) = 0$$

$$y(t) = 0$$

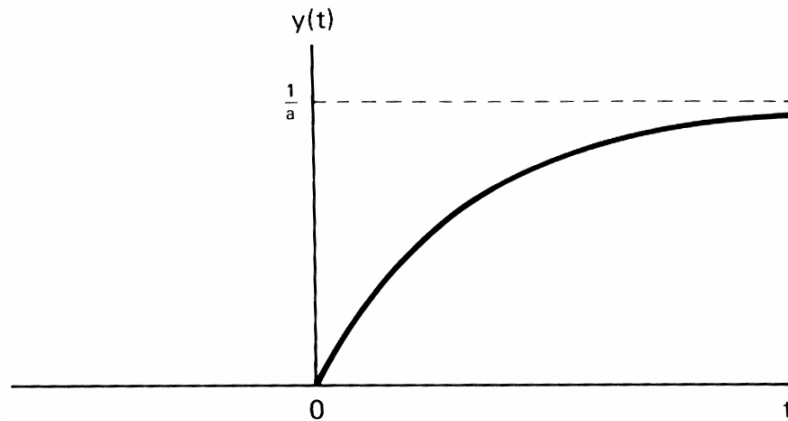
II. $t \geq 0$

$$x(\sigma) \cdot h(t - \sigma) = \begin{cases} e^{-a\sigma}, & 0 < \sigma \leq t \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\sigma} d\sigma = \left[-\frac{1}{a} \cdot e^{-a\sigma} \right]_{\sigma=0}^{\sigma=t} = \frac{(1 - e^{-at})}{a}$$

Így:

$$y(t) = \frac{(1 - e^{-at})}{a} \cdot u(t)$$



87. ábra A példában szereplő konvolúció eredménye, azaz a rendszer kimenet

2.7 Példa:

Adjuk meg az alábbi két jel konvolúcióját:

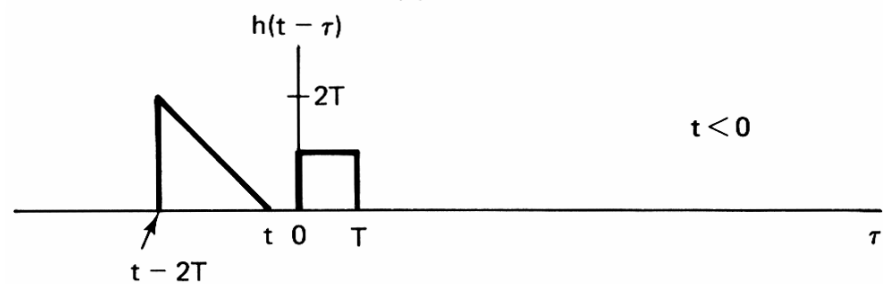
$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{egyébent} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2T \\ 0, & \text{egyébent} \end{cases}$$

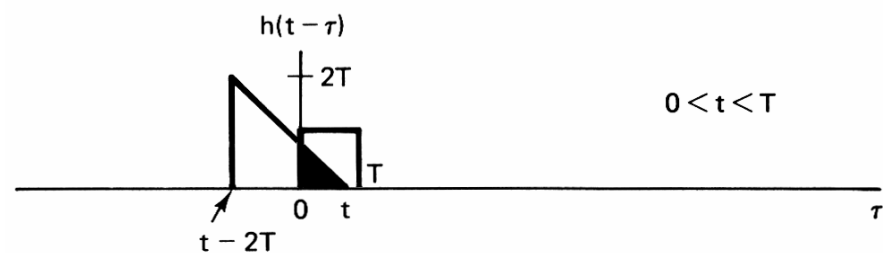
A 88. ábrán megtekinthetjük, hogyan utazik végig a $h(t)$ jel az $x(t)$ jelen miközben vesszük a konvolúcióját a két jelnek.



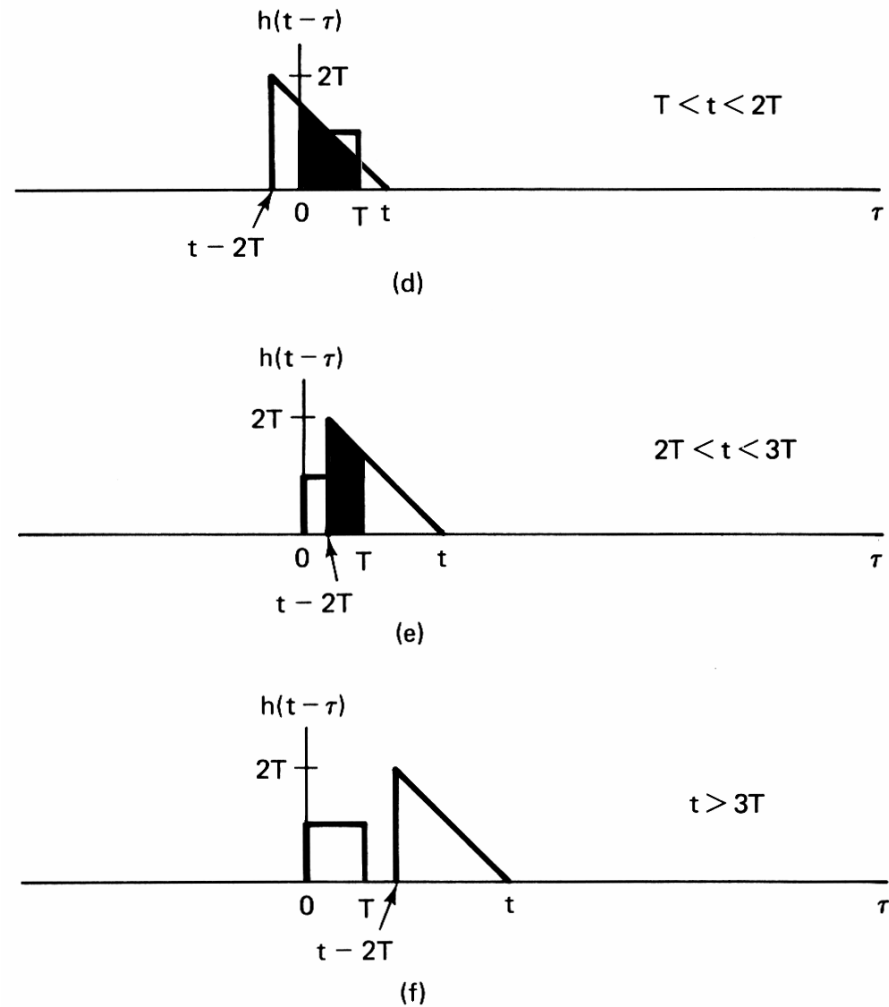
(a)



(b)



(c)



88. ábra A konvolúciós művelet szakaszonkénti szemléltetése

Azért jobb a grafikus szemléltetés mert az eredmény bármely pillanatban előáll a két jel közös területének a nagyságaként. Így öt esetet különböztetünk meg:

I. $t < 0$

$h(t)$ -nek nincs nem nulla értéke a $t < 0$ -ra ezért:

$$x(\tau) \cdot h(t-\tau) = 0$$

$$y(t) = 0$$

II. $0 \leq t < T$

Mivel csupán egy t befogójú háromszöget metsz ki a $h(t-\tau)$ az $x(\tau)$ -ból ezért a közös terület:

$$y(t) = \frac{1}{2} t^2$$

III. $T \leq t < 2T$

Itt már utazik a jelben a háromszög, így $\frac{1}{2}(t \cdot (t + T))$ területű lenne, de ebből le kell vonni azt a kis csücsköt ahol már elhagyta a jel szélét, így:

$$y(t) = \frac{1}{2}(t \cdot (t + T)) - (t - T)^2 = T \cdot t - \frac{1}{2}T^2$$

IV. $2T \leq t < 3T$

Itt már kifelé halad a háromszög a jelből:

$$y(t) = [2T - (t - T)] \cdot (t - T) + \frac{1}{2}(2T - (t - T))^2 = \frac{3}{2}T^2 - \frac{1}{2}t^2 + t \cdot T$$

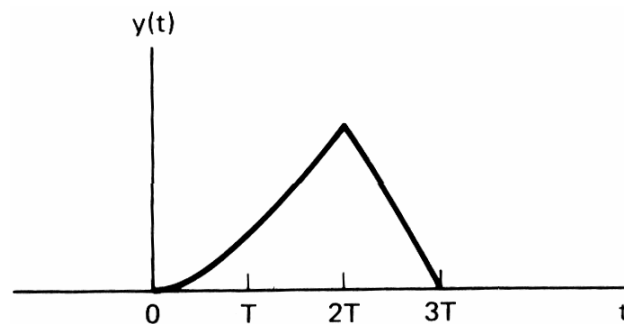
V. $3T \leq t$

A háromszög elhagyta az $x(\tau)$ jelet így:

$$x(\tau) \cdot h(t - \tau) = 0$$

$$y(t) = 0$$

A két jel konvolúciójának teljes eredményét a 89. ábrán szemlélhetjük meg:



89. ábra A konvolúció eredménye

2.4. LTI rendszerek tulajdonságai (Properties of Linear Time Invariant Systems)

2.4.1. Felejtő és nem felejtő LTI rendszerek (LTI Systems with and without Memory)

Az LTI rendszer pontosan akkor memória nélküli, ha csupán a bemenet jelenlegi értékétől függ a kimeneti jel. Ezért az impulzus átviteli függvénynek speciálisnak kell lennie olyan értelemben, hogy a konvolúció során, adott pontbéli értéket számítva sem jövőbéli sem múltbéli értékeket a bemenetnek nem összegezheti, így:

$$h[n] = 0, \forall n \neq 0$$

$$h(t) = 0, \forall t \neq 0$$

azaz:

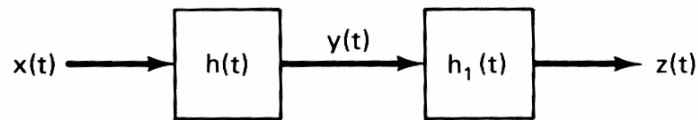
$$h[n] = K \cdot \delta[n]$$

$$h(t) = K \cdot \delta(t)$$

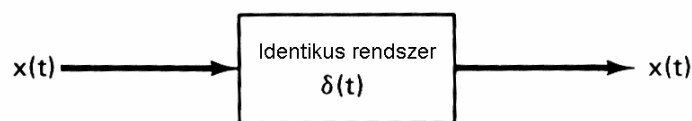
2.4.2. LTI rendszerek invertálhatósága (Invertibility of LTI Systems)

Pontosan akkor nevezünk egy LTI rendszert invertálhatónak, ha létezik olyan rendszer, amelyre ha az eredeti rendszer impulzus átviteli függvénye $h_1(t)$ volt és inverzének pedig $h_2(t)$ akkor (90. ábra):

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t) = \delta(t)$$



(a)



(b)

90. ábra Az invertálható rendszer és inverzének kapcsolata

Tekintsünk erre egy példát:

2.8 Példa:

Legyen adott a következő rendszerünk:

$$y(t) = x(t - t_0)$$

Ez a rendszer egy egyszerű késleltetés, mégpedig pontosan t_0 idővel. Ekkor a rendszer impulzus átviteli függvénye:

$$h_1(t) = \delta(t - t_0)$$

Egyértelmű, hogy létezik inverz rendszer mégpedig a következő:

$$h_2(t) = \delta(t + t_0)$$

impulzus átviteli függvénnyel. Vizsgálva az invertálhatóság tulajdonságát:

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$$

Ezzel beláttuk, hogy a példánkban felhozott rendszer invertálható.

Most nézzünk egy másik példát is:

2.9 Példa:

$$h[n] = u[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot u[n - k]$$

Mivel az $u[n-k]$ függvény úgyis 0 értékű minden $k > n$ -re így:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

Általánosságban elmondható, hogy az egységugrás függvények ily módon elhagyhatóak, mivel csupán intervallumot jelölnek ki. Visszatérve a problémára, a rendszernek létezik inverze, mégpedig:

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Ekkor adjunk a bemenetre egy impulzusfüggvényt és így megkapjuk a súlyfüggvényt:

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

Ha behelyettesítünk az invertálhatóságot ellenőrző egyenletbe:

$$\begin{aligned} h_1[n] * h_2[n] &= h_1[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = (u[n] * \delta[n]) - (u[n] * \delta[n-1]) = \\ &= u[n] - u[n-1] = \delta[n] \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk a rendszer invertálhatóságát is.

2.4.3. LTI rendszerek kauzalitás (Causality of LTI Systems)

A rendszert kauzálisnak nevezzük ha kimenete csupán jelenének és múltjának függvénye.

LTI rendszereknél ez pontosan akkor következik be ha:

Diszkrét esetben:

$$h[n] = 0, \quad \forall n < 0$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \cdot h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]$$

Folytonos esetben:

$$h(t) = 0, \quad \forall t < 0$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\sigma) \cdot h(t-\sigma) d\sigma = \int_0^{\infty} h(\sigma) \cdot x(t-\sigma) d\sigma$$

Tekintsünk az előző példákat a kauzalitás vizsgálatára:

$$h_1[n] = u[n]$$

$$h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

Látható, hogy mindkét rendszer kauzális mivel súly függvényük minden $n < 0$ pontra 0.

2.4.4. LTI rendszerek stabilitása (Stability of LTI Systems)

Az LTI rendszert általánosan stabilnak mondjuk, ha korlátos bemenetre korlátos kimenet a válasz.

Diszkrét esetben:

Ha diszkrét rendszereket tekintünk, akkor a stabilitás elengedhetetlen feltétele, hogy a kimeneten előálló jel valamely norma szerint korlátos legyen. Ez

pontosan akkor teljesül ha bármely időpontra, egy általános normát tekintve igaz az hogy:

$$\|x[k]\| < \infty$$

ahol mivel skalár jelek körében vizsgálódunk a vektor norma abszolút értéknek felel meg.

Így már írhatjuk, hogy az $x[k]$ jel korlátos, ha létezik olyan $B > 0$ valós konstans, hogy bármely időpontra:

$$|x[k]| < B$$

Ekkor a rendszer kimenete korlátos, ha

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \cdot |x[n-k]| \leq B \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Tehát az LTI rendszert korlátosnak nevezzük ha:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Folytonos eset:

Ebben az esetben is hasonló képen járhatunk el, ezért ha a bemenet korlátos és az erre válaszoló kimenete a rendszernek is korlátos akkor a rendszert stabilnak nevezzük.

Így ha teljesül, hogy bármely időpontra:

$$|x(t)| < B$$

akkor a rendszer stabil ha:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \cdot x(t-\sigma) d\sigma \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\sigma)| \cdot |x(t-\sigma)| d\sigma \leq B \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |h(\sigma)| d\sigma < \infty$$

azaz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\sigma)| d\sigma < \infty$$

2.9 Példa:

Tekintsük az alábbi súlyfüggvényű rendszert:

$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[k - n_0]| = 1$$

Tehát a rendszerünk stabil.

Most nézzünk ugyanezt folytonos esetben:

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\sigma)| d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(\sigma - t_0)| d\sigma = 1$$

Ami ismét stabilnak bizonyult.

Tekintsünk most egy egységugrás függvényű impulzus átvitelrel rendelkező rendszert:

$$\begin{aligned}
 h[n] &= u[n - n_0] \\
 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| &= \sum_{k=n_0}^{\infty} |u[k - n_0]| = \infty \\
 h(t) &= u(t - t_0) \\
 \int_{-\infty}^{\infty} |h(\sigma)| d\sigma &= \int_{t_0}^{\infty} |u(\sigma - t_0)| d\sigma = \infty
 \end{aligned}$$

Ahogy az jól látható a rendszer instabil.

2.4.5. LTI rendszerek egységugrás válasza (Unit Step Response of LTI Systems)

Ahogy azt az előzőekben bevezettük, a rendszer viselkedését teljes mértékben jellemzi az egység impulzusra adott válasz, amit mi impulzus átviteli, vagy röviden súlyfüggvénynek nevezzünk és $h[n]$, vagy $h(t)$ -vel jelölünk.

Azonban a rendszert más vizsgáló jelekre adott válaszokkal is jellemezhetjük, ilyen az egység ugrás jelre adott válasz is, természetesen ezt is csak energiamentes rendszerre értelmezzük, amit ezentúl átmeneti függvénynek vagy más néven egységugrás válasz függvénynek (unit step response) nevezünk és $s[n]$, vagy $s(t)$ -vel jelölünk. Bizonyíthatóan ez is teljes mértékben leírja a rendszer viselkedését.

Nézzük meg, hogy létezik-e és ha igen milyen kapcsolat áll fenn a két rendszer jellemző függvény között. Mivel a egységugrás válasz kiszámítható az egységugrás bemenet és az impulzus válasz konvolúciójaként, ezért:

$$s[n] = u[n] * h[n]$$

Azonban ezt az alakot átírva:

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k] \cdot h[k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

És ennek inverzét számolva:

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

Így felhasználva folytonos konvolúciót az alábbi megállapításokat tehetjük folytonos esetben:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\
 h(t) &= \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)
 \end{aligned}$$

Tehát beláttuk, hogy ezen vizsgáló jelek nemcsak, hogy egymásból származtathatóak, hanem a rendszer jellemző függvényeikkel is ugyanez a

helyzet. Nos mindenféle bizonyítás nélkül, az alábbiak e módon már nyilvánvalóak:

$$y[n] = x[n] * (s[n] - s[n-1])$$

$$y(t) = x(t) * s'(t)$$

ahol ' az általános deriválást jeleni (Ez nem más mint a villamosságтанból ismert Duhamel tétele).

Bár az átmeneti függvény is rendszer jellemző függvény, általában nem nagyon használatos mivel a vele történő számolás nehézkes. Ennek ellenére sokkal könnyebben és pontosabban előállítható, mint a csupán matematikában létező egységimpulzus, ezért a méréseket egységugrás függvényt közelítő függvénnyel végezzük, és az így kapott átmeneti rendszer jellemző függvényt deriválással számítjuk át súlyfüggvénybe.

2.5. LTI rendszerek leírása differenciál és differenciaegyenletek segítségével (Systems Described by Differential and Difference Equations)

A matematika már régóta próbálkozik a fizikai jelenségek legszélesebb körű modellezésére és leírására. Ezen metódusok, ha a bizonytalanság kérdése nem merül fel, többnyire folytonos esetben differenciál egyenletek, diszkrét esetben pedig differencia egyenletek formájában öltenek alakot és megoldási lehetőségüket a matematikai apparátus folyamatos bővülése próbálja segíteni. Így a digitális jelfeldolgozásban, a rendszerek és folyamatok leírására is ilyen egyenleteket használunk, mivel alapvetően fizikai és matematikai alapokon nyugszik ez a tudomány terület. Azonban a későbbiekben pontosan a bizonytalanság elkerülhetetlensége miatt a sztochasztikus rendszerek leírására már ezen módszerek nem alkalmazhatóak. Mi most ennek a problémakörnek igen kis szeletével fogunk foglalkozni, s a matematikából már jól ismert definíciók ömlesztett halmaza helyett inkább példákon keresztül mutatjuk be ezen módszerek és eljárások alkalmazását.

2.5.1. Lineáris állandó együtthatós differenciálegyenletek (Linear Constant-Coefficient Differential Equations)

A differenciálegyenletekkel a rendszer bemenete és kimenete közti kapcsolatot próbáljuk megfogalmazni. Tekintsük az alábbi egyenlet:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

A fenti egyenlet a rendszer viselkedését impliciten írja le, ezért meg kell oldanunk az egyenletet, hogy explicit alakban álljon elő a rendszer kimenete a bemenet függvényeként.

Az ilyen típusú egyenletek megoldása úgy történik, hogy elő állítjuk az egyenlet homogén megoldását, ha esetleg $x(t) = 0$ -at vizsgálnánk akkor készen is lennénk, és az egyenlet egy partikuláris megoldását. Azért egyet, mivel elméletileg végtelen sok létezik. Ezután a két megoldás összegeként áll elő az eredeti egyenlet megoldása.

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

Az egyenlet homogén megoldása, megoldása a

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

egyenletnek.

Hogy egy partikuláris megoldását megtaláljuk a rendszernek, tételezzük fel, hogy ha $t > 0$ akkor:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{K e^{j\omega_0 t}\}$$

ahol K egy komplex szám.

Általánosságban kijelenthetjük, hogy partikuláris megoldás keresésére csupán a bemenet függvényének ismeretében van lehetőségünk bármely számítást elvégezni.

Ebből viszont ugyancsak következtethetünk a megoldás alakjára:

$$y_p(t) = \operatorname{Re}\{Y e^{j\omega_0 t}\}$$

Ahol Y szintén egy komplex szám.

Nos, visszahelyettesítve a differenciál egyenletbe:

$$\operatorname{Re}\{j\omega_0 Y e^{j\omega_0 t} + 2Y e^{j\omega_0 t}\} = \operatorname{Re}\{K e^{j\omega_0 t}\}, \quad \forall t > 0$$

Amiből egyértelműen következik, hogy csak akkor állhat fent ha:

$$j\omega_0 Y + 2Y = K$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy:

$$Y = \frac{K}{j\omega_0 + 2} = \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} \cdot e^{-j\theta}$$

ahol

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0}{2}\right)$$

Ezért a partikuláris megoldás alakja:

$$y_p(t) = \operatorname{Re}\{Y e^{j\omega_0 t}\} = \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} \cdot \cos(\omega_0 t - \theta), \quad t > 0$$

Ahhoz, hogy a homogén megoldását megtaláljuk az egyenletnek, matematikai ismereteink alapján $y(t)$ alakjáról az alábbi feltételezést tehetjük:

$$y_h(t) = A e^{st}$$

Frissen tett feltételezésünket visszaírva a differencia egyenlet homogén alakjába:

$$A s e^{st} + 2A e^{st} = A \cdot (s + 2) \cdot e^{st} = 0$$

A fenti egyenlet azonban akkor és csak akkor igaz, ha $s = -2$. Azonban „ A ” valós paraméter szabadon választható, és bármely értékére teljesül az egyenlet.

Így az egész egyenlet megoldása:

$$y(t) = Ae^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} \cdot \cos(\omega_0 t - \theta), \quad t > 0$$

Azonban ez csupán fél-siker a rendszerünk leírására tett kísérletben. Ahogy azt a szemfüles olvasó észrevehette „A” szabad paraméter, így a kimenete a rendszernek bár a fenti alakú, mégsem definiált teljesen. Hogy számolásunk ezen csorbáját ki tudjuk köszörülni további információkra van szükségünk a rendszer működéséről. Ehhez szükségünk van $y(t)$ értékére egy bizonyos pillanatban. Ezt az értéket kezdeti feltételnek (auxiliary condition) nevezzük. Ez a feltétel határozza meg a szabad paraméter értékét.

Tradicionálisan a $t = 0$ pontban adjuk meg a kezdeti értéket, de szabadon tekinthető bármely más pont is.

Legyen adott tehát:

$$y(0) = y_0$$

Ekkor a megoldás egyenletéből kifejezhetjük a szabad paramétert, $t = 0$ -ban:

$$A = y_0 - \frac{K \cos \theta}{\sqrt{4 + \omega_0^2}}$$

Így a megoldásunk végre az alábbi explicit formában előáll:

$$y(t) = y_0 e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} \cdot [\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t} \cos \theta] \quad t > 0$$

Vizsgálódásunkat eddig a $t \geq 0$ tartományra korlátoztuk, de mi tudunk mondani $t < 0$ esetben? Először is tételezzük fel, hogy:

$$x(t) = 0, \quad \forall t < 0$$

Ezért $y(t)$ -nek csupán a homogén egyenletet kell teljesítenie. Ahogyan az előbb láttuk $y(t)$ újra a Be^{st} alakban keressük, felhasználva a kezdeti feltételt ami az imént ismertünk meg. Azonban ekkor egyértelműen következik, hogy:

$$y(t) = y_0 e^{-2t}, \quad t < 0$$

Így a két megoldást kombinálva végre bármely időpontra megkapjuk a rendszer válaszát:

$$y(t) = y_0 e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} \cdot [\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t} \cos \theta] \cdot u(t), \quad \forall t \text{-re}$$

Vizsgáljuk meg most a rendszer linearitását.

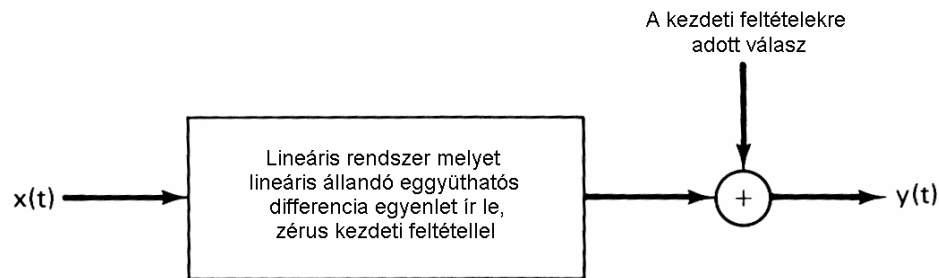
Ahogy azt a linearitás definíciójánál megemlítettük, a rendszer akkor lineáris ha nulla bemenetre a rendszer válasza is nulla. Ebből kiindulva a fent vizsgált rendszerünk pontosan akkor lineáris ha $y_0 = 0$

2.2 Állítás:

Az a rendszer amelyet lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet ír le lineáris ha a kezdeti feltétel a $t = 0$ pontban zérus.

2.3 Állítás:

Azok a rendszerek amelyeket lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet ír le, de kezdeti értékük a nulla pontban nem zérus, szakaszosan lineárisak. Azaz a következő féle képen írhatóak le:



91. ábra szakaszosan lineáris struktúrája a lineáris állandó együtthatós differenciál egyenlettel leírt rendszereknek

Nézzük meg kauzális-e rendszerünk:

A kauzalitás azt feltételezi, hogy rendszerünk nem képes megjósolni, hogy bemenetén milyen jel fog beérkezni. Azonban a fent vizsgált egyenletünk ez ellen súlyosan vét, hisz ha $t < 0$ akkor a rendszer sejti, hogy mi lesz a bemenet és hogyan fog viselkedni $t > 0$ időben, sőt előkészíteni látszik a függvényt, így teremtve folytonosságot. Tehát, hogy rendszerünk kauzális legyen az alábbi kikötéseket kell tennünk:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0, & t \leq t_0 \\ \Downarrow \\ y(t) &= 0, & t \leq t_0 \end{aligned}$$

Így ahhoz, hogy a differenciál egyenletünk kauzális legyen nyugalmi kezdeti állapotokat (initial rest) kell feltételeznünk. Ebben az esetben ha külső nyugalmi állapotokat tételezünk fel akkor még az idő invariancia is teljesül rendszerünkre.

Azonban, nem csupán elsőrendű egyenletek írják le a valós fizikai rendszereket. Sokszor szükségünk van a magasabb rendű egyenletek felírására is:

Egy általános N -ed rendű lineáris állandó együtthatós differenciál egyenlet az alábbi alakba írható:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Abban az esetben ha $N = 0$ akkor:

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Itt a rendszer kimenete explicit formában megadott a bemenet és annak különböző rendű deriváltjainak a függvényében.

Ha viszont $N > 1$ akkor az egyenlet analízise az előbbieken megadott formában lefolytatható, azaz a partikuláris és homogén egyenlet meghatározása a feladat. Azonban magasabb rendű esetben ez igen bonyolult számolást eredményezhet. A másik apró különbség, hogy itt nem elég egyetlen kezdeti feltétel a megoldás meghatározásához, hanem N db kezdeti feltétel szükséges az explicit alakhoz:

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}, \text{ valamely időpontban vett értéke}$$

Ezenkívül a rendszer, melyet ez az egyenlet ír le, pontosan akkor lineáris, ha ezen kezdeti feltételek mindegyike zérus.

Kauzális pedig akkor, ha rendelkezik nyugalmi állapottal, azaz:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0, & t \leq t_0 \\ y(t) &= 0, & t \leq t_0 \end{aligned}$$

2.5.2. Lineáris állandó együtthatós differencia egyenletek (Linear Constant-Coefficient Difference Equations)

A diszkrét időben N -ed rendű differencia egyenletnek nevezzük a:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Egy ilyen típusú egyenlet hasonló módon megoldható, mint azt folytonos időben megtettük, persze meghatározott kiindulási feltételek mellett.

Azonban a diszkrét időtartomány lehetőséget ad egy másik megoldási módszer alkalmazására is. Az egyenlet könnyen átrendezhető az alábbi formába:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}$$

Ez az egyenlet oly módon írja le a kimenetet, hogy az függvénye a jelenlegi és múltbéli bemeneteknek és a régebbi kimeneti értékeknek is. Ebből azonnal láthatjuk, hogy mennyire szükségünk van a kezdeti feltételekre. Ahhoz, hogy $y[n]$ értékét kiszámítsuk ismernünk kell az $y[n-1], \dots, y[n-N]$ értékeket. Tehát amiatt, hogy bármely időpontban meg tudjuk mondani a kimenet, a $y[-N], \dots, y[-1]$ kezdeti értékeknek adottnak kell lennie. Ha ezek mind nullák akkor diszkrét időben is lineárisnak mondjuk a rendszert.

Egy egyenletet a fenti formában rekurzívnek nevezünk mivel rekurzív módon számolja ki a következő kimeneti értéket a bemenet és kimenet előző értékeiből.

Ha $N = 0$ akkor az egyenletünk az alábbi nem rekurzív formába írható:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) x[n-k]$$

Ebben az esetben viszont nincs szükségünk kezdeti feltételekre, hisz a kimenet a bemeneti értékekből explicite számolható.

Ha jól megnézzük, akkor a fenti egyenlet hasonló egy konvolúcióhoz, amiből az adódik, hogy a rendszer átviteli függvénye:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Jól látható, hogy az átviteli függvény csupán egy adott véges intervallumon nem nulla. Az ilyen rendszereket, amelyek ezen tulajdonsággal rendelkeznek: véges impulzus válaszu rendszereknek (finite impulse response system: FIR) nevezzük.

Bár nullad rendű rendszerek esetében nem szükséges kezdeti feltételt megadni, azonban $N > 1$ esetben már nélkülözhetetlenek a kezdeti feltételek. Hogy mélyebb betekintést adhassunk ezen probléma körbe, álljon most itt egy példa ilyen számolásra:

2.11 Példa:

Tekintsünk egy elsőrendű rendszert amelyre:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \text{ differencia egyenlet teljesül.}$$

Rendezzük át az egyenletet:

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$$

Tegyük fel kezdeti feltételként, hogy:

$$y[-1] = a$$

és hogy a bemeneten az alábbi jel érkezik:

$$x[n] = K \cdot \delta[n]$$

Ahol K egy tetszőleges komplex szám.

Oldjuk meg a problémát $n \geq 0$ esetre:

$$\begin{aligned} y[0] &= x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = K + \frac{1}{2}a \\ y[1] &= x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}\left(K + \frac{1}{2}a\right) \\ y[2] &= x[2] + \frac{1}{2}y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(K + \frac{1}{2}a\right) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y[n] &= x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(K + \frac{1}{2}a\right), \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Most vizsgáljuk a $n < 0$ esetet:

Rendezzük át az egyenletet a következő formába:

$$y[n-1] = 2\{y[n] - x[n]\}$$

Ekkor visszafelé számolva:

$$\begin{aligned}
y[-2] &= 2\{y[-1] - x[-1]\} = 2a \\
y[-3] &= 2\{y[-2] - x[-2]\} = 2^2 a \\
y[-4] &= 2\{y[-3] - x[-3]\} = 2^3 a \\
&\vdots \\
&\vdots \\
y[-n] &= 2\{y[-n+1] - x[-n+1]\} = 2^{n-1} a = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1}
\end{aligned}$$

Így most már kombinálhatjuk a két esetet:

$$y[n] = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + K \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n]$$

Ha $K = 0$ azaz $x[n] = 0$ akkor, hogy $y[n] = 0$ legyen, azaz lineáris legyen a rendszerünk szükséges, hogy $a = 0$.

Ha létezik a rendszernek nyugalmi állapota, azaz

$$\begin{aligned}
x[n] &= 0, & n \leq n_0 \\
y[n] &= 0, & n \leq n_0
\end{aligned}$$

Akkor a rendszerünk kauzális.

Ha még az is teljesül, hogy $y[n_0] = 0$ akkor a rendszerünk időinvariáns is.

Általában, ahogy láttuk a példákon keresztül, a fent említett számolási módszer alkalmazható mint folytonos mint diszkrét időben is a megoldás meghatározására. Azonban a rendszerek bonyolultságának fokával együtt nő a számítás bonyolultsága is. Ezért a matematika megalkotta saját eszközeit ezen problémák megoldásának megtalálására. Így folytonos esetben a Laplace transzformáció segítségével a differenciál egyenletek jóval könnyebb megoldási lehetőségét kapjuk, de ezért fizetnünk kell azzal, hogy a rendszer kezdeti értéke 0 és nyugalmi állapotban volt a gerjesztésig. Bár ez a megoldás mód ezen feltételek nem teljesülése esetén is használható bizonyos trükkök segítségével, mégis a definíció által meghatározott tartomány elhagyása nagyon körültekintő, óvatos megoldáskeresést és számolást igényel. Diszkrét esetben a megoldás keresése Z-transzformáció segítségével történik ami lényegesen megkönnyíti a számolást, azonban sajnos nem minden differencia egyenlet megoldása számolható ki ily módon. Ezekre a módszerekre a későbbiekben visszatérünk, ha már a frekvencia tartománnyal kapcsolatos alapvető kérdéseket tisztáztuk.

2.6. Differenciál és differenciaegyenletekkel leírt LTI rendszerek blokk-diagram ábrázolása (Block Diagram Representation of LTI Systems Described by Differential and Difference Equations)

Talán az LTI rendszerek egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy számunkra megfelelő karakterisztikákkal rendelkező rendszert tervezhetünk a rendelkezésünkre álló matematikai apparátus segítségével, és a való világ rendszereit pedig az analízisen keresztül térképezhetjük fel. Lényeges, hogy bármely felírási módja a legtöbb LTI rendszereknek átranzformálható differenciál egyenletek formájába és ezen egyenletek alapján a rendszer

megkonstruálható. Azonban nekünk szükségünk van, pont ezen okból, a differenciál és differencia egyenletek által leírt rendszerek olyan grafikus, diagrammos ábrázolására, amelyből aztán egyszerű alkatrészeknek megfelelően a diagramm elemeit a modellezett rendszer megépíthető. Ezt segíti elő a blokk-diagram ábrázolás.

2.6.1. LTI rendszerek blokk-diagram reprezentációja diszkrét időben (Block Diagram Representation of LTI Systems in Discrete Time)

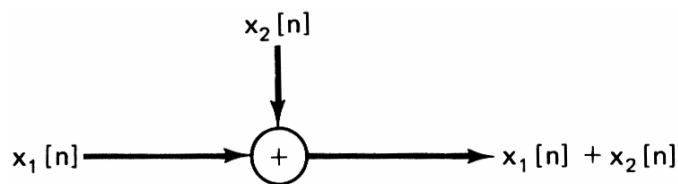
Legyen adott egy N -ed rendű, állandó együtthatós, lineáris differenciál egyenletünk, ami rendszert reprezentál.

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}$$

Szeretnénk ezt a rendszert ábrázolni valamiféle képen.

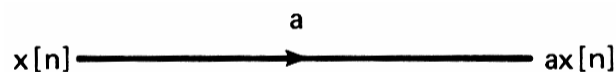
Induljunk ki a már jól megszokott matematikai szemléletmódunkból. A matematikai műveleteink által felépülő egyenletet csak úgy tudjuk reprezentálni, ha ezeket a kapcsolódási pontokat, azaz műveleteket valahogy ábrázoljuk. Mivel három fő műveletet használunk, mindegyikhez rendeljünk egy reprezentációt, ábrát amely a blokk-diagramjaink fő építőkövei lesznek:

- *összeadás és kivonás*



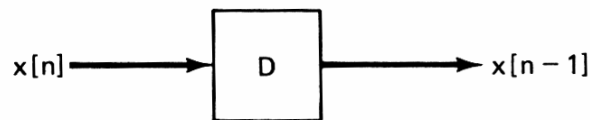
92. ábra Összeadás és kivonás műveletének reprezentációja

- *konstanssal való szorzás*



93. ábra Konstanssal való szorzás műveletének reprezentációja

- *késletetés állandó egységnyi idővel*



94. ábra Egységnyi idővel való késletetés reprezentációja

Ezek után már csak össze kell kapcsolni ezeket az elemeket, hogy ugyanazon logikai struktúrát ábrázolják amibe az egyenletünk szerveződik. Azonban egy akármilyen egyenlet felírásához már kell némi gyakorlat. Tekintsünk ezért egy példát a legáltalánosabb esetre:

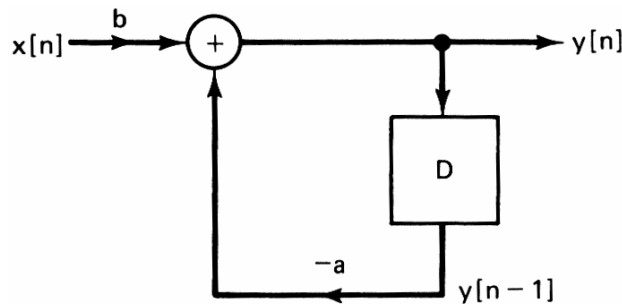
Legyen adott egy rendszerünk, amit az alábbi egyenlet ír le:

$$y[n] + a \cdot y[n-1] = b \cdot x[n]$$

Rendezzük át egyenletünket rekurzív alakba:

$$y[n] = b \cdot x[n] - a \cdot y[n-1]$$

Ha ezt ábrázoljuk akkor az alábbi felépítést kapjuk (95. ábra):



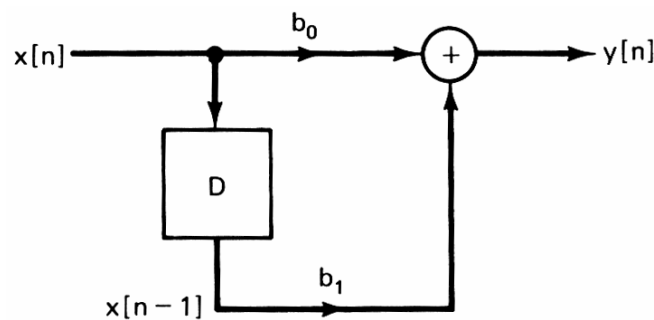
95. ábra A fenti LTI rendszer blokkdiagramja

Jól látható, hogy egy memóriát igénylő késleltetést végző egységet szükséges használnunk a reprezentációban, hogy bármely pillanatban a kimenet egyvel korábbi értékét is tudjuk szolgáltatni az új kalkulációhoz. Az is látható, hogy az eltárolt érték egy visszacsatoláson keresztül érkezik meg az összeadóhoz, ami közben egy konstanssal való szorzást szenved el. Ez a visszacsatolás különben direkt következménye a rekurzív felírásnak. Tehát ezekkel az eszközökkel csupán rekurzív formában megadott egyenletet tudunk reprezentálni.

Nézzünk most egy másik rendszert, ami a következő képen adott:

$$y[n] = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1]$$

Az algoritmus amit a fenti egyenlet leír a következő formában reprezentálható (96. ábra):



96. ábra A fenti LTI rendszer blokkdiagramja

Itt is szükséges egy késleltető egység használata, de itt a késleltetett értéket nem vissza hanem előrecsatoljuk. Az is jól látható, hogy a kimenet értéke nincs visszacsatolva és egyáltalán nem használt a kalkuláció során. Tehát az itt kapott rendszerünk nem rekurzív, de nem felejtő.

Most már megvizsgálhatunk egy összetettebb problémát is:

$$y[n] + a \cdot y[n-1] = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1]$$

Az egyenletet rekurzív formába rendezve:

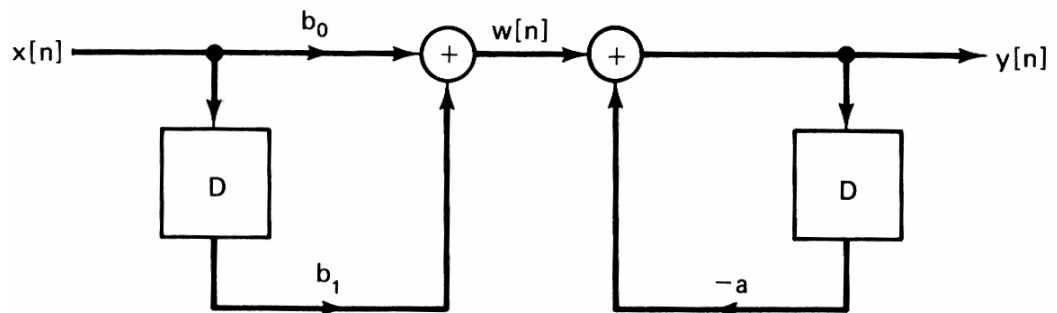
$$y[n] = -a \cdot y[n-1] + b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1]$$

A fenti algoritmust szemléltethetjük oly módon is mintha két LTI rendszer soros kapcsolata lenne. Tehát két számítást kell elvégeznünk:

$$w[n] = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1]$$

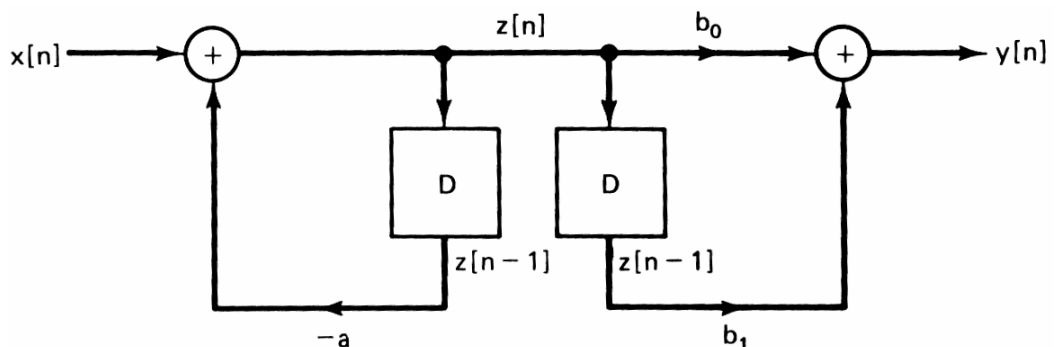
$$y[n] = -a \cdot y[n-1] + w[n]$$

Így visszakaptuk az előbbieken vizsgált két rendszert. Ezzel szétszedtük rendszerünket egy rekurzív és egy nem rekurzív rendszer kapcsolására, amelyeknek reprezentációját csupán sorosan kell kapcsolni, hogy megkapjuk a most vizsgált rendszerünk blokk-diagramját (97. ábra):



97. ábra A fenti LTI rendszer blokkdiagramja

Azonban a sorosan kapcsolt LIT rendszerekről tudjuk, hogy sorrendjüktől független a kimenet válasza, így a két rendszert felcserélhetjük:



98. ábra Alternatív blokkdiagram reprezentációja az előző példának

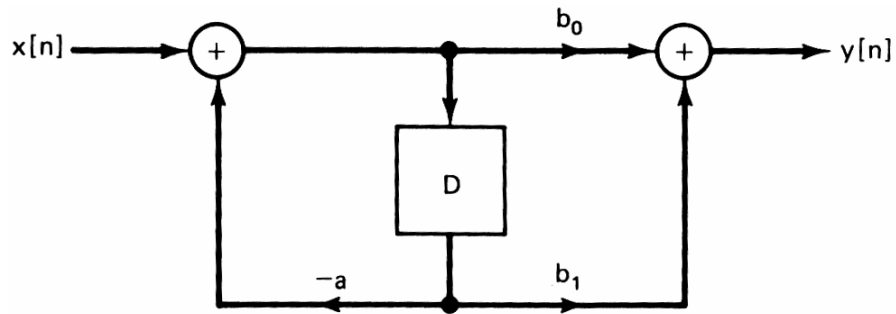
ahol:

$$z[n] = -a \cdot z[n-1] + x[n]$$

$$y[n] = b_0 \cdot z[n] + b_1 \cdot z[n-1]$$

Az előző fejezetben tárgyalt tulajdonságok alapján nyilvánvaló a kapcsolat, de bizonyítékként szolgálhat ha a két egyenletet rendezzük, $x[n]$ -re és $y[n]$ -re, és behelyettesítünk velük az eredeti egyenletbe, akkor nullát fogunk kapni mindkét oldalon.

Ha ezen két rendszer kapcsolatát megnézzük, akkor látható, hogy $z[n]$ értékét kétszer tároljuk el a számítás során, mindenféle indok nélkül, ezért a rendszer összevonható egy másik alakba (98. ábra):



99. ábra Egyetlen késleltető elemet tartalmazó blokkdiagram reprezentációja az előző példának

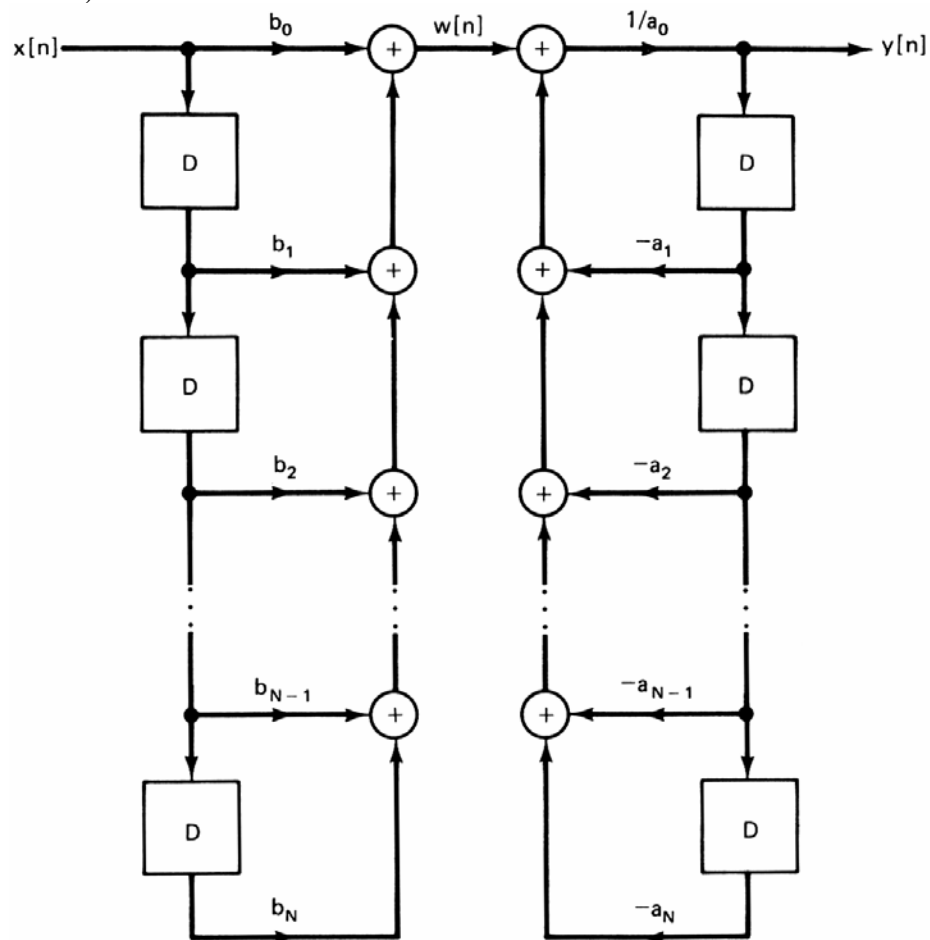
Így sokkal gazdaságosabb leírását hoztuk létre a problémának, azaz ez alapján való megvalósítás kevesebb alkatrészbe, és főleg kevesebb drága memóriába kerül.

Tekintsük most az általános esetet:

Hogy az ábrázolásunk jobban tükrözze a mondanivalót, tegyük fel, hogy $N = M$.

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}$$

A fenti rekurzív egyenlet egyszerűen ábrázolható az elsőként tárgyalt módszerrel (100. ábra):



100. ábra LTI rendszerek I. Direkt Forma reprezentációja

Azt a reprezentációt ami a 100. ábra sémája alapján előáll, a vizsgált rendszer „Első direkt forma” reprezentációjának (Direct Form I) nevezzük

Persze ezen a reprezentáción is észrevehető, hogy rendszerünk valójában egy nem rekurzív és egy rekurzív rendszer soros kapcsolatából épül fel:

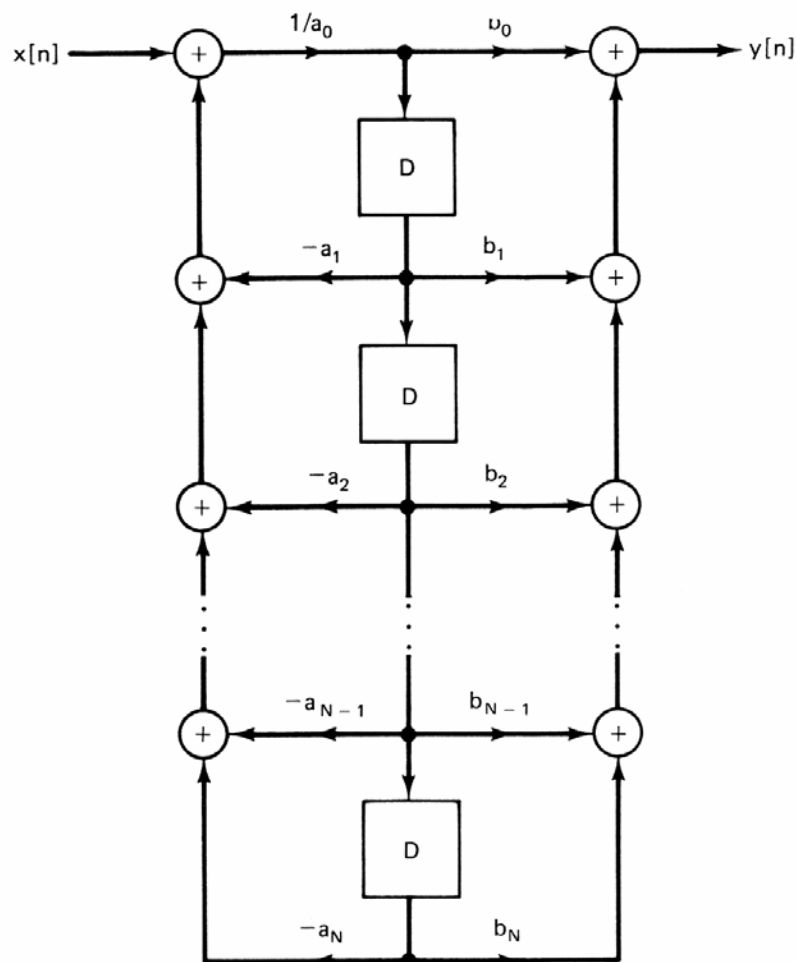
Ahol a nem rekurzív rendszer:

$$w[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k]$$

A rekurzív részrendszer pedig:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + w[n] \right\}$$

Tehát a két rendszer most már ábrázolható egy másfajta alakban, megtartva az eredeti rendszerünk logikai reprezentációját. Ezt az alakot „Második direkt formának” (Direct Form II) nevezzük. Itt is, ahogy az előbb tettük összevonhatóak a késleltető elemek és így nagyban redukálható a rendszer alkatrész igénye. Ezt szemlélteti a 101. ábra.



101. ábra LTI rendszerek I. Direkt Forma reprezentációja

Ezt a reprezentációs formát sokszor kanonikus reprezentációnak is hívják.

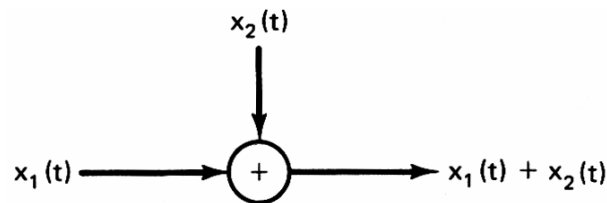
2.6.2. LTI rendszerek blokk-diagram reprezentációja folytonos időben (Block Diagram Representation of LTI Systems in Continuous Time)

A differenciaegyenletekkel leírt folytonos idejű rendszerek reprezentációját teljesen hasonló módon levezethetjük, mint az diszkrét időben megtettük. Legyen adott egy N-ed rendű differenciálegyenletünk amiről az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $N = M$.

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} - \sum_{k=1}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\}$$

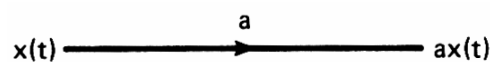
Itt is szükséges az alpműveletek reprezentációjának definiálása:

- *összeadás és kivonás*



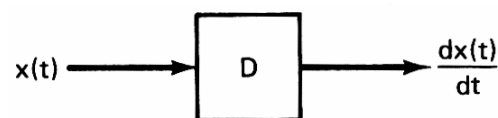
102. ábra Összeadás és kivonás műveletének reprezentációja

- *konstanssal való szorzás*



103. ábra Konstanssal való szorzás műveletének reprezentációja

- *differenciálás idő szerint*



104. ábra Idő szerinti differenciálás műveletének reprezentációja

A reprezentáció felírása innen teljesen analóg módon történhetne, hisz ezek az elemek megfeleltethetők diszkrét idejű társaiknak. Azonban a differenciálás igen kényes matematikai művelet a megvalósítás szempontjából.

Differenciátorok építése nehézkes, és alkalmazhatóságukat sajnos nagy mértékben befolyásolja, hogy nem elhanyagolható műveleti hibával bírnak és drágák is. Ezért a megvalósítás szempontjából sokkal előnyösebb lenne, ha valamilyen módon kiválthatnák ezeket a differenciátorokat egyszerűen működő integráló eszközökre. Így az N-ed rendű differencia egyenletünket át kell írunk N-ed rendű integrál egyenletté.

A probléma megoldásához definiáljuk $y(t)$ szukcesszív integráltjait:

$$y_{(0)}(t) = y(t)$$

$$y_{(1)}(t) = y(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau$$

$$y_{(2)}(t) = y(t) * u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{\tau} y(\sigma) d\sigma \right) d\tau$$

⋮
⋮

$$y_{(k)}(t) = y_{(k-1)}(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t y_{(k-1)}(\tau) d\tau$$

ugyanígy definiálhatjuk $x(t)$ szukcesszív integráljait is.

Ha most újra megvizsgáljuk eredeti egyenletünket:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

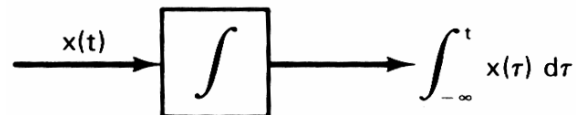
Hogyha nyugalmi állapotot tételezünk fel akkor $\frac{d^k y(t)}{dt^k}$ N-edik integrálja pontosan $y_{(N-k)}(t)$ lesz mivel a kezdeti értékek az integrálásakor zérusok. Ezért véve az egész egyenlet N-edik integráltját írhatjuk, hogy:

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^N b_k x_{(N-k)}(t)$$

Mivel pedig $y_{(0)}(t) = y(t)$ ezért:

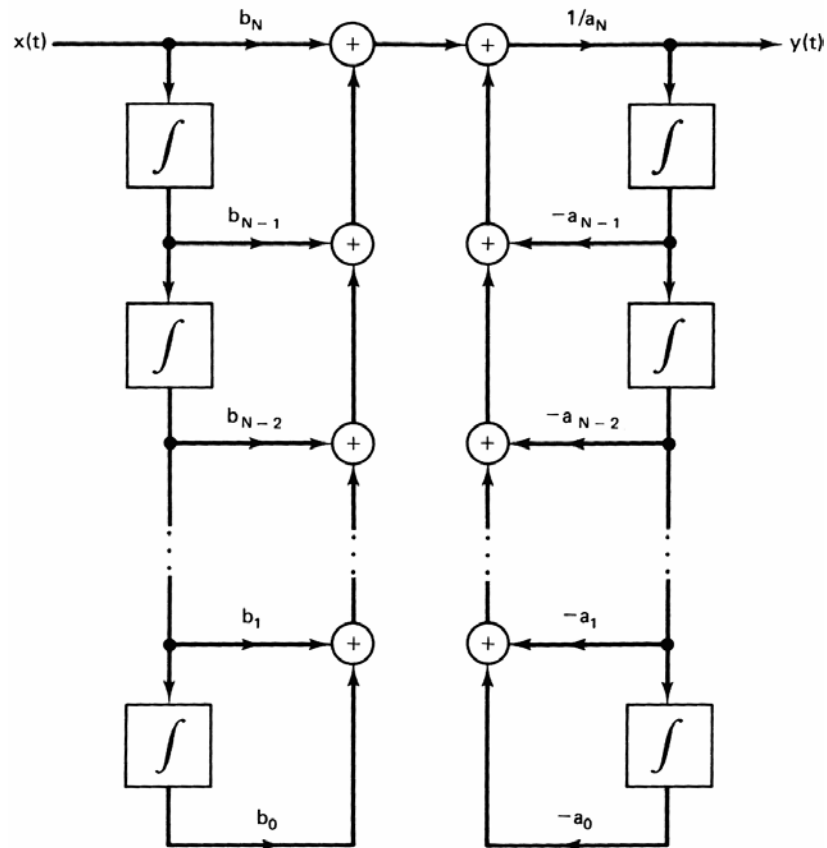
$$y(t) = \frac{1}{a_N} \left\{ \sum_{k=0}^N b_k x_{(N-k)}(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t) \right\}$$

Tehát átalakítottuk differenciál egyenletünket integrál egyenletté. Ha most differenciátorok helyett integrátorokat használunk:

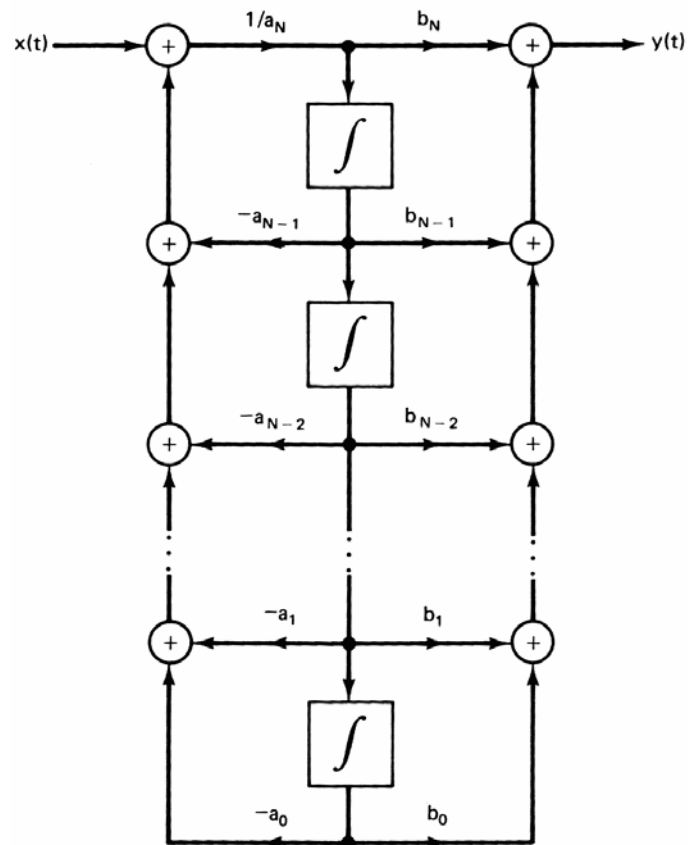


105. ábra Integrátor reprezentációja

Akkor ugyanúgy, ahogy azt diszkrét esetben tettük, felírhatjuk a rendszer első és második direkt forma reprezentációját. Mint ahogy azt a 106. és 107. ábrán láthatjuk:

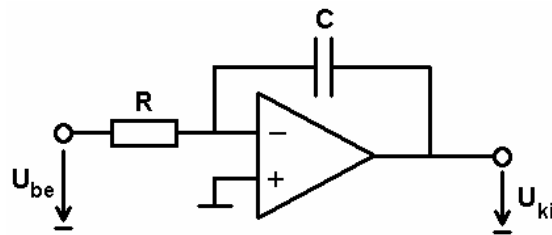


106. ábra Folytonos LTI rendszer I. Direkt Forma reprezentációja



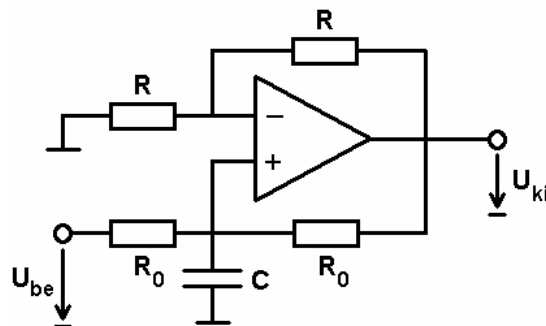
107. ábra Folytonos LTI rendszer II. Direkt Forma reprezentációja

Ezen integrátorok fizikai megvalósítása azért bonyolultabb mint diszkrét esetben a késleltető elemeknek. Míg ott RAM-okban tárolhattuk el ezeket az értékeket, addig itt műveleti erősítő kapcsolásokkal tudjuk a legegyszerűbben megvalósítani a funkciót (108. és 109. ábra):



108. ábra Fázist fordító integrátorkapcsolás

$$u(t)_{ki} = -\frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u(t)_{be} dt$$



109. ábra Fázist nem fordító integrátorkapcsolás

$$u(t)_{ki} = \frac{2}{R_0 C} \int_{-\infty}^t u(t)_{be} dt$$

Azonban ezek a műveleti erősítő kapcsolások már nem hiba mentesek, sajnos az offset feszültség kompenzációjának kérdése és a tápfesz nagyban korlátozza a pontosságot és a felhasználhatóságot, de hát ahogy azt analóg rendszereknél megszokhattuk semmi sincs hiba nélkül. Az integrátorok így is jóval kisebb hibával dolgoznak mint a differenciátorok, így a két rossz közül a kevésbé rossz használata a célszerű.

3. Folytonos rendszerek és jelek Fourier analízise (Fourier Analysis for Continuous-Time Signals and Systems)

Fourier bár igen kalandos életet élt, s munkását kortársai csak élete végén illették elismeréssel mégis az általa felfedezett matematikai tételek jelentős hatást gyakoroltak a technológiai fejlődésre, főleg a jelfeldolgozás területén. Az ő munkásságára építve a jelek reprezentálásának új lehetősége nyílt meg. Az így megismerésre kerülő frekvenciatartomány olyan új távlatokat nyitott meg, amik lehetővé tették a jelfeldolgozásnak, mint tudomány területnek a kifejlődését.

3.1. Folytonos LTI rendszerek komplex exponenciálisokra adott válasza (*The Response of Continuous-Time LTI Systems to Complex Exponentials*)

Ahogy az előbbieken már megemlítettük, az LTI rendszerek nagy előnye, hogy a jelek más jelek kombinációjával reprezentálhatóak. Így alapvető jelekből rendkívül sok fajta és változatos jel felépíthető, és a rájuk adott válaszokból a felépített jel válasza is kikombinálható. Ha olyan alapvető jelet tudnánk definiálni amely nemcsak, hogy egyszerű, de a rendszer ezen jelre adott válasza is igen jól számolható a szuperpozíció műveletéhez, akkor igen hatékony vizsgáló jelet birtokolhatnánk.

Megmutatható, hogy ezeket a tulajdonságokat a komplex exponenciális függvények halmaza birtokolja:

$$e^{st}, \quad \text{ahol „s” egy komplex szám}$$

Az is fontos számunka, hogy LTI rendszerek esetén a komplex exponenciálisra adott válasza a rendszernek ugyanaz a komplex exponenciális, függvény, csupán annak amplitúdója módosul:

$$e^{st} \rightarrow H(s)e^{st}$$

Ahol $H(s)$, függvénye a komplex értékű „s” változónak.

3.1 Definíció:

Azt a jelet ahol a rendszer válasza csupán amplitúdójában tér el az eredeti jeltől, a rendszer **saját érték függvényének** nevezzük (e^{st}), magát pedig az amplitúdó változását, mintegy szorzó tényezőt, a rendszer **saját értékének** hívjuk és $H(s)$ -el jelöljük.

Nézzünk most egy gondolat kísérletet frissen megismert fogalmainkkal:

Legyen adott egy LTI rendszer az egység impulzusra adott $h(t)$ válasz függvénnyel.

Tekintsük a következő jelet a rendszer bemenetén:

$$x(t) = e^{st}$$

Az adott bemenetre kiszámolhatjuk a választ a konvolúció segítségével:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\delta)x(t-\delta)d\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\delta)e^{s(t-\delta)}d\delta = e^{st} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\delta)e^{-s\delta}d\delta = e^{st}H(s)$$

Tehát visszakaptuk az e^{st} függvényt egy konstanssal megszorozva. Így beláttuk, hogy:

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

ahol:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\delta) e^{-s\delta} d\delta$$

Ezen sikerünkön felbuzdulva több exponenciális függvényből álló bemeneti jelet is konstruálhatunk:

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

Amelyekre a válaszokat külön-külön számíthatjuk:

$$a_1 e^{s_1 t} \rightarrow a_1 H(s_1) e^{s_1 t}$$

$$a_2 e^{s_2 t} \rightarrow a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$

$$a_3 e^{s_3 t} \rightarrow a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

Majd a szuperpozíció elvét kihasználva:

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

Ezek alapján már könnyen belátható, hogy így tetszőleges számú és amplitúdójú exponenciális függvényből felírt jelre adott válsz számolható, és ennek általános képlete:

$$\sum_k a_k e^{s_k t} = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

Jól észrevehető, hogy az előbb tárgyaltak során felbukkanó „s” komplex számnak nagy beleszólása van a rendszer válaszában milyenségébe. Ahogy az előző fejezetekben tárgyaltuk, a komplex exponenciális függvényt meghatározza komplex frekvenciája aminek szerepét most az „s” paraméter látja el. A továbbiakban „s”-el jelöljük azon változóinkat amelyek komplex frekvenciát jelölnek.

Bár $s = \sigma + j\omega$ alakú, az elkövetkezendő részekben azonban tisztán képzetes részű számként tekintjük, hogy vizsgálódásunkat leszűkítve ezen esetekre jobban megértsük a lényegét. Erre építve a későbbiekben már általános alakokkal is foglalkozhatunk, mivel majd bevezetjük a Laplace transzformációt amelynek leszűkítése a tisztán imaginárius frekvencia esetre vonatkozó Fourier transzformáció.

3.2. Folytonos idejű Fourier sorok (The Continuous-Time Fourier Series)

Egy $x(t)$ jelet periodikusnak mondtunk, ha létezett olyan T pozitív, nem nulla valós szám, hogy:

$$x(t) = x(t + T), \quad \forall t - \text{re}$$

Alapperiódusnak neveztük azt a T_0 minimális értéket, amelyre ez az egyenlet még teljesül. Alapfrekvenciának pedig az $\omega_0 = 2\pi/T_0$ -t neveztük.

Az előző fejezetben megismerkedtünk a periodikus jelek két nagyobb csoportjával:

- a *szinuszoidális* jelekkel:
 $x(t) = \cos(\omega_0 t) = \sin(\omega_0 t - \pi)$
- a *komplex exponenciálisokkal*:
 $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

Mindkét jelcsoport periodikus az ω_0 alaphfrekvenciával.

Ezekkel a jelekkel együtt vezettük be a harmonikusan kapcsolt exponenciálisokat:

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ahogy, ott említettük ezen jelek mindegyike periodikus az alaphfrekvencia valahányszorosával, így T_0 valahányad részével, ezért T_0 alapperiódussal is.

Ezenkívül, ezen harmonikusan kapcsolt exponenciálisok lineáris kombinációja:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

is periodikus mégpedig T_0 alapperiódussal.

$k = 0$ -ra is értelmezhetjük a komplex exponenciális, de ekkor egy konstans függvényt reprezentál, ami pontosan a_0 értékével egyenlő bármely időpontra. Ezt a konstans értéket alapjelnek, a jel egyenkomponensének (DC) nevezzük. A „ k ” változó bármely nem nulla értékére előálló exponenciális pedig a jel k -adik felharmonikusának, ha $k = \pm 1$ akkor a jel alapharmonikusának, vagy fundamentális komponensének nevezzük.

Ha most ellenkező irányból tekintjük az előbbi okfejtésünket akkor ha bármely folytonos, T_0 -al periodikus jelet tekintünk, akkor az felírható harmonikusan kapcsolt komplex exponenciálisok lineáris kombinációjával.

Ezt a reprezentációját a periodikus függvénynek a jel Fourier felbontásának nevezzük, és az így előálló sort pedig Fourier sorának.

3.1 Példa:

Tekintsünk az alábbi, 2π alaphfrekvenciával periodikus jelet:

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}$$

ahol:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

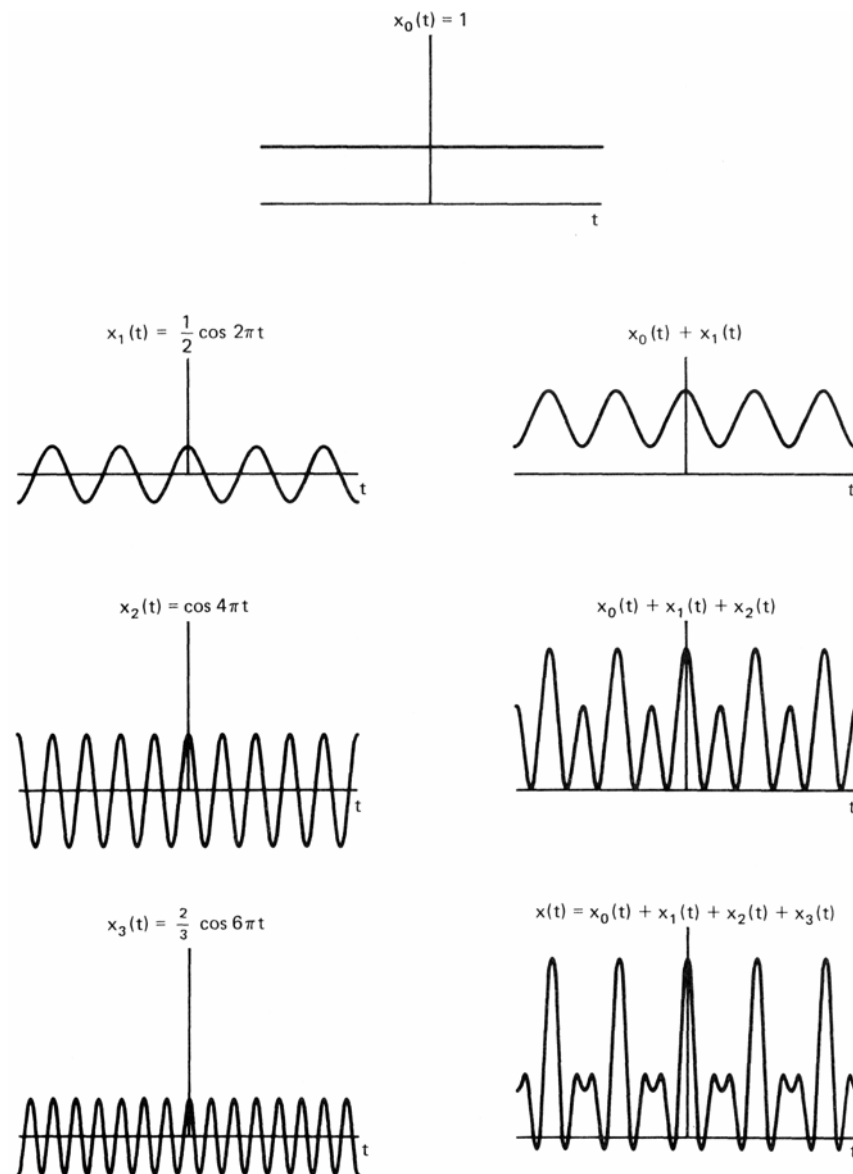
Ekkor szétbontva az összegzést:

$$x(t) = a_0 + \frac{1}{4}(a_1 e^{j2\pi t} + a_{-1} e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(a_2 e^{j4\pi t} + a_{-2} e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(a_3 e^{j6\pi t} + a_{-3} e^{-j6\pi t})$$

Használva Euler képletét:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3} \cos 6\pi t$$

A következő ábra bemutatja a jel harmonikus komponenseiből való előállítását:



110. ábra Egy jel harmonikus komponensei

Legyen $x(t)$ valós függvény, ekkor tudjuk, hogy komplex konjugáltjára $x^*(t)$ -ra igaz, hogy:

$$x(t) = x^*(t)$$

Ekkor azonban:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{jk\omega_0 t}$$

Ha változó cserét végrehajtva k -t kicseréljük $-k$ -ra akkor:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

Ez viszont pontosan akkor igaz ha:

$$a_k = a_{-k}^*$$

Ami igen fontos tulajdonsága a Fourier sornak.

Ha ezt viszont valós esetben vizsgáljuk:

$$a_k = a_{-k} = a_{-k}^*$$

Tehát a felbontás amplitúdóban szimmetrikus bármely folytonos valós jelre, amelynek együtthatói valós értékűek.

Ezért, a Fourier sornak, valós jelekre egy másik formája is előállítható:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}]$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}]$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \operatorname{Re}\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}$$

A komplex a_k értéke felírható poláris formában is:

$$a_k = A_k e^{j\theta_k}$$

Így:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \operatorname{Re}\{A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}\}$$

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

Ha viszont normál alakban írjuk fel a_k -t:

$$a_k = B_k + jC_k$$

Akkor:

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)$$

Ezen ábrázolási módok az elkövetkezendőkben igen hasznosak lesznek s sok jól kiaknázzható tulajdonság vezethető le belőlük. Azonban a legfontosabbat, ha nem is látványosan de már megemlítettük:

Legyen $x(t)$ egy a Fourier sorával reprezentált periodikus függvény, amely egy olyan rendszer inputja amelynek impulzus átviteli függvénye $h(t)$. Általánosságban elmondható, hogyha egy LTI rendszer input függvénye T szerint periodikus akkor a kimenet is periodikus lesz T szerint, mivel az alábbi alakban áll ellő:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

Ahol:

$$H(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-jk\omega_0\tau} d\tau \quad \text{sajátértékei a rendszernek.}$$

Látható, hogy a kimenet függvény ugyan olyan Fourier sorral adott mint a bemenet, csupán az együtthatók változtak meg:

$$b_k = a_k H(k\omega_0)$$

Így a jel alak bár változik, de periodicitás megmarad és annak alapperiódusa is.

Tekintsünk most egy rövid számolási példát frissen tanult ismereteinkre alapozva:

Legyen adott egy LTI rendszer, amelynek bemenete az előző példában tekintett függvény:

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}$$

Tegyük fel, hogy a rendszer impulzus válaszát kiszámítottuk és azt kaptuk, hogy:

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

Számoljuk ki most $H(k\omega_0)$ sajátértékeket:

$$H(k\omega_0) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} e^{-jk\omega_0\tau} d\tau = \left[-\frac{1}{1+jk\omega_0} e^{-\tau} e^{-jk\omega_0\tau} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+jk\omega_0}$$

Ha most a válasz Fourier együtthatóit kiszámítjuk:

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{+3} b_k e^{jk2\pi t}$$

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+j2\pi} \right) \quad b_{-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-j2\pi} \right)$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+j4\pi} \right) \quad b_{-2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-j4\pi} \right)$$

$$b_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+j6\pi} \right) \quad b_{-3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-j6\pi} \right)$$

Ami szintén valós jelet definiál, hiszen két valós jel konvolúciójaként áll elő. Jól látható az is, hogy bár a jel valós, megfelelő együtthatói csupán komplex konjugáltjai egymásnak, s nem egyenlők. Egyenlőnek azonban csak akkor kellene lenniük ha az együtthatók valósak lennének, s ez nem teljesül. Általánosságban elmondható, hogy csupán a tisztán szinuszoszoidális jelek együtthatói valósak, ha komplex exponenciális sorba fejtjük őket. Azonban ha már exponenciális változás van jelen a jelben, az együtthatók akkor komplex értékűek lesznek és a szimmetria az együtthatók között csupán a komplex konjugált fogalmában merül ki.

3.3. Periodikus jelek Fourier sorba fejtése (Determination of the Fourier Series Representation of Periodic Signals)

Az következő alapvető probléma adott, van egy periodikus jelünk s szeretnénk annak Fourier sorát meghatározni. Azonban ehhez szükségünk lenne a sor a_k együtthatóinak kiszámítására. A kérdés hogy, hogyan tehetnénk ezt meg?

Nos, adott a periodikus jelünk amit az alábbi alakban keresünk:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Felhasználva a egyenlőséget, szorozzuk meg mindkét oldalt $e^{-jn\omega_0 t}$ -vel.

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jn\omega_0 t} e^{jk\omega_0 t}$$

Ha most integráljuk mindkét oldalt 0-tól egészen az alapperiódusig ($T_0 = 2\pi/\omega_0$):

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jn\omega_0 t} e^{jk\omega_0 t} dt$$

Mivel csupán az alapperióduson integrálunk ezért az összegzés és az integrálás felcserélhető:

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt$$

Az integrált Euler formulája szerint felbontva kapjuk, hogy:

$$\int_0^{T_0} e^{-j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} \cos(k-n)\omega_0 t dt + j \int_0^{T_0} \sin(k-n)\omega_0 t dt$$

Ha a $k \neq n$ esetet tekintjük akkor a $\cos(k-n)\omega_0 t$ és a $\sin(k-n)\omega_0 t$ olyan periodikus függvények amelyeknek alapperiódus ideje:

$$\frac{T_0}{|k-n|}$$

Ezért ha T_0 intervallumon integráljuk őket, amely alapperiódus idejüknek egész számú többszöröse, akkor olyan mintha alapperiódusukon integrálnánk ki őket és az így kapott területet szoroznánk meg $|k-n|$ -el. Azonban egy nulla középértékű jel területe nulla az alapperióduson így beláttuk, hogy:

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

Így az eredeti egyenletünk redukálódik és az kapjuk, hogy:

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Így tetszőleges folytonos periodikus jelről elmondhatjuk, hogy Fourier sorának együtthatói az alábbi módon számíthatók:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{szintézis egyenlete}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{analízis egyenlete}$$

Mindegyik együttható a jel felharmonikusait ($|k| > 1$) illetve alapharmonikusát ($k = 1$) jellemzi, míg a jel egyenáramú komponensét, úgynevezett közép értékét az

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$$

adja ami lényegében az átlagos értékét jellemzi a jelnek egyetlen periódus alatt. Ha ugyanezt a jel szinuszos felbontására is felírhatjuk, csak akkor:

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt = 2 \cdot \operatorname{Re}\{a_k\}$$

$$c_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt = 2 \cdot \operatorname{Im}\{a_k\}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cos(k\omega_0 t) - c_k \sin(k\omega_0 t)$$

A periodikus jelek Fourier sorának számításánál már igen hamar felismerték, hogy a jelek szimmetria viszonyai erősen meghatározzák a jel Fourier sorát, és arra adódóan szabályszerűségek érvényesek.

- *Első Fajú szimmetriának* nevezzük a jel párosságát.

Ha a jel páros, azaz:

$$x(t) = x(-t)$$

Akkor a jel szinuszos együtthatói nullák lesznek, azaz a komplex exponenciális együtthatóknak nem lesz immaginárius része, míg a jel együtthatóinak meghatározásához, elég az alaperiódus felén integrálni. Így:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt$$

$$b_k = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt = 2 \cdot \operatorname{Re}\{a_k\}$$

$$c_k = 0 = 2 \cdot \operatorname{Im}\{a_k\}$$

- *Másod Fajú szimmetriának* nevezzük ha a jel páratlan.
Azaz:

$$x(t) = -x(-t)$$

Akkor a jel koszinuszos együtthatói nullák lesznek, azaz a komplex exponenciális együtthatóknak nem lesz valós része, míg a jel együtthatóinak meghatározásához, elég az alapperiódus felén integrálni.

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt$$

$$b_k = 0 = 2 \cdot \operatorname{Re}\{a_k\}$$

$$c_k = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt = 2 \cdot \operatorname{Im}\{a_k\}$$

- *Harmad Fajú szimmetriának* nevezzük ha a jel két félderiódusa egymásnak tükörképe:

$$x(t) = -x\left(t + \frac{T_0}{2}\right)$$

Akkor a jel nulla középértékű és páros felharmónikusainak együtthatói nullák lesznek.

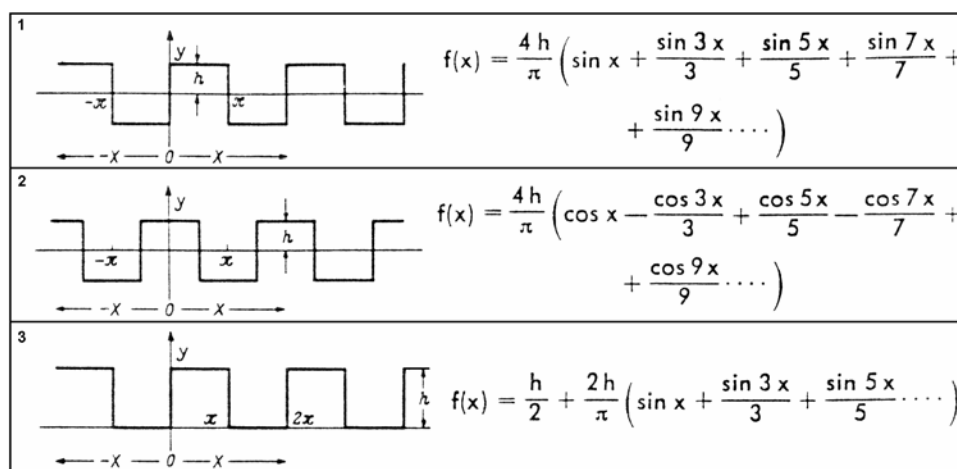
$$a_0 = 0$$

$$b_{2k} = c_{2k} = 0$$

$$b_{2k+1} = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos([2k+1]\omega_0 t) dt = 2 \cdot \operatorname{Re}\{a_{2k+1}\}$$

$$c_{2k+1} = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin([2k+1]\omega_0 t) dt = 2 \cdot \operatorname{Im}\{a_{2k+1}\}$$

A legalapvetőbb jeleket Fourier sorba fejtettük, és ábrázoltuk, hogy jól láthatóak legyenek a szimmetria tulajdonságokból következő szabályok:



4		$f(x) = -\frac{8h}{\pi^2} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$
5		$f(x) = \frac{8h}{\pi^2} \left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} \dots \right)$
6		$f(x) = \frac{8h}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$
7		$f(x) = \frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$
8		$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{4h}{\pi^2} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$
9		$f(x) = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} \dots \right)$
10		$f(x) = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi} \left(-\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$
11		$f(x) = \frac{2h}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} \right)$
12		$f(x) = -\frac{2h}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x \dots \right)$
13		$f(x) = \frac{h}{2} - \frac{h}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \dots \right)$
14		$f(x) = -\frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right) + \frac{2h}{\pi} \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \dots \right)$
15		$f(x) = \frac{h}{4} - \frac{2h}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \frac{h}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$

111. ábra Ismert jelek Fourier sora

Most már, hogy ilyen mélyen megismerkedtünk a Fourier sorbafejtés technikájával nézzünk egy-két példát:

3.2 Példa:

Legyen adott az $x(t) = \sin \omega_0 t$ jelünk, fejtük ezt komplex Fourier sorba.

A probléma már ránézésre is egyszerűnek tűnik. Mielőtt ész nélküli integrálásba kezdenénk, vegyük észre, hogy Euler képletével a szinusz függvény az alábbi alakba írható:

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$$

Nos, ezzel máris megoldottuk a feladatot, hiszen a függvényt felbontottuk harmonikusan kapcsolt komplex exponenciálisok lineáris kombinációjára, ahol az együtthatók:

$$a_1 = \frac{1}{2j}$$

$$a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

$$a_k = 0, \quad k \neq \pm 1$$

3.3 Példa:

$$x(t) = 1 + \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t + \cos \left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4} \right)$$

Ha most megint Euler képletét alkalmazzuk:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] + [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] + \frac{1}{2} [e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} - e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}]$$

Ebből adódóan:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1 + \frac{1}{2j}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} e^{j(\pi/4)}$$

$$a_{-1} = 1 - \frac{1}{2j}$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2} e^{-j(\pi/4)}$$

$$a_k = 0, \quad k > 0$$

3.4. A Fourier sorok konvergenciája (The Convergence of Fourier Series)

Ha az általunk megfogalmazott tételből indulunk ki, akkor az előző példák kapcsán igaznak tűnt, hogy bármely folytonos, periodikus jel Fourier sorral reprezentálható. Azonban, példáink során meg említettük olyan jelek reprezentációját is amelyek nem folytonosak, például ilyen volt a négyszögjel. Tehát az igaz, hogy ezek a jelek is Fourier sorba fejthetőek, de vajon az igaz-e, hogy nem folytonos jelekre is igaz a reprezentáció, azaz végtelen sok együttható meghatározása után a sorösszeg pontosan a reprezentálni kívánt jelet adja vissza. Matematikai okfejtéssel, bizonyítható, hogyha a jel reprezentációs hibáját

négyzetes hibakritériummal vizsgáljuk, akkor elmondhatjuk, hogy míg a folytonos jelek esetén a hibakritérium konvergálni fog nullához, addig a nem folytonos jelek esetén a nullához való konvergáláson, kívül előfordulhat, hogy divergens lesz a hibánk, vagy pedig konstans értékhez fog tartani. Bár ezek az esetek a periodikus függvények osztályában nem gyakoriak, mégsem mondhatjuk el, hogy bármely periodikus jelet a Fourier sorba fejtés jól reprezentál. Az viszont bizonyítható, hogy bármely olyan jel, amely véges energiával rendelkezik, azaz négyzetesen integrálható, annak Fourier reprezentációjának hibája konvergál a nullához, ha a reprezentáció felbontása tart a végtelenhez. Azaz ha a függvényünk négyzetesen integrálható akkor jól reprezentálja a függvényt annak Fourier sora.

$$\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Elmondható az is, hogy a hiba függvény integráltja, azaz a jelkülönbség energiája nulla a teljes időintervallumra nézve, így azokban a pontokban ahol a reprezentálni kívánt jel nem folytonos, a Fourier reprezentáció a jel átlag értékével közelíti a nem folytonos ugrást.

$$x(t) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = e(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e(t) dt = 0$$

Dirichlet részletesen vizsgálta a sorba fejthető periodikus függvények körét, és az alábbi kritériumokat tárta fel, amiknek teljesülése szükséges feltétele a sorba fejthetőségnek:

1. Kritérium:

$x(t)$ akkor sorba fejthető ha abszolút integrálható.

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

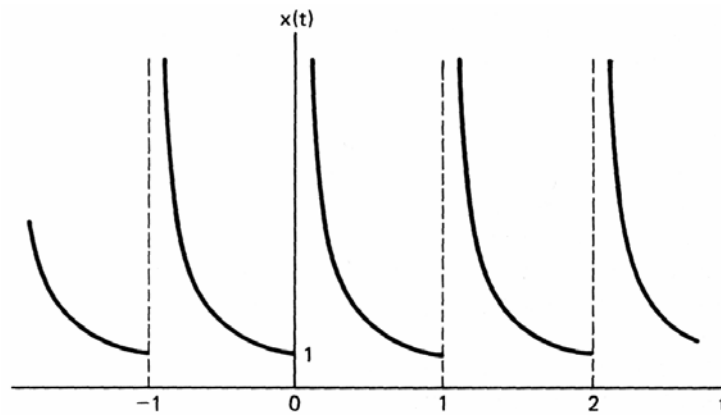
Ez a kritérium azt garantálja, hogy az együtthatók végesek lesznek.

$$|a_k| \leq \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t) e^{-jk\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

Az alábbi függvény példa olyan függvényre, amely nem felel meg ennek a feltételnek:

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1$$

Ez a jel periodikus $T_0 = 1$ -el.



112. ábra Nem abszolút integrálható periodikus jel

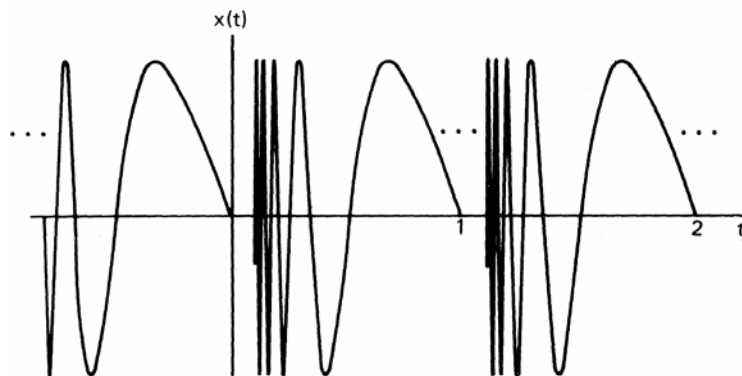
2. Kritérium:

Bármely véges időintervallumon csupán korlátos számú változása lehetséges a jelnek, azaz véges sok (lokális) maximum és (lokális) minimum ponttal rendelkezhet egy periódus alatt.

Az

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \leq 1$$

olyan $T_0 = 1$ -el periodikus jel amely bár teljesíti az egyes kritériumot, a kettesnek már nem felel meg mivel végtelen sok minimum és maximum pontja van egy periódus alatt.

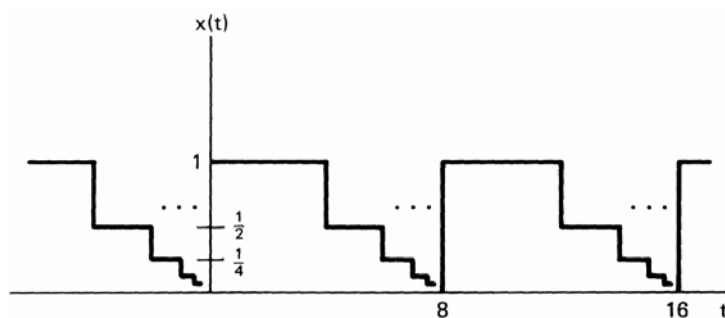


113. ábra Végtelen sok szélső értékű jel

3. Kritérium

A jelnek minden véges idő intervallumon csak véges számú szakadása lehet, és ezekben a szakadásokban az ugrások is csak véges nagyságúak lehetnek.

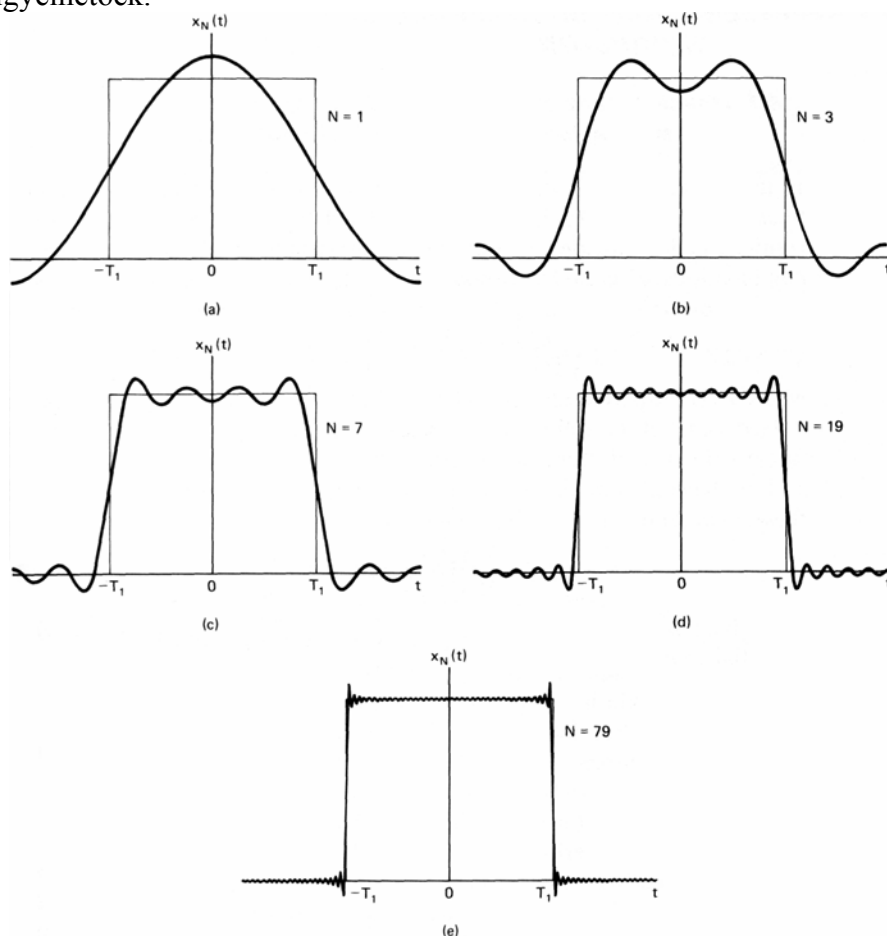
Olyan jelre, amelyek nem teljesíti e kritériumot, példa az alábbi $T = 8$ -al periodikus lépcsős jel amely egy periódus idő alatt végtelen sok ugrást követ el, habár ezek az ugrások végesek.



114. ábra Végtelen sok ugrással rendelkező periodikus jel

Bár a fenti kritériumok meghatározzák azon függvények körét amelyek jól sorba fejthetők, azonban meg kell, említenünk, hogy azon függvények amelyek kielégítően nem sorba fejthetők igen ritkák, s a jelfeldolgozás szempontjából lényegtelenek. Így általánosságban elmondható, hogy a továbbiakban ha periodikus jelekről beszélünk, akkor a jelfeldolgozás szempontjából olyan periodikus jelet értünk ide, amelyek Fourier sorba fejthetők és megfelelően reprezentálhatóak.

Egy másik érdekes jelenség a Gibbs jelenség. Amikor a négyszögjelet közelítő Fourier sor konvergenciáját vizsgálták a felbontás elemszámát növelve, azt vették észre, hogy bár a négyszögjelet igen hamar jól kezdi közelíteni a Fourier reprezentáció, de nagy N -ek esetén is a függvény szakadásánál tüskék voltak megfigyelhetők.



115. ábra A Gibbs jelenség

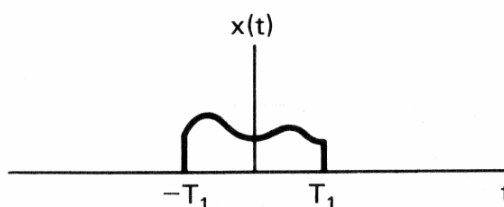
Ezek az úgynevezett túllövéseket (overshoot) mindig fennálltak akárhogy is növelték N értékét. Ezenkívül azt is bebizonyították, hogy akármilyen nagy véges N -re a túllövés 9% lesz az ugrás magasságának, s N növelésével csupán a sarkok felé igyekszik kinyúlni, miközben a túllövés hossza csökken de nagysága állandó. Bár ahogy az előbbieken beláttuk, hogy végtelen nagy N esetén a jelalaktól való eltérés nulla lesz, azonban véges nagy N -re a jelenség él és számolni kell vele.

3.5. Aperiodikus jelek ábrázolása és a folytonos idejű Fourier transzformált (Representation of Aperiodic Signals and the Continuous-Time Fourier Transformation)

A Fourier sorba fejtés egyik talán legmarkánsabb tulajdonsága, hogy kiterjeszthető. Akár nem periodikus jelek is reprezentálhatóak ily módon egy ügyes trükk segítségével.

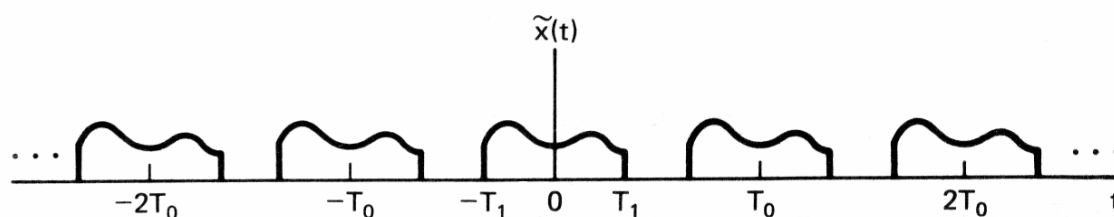
Tekintsük az alábbi aperiodikus jelet:

$$x(t) = 0, \quad |t| > T_1$$



116. ábra Aperiodikus folytonos jel

Az aperiodikus jelből csináljunk most egy periodikusát, mégpedig úgy, hogy T_0 időközönként, ami az előállított periodikus jel alapperiódusa lesz, ismételjük meg a jelet. Persze T_0 -at elég nagyra kell választani, hogy nem lapolódjanak egymásra a periódusok. Így kapjuk az alábbi $\tilde{x}(t)$ jelet:



117. ábra Az aperiodikus jelből konstruált periodikus jel

Ahol $\tilde{x}(t) = x(t)$ ha $T_0 \rightarrow \infty$

Fejtsük most az $\tilde{x}(t)$ jelet Fourier sorba:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Ekkor elég az együtthatók kiszámításához azon az intervallumon integrálni amikor a jel nem nulla értékű:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Azonban, $\tilde{x}(t) = x(t)$ ha $|t| < T_0/2$, ezért:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Ekkor azt kapjuk, hogy az így meghatározott a_k együtthatókra igaz hogy létezik olyan $X(\omega)$ függvény amelyre:

$$T_0 a_k = X(\omega)$$

$$X(\omega) = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Azaz a Fourier sornak létezik csupán a jeltől függő burkológörbéje ami nem függ T_0 választásától, amit mi tetszőlegesen tettünk meg.

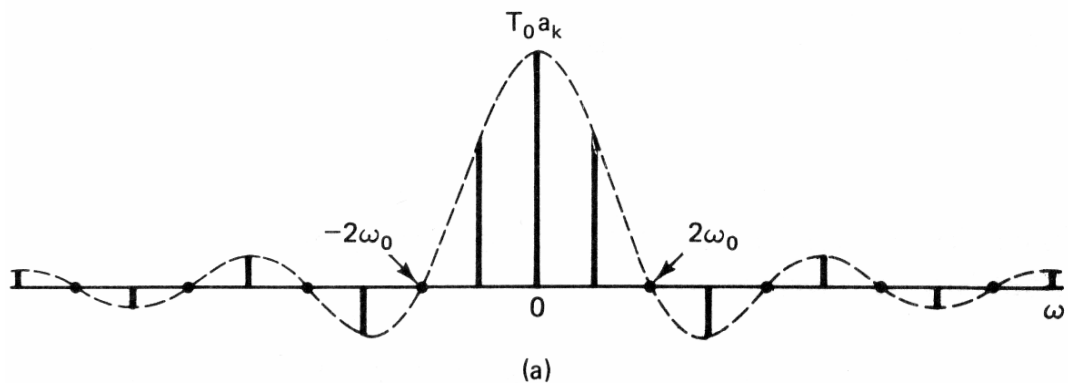
Így az a_k együttható tetszőleges T_0 -ra előállítható:

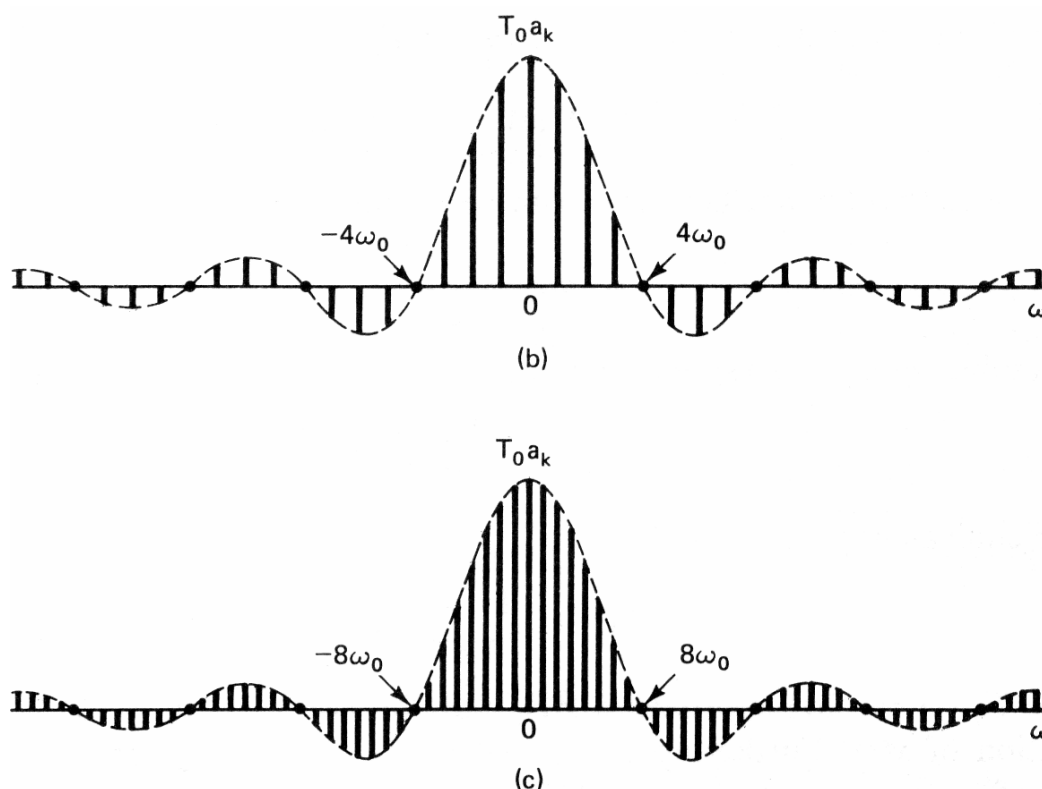
$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$$

Ha például a jelünk egy négyszög jel lenne, akkor az együtthatókat a

$$a_k = \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_0}$$

adja meg, ami különböző nagyságú T_0 választása esetén másképp alakul.





118. ábra A Fourier együtthatók alakulása és az őket meghatározó burkoló görbe különböző T_0 esetén,
(a) $T_0 = 4T_1$; (b) $T_0 = 8T_1$; (c) $T_0 = 16T_1$;

Jól látható, hogy az együtthatók mintha mintavételezési lennének ennek a függvénynek, s T_0 növelésével egyre sűrűbbé válik a mintavételezés, míg végtelen nagy érték esetén teljesen megkapjuk a folytonos burkológörbét.

Az előbb tett megállapításunk értelmében, ekkor viszont $\tilde{x}(t)$ felírható:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

Ha most $T_0 \rightarrow \infty$ akkor az összegzés integrálba megy át.

Ekkor viszont:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

A második képlettel kapott frekvencia függvényt az aperiodikus függvény Fourier transzformáltjának nevezzük, míg az első képletet inverz-Fourier transzformációnak.

Nagyon fontos azt a különbséget hangsúlyozni, hogy míg periodikus esetben a függvény Fourier együtthatói diszkrét spektrumot állítottak elő a frekvencia tartományon, addig aperiodikus esetben a spektrum folytonos, azaz bármely

frekvenciára van együtthető, míg periodikus esetben csupán az alapfrekvencia többszöröseire volt.

3.6. A Fourier transzformáció konvergenciája (Convergence of Fourier Transform)

Újból arra lennénk kíváncsiak mint azt periodikus függvényekre néztük, hogy valóban jól reprezentálja-e az aperiodikus függvényt annak Fourier transzformáltja. Itt is elmondható, hogy a két jel közötti különbség-függvény integráltja az egész intervallumra nézve nulla, így a hiba nem hordoz energiát. Habár egyes időpontokra a különbség akár szignifikáns is lehet, de a két jel energiatartalma és alakja megegyező.

$$x(t) - \tilde{x}(t) = e(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e(t) dt = 0$$

Itt is élnek Dirichlet kritériumai amik leszűkítik az aperiodikus függvények körét azokra, amelyek megfelelően reprezentálhatóak Fourier transzformáltjukkal.

3.7. Példák valós idejű Fourier transzformációra (Examples of Continuous-Time Fourier Transforms)

3.4 Példa:

Legyen adott egy

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

jel aminek szeretnénk meghatározni a Fourier transzformáltját,

A jel abszolút integrálható ha $a \geq 0$, ellenkező esetben a Fourier transzfomáltja nem létezik a jelnek.

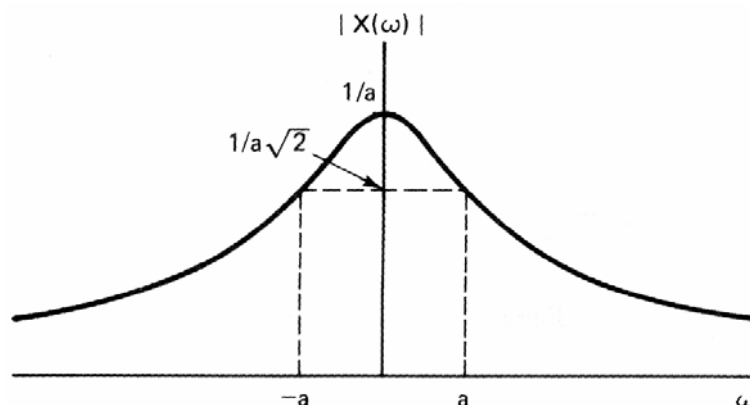
$$X(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a + j\omega}$$

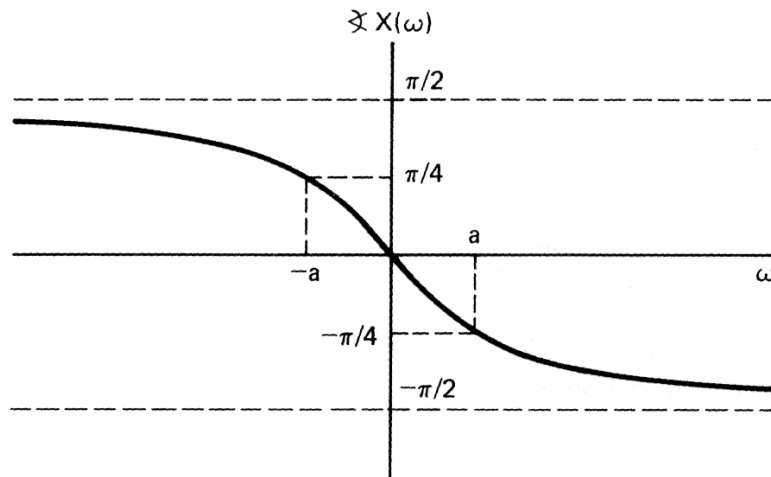
Mivel az így előálló transzformált komplex függvény ezért külön-külön ábrázoljuk az amplitúdó és a fázis változását:

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Ábrázolva:



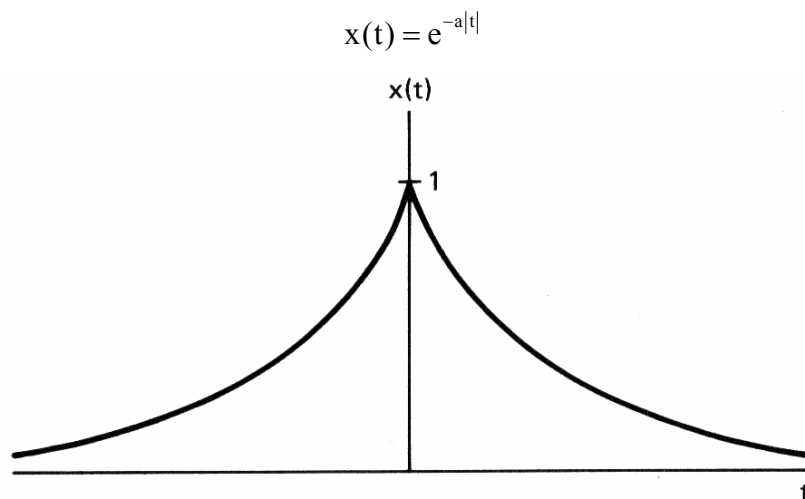


119. ábra A példában szereplő jel Fourier transzformáltjának amplitúdó és fázis spektruma

Ha „a” véletlenül komplex szám lenne akkor is létezik a Fourier transzformált, ha $\text{Re}\{a\} \geq 0$, és teljesen azonosan számolandó.

3.5 Példa:

Legyen adott:

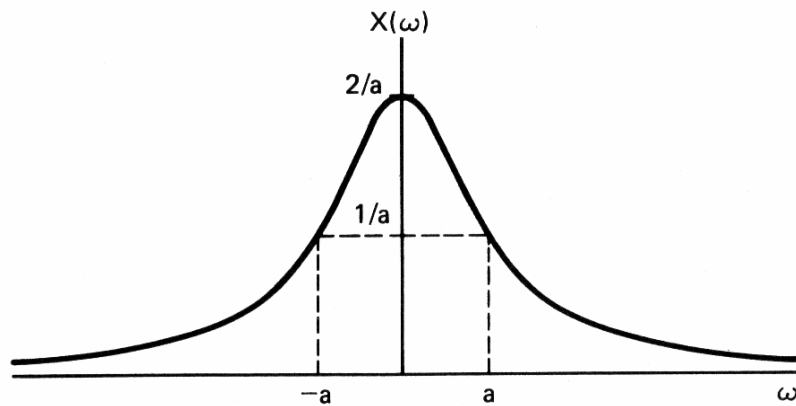


120. ábra A példában szereplő $x(t)$ jel

jel aminek szeretnénk meghatározni a Fourier transzformáltját:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

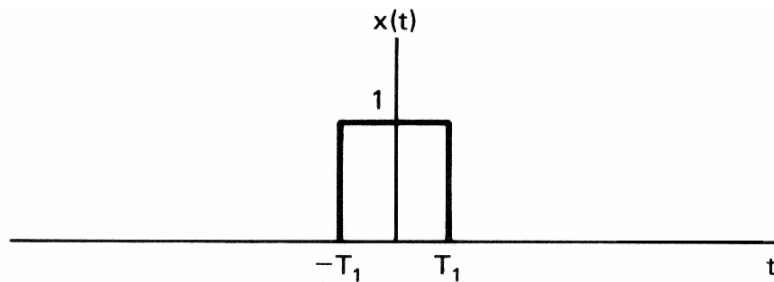
Mivel az így kapott transzformált tisztán valós értékű ezért csupán amplitúdóját érdemes ábrázolni:

121. ábra Az $x(t)$ jel Fourier transzformáltja

3.6 Példa:

Nézzünk most egy négyszögjelet.

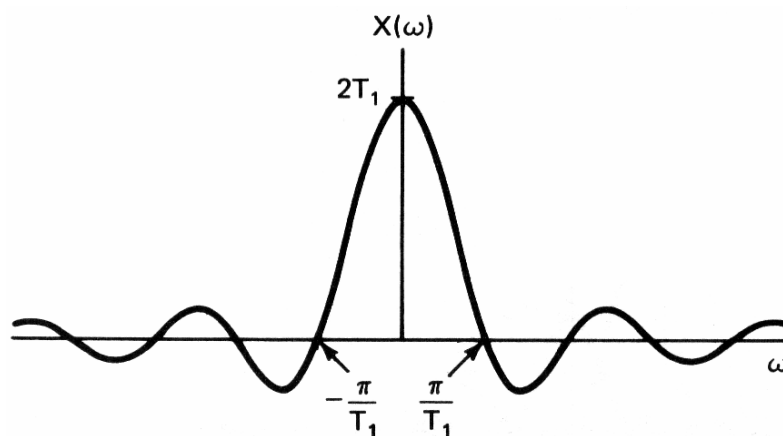
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$



122. ábra Aperiodikus négyszögjel

Ha vesszük a jel Fourier transzformáltját:

$$X(\omega) = \int_{-T_1}^{+T_1} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega}$$

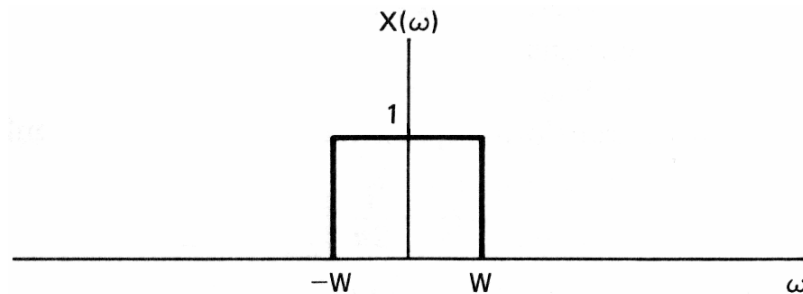


123. ábra Az aperiodikus négyszögjel Fourier transzformáltja

3.7 Példa:

Legyen adott egy olyan jel amely a frekvenciatartományon a következő féle képen néz ki:

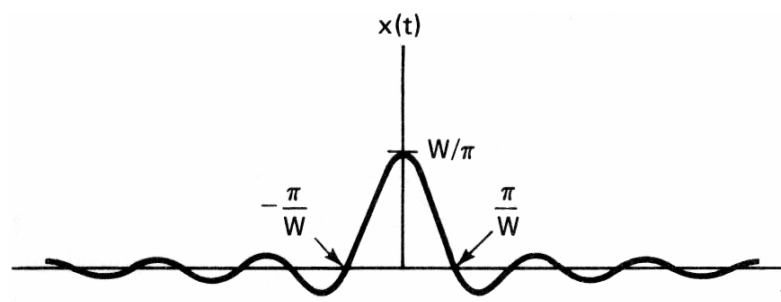
$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$



124. ábra A példajel spektruma

Vegyük most ezen Fourier transzformált inverzét, hogy visszatérjünk az időtartományba:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{+W} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t}$$

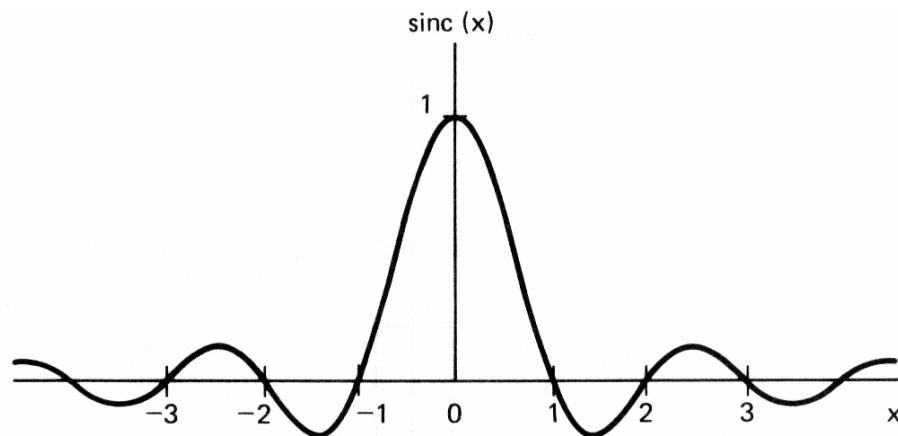


125. ábra A példajel alakja az időtartományban

Ha most ezt összehasonlítjuk előző példánkkal, akkor jól látható, hogy a négyszögjelnek $\sin(x)/x$ -et tartalmazó Fourier transzformáltját kaptuk, míg most beláttuk, hogy $\sin(x)/x$ -nek a Fourier transzformáltja pedig egy négyszög jel. Ezen érdekes tulajdonságát a Fourier transzformációnak, dualitási tulajdonságnak hívjuk és a későbbiekben bővebben foglalkozunk vele.

Vannak bizonyos függvények amelyek nagyon sokszor kerülnek elő a Fourier analízis közben végzett számolások és eredmények kapcsán. Ezek közül egyik a $\text{sin}_c(x)$ függvény, amely definíció szerint:

$$\text{sin}_c(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$



126. ábra A sinc függvény

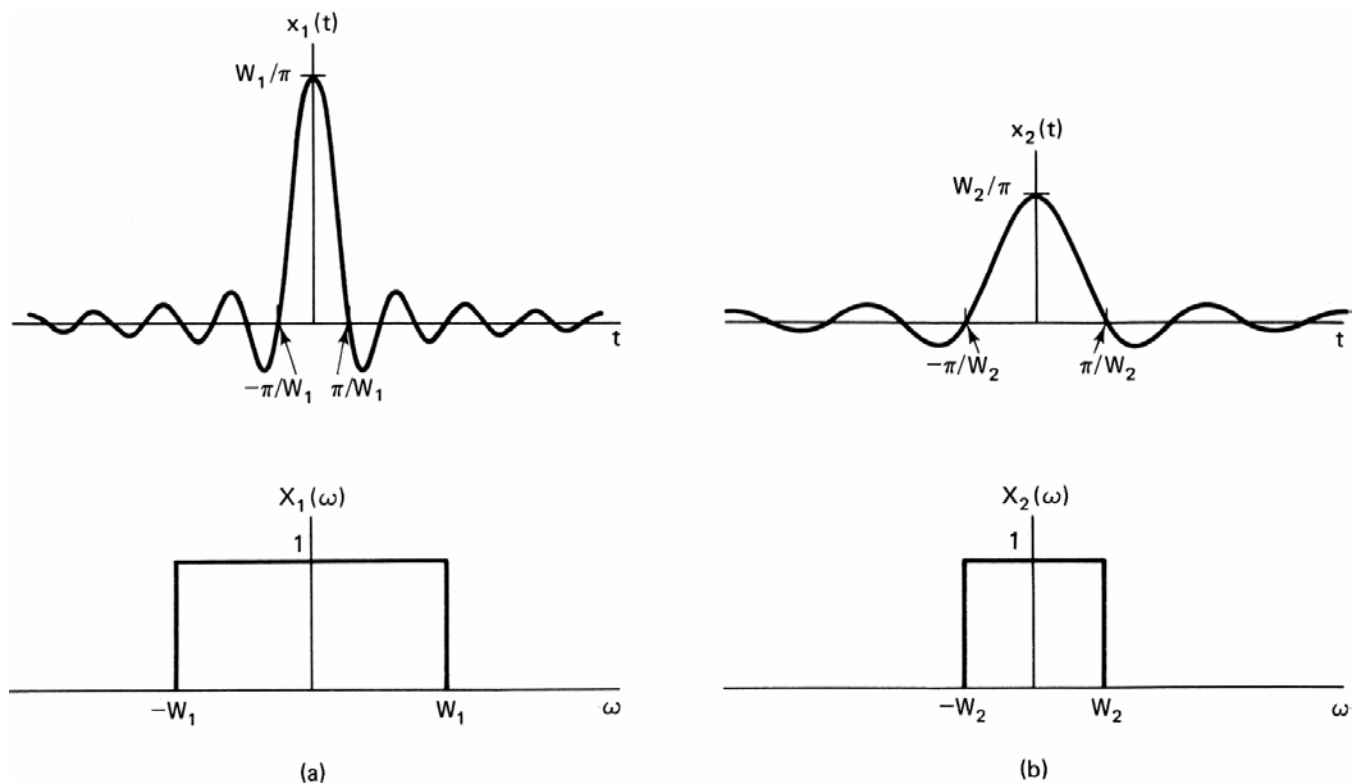
A példánkban látott jelek így felírhatóak új jelölésünkkel is:

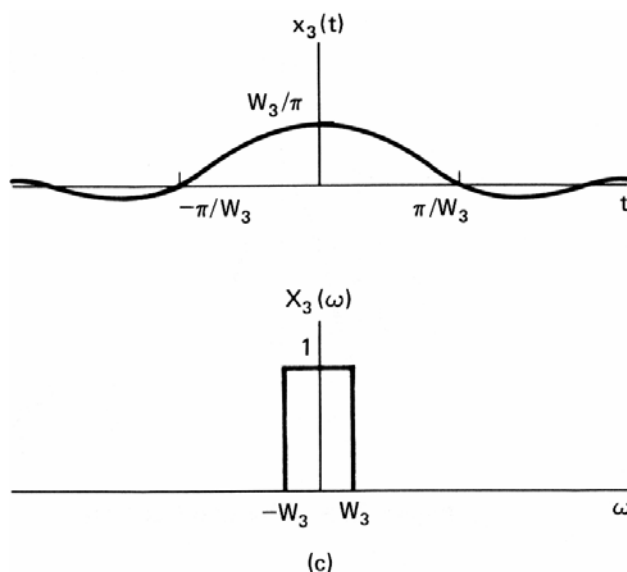
$$2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} = 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$$\frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$

Jól látható, hogy mindkét esetben a függvény menete megegyezik, csupán amplitúdója különböző.

Az is felfedezhető, hogyha a frekvencia tartományon vett négyszög jel inverz Fourier transzformáltját nézzük, akkor a W sávszélességért felelős paraméterrel fordítottan arányos az idő tartományon előálló transzformált szélességével, nyújtottságával, amit itt az első érintési ponttal jellemzünk ahol a jel értéke nulla lesz.



127. ábra Fourier transzformáltja a sinc jelnek különböző W esetén

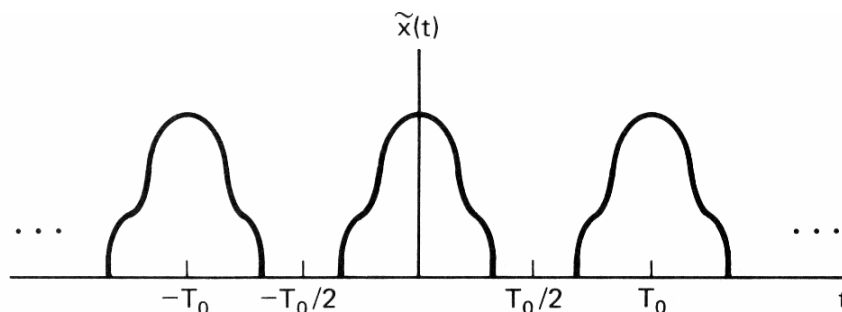
3.8. Periodikus jelek Fourier transzformáltja (Fourier Transform of Periodic Signals)

Az előző részekben láthattuk mennyire fontos és jól használható a Fourier transzformáció aperiodikus jelek reprezentációjára mintegy kiterjesztéseként a Fourier sorba fejtésnek. Azonban a kiterjesztés elvéből következően ha aperiodikus jeleknek létezik Fourier transzformáltja, akkor a periodikus jelekre is elvégezhetőnek kell, hogy legyen a művelet, s ezáltal periodikus jelek is reprezentálhatóak kell, hogy legyenek Fourier transzformáltjuk által.

Először is használjuk fel az aperiodikus jeleknél tett első lépéseinket. Aperiodikus esetben jól láthattuk, hogy a periodikussá tett jel Fourier együtthatói mintegy mintavételezéseként álltak elő valamiféle burkoló görbének amire a későbbiekben bevezettük a Fourier transzformált fogalmát.

A vizsgált esetben az aperiodikus $x(t)$ jel és a periodikussá tett $\tilde{x}(t)$ jel megegyezett egészen egy T_0 alapperiódus elejéig.

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$



128. ábra Periodikussá tett jel

Ekkor a Fourier együtthatói a $\tilde{x}(t)$ jelnek előálltak egyfajta minta sorozatként:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$$

Nos, az is észrevehető, hogy a_k előáll az $\tilde{x}(t)$ jel bármely T_0 hosszú intervallumon vett integrálásával, azaz tetszőleges s időpontra igaz, hogy ha

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & s \leq t \leq s + T_0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Akkor az $\tilde{x}(t)$ jel Fourier együtthatói nem lesznek más mint:

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$$

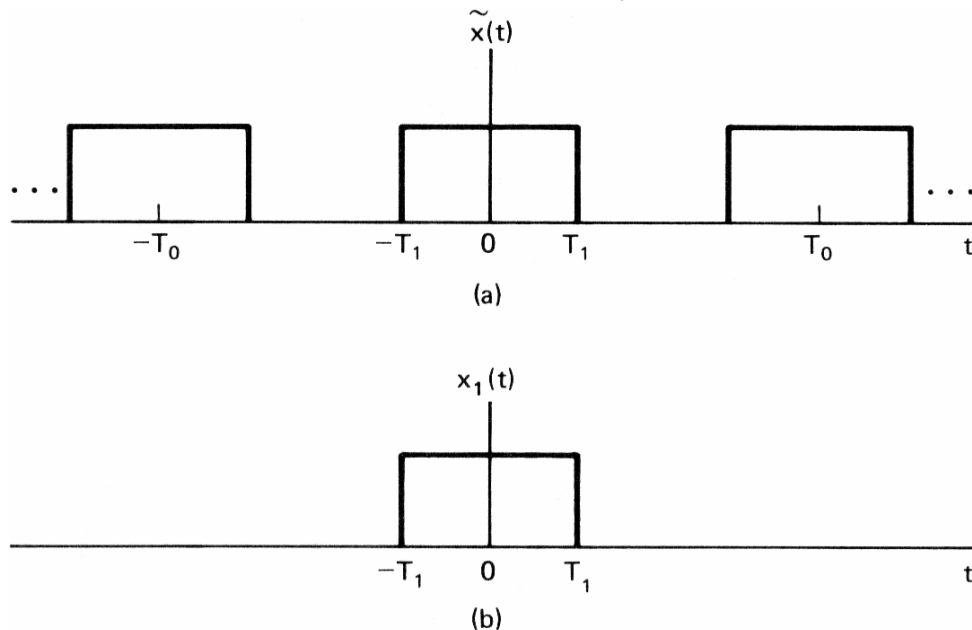
Ahol $X(\omega)$ nem más mint a Fourier transzformáltja az $x(t)$ aperiodikus jelnek és a_k pedig $\tilde{x}(t)$ Fourier együtthatói.

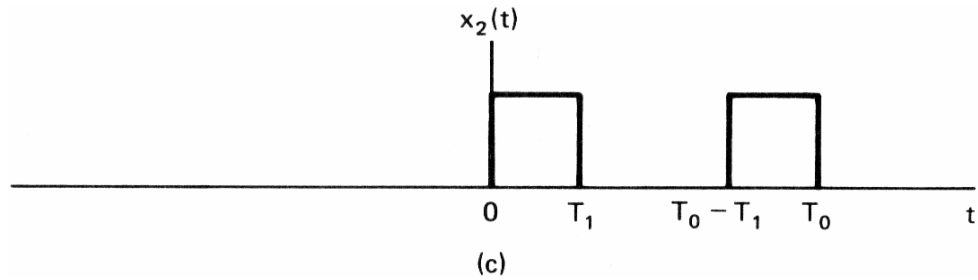
Ez viszont két dolgot is jelent, egyrészt s -et kényünkre-kedvünkre is választhatjuk, a jelre jellemző Fourier együtthatók ugyanazok maradnak, míg más részből azt, hogy $X(k\omega_0)$ minták függetlenek s választásától. Azonban az korántsem igaz, hogy $X(\omega)$ bármely s -re ugyanaz maradna, erről szó se volt, csupán az igaz, hogy ezeken a mintavételezett helyeken ugyanazok maradnak az értékei s -től függetlenül.

Tekintsünk most egy példát ennek értelmezésére:

3.9 Példa:

Legyen $\tilde{x}(t)$ egy periodikus négyszögjel sorozat T_0 alap periódusidővel.





129. ábra A példában szereplő négyyszögjelek

Legyen adott két aperiodikus jel, $x_1(t)$ és $x_2(t)$ amelyek mind egyenlők $\tilde{x}(t)$ -vel valamely T_0 hosszú intervallumon.

Az $x_1(t)$ Fourier transzformáltját kiszámolva kapjuk, hogy:

$$X_1(\omega) = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$$

Számoljuk ki most $x_2(t)$ Fourier transzformáltját is:

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{T_1} e^{-j\omega t} dt + \int_{T_0-T_1}^{T_0} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{j\omega} [1 - e^{-j\omega T_1}] + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega T_0} [e^{j\omega T_1} - 1] = \\ &= \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega \frac{T_1}{2}} \left[e^{j\omega \frac{T_1}{2}} - e^{-j\omega \frac{T_1}{2}} \right] + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega \left(T_0 - \frac{T_1}{2}\right)} \left[e^{j\omega \frac{T_1}{2}} - e^{-j\omega \frac{T_1}{2}} \right] = \\ &= \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T_1}{2}\right) \left[e^{-j\omega \frac{T_1}{2}} + e^{-j\omega \left(T_0 - \frac{T_1}{2}\right)} \right] \end{aligned}$$

Jól látható, hogy $X_1(\omega)$ és $X_2(\omega)$ nem egyenlők, azonban ha $\omega = k\omega_0$ akkor:

$$X_2(k\omega_0) = \frac{2}{k\omega_0} \sin\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) \left[e^{-jk\omega_0 \frac{T_1}{2}} + e^{-jk\omega_0 \left(T_0 - \frac{T_1}{2}\right)} \right]$$

Mivel $\omega_0 T_0 = 2\pi$ ezért:

$$X_2(k\omega_0) = \frac{2}{k\omega_0} \sin\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) \left[e^{-jk\omega_0 \frac{T_1}{2}} + e^{jk\omega_0 \frac{T_1}{2}} \right] = \frac{2}{k\omega_0} \sin\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) \cos\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right)$$

A trigonometria $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ azonosságát felhasználva:

$$X_2(k\omega_0) = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0} = X_1(k\omega_0)$$

Így megállapíthatjuk, hogy egy T_0 periódusidővel periodikus jel Fourier együtthatói kinyerhetőek egy olyan aperiodikus jel Fourier transzformáltjának diszkrét mintavételezésével amely egyenlő az eredeti periodikus jellel valamely T_0 időintervallumon.

Ahogy a továbbiakban látni fogjuk periodikus esetben a Fourier sor és a transzformált nagyon szoros kapcsolatban van egymással, és egyik a másikból származtatható. Így a Fourier sor segítségével megkonstruálható a transzformált amely egy olyan impulzus sorozatból fog állni, más szóhasználattal impulzus vonatból (impulse train), ahol az impulzusok területei egyenlők lesznek a Fourier sor együtthatóinak értékeivel.

Hogy mindezt belássuk nézzük alábbi okfejtésünket:

Legyen adott egy $x(t)$ jelünk amelynek Fourier transzformáltja:

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Ami egy 2π területű egység impulzus az $\omega = \omega_0$ frekvencián.

Ahhoz, hogy megkapjuk az $x(t)$ jelet melynek ez a transzformáltja, végezzük el az inverz transzformációt:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

Ebből adódóan ha $X(\omega)$ egymástól egyenlő közönként elhelyezett impulzusok összege:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_0)$$

Akkor annak inverz transzformáltja nem más mint a:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

ami pedig nem más mint a Fourier sora az adott $x(t)$ jelnek.

Így a periodikus függvény Fourier transzformáltja előáll harmonikus frekvenciákon elhelyezkedő impulzusok sorozatával amelyek területe a Fourier együtthatók 2π szeresei.

Nézzünk most egy-két példát, erre:

3.9 Példa:

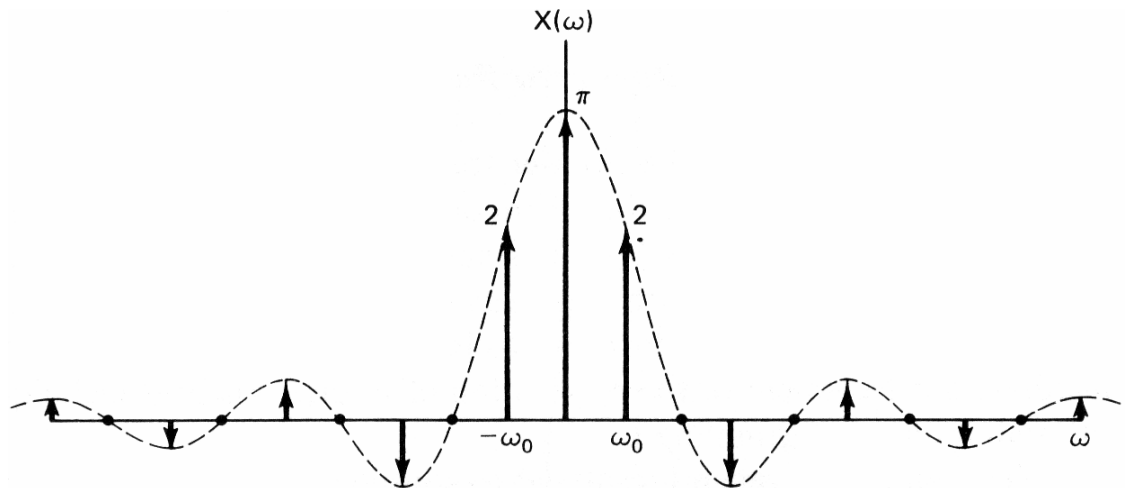
Tekintsük a szimmetrikus periodikus négyszögjelet amit az előző példában láthattunk. Ezen jel Fourier együtthatói nem mások mint:

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{\pi k}$$

Így a Fourier transzformáltja pedig előáll az alábbi alakban:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Ezt ábrázoltuk a következő ábrán, $T_0 = 4T_1$ esetben:



130. ábra Szimmetrikus periodikus négyszögjel Fourier transzformáltja

3.10 Példa:

Legyen $x(t) = \sin \omega_0 t$

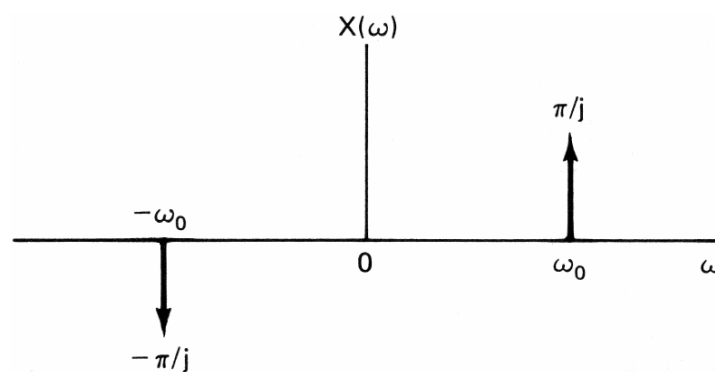
Ekkor a Fourier együtthatói:

$$a_1 = \frac{1}{2j}$$

$$a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

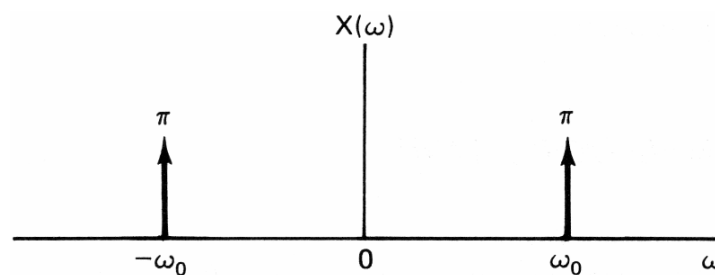
$$a_k = 0, \quad k \neq \pm 1$$

Így megkonstruálható a Fourier transzformált amely nem lesz más mint:



131. ábra A szinusz jel Fourier transzformáltja

Ha pedig ugyanezt $x(t) = \cos \omega_0 t$ függvényre tekintjük akkor:

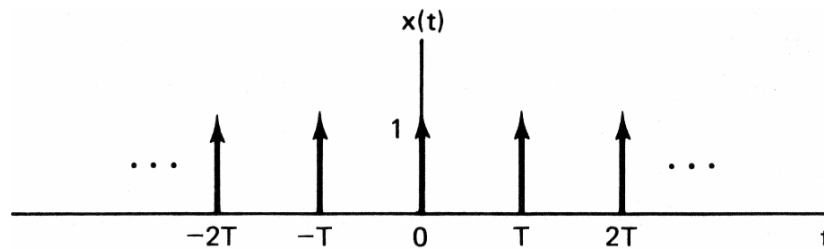


132. ábra A coszinusz jel Fourier transzformáltja

3.11 Példa:

Legyen adott egy periodikus impulzusvonatunk a folytonos időben:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



133. ábra Periodikus impulzus vonat folytonos időben

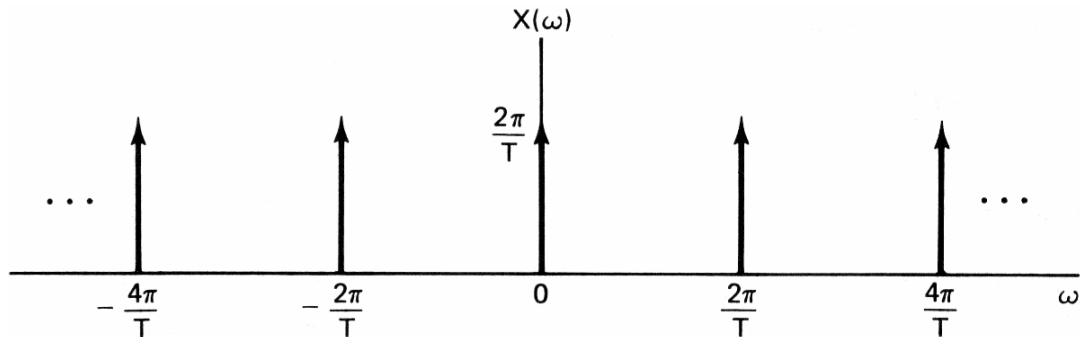
A vonat alapperiódus ideje nem más mint T .

Ha most kiszámítjuk a Fourier együtthatóit:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

Így:

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$$



134. ábra A periodikus impulzus vonat Fourier transzformáltja

Tehát impulzus vonatnak szintén impulzus vonat a transzformáltja.

3.9. A folytonos idejű Fourier transzformáció tulajdonságai (Properties of the Continuous-Time Fourier Transform)

Az elkövetkezendőekben a Fourier transzformáció tulajdonságait vizsgáljuk meg. Ezek a tulajdonságok, mint ahogy azt látni fogjuk, nagymértékben megkönnyíthetik a problémák és feladatok megoldását, így hasznosak lehetnek minden mérnök számára ki a jelfeldolgozás területével foglalkozik.

Elevenítsük fel most a Fourier transzformáció és inverz transzformáció képleteit:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Magának a transzformációnak külön jelölése is van, amit $\mathcal{F}\{\cdot\}$ művelttel jelölünk. Így:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$$

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Nézzük most az alaptételeket:

3.9.1. Linearitási tulajdonság (Property of Linearity)

Bármely két jel lineáris kombinációjának Fourier transzformáltja megegyezik a jelek külön vett Fourier transzformáltjainak lineáris kombinációjával.

$$X_1(\omega) = \mathcal{F}\{x_1(t)\}$$

$$X_2(\omega) = \mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$$

tetszőleges valós „a” és „b” esetén.

3.9.2. Szimmetria tulajdonság (Property of Symmetry)

Ha $x(t)$ valós függvény akkor, bármely frekvenciára fent áll, hogy:

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

ahol a csillag a komplex konjugáltját jelenti a transzformálnak.

Ezt a tulajdonságot másképpen konjugációs szimmetriának (conjugate symmetry) hívják.

$$X^*(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = X(-\omega)$$

Mivel a jel valós tehát: $x(t) = x^*(t)$

További jelentősége is van enne a tulajdonságnak. Ha felírjuk normál alakban a transzformáltat:

$$X(\omega) = \text{Re}\{X(\omega)\} + j\text{Im}\{X(\omega)\}$$

Akkor a fentiek szerint, ha $x(t)$ jel valós:

$$\text{Re}\{X(\omega)\} = \text{Re}\{X(-\omega)\}$$

$$\text{Im}\{X(\omega)\} = -\text{Im}\{X(-\omega)\}$$

Jól látható, hogy míg a transzformált valós rész függvénye frekvenciában páros addig az imaginárius részé páratlan.

Ha pedig polárisan írjuk fel:

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

Akkor elmondható hogy az amplitúdó, $|X(\omega)|$ páros, míg a fázis, $\varphi(\omega)$ páratlan függvénye a frekvenciának.

Sőt az is igaz, hogyha $x(t)$ valós páros függvény, akkor $X(\omega)$ is valós és páros függvény lesz, ha pedig $x(t)$ valós és páratlan, akkor $X(\omega)$ pedig páratlan és tisztán imaginárius függvény lesz.

Legvégül pedig, ahogy azt az első fejezetben levezettük, egy függvény mindig felbontható páros és páratlan részre. Mivel ez a linearitás tulajdonsága miatt ugyanazt a jelet jelenti, így ezeknek a részjeleknek a transzformáltjának az összege megegyezik az eredeti jel transzformáltjával de akkor:

$$\begin{aligned}x(t) &= \text{Ev}\{x(t)\} + \text{Od}\{x(t)\} \\ \mathcal{F}\{x(t)\} &= \mathcal{F}\{\text{Ev}\{x(t)\}\} + \mathcal{F}\{\text{Od}\{x(t)\}\} \\ \text{Ev}\{x(t)\} &= \mathcal{F}^{-1}\{\text{Re}\{X(\omega)\}\} \\ \text{Od}\{x(t)\} &= \mathcal{F}^{-1}\{j\text{Im}\{X(\omega)\}\}\end{aligned}$$

3.9.3. Eltolási tétel (Theorem of Time Shifting)

Tetszőleges függvény időbeli eltolásának transzformáltja, csupán fázisában késik, vagy siet az eredeti jel transzformáltjához képest. A transzformált amplitúdója független az időbeli eltolás műveletétől.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t)\} &= X(\omega) \\ \mathcal{F}\{x(t-t_0)\} &= e^{-j\omega t_0} X(\omega)\end{aligned}$$

3.9.4. Differenciálási tétel (Theorem of Differentiation)

Differenciálás az időtartományon, a frekvencia tartományon $j\omega$ -való szorzásnak felel meg.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t)\} &= X(\omega) \\ \mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= j\omega X(\omega)\end{aligned}$$

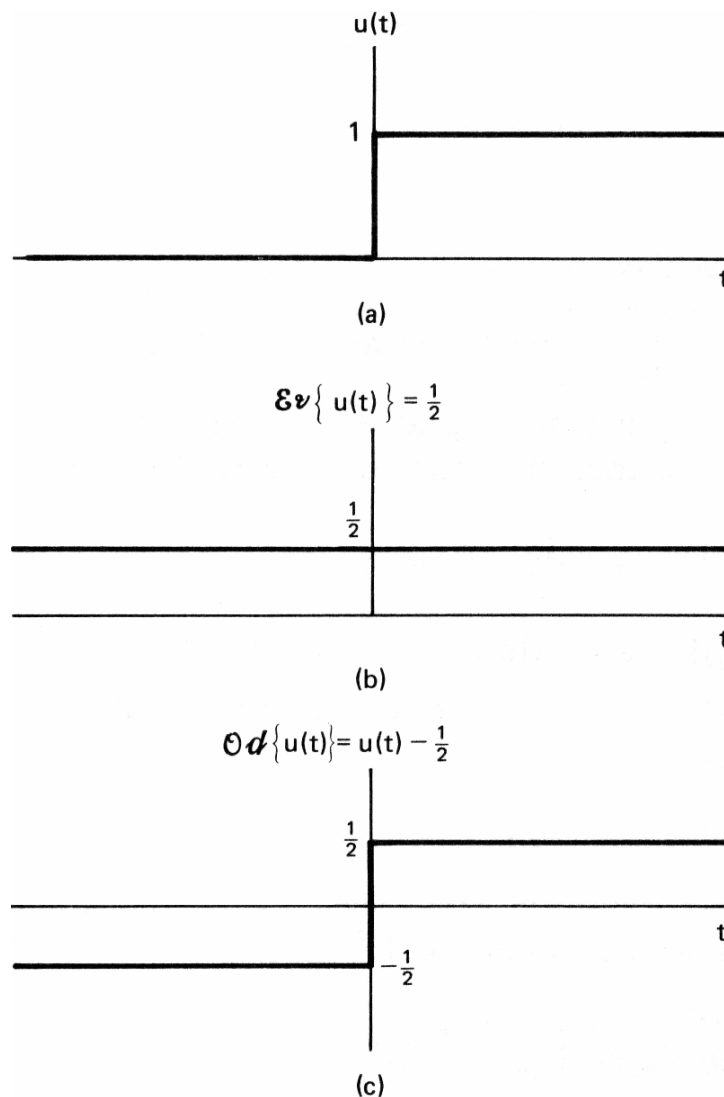
Ebből a tulajdonságból teljes indukcióval belátható, hogy:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n X(\omega)$$

Ezen tulajdonság igen fontos az LTI rendszerek és differenciál egyenletek reprezentálásához, illetve a velük kapcsolatos problémák megoldásához.

Azonban, ahogy azt a későbbiekben látni fogjuk a Laplace transzformációval való szoros kapcsolat ellenére itt differenciálás esetén nem szükséges az ott alkalmazott korrekciós tag, mivel a Fourier transzformáció az idő intervallum egészéről képez le és nem csupán annak pozitív részéről, így a belépésből adódó ugrás deriváltjának mint Dirac impulzusnak nem kell megjelennie a transzformáltban konstans értéként.

Hogy jobban megértsük ezt a tulajdonságot tekintsük az egységugrás függvényt, $u(t)$ -t, amit bontunk fel páros és páratlan komponensére.



135. ábra Az egységugrás páros és páratlan függvényekre való felbontása

Ezért felírható az egységugrás az alábbi alakban:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \left[u(t) - \frac{1}{2} \right]$$

Ha megnézzük most a páratlan részét a jelnek:

$$v(t) = u(t) - \frac{1}{2}$$

$$v'(t) = u'(t) = \delta(t)$$

Azonban az tudjuk, hogy:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(0) dt = 1$$

Így:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{dv(t)}{dt}\right\} = j\omega V(\omega) = 1$$

$$V(\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

Ha most a páros részt tekintjük:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} = \pi\delta(\omega)$$

Tehát:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{u(t) - \frac{1}{2}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Ezúton megkaptuk az egységugrás és az egység impulzus jel transzformáltját, sőt beláttuk az integrálási tételt is.

3.9.5. Integrálási tétel (Theorem of Integration)

Integrálás az időtartományon, a frekvencia tartományon $j\omega$ -való osztásnak felel meg, amit korrekciós tag egészít ki a integrálás pontosítása végett.

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

A korrekciós tag azért szükséges mert általa a függvény kezdeti értéke teszi a határozatlan integrálást határozottá.

3.9.6. Hasonlósági tétel (Theorem of Time and Frequency Scaling)

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Ahol „a” valós konstans szám.

Azaz a jel nyújtása vagy gyorsítása a jel frekvenciakomponenseinek fordított arányú változását implikálja.

Tehát ha a magnókazettát dupla sebességgel játszunk le a frekvencia tartománybéli alak szélesedni kezd, hiszen a lejátszás gyorsításával nagyobb frekvencián futnak ugyanazon jel komponensek, így például egy kimért beszéd cincogássá válhat, míg a lejátszás lassításával a frekvencia tartománybéli alak tömörödni látszik és a jel komponensek frekvenciája csökken, így a beszéd lassú dörmögéssé válik.

3.9.7. Komplex Csillapítási tétel (Theorem of Damping)

Tetszőleges $x(t)$ jel estén:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{x(t)e^{j\gamma t}\} = X(\omega - \gamma)$$

3.9.8. Dualitási tétel (Theorem of Duality)

Összehasonlítva a transzformáltakat és inverzeiket, már az előbbiek során is számos esetben felfedeztük, hogy egy folytonos jel transzformáltja, éppen az inverz transzformáltja annak a jelnek, amelyik a frekvenciatartományon megegyezik a kiindulási jellel.

Bár szavakban igen nehéz leírni ezt a tulajdonságot, amit dualitásnak hívnak, de egy egyszerű példán át könnyen látható:

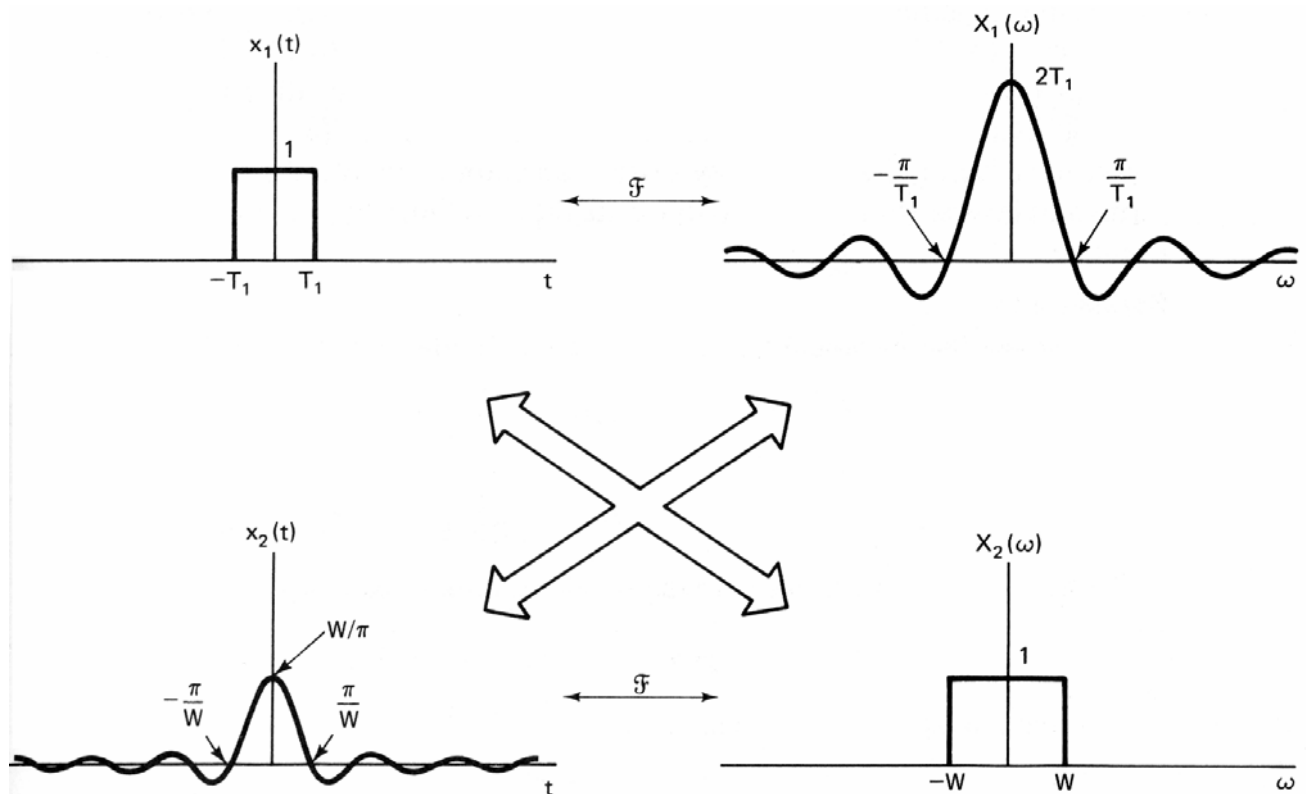
$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

$$X_1(\omega) = 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega}$$

Ugyanakkor:

$$x_2(t) = 2 \frac{\sin Wt}{\pi t}$$

$$X_2(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$



136. ábra A Fourier transzformáltak és a jelek közti dualitási összefüggés

A szimmetria mely e példa alapján nyilvánvaló kiterjed a többi Fourier transzformáltra is, mivel ha:

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{-vu} dv$$

jellemzi két függvény kapcsolatát akkor:

$$f(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$$

$$u = \omega$$

$$v = t$$

és

$$g(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$u = t$$

$$v = \omega$$

3.9.9. Parseval összefüggés (Parseval's Relation)

Ha $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$ akkor tetszőleges négyzetesen integrálható $x(t)$ függvényre igaz, hogy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Ezt az összefüggést, hívjuk Parseval összefüggésnek. A fenti egyenlet direkt módon levezethető csupán a Fourier transzformáció alkalmazásával:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega) X(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

A képletben szereplő $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ a villamosságtanból már jól ismert energia tartalmát jelenti a jelnek. A tétel értelmében a jel energia tartalma nem csak energia per egység idő alapján számolható, azaz $|x(t)|^2$ integráltjaként, hanem energia per egység frekvencia alapján is, ami $|X(\omega)|^2 / 2\pi$ integráltjaként áll elő a frekvencia tartományon. Ezen okból kifolyólag $|X(\omega)|^2$ -t gyakran a jel energia-sűrűségi spektrumának, röviden energia spektrumának nevezik.

Azonban egy periodikus jel energiáját ha a fenti képlet alapján számoljuk végtelen értéket kapunk. Ez nem is baj, hisz maga a jel bár minden időpontban véges energiát hordoz de mindezt végtelen sok időpontra összegezzük. Jobb lenne számunkra ha inkább egy periódus alatti energia tartalmat tudnánk kiszámolni. Ennek kiszámolása közben, triviális összefüggés kapható:

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

azaz periodikus jelekre a jel energia tartalma előáll a jel Fourier sorából, ahol a k -adik harmonikus energia tartalmát $|a_k|^2$ adja meg.

3.9.10. Konvolúció tétel (Theorem of Convolution)

A Fourier transzformáció egyik legszebb tulajdonsága az LTI rendszereken bemutatott konvolúció műveletre való hatása. Ahhoz, hogy e tulajdonságot a legjobban megértsük, induljunk ki egy LTI rendszerből aminek adott az input függvénye és az egység impulzus átviteli függvénye. Szeretnénk tehát megkapni a kimenetet, amely előáll a már jól ismert konvolúciós képlet szerint:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Tegyük fel, hogy nem akarjuk ilyen könnyen megúszni a dolgot és szeretnénk kiszámítani $y(t)$ Fourier transzformáltját is:

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x(\tau)h(t-\tau)] \cdot e^{-j\omega t} dt d\tau$$

Felcserélve a két integrációt:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} [h(t-\tau) \cdot e^{-j\omega t}] dt d\tau$$

Nos, a tolási tulajdonság értelmében:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} H(\omega) d\tau = H(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = H(\omega) X(\omega)$$

Ebből adódóan:

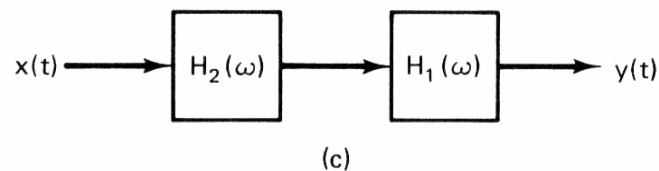
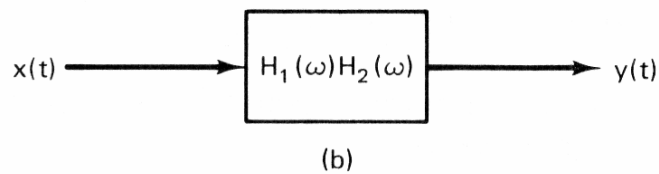
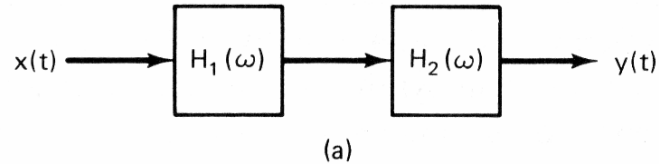
$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = H(\omega) X(\omega) = Y(\omega)$$

Ezen tulajdonság értelmében a konvolúció művelete a frekvencia tartományban egyszerű szorzássá válik, nagyban megkönnyítve a számolást. Így $H(\omega)$ ismeretében tetszőleges gerjesztés Fourier transzformáltjának ismeretében szorzással számolható a válasz transzformáltja, s abból inverz transzformációval a válasz időfüggvénye. Ha viszont ez igaz, akkor $H(\omega)$ ugyanúgy rendszer jellemző függvény mint $h(t)$. $H(\omega)$ -t ezentúl a rendszer frekvencia válasz függvényének, vagy más néven **frekvencia átviteli függvénynek** fogjuk nevezni. Tetszőleges LTI rendszer esetén a válasz és a bemenet Fourier transzformáltjainak hányadosaként megkaphatjuk az átviteli függvényt:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Természetesen nem minden LTI rendszernek létezik átviteli függvénye, mivel a $h(t)$ függvénynek meg kell felelnie Dirichlet három kritériumának, hogy Fourier transzformálható legyen.

Ennek a tulajdonságnak másik fontos következménye, hogy míg párhuzamosan kapcsolt rendszerek esetén a rész rendszerek frekvencia átviteli függvényei összeadódnak, addig soros esetben pedig összeszoróznak, így összetett rendszer esetén az eredő rendszer frekvencia átviteli függvénye sokkal könnyebben megkapható.



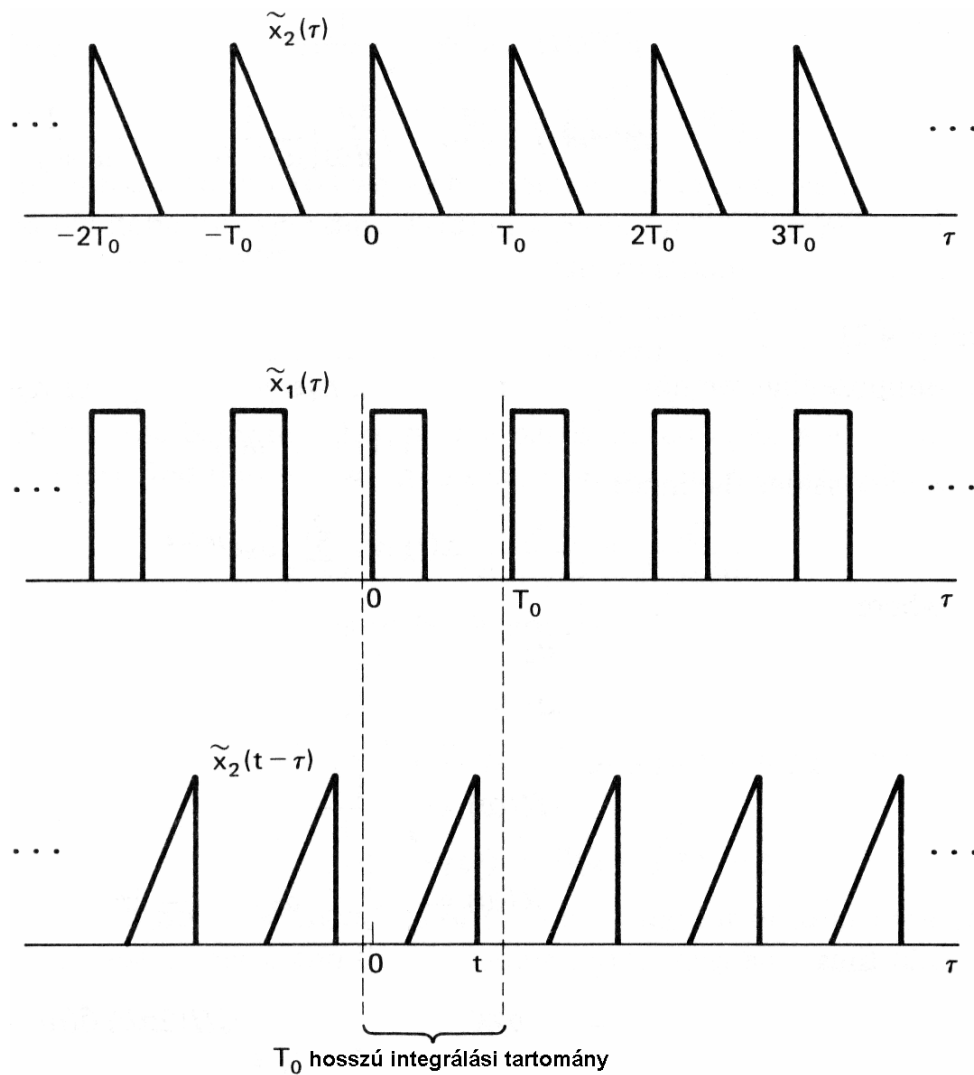
137. ábra Három teljesen ekvivalens LTI rendszer

Periodikus jelekre nézve is él a konvolúció tulajdonsága. Tudjuk, hogy a periodikus jel Fourier transzformáltja impulzusok véges sorozatával egyenlő, amelyek egymástól egyenlő távolságra helyezkednek el. Ha két ilyen transzformált szorzatát veszem, akkor az eredményként kapott transzformált is egyenlő távolságra lévő impulzusok véges sorozat lesz, ami periodikus jelet feltételez, sőt az alaphfrekvencia, azaz a távolság két szomszédos impulzus között, a két jel alaphfrekvenciájának maximuma lesz, így az eredményül kapott jel periódus ideje pedig a két periódus idő minimuma.

Azonban, ha az integrálási képlettel számolom ki két periodikus jel konvolúcióját akkor a végtelen nagyságú intervallum miatt az integrált nem fog konvergálni. Ezért ha a rendszer periodikus impulzus válasz függvénnyel rendelkezik, akkor nem stabilis, és emiatt frekvencia válasz függvénye sem létezik. Így érdemes egy kiegészítő műveletet bevezetni, mégpedig periodikus konvolúció néven, ahol két $\tilde{x}_1(t)$, $\tilde{x}_2(t)$, T_0 -al periodikus jel periodikus konvolúciója nem más mint:

$$\tilde{y}(t) = \int_{T_0} \tilde{x}_1(\tau) \tilde{x}_2(t - \tau) d\tau$$

Ha ezt a speciális esetet követvén két egyenlő periódus idővel rendelkező, $\tilde{x}_1(t)$, $\tilde{x}_2(t)$ jel konvolúcióját tekintjük:



138. ábra Két periodikus jel periodikus konvolúciója

Akkor elmondható hogy az eredmény Fourier együtthatói a következő képen alakulnak:

$$c_k = T_0 a_k b_k$$

ahol a_k az $\tilde{x}_1(t)$ jel, b_k pedig az $\tilde{x}_2(t)$ jel Fourier együtthatói.

3.9.11. Modulációs tulajdonság (The Modulation Property)

A konvolúciós tulajdonság értelmében az időtartománybeli konvolúció a frekvencia tartományban szorzásnak felel meg, ekkor azonban a dualitás tételének értelmében a frekvencia tartománybeli konvolúciónak az időtartományban szorzásként kell megjelenennie. Azaz:

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(\omega) * P(\omega)]$$

$$r(t) = s(t)p(t)$$

Ezen a tulajdonság, a konvolúciós tulajdonság következménye, és a mérnöki gyakorlatban gyakran kihasznált fogalom.

A jelfeldolgozás területén két folytonos idejű jel szorzatát amplitúdó modulációnak (AM) nevezik, mivel a jelenség felfogható úgy mintha az egyik jelet használjuk fel arra, hogy a másik jel amplitúdóját skálázzuk, változtassuk, így téve a vivő jelre az amplitúdó változása által információt.

Nagyon egyszerű és általánosan használt megoldás amikor szinuszoidális jelet használnak vivő jelként. Nézzünk erre most egy példát:

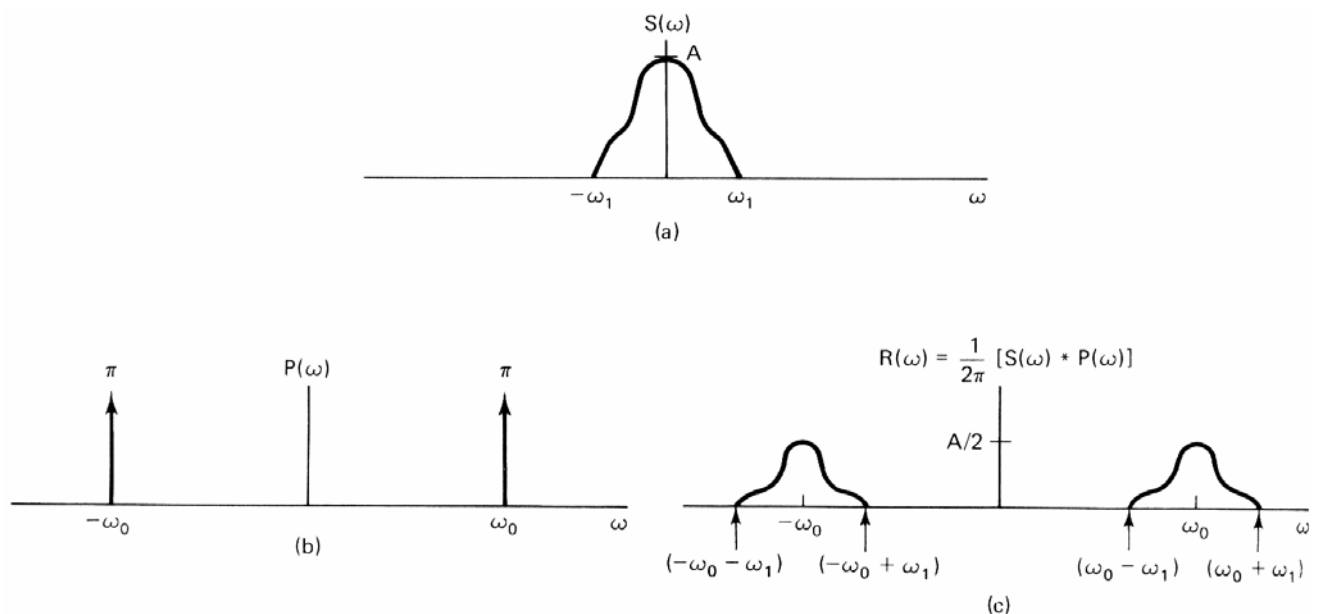
$$p(t) = \cos \omega_0 t$$

$$P(\omega) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

Legyen a vivő jelünk amire rámoduláljuk az átvinni kívánt jelünket:

$$r(t) = s(t)p(t)$$

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} S(\omega)P(\omega) = \frac{1}{2} S(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} S(\omega + \omega_0)$$



139. ábra A modulációs tulajdonság használata

Persze itt feltettük, hogy $\omega_0 > \omega_1$, mivel nem szeretnénk volna ha $S(\omega)$ nem nulla része egymásra lapolódott volna.

A modulációval és annak inverz műveletével majd a későbbiekben bővebben foglalkozunk.

3.10. A Fourier transzformált ábrázolása (Representation of the Fourier Transform)

A Fourier transzformáltak leírására matematikai függvények és műveletek álnak rendelkezésre azonban az ember, mivel alapvetően vizuális lény, nem képes csupán számokban és függvényekben gondolkodni, valahogy látnia, elképzelnie kell ezeknek a függvényeknek menetét, változásait. Ezért a szemléltetés igényéből fakadóan több ábrázolási módot is kifejlesztett, minddel más-más lényegét emelve ki a problémakörnek melyben vizsgálódunk. Ezek közül a leglényegesebbeket emeljük most ki, melyekkel a Fourier transzformáltak jól ábrázolhatóak:

3.10.1. Spektrum

Az előbbieken levezettük, hogy a rendszer kimenete előáll a következő féle képen:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

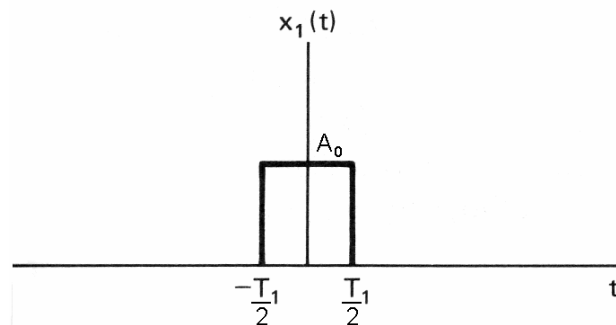
Ha most ezen komplex függvényeket felírjuk poláris alakban:

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)| \cdot |X(\omega)|$$

$$\varphi_Y(\omega) = \varphi_H(\omega) + \varphi_X(\omega)$$

Azaz jól láthatóan az amplitúdó változás független a fázistól és a fázis függvénye is független az amplitúdótól. Mivel a komplex függvényeket három dimenzióban tudjuk ábrázolni, de egy három dimenziós függvény nem sokat mond el a számunkra érdekes fázis és amplitúdó frekvencia függésről, ezért fontos őket külön-külön ábrázolni, ha már úgylátóan függetlenek egymástól.

Mutassuk be ezt egy példán, legyen adott az alábbi aperiodikus négyszög jel:



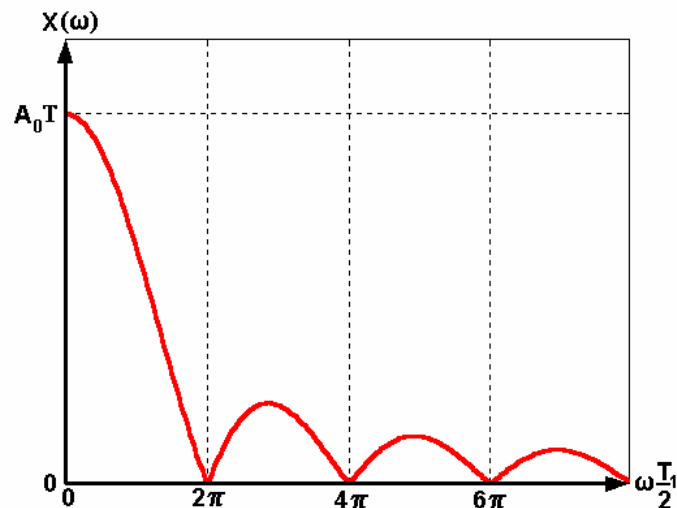
140. ábra Aperiodikus négyszögjel

Tudjuk, hogy ennek Fourier transzformáltja nem más mint:

$$X(\omega) = T_1 A_0 \frac{\sin\left(\omega \frac{T_1}{2}\right)}{\omega \frac{T_1}{2}}$$

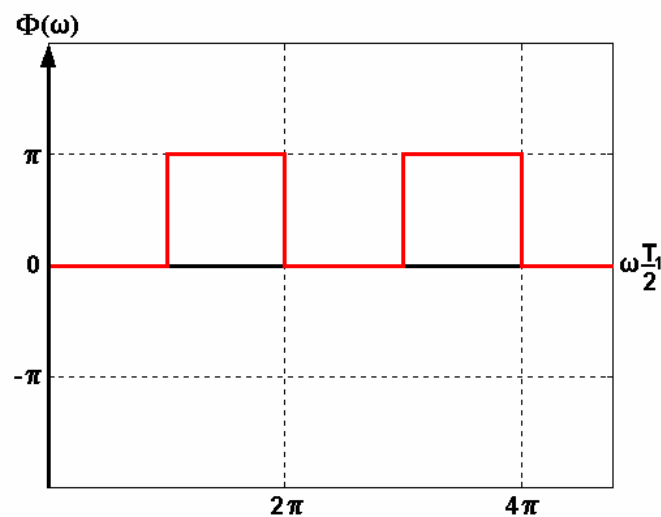
Ebből adódóan:

$$|X(\omega)| = T_1 A_0 \left| \sin_c \left(\omega \frac{T_1}{2} \right) \right|$$



141. ábra Az amplitúdó spektrum

$$\varphi_X(\omega) = k\pi, \quad (k-1)\frac{2\pi}{T} \leq \omega \leq k\frac{2\pi}{T}$$



142. ábra A fázis spektrum

mivel a szinusz hullám π -ként vált előjelet és akkor pontosan 90° -ot fordul a komplex vektor, azaz π radiánt.

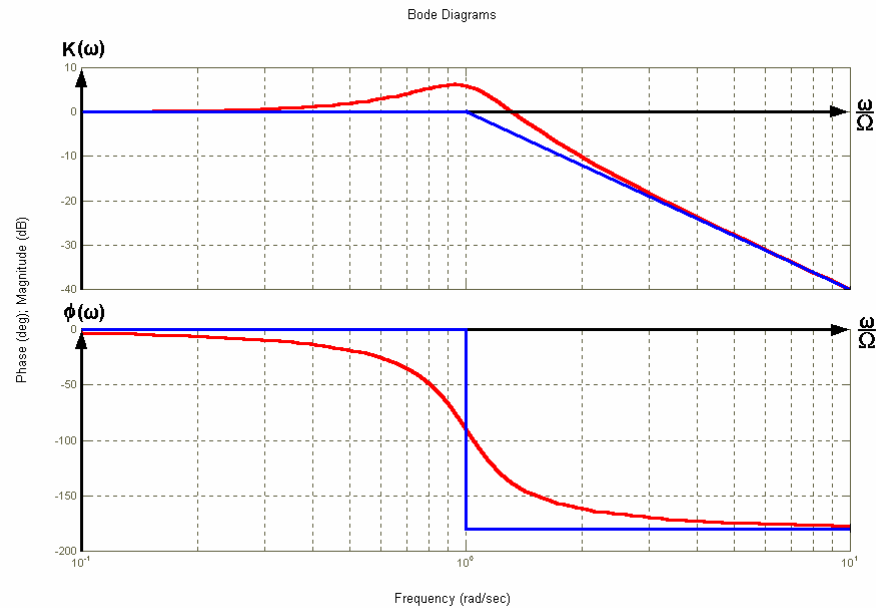
3.10.2. Bode

A fenti ábrázolással csupán az a baj hogy vele a frekvencia tartomány nagyon kis szeletét tudjuk ábrázolni, és ha olyan értékére van szükségünk az amplitúdónak ami a nullát jól közelíti akkor már bajban vagyunk, hisz a felbontásunk nem igazán jó. Azért, hogy nagyjából az egész tartományt jól lássuk és ezen jól szemlélni tudjuk a függvény viselkedését, logaritmizálnunk kell az amplitúdó diagrammunkat.

Ennek ábrázolását teszi lehetővé a Bode diagram ahol a frekvencia függvényeként ábrázoljuk:

$$K(\omega) = 20 \log_{10}(|X(\omega)|)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_X(\omega)$$

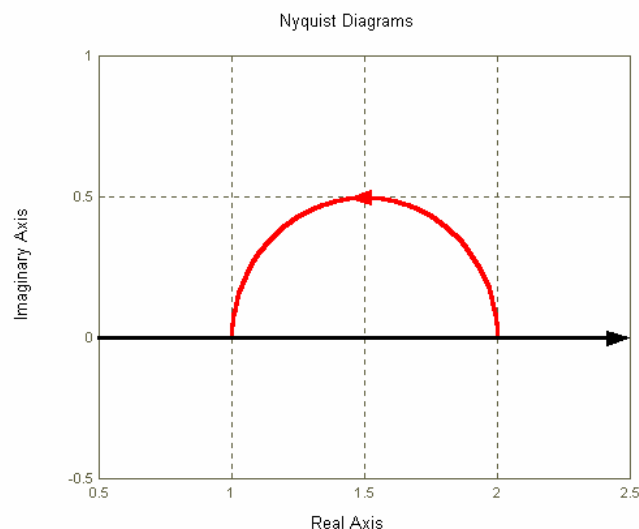


143. ábra Alul áteresztő szűrő Bode diagramja

A fenti ábrázolással bár jól szemléltethetőek a jelek, mégis igazán az átviteli függvények ábrázolása által, a rendszer viselkedését jellemzik a frekvencia tartományban igen szemléletesen. Ha például a fentiekben ábrázolt példa egy rendszer lenne, akkor az jól láthatóan kis frekvenciákra szinte ugyan olyan amplitúdóval vinné át a jelet, míg nagy frekvenciás esetre pedig az amplitúdót olyan kicsiny részére csökkentené, ami elhanyagolható, pl: -80dB ami már egy 1V amplitúdójú jelnél 100μV -ot jelent.

3.10.3. Nyquist

A Nyquist diagram a komplex függvény által minden frekvenciára meghatározott vektor útját írja le egy kétdimenziós koordináta rendszerben. Használhatósága nem igazán jelentős inkább érdekes.



144. ábra Nyquist diagram

3.11. Differenciál egyenletek reprezentációja és kapcsolata a Fourier transzformálttal (Representation and Calculation of the Differential Equations with their Fourier Transform)

Legyen adott egy LTI rendszerünk az alábbi differenciál egyenlet által:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

A kérdés az, hogy a fenti rendszer frekvencia válaszát milyen módon tudnánk meghatározni.

Tegyük fel, hogy mind a bemenet, mind a kimenet Fourier transzformálható, ekkor:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} &= \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \\ \sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} &= \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \\ \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(\omega) &= \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(\omega) \\ H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \end{aligned}$$

Nos jól látható hogy $H(\omega)$ racionális, polinomiális függvénye $j\omega$ -nak, és $H(\omega)$ ismerete esetén könnyen kiszámítható a rendszer válasza, azaz a differenciál egyenlet megoldása. A megoldáshoz jól látható, hogy nem kellene kiindulási feltételek, viszont ismerni kell a rendszer bemenetét a teljes $(-\infty, +\infty)$ időtartományon, ami már nem egy egyszerű feltétel. A rendszer teljes bemenetének az ismerete pontosan azért kell, hogy azokat az alapvető információkat megkapjuk a rendszer múltjáról, amit eddig a kezdeti feltételek illetve a nyugalmi állapot léte jelentett.

Mivel bármely polinom felbontható elsőfokú polinomok szorzatára, ezért a frekvencia átviteli függvény felírható egy másik alakban:

$$H(\omega) = \frac{b_M \prod_{k=1}^M (\lambda_k + j\omega)}{a_M \prod_{k=1}^N (v_k + j\omega)}$$

ahol λ_k és v_k komplex gyökei a számlálónak illetve a nevezőnek.

Ez az alak tisztán szemlélteti az átvitelt leíró differenciál egyenlet viselkedését, hisz ebből már meghatározható az átvitel Bode diagramja.

4. Diszkrét rendszerek és jelek Fourier analízise (Fourier Analysis for Discrete-Time Signals and Systems)

A folytonos eset mellett természetesen nem hagyhatjuk figyelmen kívül a diszkrét esetet sem, s ahogy az előbbiek során láthattuk, hogy elég sok a párhuzam a két eset között, nem lesz ez másként most sem, a Fourier analízis szempontjából sem.

4.1. Diszkrét LTI rendszerek válasza komplex exponenciálisokra (*Response of Discrete-Time LTI Systems to Complex Exponentials*)

Amit a folytonos esetben bizonygattuk itt is igaz: a komplex exponenciális függvények sajátérték függvényei az LTI rendszereknek, azaz diszkrét esetben is létezik a rendszer sajátértéke, s rajta keresztül jutunk el majd a transzformált fogalmához.

Tekintsünk egy LTI rendszert amelynek impulzus válasz függvénye a $h[n]$ függvény és a bemenetére az alábbi jelet adjuk:

$$x[n] = z^n$$

Ahol z egy komplex szám. Ekkor a teljes rendszer kimenete előáll egy konvolúció által:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k}$$

$$y[n] = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

Nos ebből a kis példából máris látható, hogy $x[n]$ egy komplex exponenciális függvény és az LTI rendszernek ezen komplex exponenciálisra adott válasza szintén ugyanez a komplex exponenciális függvény, csak egy konstans értékkel, a rendszer saját értékével van megszorozva, ami z értékétől függ.

Ezért írhatjuk, hogy:

$$y[n] = H(z)z^n$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k}$$

Ahol tehát a z^n sajátérték függvényéhez tartozó $H(z)$ -t a rendszer saját értékének nevezzük.

Általánosságban véve elmondható, hogy a szuperpozíció tételével kiegészítve ez a tulajdonság a jelek rendkívül kényelmes reprezentációjához vezet, ami által a rendszer válasz függvénye könnyen meghatározható, számolható.

Ha most egy komplex exponenciálisok lineáris kombinációját tekintjük inputként:

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n$$

Akkor a rendszer válasza a szuperpozíció elve miatt:

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

Más szóval a rendszer kimenete reprezentálható a bemeneten lévő lineáris kombinációt alkotó jelekre külön-külön adott válaszok lineáris

kombinációjaként, amik nem lesznek mások, mint a vizsgált exponenciális függvények szorozva az ő sajátértékeikkel.

Ahogy az előző fejezetben tettük most itt is csupán a tisztán képzetes frekvenciájú komplex exponenciálisokat fogjuk vizsgálni, így az alábbi alakú jeleket tekintjük majd vizsgáló jeleinknek:

$$e^{j\Omega n}$$

ahol

$$e^{j\Omega n} = z^n, \quad |z| = 1$$

Ezek segítségével fogunk itt is eljutni a Fourier transzformálthoz.

4.2. Diszkrét periodikus függvények reprezentációja diszkrét Fourier sorokkal (Representation of Discrete-Time Periodic Signals with Discrete-Time Fourier Series)

Ahogy az előzőekben tárgyaltuk, egy diszkrét jelet akkor nevezünk periodikusnak ha létezik olyan N egész szám amelyre:

$$x[n] = x[n + N], \quad \forall n - \text{re}$$

Az előzőekben szintén vizsgáltuk a komplex exponenciálisokat és láthattuk, hogy a $e^{j(2\pi/N)n}$ is periodikus függvény, mégpedig N alapperiódus idővel.

Sőt az összes N -el periodikus függvények halmaza megadható:

$$\Phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

alakban. Ezen függvénynek mindegyikének a frekvenciája ugyanazon $2\pi/N$ alapprofrendiának a többszöröse és ezért harmonikusan kapcsolak.

Egy nagyon fontos különbség azonban a diszkrét és a folytonos harmonikus kapcsolt függvények halmaza között az, hogy míg folytonos esetben mindegyik ilyen függvény különbözik egymástól, addig diszkrét időben csupán N különböző függvényünk van mivel a diszkrét függvények frekvenciája csupán a $[0, 2\pi]$ intervallumon belül eredményez új függvényt, ezért ha két függvény frekvenciája egymástól csupán 2π egész számú többszörössel különbözik akkor a két függvény megegyezik. Így ez a komplex exponenciálisokra is vonatkozik:

$$e^{j(\Omega + 2\pi r)n} = e^{j\Omega n} \cdot e^{2\pi r n} = e^{j\Omega n}$$

Ennek direkt következménye, hogy

$$\begin{aligned} \Phi_0[n] &= \Phi_N[n] \\ \Phi_1[n] &= \Phi_{N+1}[n] \\ \Phi_k[n] &= \Phi_{r \cdot N + k}[n] \end{aligned}$$

A következőekben általánosabb periodikus jeleket fogunk vizsgálni, sőt bizonyítjuk majd diszkrét időben is, hogy a periodikus jelek előállnak harmonikusan kapcsolt komplex exponenciálisok lineáris kombinációjaként. Tekintsünk most egy ilyen lineáris kombinációját a harmonikusan kapcsolt exponenciálisoknak:

$$x[n] = \sum_k a_k \Phi_k[n] = \sum_k a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

Mivel a harmonikusok közül csupán N különböző létezik ezért összevonható a fenti összegzés csupán ezen harmonikusok összegére:

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k \Phi_k[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

Így igen hatékony reprezentációját kaphatjuk meg a jeleknek az által, hogy csupán N együttható kiszámolásával a jel harmonikus függvények szuperpozíciójából előáll. Ezt a felbontást fogjuk a későbbiekben a diszkrét periodikus jelek Fourier sorának nevezni, a_k -kat pedig spektrális együtthatóknak.

Most már csak ezen együtthatókat kéne valamilyen módon kiszámítani. Ehhez tekintsünk egy példát. Legyen adott egy $x[n]$, N -el periodikus jel, aminek spektrális együtthatóit szeretnénk kiszámítani. A kérdés rögtön átfogalmazható: képesek vagyunk-e egy N egyenletből álló egyenletrendszer megoldását meghatározni. Ugyanis a jelre nézve igaz, hogy:

$$\begin{aligned} x[0] &= \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k \\ x[1] &= \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{j(2\pi/N)n} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x[N-1] &= \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk(N-1)(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

Mivel mindkét oldal periodikus mégpedig N -el, ezért a $x[N]$ -re felírt egyenlet már megegyezne az $x[0]$ -ra felírttal. Nos, adott N egyenletünk, N db a_k ismeretlen együtthatóval. Bizonyítható, hogy a fenti egyenletrendszer lineárisan független egyenletekből áll, és $x[n]$ adott jel értékek esetén mindegyik a_k ismeretlen meghatározható.

Bár a fenti egyenletrendszer megoldásaiként előállnak az együtthatók, a folytonos esethez hasonló zárt formulával is számolhatóak. Ennek levezetéséhez tekintsük először az alábbi tulajdonságot:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Amit a fenti egyenlőség sugall az nem más mint, hogy ha egy komplex exponenciális függvény értékeit összegezzük egy periódus elejéig akkor nullát kapunk kivéve akkor ha a komplex exponenciális függvény konstans. Így a fenti egyenlet a folytonos esetből már ismert

$$\int_0^T e^{jk(2\pi/T)t} dt = \begin{cases} T, & k = 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

párja diszkrét esetben.

Nos az egyenletet azonban vizsgálhatjuk oly módon is mintha az egy véges szám geometriai sora lenne, azaz akkor felírható az alábbi alakban:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n$$

Ahol α képviseli most a komplex exponenciális képletével adott komplex számot.

$$\alpha = e^{jk(2\pi/N)}$$

Azonban a geometria sornak ismerjük az összegképletét, így:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N, & \alpha = 1 \\ \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

És mi azzal is tisztában vagyunk, hogy $e^{jk(2\pi/N)} = 1$ ha k értéke N többszöröse, ezért írhatjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{1 - e^{jk(2\pi/N)N}}{1 - e^{jk(2\pi/N)}}, & \text{egyébként} \end{cases}$$

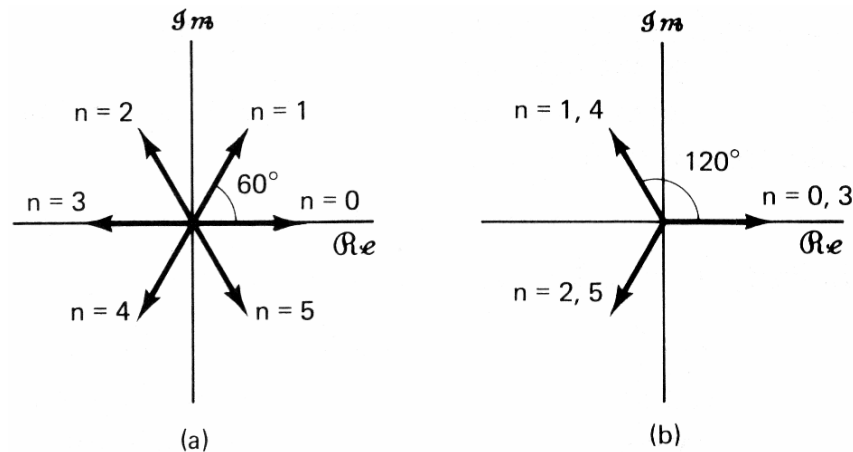
De az is tudjuk, hogy $e^{jk(2\pi/N)N} = e^{jk2\pi} = 1$ tehát beláttuk, hogy:

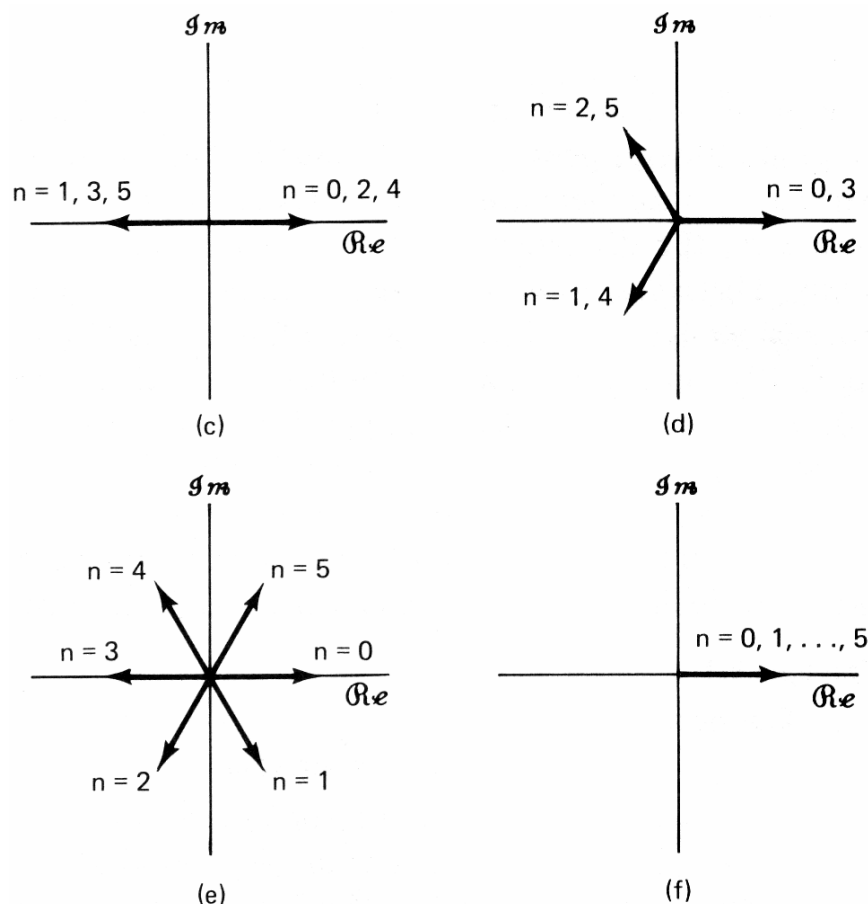
$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

A fenti egyenletet grafikusán is szemléltethetjük. Ezt tettük meg a lentí ábrán. Az itt szemléltetett $N=6$ esetben a komplex számokat vektorokként ábrázoltuk egy 2 dimenziós koordináta rendszerben.

$$\Phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}$$

Mivel a komplex számok abszolút értéke minden esetben 1 csupán a fázisuk változik így szimmetrikus vektor ábrákat kapunk, amikről jól látható hogyha $k = 0, 6, 12, \dots$ akkor, mivel csupán egy vektorunk van, a vektorok összege nem nulla, azonban bármely más esetben, ha összegezzük a vektorokat, akkor nullát kapunk.





145. ábra $A \Phi_k[n] = e^{jk(2\pi/6)n}$ komplex exponenciális szekvencia értékei egy periódus alatt (a) $k = 1$; (b) $k = 2$; (c) $k = 3$; (d) $k = 5$; (e) $k = 6$;

Nos az is szembeötlő, hogy n változásával a vektor körbeforog, azokat a pozíciókat véve fel amelyeket a „ k ” választásunk értelmében lehetővé tesz. Ez által változik a vektor valós részének a nagysága és tűnik hullámzó periodikus jelnek a vizsgált exponenciális.

Most vizsgáljuk meg a Fourier sorral való reprezentációját a komplex exponenciálisoknak.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

Szorozzuk mindkét oldalt $e^{-jr(2\pi/N)n}$ és összegezzük őket egy N tagú szummával:

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n}$$

Felcserélve a két összegzést:

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n}$$

Azonban tudjuk hogy a jobb oldal nulla kivéve ha $(k-r)$ értéke N többszörösével egyenlő, de mivel ugyanazon N elemű intervallumból választjuk mindkettő értékét, ezért:

$$\sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k=r \\ 0, & k \neq r \end{cases}$$

Így a jobb oldal redukálódik:

$$\sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} = Na_r$$

Ezért zárt formulával meghatározhatóak a Fourier együtthatók az alábbi alakban:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Ezek az egyenletek igen fontos szerepet játszanak a diszkrét periodikus jelek Fourier analízisében, ahol az első egyenletet a szintézis, míg a második egyenletet az analízis egyenletének nevezzük.

A Fourier reprezentáció a_k együtthatóit sokszor az $x[n]$ diszkrét jel spektrális együtthatóinak is nevezik, mert ezek az együtthatók fejezik ki az összegzésben szereplő N darab harmonikusan kapcsolt komplex exponenciálisok súlyát. Ezért felírhatjuk mondjuk k -nak 0-tól $N-1$ -ig változó értékeire, hogy:

$$x[n] = a_0 \Phi_0[n] + a_1 \Phi_1[n] + \dots + a_{N-1} \Phi_{N-1}[n]$$

Azonban, ugyanígy felírhatjuk k -nak 1-től, N -ig változó értékeire:

$$x[n] = a_1 \Phi_1[n] + a_2 \Phi_2[n] + \dots + a_N \Phi_N[n]$$

Azt már tudjuk, hogy $\Phi_0[n] = \Phi_N[n]$, no de ebből meg az következik, a fenti egyenlet szerint, hogy $a_k = a_{k+N}$. Ugyanígy változtatva k intervallumát belátható, hogy:

$$a_k = a_{k+N}$$

Így a_k értékei periodikusan ismétlődnek, mégpedig N periódusidővel. Ez különben egyenes következménye annak, hogy a harmonikusan kapcsolt komplex exponenciálisok is periodikusak N -el, k -ra nézve. Ezért az N darab spektrális együtthatók ismerete elég ahhoz, hogy a diszkrét periodikus jelet leírtnak tekintsünk.

Tekintsük most egy pár példát:

4.1 Példa:

Tekintsük a

$$x[n] = \sin \Omega_0 n$$

diszkrét jelet. Három esetet különböztetünk meg attól függően, hogy $2\pi/\Omega_0$ milyen számok köréből kerül ki:

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = \begin{cases} \text{egész szám} \Rightarrow \text{a jel periodikus} \\ \text{racionális szám} \Rightarrow \text{a jel periodikus} \\ \text{irracionális szám} \Rightarrow \text{a jel nem periodikus} \end{cases}$$

Első eset:

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = N$$

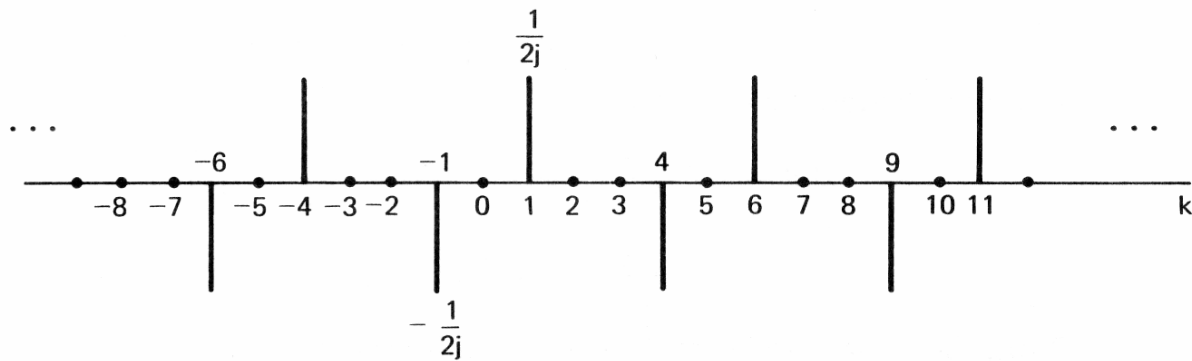
Ahol N egész szám. Ekkor $x[n]$ periodikus jel, mégpedig N periódus idővel. A folytonos esetben használt módszer most itt is használható azaz a jel felbontható két exponenciális összegére az Euler formula szerint:

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/N)n}$$

Innen már egyértelmű hogy:

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

A többi $N - 2$ együttható pedig zérus. Ahogy az előbbieken megemlítettük ezek az együtthatók periodikusan ismétlődnek azaz például $N = 5$ esetén az alábbi formában ábrázolhatjuk a_k -kat:



146. ábra Az $x[n] = \sin(2\pi/5)n$ jel Fourier együtthatói

Második eset:

Legyen most

$$\frac{2\pi}{\Omega_0} = N = \frac{N_0}{m}$$

$$\frac{2\pi m}{N_0} = \Omega_0$$

N racionális, azaz két egész szám hányadosa. Tegyük fel, hogy ez egy redukált alak, azaz N_0 és m relatív prím számok. Tudjuk az előző fejezetekből, hogy a vizsgált $x[n]$ jel alapperiódus ideje N_0 -al egyenlő. Ezért $x[n]$ ismét felírható két komplex exponenciálisok összegére:

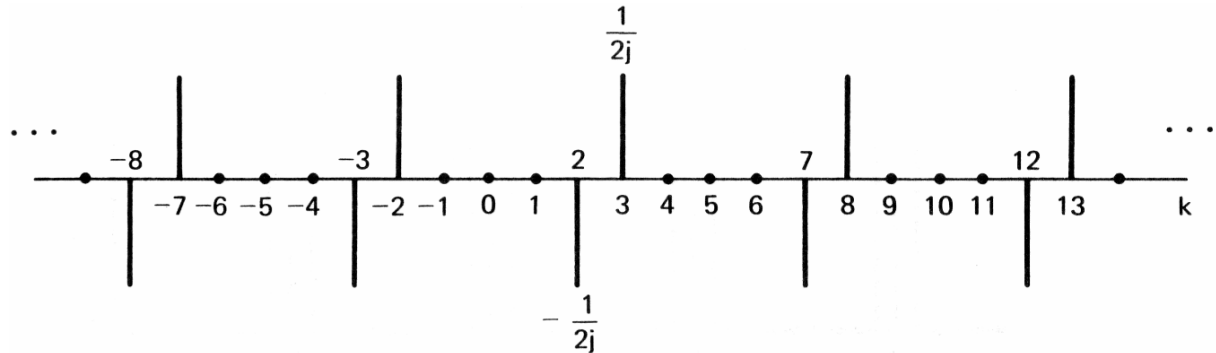
$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jm(2\pi/N_0)n} - \frac{1}{2j} e^{-jm(2\pi/N_0)n}$$

Amiből megint egyértelműen következik, hogy:

$$a_m = \frac{1}{2j}, \quad a_{-m} = -\frac{1}{2j}$$

és a többi együttható az N tagú intervallumon nulla.

Az együtthatókat ábrázolva $m = 3$ és $N_0 = 5$ esetén:



147. ábra Az $x[n] = \sin 3 \cdot (2\pi/5)n$ jel Fourier együtthatói

Harmadik eset:

A jel nem periodikus így Fourier sora sem létezik.

4.2 Példa:

Tekintsük a

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

jelet.

$x[n]$ periodikus N periodus idővel, és felbontható exponenciálisok összegére ismét az Euler formula segítségével.

$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \frac{1}{2j} \left[e^{j(2\pi/N)n} - e^{-j(2\pi/N)n} \right] + \frac{3}{2} \left[e^{j(2\pi/N)n} - e^{-j(2\pi/N)n} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[e^{j(4\pi/N + \pi/2)n} - e^{-j(4\pi/N + \pi/2)n} \right] \end{aligned}$$

Összevonva kapjuk, hogy:

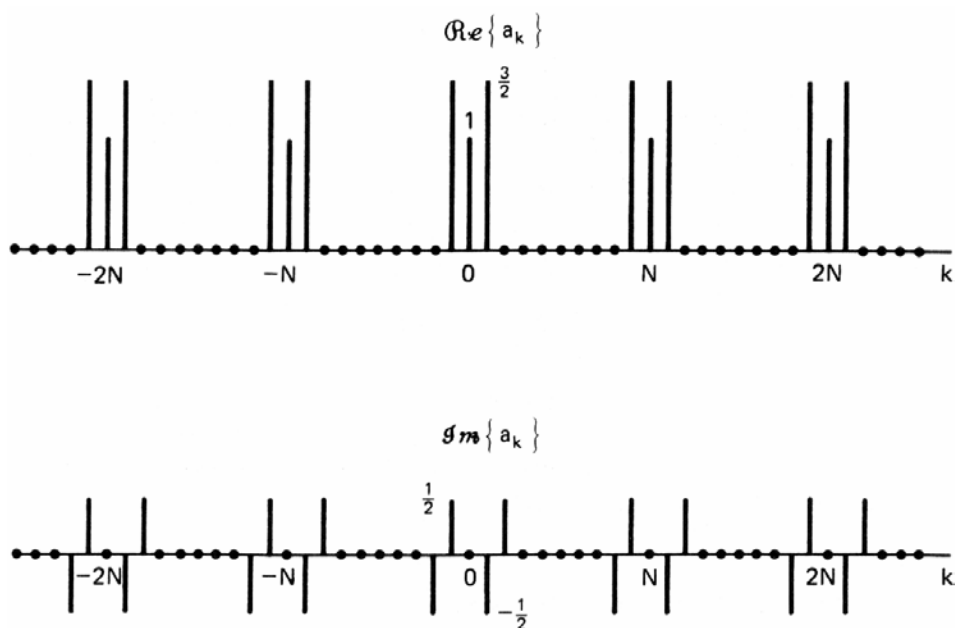
$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j} \right) e^{j(2\pi/N)n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j} \right) e^{-j(2\pi/N)n} + \\ &+ \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/2} \right) e^{j2(2\pi/N)n} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/2} \right) e^{-j2(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

Így:

$$a_0 = 1$$

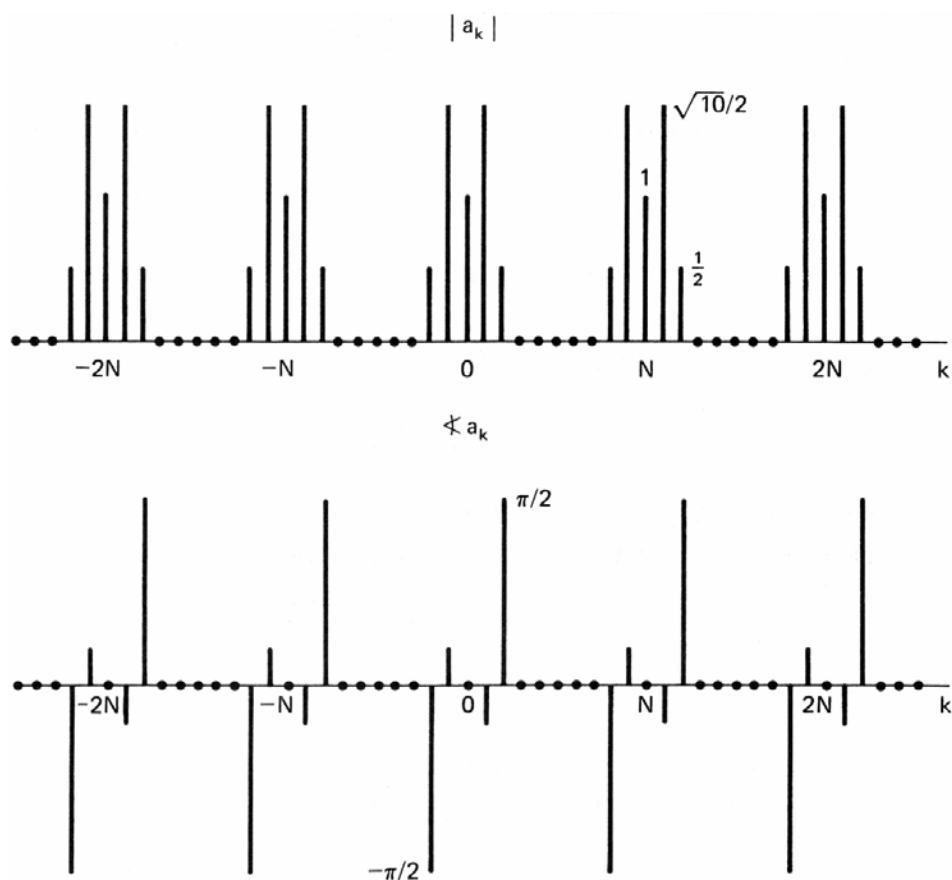
$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j & a_{-1} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j \\ a_2 &= \frac{1}{2}j & a_{-2} &= -\frac{1}{2}j \end{aligned}$$

A spektrális együtthatók valós és képzetes részét külön-külön ábráztuk:



148. ábra A példában szereplő jel Fourier együtthatóinak képzetes és valós része

Ha pedig a jel amplitúdóját és fázisát nézzük akkor $N=10$ esetén az alábbi diagrammot kapjuk:



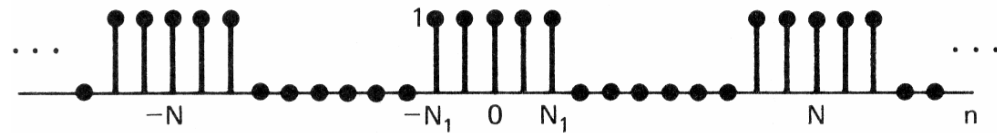
149. ábra A példában szereplő jel Fourier együtthatóinak amplitúdó és fázis spektruma

Jól látható, hogy ezen példában $a_{-k} = a_k^*$, k bármely értékére. Valójában ez a tulajdonsága az együtthatóknak bármely valós jelre fennáll. Ezen tulajdonság

teljes mértékben azonos azzal, amit már a Fourier sorokkal kapcsolatban folytonos esetben megemlítettünk.

4.3 Példa:

Nézzük most visszatérő példánkat csak most diszkrét időben:



150. ábra Periodikus diszkrét négyszögjel

A fenti diszkrét periodikus négyszögjel periodikus N alapperiódus idővel. Ennek a jelnek szeretnénk most meghatározni a Fourier sorát. Felírva az analitikus egyenletünket kapjuk, hogy:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Azonban a jel szimmetriája miatt, ha $m = n + N_1$, akkor:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m}$$

Az összegzés $2N_1 + 1$ tagot tartalmaz, amit geometriai sorként értelmezve kifejezhető az alábbi alakban:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \left(\frac{1 - e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(2\pi/N)(N_1-N_1+1/2)} \left[e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N} \right]}{e^{-jk(2\pi/2N)} \left[e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)} \right]} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin[2\pi k(N_1 + 1/2)/N]}{\sin(2\pi k/N)}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{aligned}$$

Ellenkező esetben:

$$a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

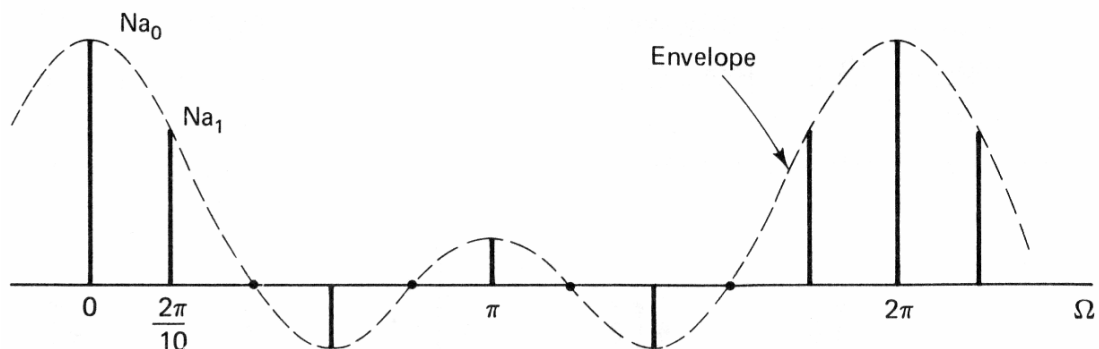
Kompaktabb formába átírva:

$$Na_k = \frac{\sin[2(N_1 + 1/2)\Omega/2]}{\sin(\Omega/2)} \Big|_{\Omega=2\pi k/N}$$

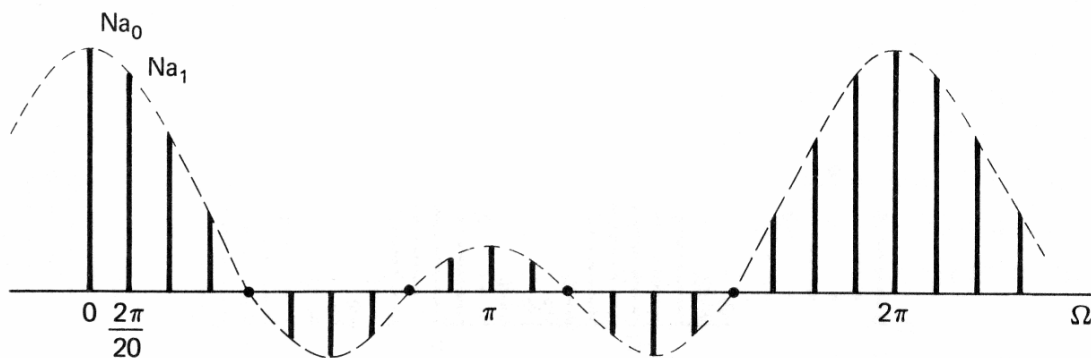
Ha most Na_k értékeit nézzük egyre nagyobb N -ek esetén úgy, hogy N_1 fix marad, akkor könnyen látható hogy az a_k értékek egyre sűrűbb mintavételezései lesznek a

$$\frac{\sin \beta x}{\sin x}$$

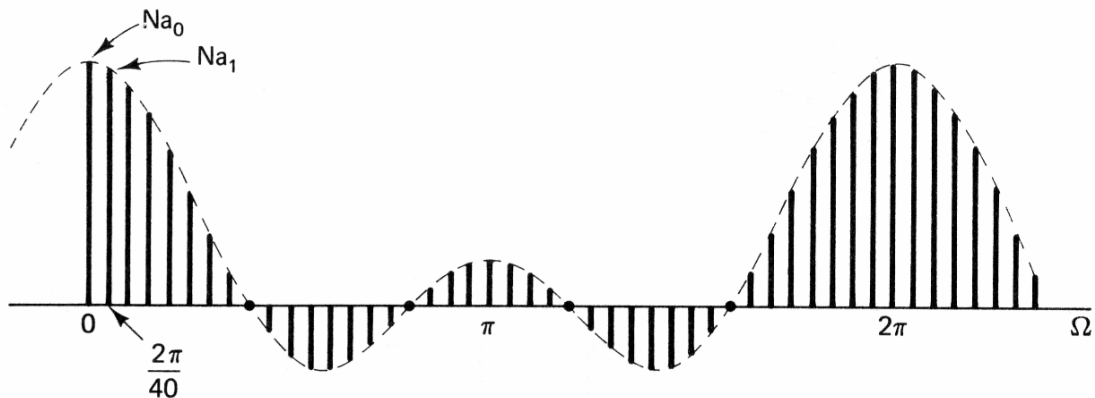
függvénynek. Így ha visszatekintünk a folytonos esetre, ott a sinc függvényt kaptuk eredményül, így annak diszkrét megfelelője, mivel periodikus kell hogy legyen, a $\sin/\sin$ függvény.



(a)



(b)



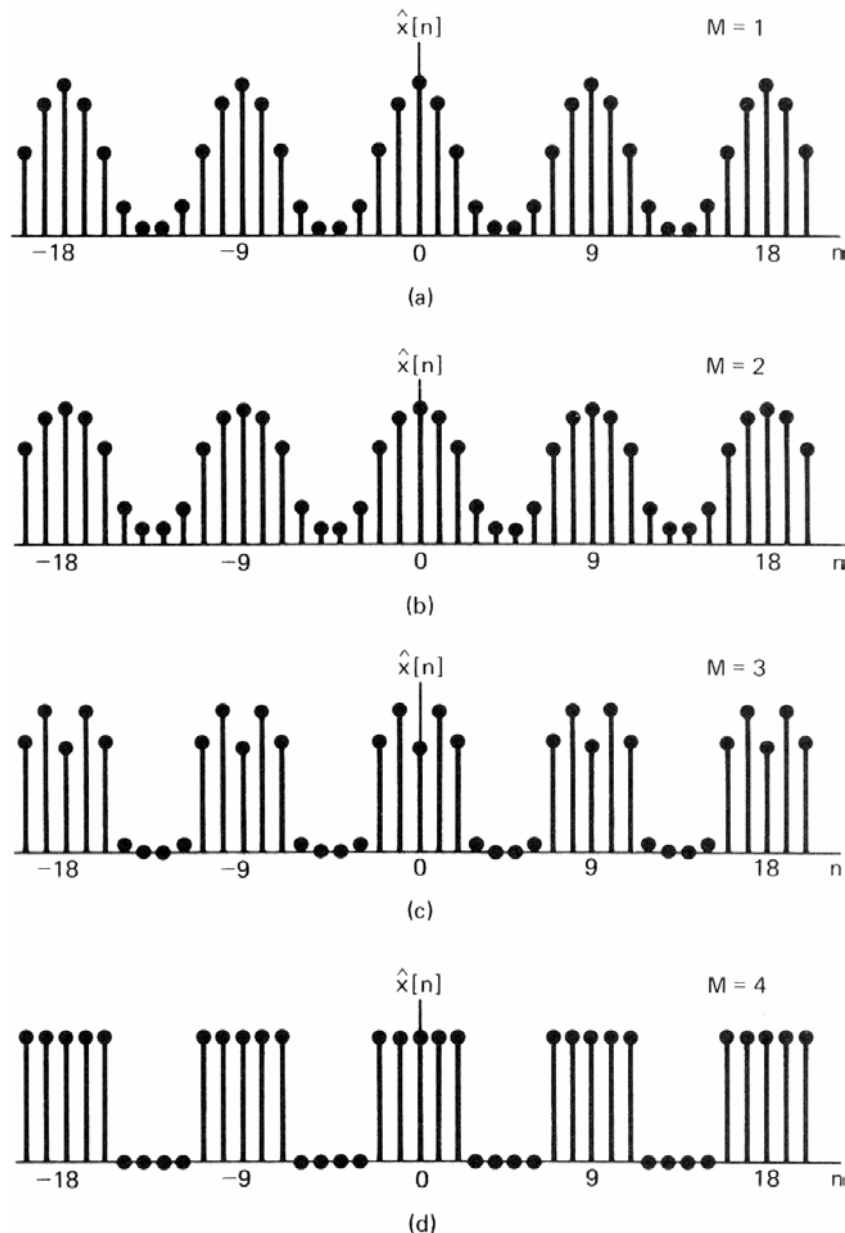
(c)

151. ábra A periodikus diszkrét négyzögjel Fourier együtthatói
 $2N_1 + 1 = 5$, (a) $N = 10$; (b) $N = 20$; (c) $N = 40$ esetben

Ha a Fourier sorok konvergenciáját vizsgáljuk, ahogy azt tettük folytonos esetben, meglepő következtetést vonhatunk le. A Fourier felbontás diszkrét esetben mindig konvergens és a Gibbs jelenség itt nem érvényesül. Ennek igazolására tekintsünk egy $x[n]$ periodikus négyzög jelet amely $N = 9$ -el periodikus és $2N_1 + 1 = 5$. Határozzunk meg M darab együtthatót és ezekből próbáljuk meg visszaállítani a jelet. Ekkor kapjuk $x[n]$ közelítésére a:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-M}^M a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

Különböző M -ekre vizsgálva:



152. ábra Az eredeti négyzögjel közelítése
(a) $M = 1$; (b) $M = 2$; (c) $M = 3$; (d) $M = 4$ esetben

Ahol jól látható, hogy $M = 4$ esetén már visszakaptuk teljesen a kiindulási jelünket és a Gibbs jelenségnek nyomát sem láttuk. Az eltérés valódi oka azonban eleve bent foglaltatik a felbontás elvében, ugyanis folytonos esetben mindig végtelen sok pontot képeztünk le véges sok együttható által képviselt információhalmazba a Fourier sorba fejtés során, ezért azon pontokban ahol a folytonosság csorbát szenvedett, előjöttek a leképzés hibái a Gibbs jelenség formájában, illetve a véges sok információ által csupán közelítését tudtuk megadni a jelnek, mely egyes időpillanatokban drasztikusan is különbözhetett az eredetitől. Diszkrét időben viszont már eleve csupán véges sok pont adott, amelyet véges sok együtthatóval, azaz információval reprezentálunk, így ha az

információk száma meghalad egy bizonyos értéket, amely természetesen jel függő, akkor a jel teljes mértékben előáll. Az hogy mennyi együttthatóra van szükségünk nagymértékben a jel periodicitásának a függvénye. Minél inkább szimmetrikus a jelünk annál kevesebb együtttható határozza azt meg maradéktalanul mivel annál inkább periodikus, s a legrosszabb, leginkább szimmetria nélküli jel is meghatározható legfeljebb az alapperiódus idejének megfelelő számú együttthatóval. Ezért ahhoz, hogy egy jelet pontosan le tudjunk írni pontosan az alapperiódussal egyenlő számú együttthatóra van szükségünk. Így ha N páratlan akkor $M = (N - 1) / 2$ és a szintézis egyenlet alapján:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-M}^M a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

Ha pedig N páros akkor $M = N / 2$ és

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-M+1}^M a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

Ugyan csak N tagú összeget eredményez.

Folytonos esetben ismert tulajdonságát az LTI rendszereknek itt is vizsgálhatjuk:

Ha tudjuk, hogy egy LTI rendszer bemenete periodikus N -el akkor minden okunk meg van feltételezni, hogy kimenete is az lesz. Gondoljunk csak arra, hogy az LTI rendszer komplex exponenciálisokat ugyanazon exponenciálisba viszi át csupán egy konstanssal megszorozván a jelet. Ez a konstans minden frekvencia értékre más és más, ezen konstansok összességét nevezzük a rendszer frekvencia átviteli függvényének. Tehát ha a jelünk periodikus, azt felírhatjuk Fourier sorba s az abban szereplő exponenciálisokra külön-külön számolva a választ kapjuk a kimeneten szuperpozíció segítségével a teljes periodikus jelre a választ. Így az LTI rendszer $h[n]$ egység impulzus átviteli függvényének ismeretében írhatjuk, hogy ha

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

akkor

$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{jk(2\pi/N)n}$$

ahol

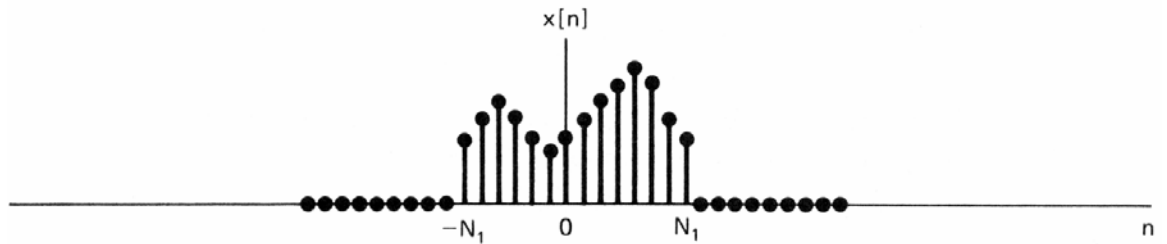
$$H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

4.3. Diszkrét aperiodikus jelek reprezentációja diszkrét Fourier transzformálttal (Representation of Discrete Aperiodic Signals with their Discrete Fourier Transform)

Az előzőekben láthattuk, hogy a diszkrét periodikus jelek spektrális együttthatói a felbontás nagysága szerint egyre finomabb mintavételezései voltak egyazon burkoló függvénynek, amely megfigyelést már a folytonos esetben is észrevettünk, s innen származott az ötlet, hogy az aperiodikus jel reprezentációját

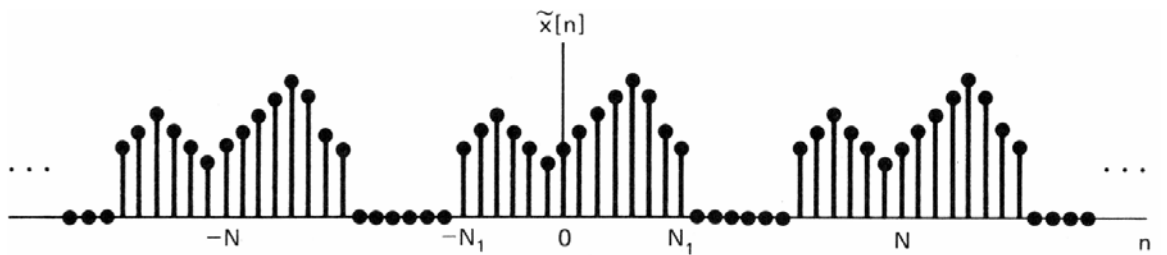
a belőle konstruált periodikus jel segítségével állítsuk elő. Nos, induljunk el ezen az úton diszkrét esetben is.

Legyen adott egy véges idejű aperiodikus diszkrét $x[n]$ jelünk:



153. ábra Véges idejű diszkrét aperiodikus jel

Mivel a jelünk véges ezért létezik olyan N_1 egész szám amelyre igaz, hogy $x[n] = 0$ ha $|n| > N_1$. Ebből az aperiodikus jelből konstruáljunk most egy periodikus $\tilde{x}[n]$ jelet, ahol egy periódus pontosan az $x[n]$ jellel egyenlő.



154. ábra Az aperiodikus jelből konstruált periodikus jel

Ahogy a jel periódus idejét N -et egyre nagyobbra növeljük, azaz ha $N \rightarrow \infty$ akkor $\tilde{x}[n] = x[n]$.

Nézzük most $\tilde{x}[n]$ Fourier sorát.

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Mivel $\tilde{x}[n] = x[n]$ egy periódus elejéig ami magába foglalja a $|n| \leq N_1$ intervallumot is. Ezért elég erre a periódusra vonatkozó összegzést a $|n| \leq N_1$ intervallumra korlátozni, hisz azon kívül a jel értéke úgyszólván zérus. Azonban a fentieket kihasználva ekkor azt kapjuk, hogy:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Ha most az együtthatók által meghatározott $N a_k$ értékek burkoló görbét $X(\Omega)$ -val jelöljük a továbbiakban, akkor:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

$$Na_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \Big|_{\Omega=k(2\pi/N)}$$

Ebből a görbéből előállnak az együtthatók:

$$a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0) \Big|_{\Omega_0=(2\pi/N)}$$

Ahol Ω_0 adja meg az a_k együtthatók távolságát a burkoló görbéből való mintavételezés esetén, azaz ezek egyenlő távolságra helyezkednek el ezen frekvencia tartományon. Ezt a következtetést kombinálva az eredeti szintézis egyenletünkkel kapjuk, hogy:

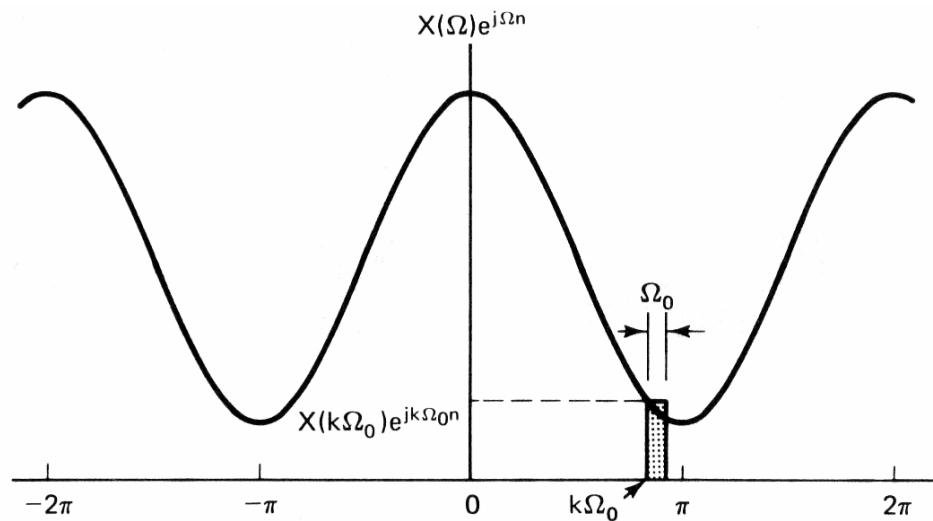
$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}$$

Mivel $\Omega_0 = 2\pi/N$ a fenti egyenlet átírható az alábbi alakba:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \langle N \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0$$

Ha most $N \rightarrow \infty$, akkor $\tilde{x}[n] = x[n]$ bármely véges értékű n -re nézve és így $\Omega_0 \rightarrow 0$, mivel az együtthatók egyre sűrűbb mintavételezései lesznek $X(\Omega)$ -nak.

Hogy még tisztábban lássuk a folyamatot ábrázoljuk $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ -t:



155. ábra Grafikus reprezentációja a $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ képletnek

$X(\Omega)$ periodikusnak látszik mégpedig 2π -vel, úgy ahogy $e^{j\Omega n}$ is az. Ezért kettőjük szorzata is periodikus azonos periódus idővel. Ahogy azt az ábrán is jelöltük az összegzés minden egyes tagja lényegében a $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ függvényből vett mintavétel és Ω_0 szorzatából előálló téglalap területével egyenlő. Ekkor ha $\Omega_0 \rightarrow 0$ akkor az összegzés integrálba megy át és ezért ha $N \rightarrow \infty$ akkor

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Mivel $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ periodikus 2π -vel, ezért bármely 2π hosszú intervallum megteszi.

Így aperiodikus jelekre a szintézis és az analízis egyenlete a következőképpen alakul:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

Ahol a $X(\Omega)$ függvényt az $x[n]$ aperiodikus diszkrét jel diszkrét Fourier transzformáltjának nevezzük és magát a műveletet amivel előáll pedig diszkrét idejű Fourier transzformációnak (DTFT). $X(\Omega)$ -t gyakran a jel spektrumának is hívjuk mivel végtelen sok komplex exponenciális függvény lineáris kombinációjának határértékeként áll elő.

Sajnos itt is ki kell kötnünk, hogy a végtelen szummának konvergensenek kell lennie különben nem tudjuk kifejezni a transzformáltat, így ahogy azt folytonos esetben az integrálás miatt, diszkrét esetben az összegzés miatt kell kikötnünk, hogy a jel transzformáltja csupán akkor létezik ha az abszolút összegezhető.

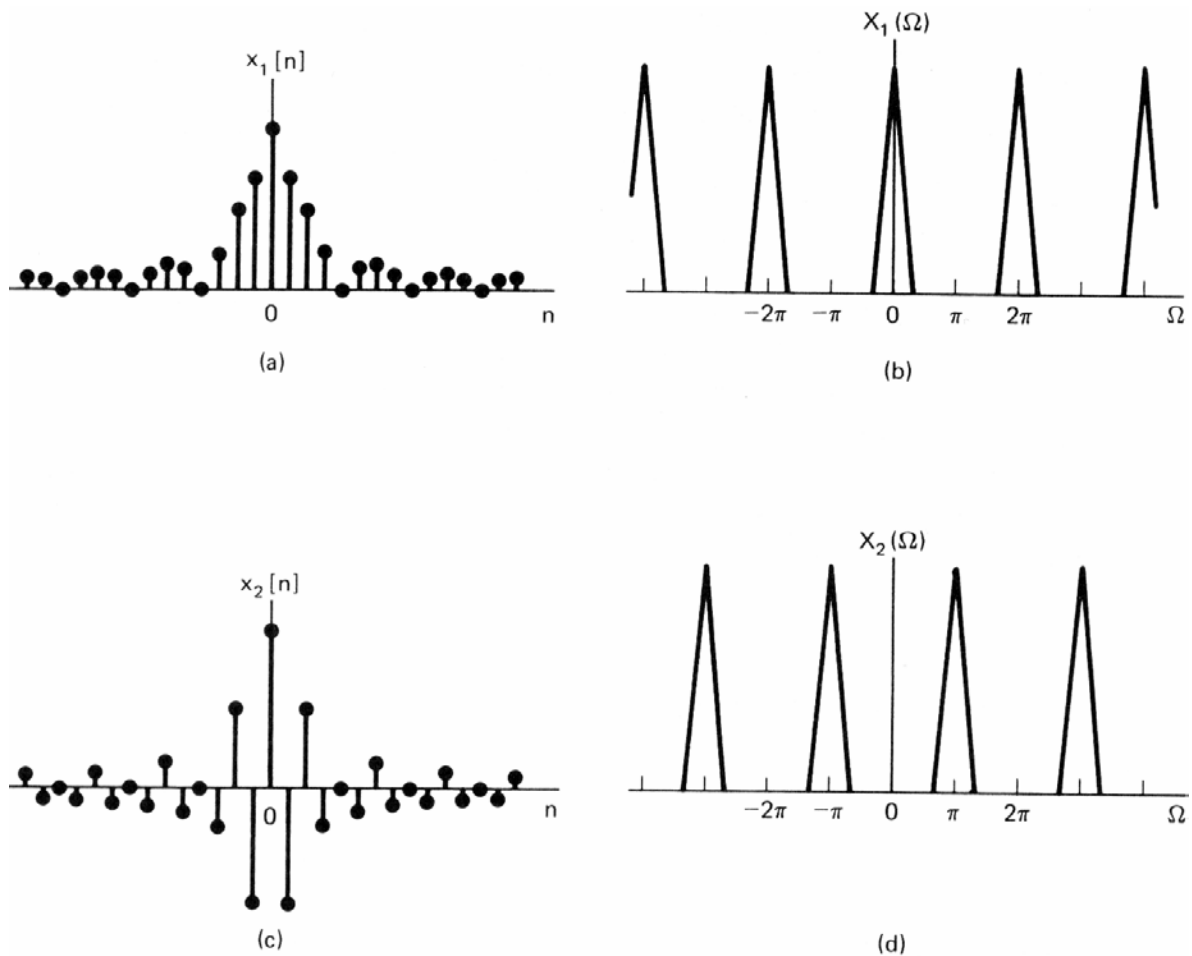
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$$

Vagy pedig véges energiájú legyen:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Ezért kijelenthetjük, hogy a diszkrét és folytonos Fourier transzformált között nagyon sok a hasonlóság, ám de lényeges különbség, hogy a diszkrét idejű Fourier transzformált periodikus és véges intervallumon összegzéssel áll elő, míg folytonos esetben nem periodikus és végtelen nagy intervallumon való integrálás eredménye.

Az előzőekben sokat építettünk arra, hogy az exponenciális függvények frekvenciájának eltolása 2π -vel ugyanazt az exponenciális eredményezi. Az előző részekben azt is levontuk tapasztalatként, hogy a magas frekvenciájú jelek frekvenciái π -nek páratlan, míg az alacsony frekvenciájú jelek π -nek páros többszörösei köré csoportosulnak. Így van ez a Fourier transzformált esetében is, ha gyorsan változó aperiodikus jel Fourier transzformáltját vesszük, akkor a transzformált értékei π -nek páratlan, míg lassú változású jel transzformáltjának értékei π -nek páros többszörösű frekvenciái köré csoportosulnak.



156. ábra (a) lassú változású (c) gyors változású diszkrét jelek Fourier transzformáltjai (b), (d)

Nézzünk pár példát:

4.3 Példa:

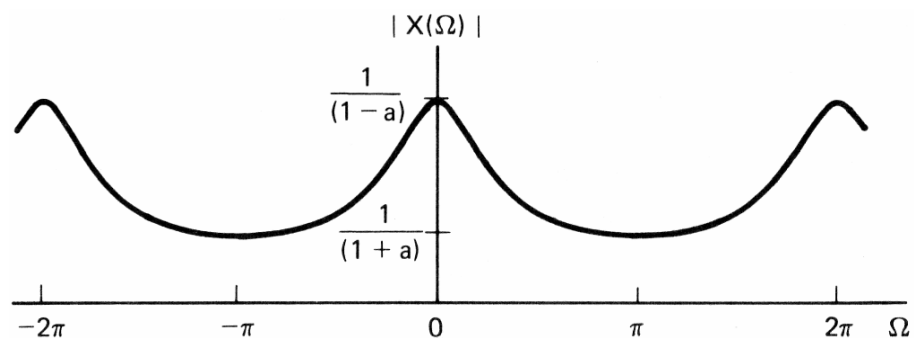
Tekintsük az

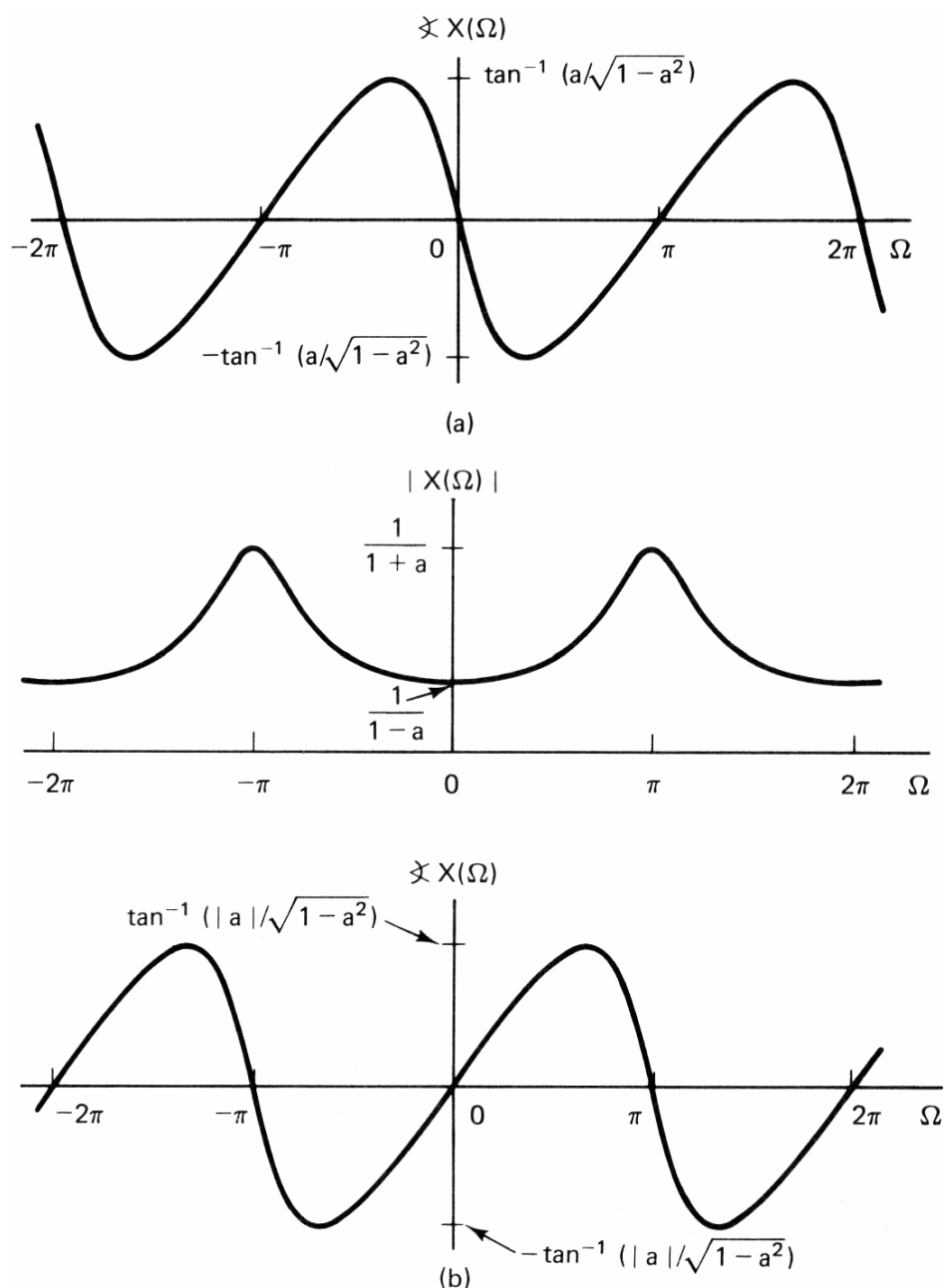
$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$$

jelet. Ebben az esetben a transzformált a következő féle képen alakul:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

Az amplitúdó és a fázis diagrammot megrajzolva két esetet vizsgáltunk, az elsőben $1 > a > 0$ a másodikban pedig $-1 < a < 0$ értékkel számolva:





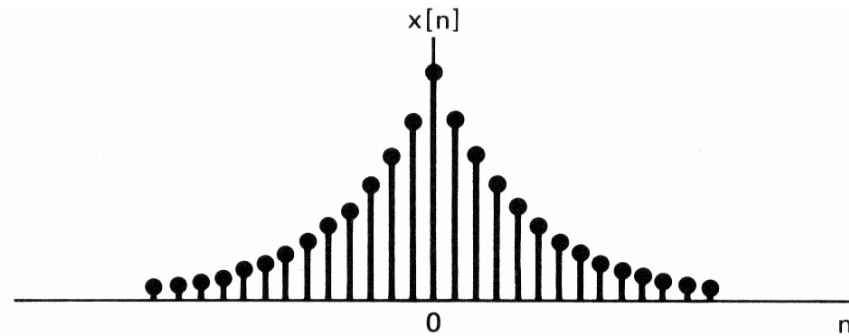
157. ábra Az amplitúdó és a fázis spektrum alakulása (a) $a > 0$; (b) $a < 0$ esetben
Jól látható, hogy mindkét esetben 2π -vel periodikus függvényt kaptunk.

4.4 Példa:

Tekintsük most a

$$x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1$$

függvényt amit $0 < a < 1$ esetre ábrázoltunk:

158. ábra A példában szereplő $x[n]$ jel

Ha most a transzformáltat meghatározzuk:

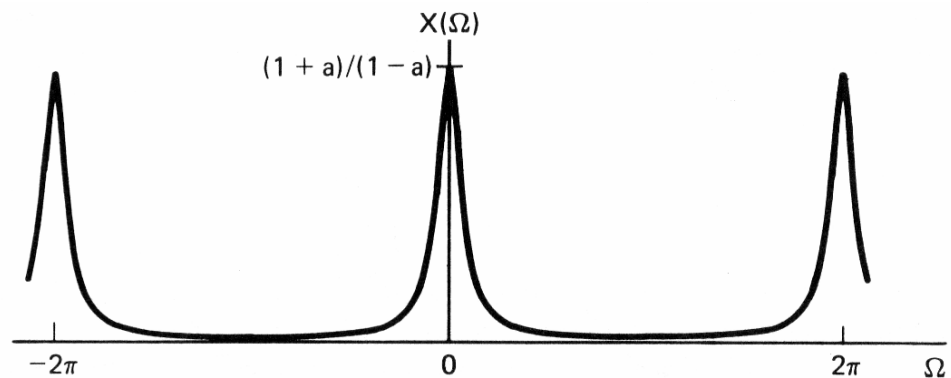
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\Omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\Omega n}$$

Ha most $m = -n$ -et helyettesítünk be a második összegzésbe:

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\Omega})^n + \sum_{m=1}^{+\infty} (ae^{j\Omega})^m = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - ae^{j\Omega}} - 1$$

$$X(\Omega) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \Omega + a^2}$$

Ebben az esetben $X(\Omega)$ tisztán valós, és ha ábrázoljuk akkor az alábbiak szerint alakul a grafikon $0 < a < 1$ értékre:

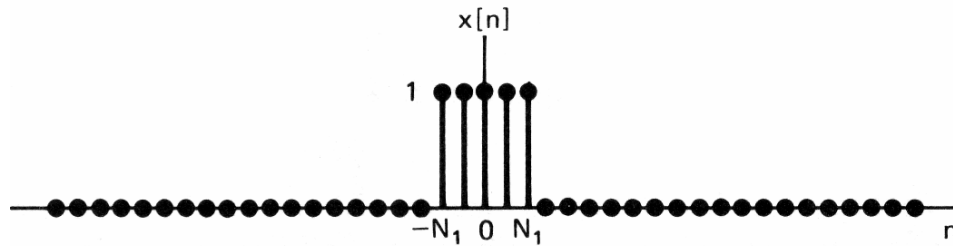
159. ábra Az $x[n]$ Fourier transzformáltja

4.5 Példa:

Nézzük most az aperiodikus négyszög jelet:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

Ábrázoltunk is egy ilyen jelet $N_1 = 2$ -re:

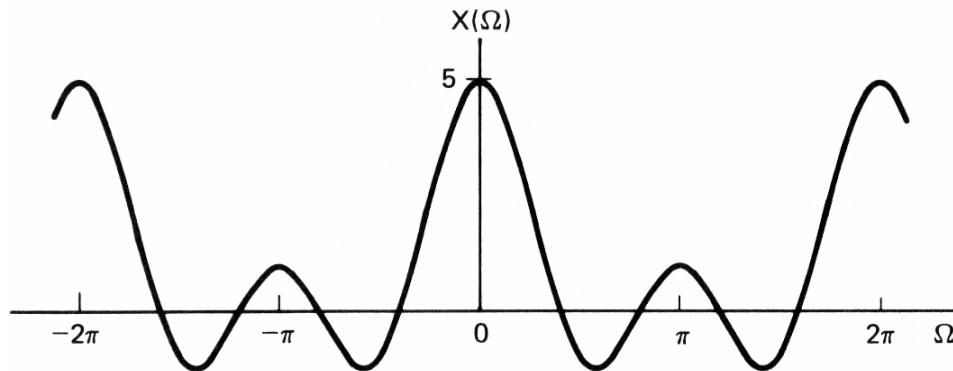


160. ábra Diszkrét aperiodikus négyszögjel

Ha most a Fourier transzformáltját nézzük a jelnek:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} = \frac{\sin \Omega(N_1 + 1/2)}{\sin \Omega/2}$$

$N_1 = 2$ -re ábrázoltuk a Fourier transzformáltat is:



161. ábra A diszkrét aperiodikus négyszögjel Fourier transzformáltja

Ahogy már az előzőekben említettük ez a függvény a sinc függvény párja s ezért ugyanazon tulajdonságok igazak rá amit a sinc függvénnyel kapcsolatban vizsgáltunk.

Az előzőekben láhattuk, hogy diszkrét esetben nem tapasztaltunk problémát a konvergencia szempontjából a Fourier sorok esetében, mivel a szintézis egyenlet csupán egy véges összeg. Ugyanígy a Fourier transzformált szintézis egyenletét vizsgálva belátható, hogy nincsen semmiféle konvergencia probléma, mivel az szintén véges intervallumon történik. Hogy ezt belássuk, tekintsük az $x[n]$ aperiodikus diszkrét jel közelítésére komplex exponenciálisok integráltját, amelyeket egy frekvencia intervallumról vesszük, amelyre igaz hogy $|\Omega| \leq W$:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{+W} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Ekkor $\tilde{x}[n] = x[n]$ pontosan akkor ha $W = \pi$. Ekkor azt várjuk, hogy semmiféle rendellenességet, mint például a Gibbs jelenség, nem fogunk tapasztalni. Ezt az alábbi példa során szemléltetjük

4.6 Példa:

Legyen a jelünk egyenlő a diszkrét impulzus függvénnyel.

$$x[n] = \delta[n]$$

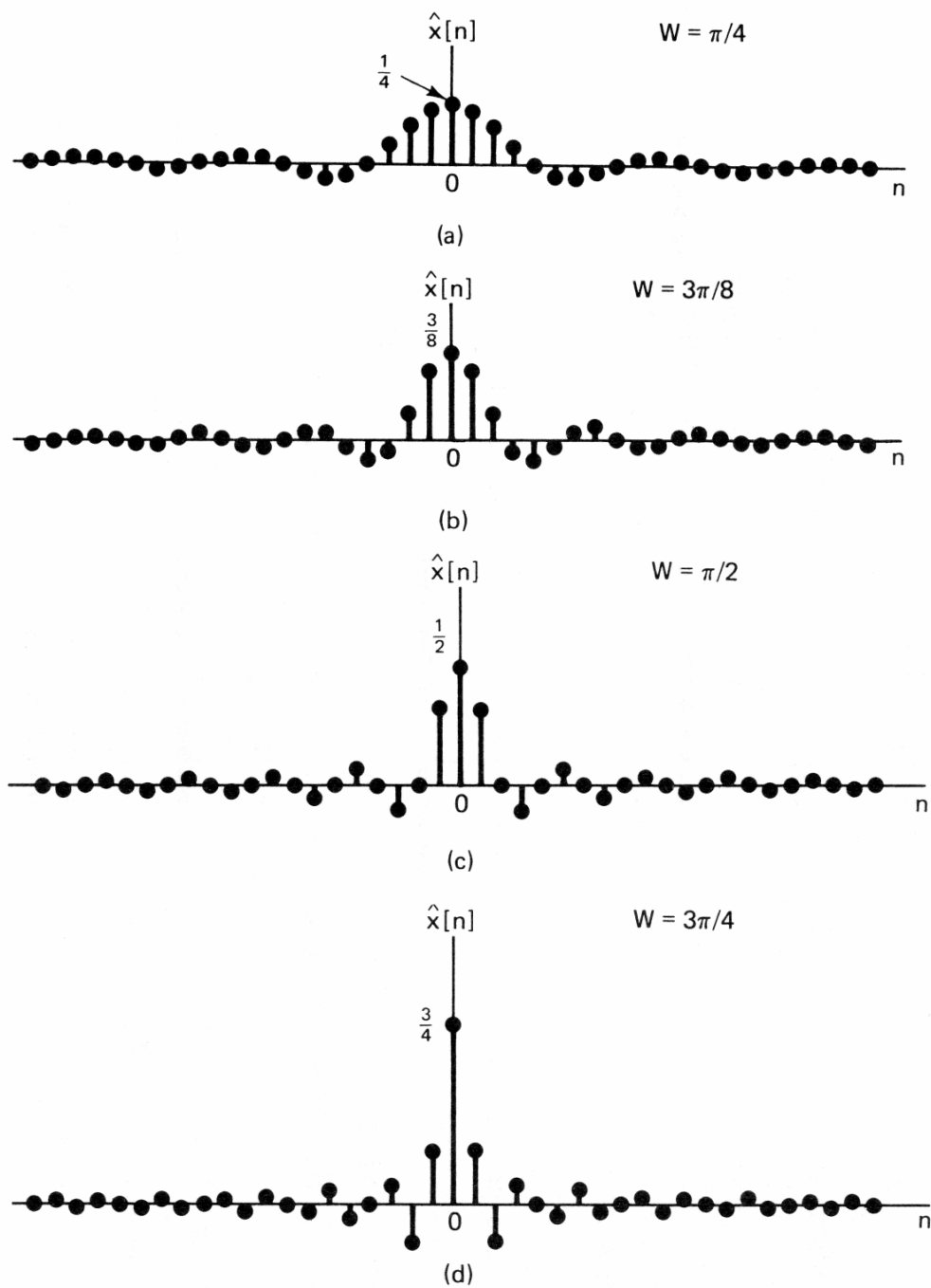
Ekkor az analízis egyenlet értelmében:

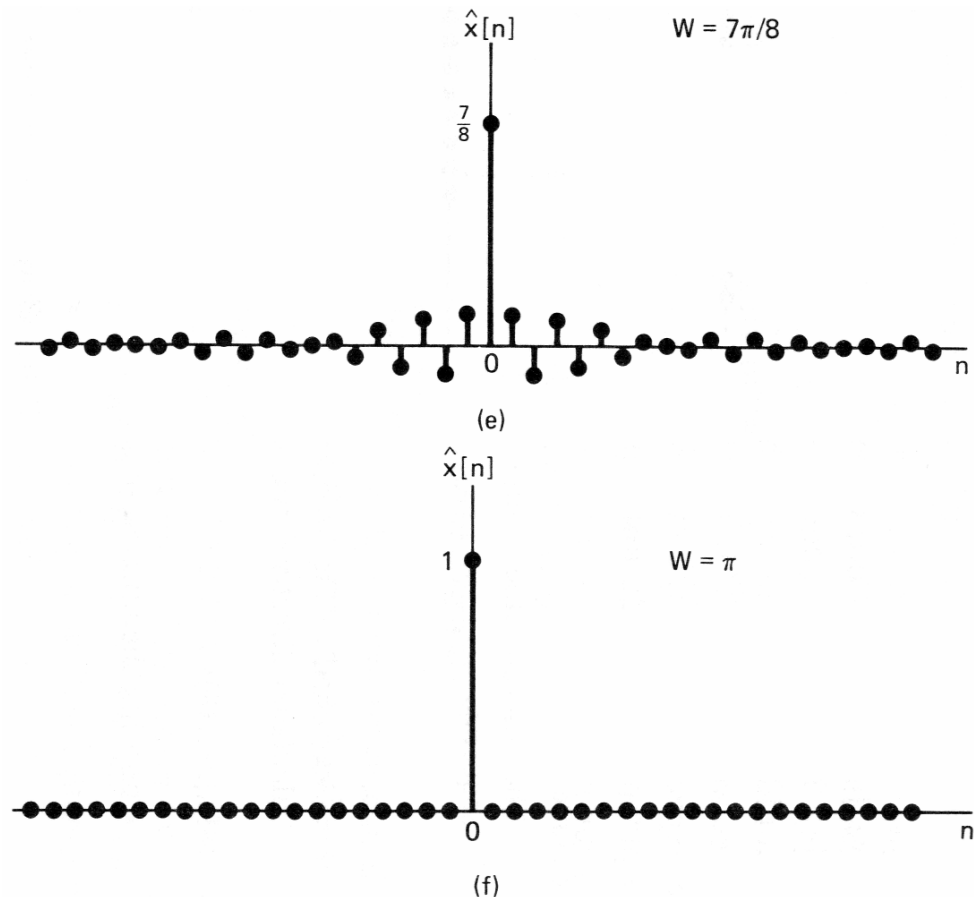
$$X(\Omega) = 1$$

Ekkor visszatérve az időtartományba tekintsük az

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{+W} e^{j\Omega n} d\Omega$$

közelítő jelet. Az egyenlet eredményeit több W esetén feltüntettük:





162. ábra A diszkrét egység impulzus jel közlítése komplex exponenciálisokkal

Nos, ahogy azt folytonos esetben láthattuk először igen sok oszcillációval terhelt jelet kapunk, ami W növelésével egyre jobban kezd felvenni az egység impulzus alakját, ám a folytonos esettel ellentétben, ezen oszcillációk W növekedttével csökkennek és $W = \pi$ esetén eltűnnek, visszaadván a kiinduláskor tekintett impulzus jelünket.

4.4. Diszkrét periodikus jelek reprezentációja Fourier transzformált segítségével (Representation of Discrete Periodic Signals with their Fourier Transform)

Amit azt folytonos esetben tapasztaltunk, itt is igaz, a Fourier sor és a transzformált között igen szoros kapcsolat áll fent. Ahogy azt folytonos esetben is tettük, most is arra törekszünk, hogy belássuk azt, hogy a Fourier együtthatók a Fourier transzformált mintavételezései ekvidisztáns frekvenciaértékeként amit pont a Fourier sorban szereplő komplex exponenciálisok frekvenciái lesznek. Nos de lássuk ezt be tényszerűen is.

Legyen $\tilde{x}[n]$ egy N alapperiódusú periodikus jel, és $x[n]$ reprezentáljon egy periódust a jelből. Azaz

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & M \leq n \leq M + N - 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ahol $x[n]$ aperiodikus, véges jel, M pedig tetszőlegesen választható.

Ekkor rövid számolással belátható, hogy:

$$Na_k = X\left(k \frac{2\pi}{N}\right)$$

Ahol a_k -k a Fourier együtthatói az $\tilde{x}[n]$ -jelnek, és $X(\Omega)$ pedig a Fourier transzformáltja az $x[n]$ -jelnek. Ezért az Na_k -t tekinthetjük, úgy mint az $X(\Omega)$ függvény mintavételezését egy periódus alatt, $2\pi/N$ frekvencia közönként. Ahogy azt folytonos esetben is láthattuk $X(\Omega)$ nem független M választásától, azonban a mintavételezési pontokban, értéke már független M -től, azaz bármely M -re ugyanazok lesznek az együtthatók, így beláttuk hogy a kapcsolat fent áll és igaz bármely esetben.

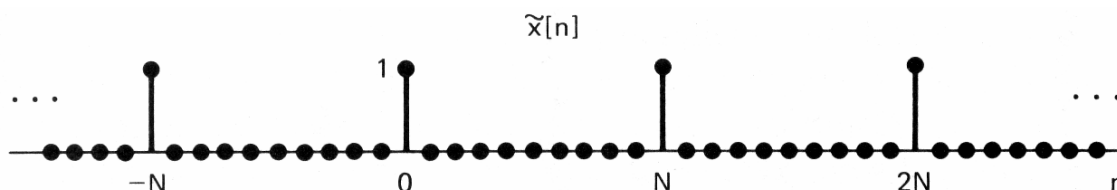
Nézzünk most egy példát ismereteink alátámasztására:

4.8 Példa:

Diszkrét időben is értelmezhetjük az impulzus vonatot, és az ennek megfelelő jelsor a következő lesz:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$$

Ábrázoljuk is ezt a jelt:



163. ábra Diszkrét impulzus vonat

A jel Fourier együtthatói direkt módon számolhatóak az analitikus képletünkkel:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

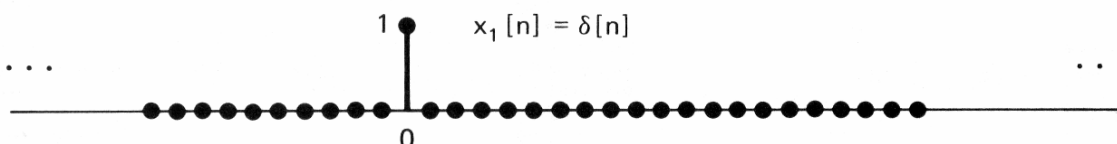
Ha az összegzéshez a $0 \leq n \leq N-1$ intervallumot választjuk:

$$a_k = \frac{1}{N}$$

Ha most M -et 0-nak választjuk akkor az aperiodikus jelünk:

$$x_1[n] = \delta[n]$$

lesz.



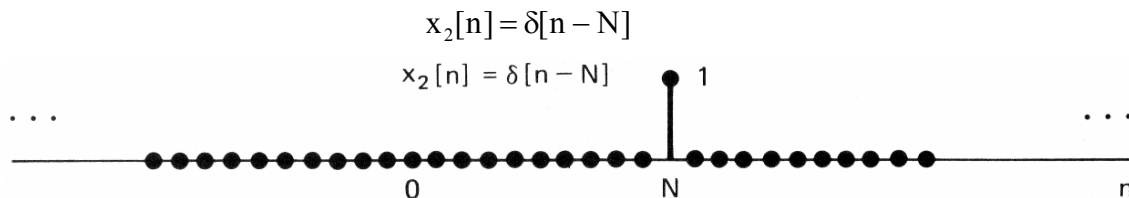
164. ábra A diszkrét impulzus vonattal egy perióduson egyenlő aperiodikus jel

Aminek Fourier transzformáltja:

$$X(\Omega) = 1$$

Nos ebből látszik, hogy a mintavételezés teljesül.

Most válasszuk $0 < M < N$. Ekkor:



165. ábra A diszkrét impulzus vonattal egy perióduson egyenlő aperiodikus jel

Ennek transzformáltja:

$$X(\Omega) = e^{-j\Omega N}$$

Ami jól láthatóan különbözik az előzőtől, de mivel ebből $\Omega = 2\pi k / N$ frekvenciánként veszünk mintát ezért ott $e^{-j\Omega N}$ értéke 1-lessz így ezekben a mintavételezési pontokban egyenlő lesz a két transzformált és az együtthatók értéke is.

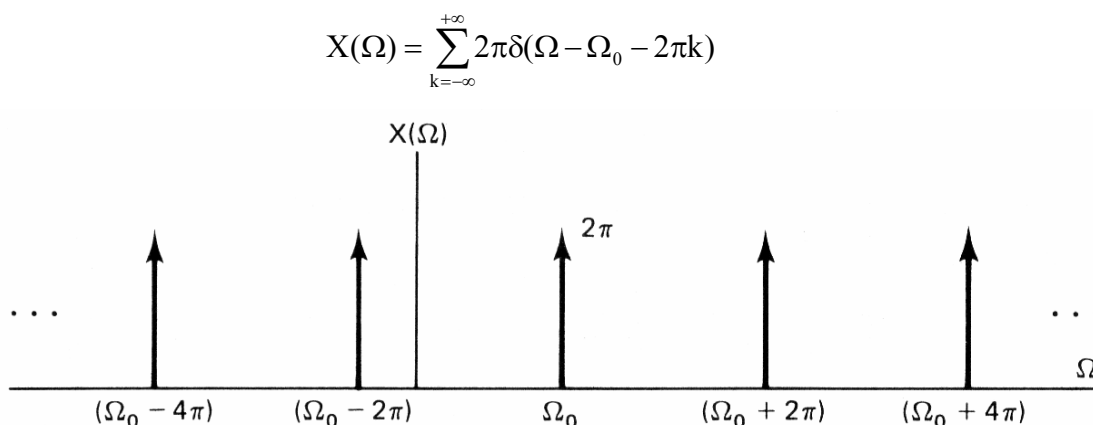
Nos, most már nekikezdhethünk a periodikus jelek Fourier transzformáltjának vizsgálatához diszkrét időben. Először is a levezetéshez tekintsük a

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

jelet. Folytonos esetben láthattuk hogy az $e^{j\omega_0 t}$ fel Fourier transzformáltja egy impulzus volt a $\omega = \omega_0$ frekvencián. Ezért valami hasonlót várunk diszkrét időben is. Azonban diszkrét időben a Fourier transzformált periodikus 2π frekvenciánként, ami direkt következménye azon ténynek, hogy

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 + 2\pi r)n}, \quad \forall r = re$$

Ezek alapján azt következik, hogy az $x[n]$ jel Fourier transzformáltja impulzusok sorozata lesz a $\Omega_0, \Omega_0 \pm 2\pi, \Omega_0 \pm 4\pi, \dots$ frekvenciákon. Tehát $x[n]$ transzformáltja egy impulzus vonat lesz:



166. ábra A $e^{j\Omega_0 n}$ jel Fourier transzformáltja

Ha most az inverz transzformáció egyenletébe visszahelyettesítünk:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$$

Jól látható, hogy minden 2π hosszú intervallumba pontosan egy impulzus esik az összegzésben, ezért mivel tetszőlegesen választható, válasszuk azt az intervallumot amely $\Omega_0 + 2\pi r$ -nél található impulzust tartalmazza, így:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = e^{j(\Omega_0 + 2\pi r)n} = e^{j\Omega_0 n}$$

Tehát beláttuk sejtésünket.

Ha most még általánosabb jelet tekintünk:

$$x[n] = b_1 e^{j\Omega_1 n} + b_2 e^{j\Omega_2 n} + b_3 e^{j\Omega_3 n} + \dots + b_M e^{j\Omega_M n}$$

Akkor a Fourier transzformált:

$$X(\Omega) = b_1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_1 - 2\pi k) + b_2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_2 - 2\pi k) + \\ + b_3 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_3 - 2\pi k) + \dots + b_M \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_M - 2\pi k)$$

Így $X(\Omega)$ egy periodikus impulzus vonat amelynek impulzusai az $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ frekvenciák 2π többszöröseivel eltolt frekvenciákon találhatóak. Ezért egy ilyen 2π hosszú intervallum pontosan egy impulzust tartalmaz mindegyik exponenciális transzformáltjából.

Fontos megjegyezni, hogy a Fourier transzformált létezik és periodikus attól függetlenül, hogy a jel periodikus volt-e vagy sem. Sőt attól is függetlenül, hogy $\Omega_0 = 2\pi m / N$ ahol m és N egész számok-e vagy sem.

Emiatt, ha az $x[n]$ jelünk periodikus N -el, akkor reprezentálható Fourier sorával:

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

Ha az összegzésben k intervallumát $k = 0, \dots, N-1$ -re választjuk, akkor:

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j(2\pi/N)n} + a_2 e^{j2(2\pi/N)n} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1)(2\pi/N)n}$$

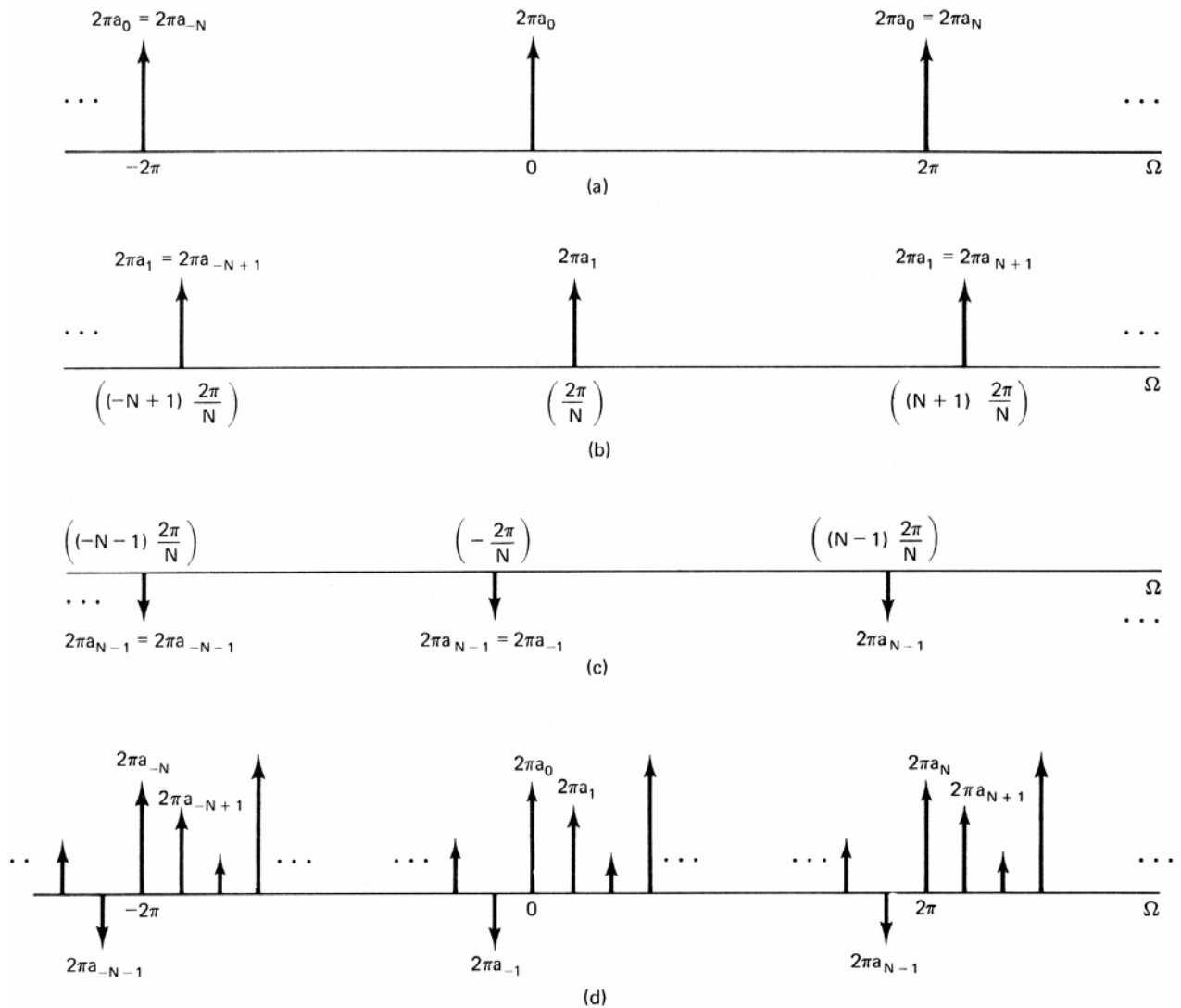
Azonban ekkor megtehetjük, hogy:

$$\Omega_1 = 0, \Omega_2 = \frac{2\pi}{N}, \Omega_3 = 2\frac{2\pi}{N}, \dots, \Omega_N = (N-1)\frac{2\pi}{N}$$

Ezért a transzformált alakja a következő lesz:

$$X(\Omega) = a_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - 2\pi k) + a_1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N} - 2\pi k\right) + \\ + \dots + a_{N-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta\left(\Omega - (N-1)\frac{2\pi}{N} - 2\pi k\right)$$

Az alábbi ábrán jól látható mit is csináltunk valójában:



167. ábra Fourier transzformáltja a diszkrét idejű periodikus jelnek

Azt használtuk ki hogy a Fourier együtthatók periodikusak $2\pi a_0 = 2\pi a_N = 2\pi a_{-N}$, így $2\pi/N$ alapperiódussal periodikus impulzus vonatokkal reprezentálva őket kaptuk, hogy $X(\Omega)$ egy impulzus vonat lesz, ami ezeknek az impulzus vonatoknak összege, és ahol a $\Omega = 2\pi k/N$ pontban található impulzus nagysága pontosan $2\pi a_k$. Ezért bármely periodikus jel diszkrét idejű Fourier transzformáltja egyértelműen származtatható a spektrális együtthatóiból:

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - 2\pi k/N)$$

4.5. A DFT (The DFT)

A technológia fejlődésével egyre nagyobb szerephez jutott a jelfeldolgozás és ezzel együtt annak matematikai apparátusának szélesedése. A számítógépek megjelenésével egyre nagyobb igény lett ezen gyakran analóg jeleken végzett műveletek digitalizálására, a diszkrét világba való átvitelére. Ám a diszkrét jeltartományban is születtek új technikák a műveletvégzés praktikusságának,

gyorsításának érdekében. Az egyik ilyen technika a diszkrét Fourier transzformáció (DFT), ami nem tévesztendő össze a már tárgyalt diszkrét idejű Fourier transzformációval (DTFT). Magát a DFT-t nem tárgyaljuk annyira részletesen mint a DTFT-t, azonban hasznos lehet egy pár mondatban megemlíteni lényegét.

Legyen $x[n]$ egy véges diszkrét jel, azaz létezik olyan N_1 egész szám, hogy

$$x[n] = 0 \quad \text{ha } n \text{ értéke a } 0 \leq n \leq N_1 - 1 \text{ intervallumon kívül esik.}$$

Hozzunk létre egy periodikus jelet $x[n]$ -ből, úgy ahogy azt a DTFT-nél is tettük:

$$\tilde{x}[n] = x[n], \quad 0 \leq n \leq N_1 - 1$$

$\tilde{x}[n]$ -pedig legyen periodikus $N \geq N_1$ -el. Ekkor a Fourier együtthatói $\tilde{x}[n]$ -nek előállnak az alábbi alakban:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Válasszuk az összegzéshez azt az intervallumot amelyen $\tilde{x}[n] = x[n]$, ekkor:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Ezek az együtthatók jelentik a jel DFT-jét. Gyakran az $x[n]$ jel DFT-jét $\tilde{X}(k)$ -val jelölik, amire:

$$\tilde{X}(k) = a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

Ahol N szabadon választható, de csak akkor helyes a művelet ha $N \geq N_1$.

A különbség a DFT és a DTFT között máris szembeötlő, hiszen a DFT diszkrét jeltartományból, diszkrét frekvencia tartományba viszi át a jelet, míg a DTFT pedig diszkrétből folytonosba, ami nem tárolható el egy könnyen például egy software-es Fourier transzformált számításakor. A DFT különben nem más mint a DTFT diszkrét mintavételezése.

Általánosságában véve a DFT igen fontos művelet és reprezentáció is egyben, mivel az eredeti véges idő intervallumon adott jel rekonstruálható a DFT-jéből. A másik hasznos tulajdonsága, hogy rendkívül gyorsan elvégezhető, mert egy úgynevezett gyors Fourier transzformációval (Fast Fourier Transform, FFT) számolható, ami igen könnyen implementálható bármely software vagy hardware részeként. Legvégül, pedig mivel igen szoros kapcsolatban van a diszkrét idejű Fourier transzformáltakkal és a sorokkal, így jó pár igen fontos tulajdonságát is birtokolja ezeknek. Ahogy majd látni fogjuk az FFT-vel együtt rendkívül hatékony módszert kapunk majd két diszkrét idejű jel konvolúciójának kiszámítására. Másrészt pedig N értéke szabadon választható, akármilyen nagyra is, ez nem befolyásolja a művelet helyességét. Így sokszor N -pontos DFT-ről beszélünk, ahol N -et 2 hatványiként választjuk, pontosan a hardware-res realizáció miatt, de mint látni fogjuk az FFT nélkülözhetetlen kritériuma is ez lesz, ami miatt bizton érezhetjük döntésünk bölcsességét.

4.6. Az FFT (The FFT)

A probléma onnan gyökerezik, hogy a Fourier sorok együtthatóinak kiszámításához $n + 2$ szorzásra illetve összeadásra van szükség, így az összes együttható kiszámításához már $O(n^2)$ nagyságrendű műveletre. Ez viszont nagy n esetén már jelentős számítást igényel. 1965-ben Colley és Tukey munkássága áttörő eredményt hozott a probléma megoldására, hisz dolgozatukban módszert adtak az együtthatók számolásának gyorsítására, amire matematikailag bizonyították, hogy műveletigénye csupán $O(n \log_2(n))$. Az ilyen lépésszámú eljárásokat a Fourier együtthatók kiszámítására gyors Fourier transzformációnak (FFT) nevezzük. Mára már több ilyen módszer ismeretes de mi most az eredeti Colley-Tukey módszert fogjuk vizsgálni. Ahogy már azt említettük, fontos azt kikötnünk, hogy $n = 2^t$ alakú, ahol t természetes szám. A módszer a Római politikai ideológián alapuló „oszd meg és uralkodj” elvét követi, azaz a problémát könnyebben számolható rész problémákra osztja, s ezt rekurzívan addig teszi amíg olyan könnyen megoldható problémákra esik szét az eredeti, amely már elemi úton megoldható. A módszer különben általánosítható tetszőleges n -re de ezzel itt nem foglalkozunk.

Legyen $m = 2^{t-1}$. Ekkor igaz, az $N = 2^t$ periodikus $p[n]$ jelre, ha $x = (2\pi/N)n$ akkor igaz hogy:

$$p[x] = a_0 + a_1 e^{jx} + \dots + a_{2m-1} e^{j(2m-1)x}$$

amelyre $p[x_i] = y_i$ értéke a diszkrét jelnek.

Jelölje q a páros indexű együtthatókat tartalmazó polinomot:

$$q[x] = d_0 + d_1 e^{jx} + \dots + d_{m-1} e^{j(m-1)x}$$

amelyre $q[x_{2i}] = y_{2i}$, $i = 0, \dots, m-1$

Jelölje r a páratlan indexű együtthatókat tartalmazó polinomot:

$$r[x] = f_0 + f_1 e^{jx} + \dots + f_{m-1} e^{j(m-1)x}$$

amelyre $r[x_{2i+1}] = y_{2i+1}$, $i = 0, \dots, m-1$

Ekkor igaz, az, hogy

$$r\left[x_{2i+1} - \frac{\pi}{2}\right] = r\left[(2i+1)\frac{2\pi}{2m} - \frac{\pi}{m}\right] = r[x_{2i}] = y_{2i+1}$$

Ebből belátható, hogy:

$$p[x] = q[x] \frac{1 + e^{imx}}{2} + r\left[x - \frac{\pi}{m}\right] \frac{1 - e^{imx}}{2}$$

Az együtthatókat összehasonlítva ekkor azt kapjuk, hogy:

$$2a_k = d_k + f_k \left(e^{-j\frac{2\pi}{n}} \right)^k$$

$$2a_{k+m} = d_k - f_k \left(e^{-j\frac{2\pi}{n}} \right)^k$$

Ahol $k = 0, \dots, m-1$. A fenti egyenletek segítségével tehát könnyen kiszámíthatóak p spektrális együtthatói q és r spektrális együtthatóiból. Ezzel a feladatot redukáltuk két fele akkora problémára. Azonban q és r is továbbbontható ily módon fele-fele akkora problémára, és ez így megtehető rekurzívan egészen addig, amikor már elsőrendű, azaz konstans fázispolinómokra esik szét a jelünk. Az elsőrendű fázispolinómkat viszont a jel értékei egyértelműen meghatározzák, így az előbbieken tárgyaltakat visszafelé értelmezve, ha kiindulunk 2^t darab elsőrendű fázispolinómból, akkor a t -edik lépésben visszkapjuk az eredeti jelünket reprezentáló, de már 2^t rendű fázispolinómot.

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

Legyen $p_0^t = p$ a vizsgált jelet reprezentáló fázispolinóm.

Legyen az h -adik lépésben szereplő $K = 2^{t-h}$ darab $N = 2^h$ -ad rendű fázispolinóm jelölése: $p_k^{(h)}$ ahol $k = 0, \dots, K-1$.

Ekkor:

$$2p_k^{(h)}[x] = p_k^{(h-1)}[x] \cdot (1 + e^{jMx}) + p_{k+K}^{(h-1)} \left[x - \frac{\pi}{M} \right] \cdot (1 - e^{jMx})$$

$$\text{Ahol } M = \frac{N}{2} = 2^{h-1}$$

A $p_k^{(h)}$ fázispolinóm együtthatói legyenek:

$$p_k^{(h)}[x] = a_{k,0}^{(h)} + a_{k,1}^{(h)} e^{jx} + \dots + a_{k,M-1}^{(h)} e^{j(M-1)x}$$

Így az együtthatók rekurziós képlete:

$$a_{k,i}^{(h)} = \frac{1}{2} \left(a_{k,i}^{(h-1)} + a_{k+K,i}^{(h-1)} \cdot \left(e^{-j\frac{2\pi}{2^h}} \right)^i \right)$$

$$a_{k,i+M}^{(h)} = \frac{1}{2} \left(a_{k,i}^{(h-1)} - a_{k+K,i}^{(h-1)} \cdot \left(e^{-j\frac{2\pi}{2^h}} \right)^i \right)$$

Ahol $i = 0, \dots, M-1$ és $k = 0, \dots, K-1$.

A kiindulás értékek pedig:

$$a_{k,0}^{(0)} = y_k$$

Ahol y_k a jel k -adik értéke, $k = 0, \dots, n-1$.

A t -edik lépés után pedig $a_{0,0}^{(t)}, \dots, a_{0,n-1}^{(t)}$ adják a keresett spektrális együtthatókat. Így az N periodikus $p[n]$ jel spektrális együtthatói meghatározhatóak N egymást követő jel értékből $t = \log_2(N)$ komplett lépés alatt.

Azonban az FFT nemcsak periodikus jelekre számolható, ugyanezen módon N -adatból kiszámolható a jel N pontos DFT-je is.

4.7. A diszkrét idejű Fourier transzformáltak tulajdonságai (Properties of the Discrete-Time Fourier Transform)

Az elkövetkezendőekben a diszkrét idejű Fourier transzformáció tulajdonságait vizsgáljuk meg. Ezek a tulajdonságok, mint ahogy azt látni fogjuk, nagymértékben hasonlóak, sőt néhány helyen kifejezetten ugyan azok is lesznek mint amit folytonos időben tapasztaltunk, ezért inkább a különbségekre fogunk koncentrálni, s ahol megegyeznek ott csak a képletet közöljük. Elevenítsük fel most a diszkrét idejű Fourier transzformáció és inverz transzformáció képleteit:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

Magának a transzformációnak külön jelölése is van, amit $\mathcal{F}\{\}$ művelettel jelölünk diszkrét esetben is.

Így:

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\}$$

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

Nézzük tehát az alaptételeket:

4.7.1. Periodikuság (Periodicity)

Ahogy azt az előzőekben is megemlítettük, a folytonos esettel ellentétben a diszkrét idejű Fourier transzformált mindig periodikus Ω -ban, mégpedig 2π alapperiódussal.

4.7.2. Linearitási tulajdonság (Property of Linearity)

Bármely két diszkrét jel lineáris kombinációjának diszkrét idejű Fourier transzformáltja megegyezik a jelek külön vett Fourier transzformáltjainak lineáris kombinációjával.

$$X_1(\Omega) = \mathcal{F}\{x_1[n]\}$$

$$X_2(\Omega) = \mathcal{F}\{x_2[n]\}$$

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$$

tetszőleges valós „a” és „b” esetén.

4.7.3. Szimmetria tulajdonság (Property of Symmetry)

Ha $x[n]$ valós függvény akkor, bármely frekvenciára fent áll, hogy:

$$X(-\Omega) = X^*(\Omega)$$

ahol a csillag a komplex konjugáltját jelenti a transzformáltnak.

Ebből következik, hogy $\text{Re}\{X(\Omega)\}$ páros, és $\text{Im}\{X(\Omega)\}$ pedig páratlan függvény. Ugyanígy $X(\Omega)$ amplitúdó függvénye páros, míg fázisa páratlan függvénye Ω -nak. Emiatt:

$$\begin{aligned}\text{Ev}\{x[n]\} &= \mathcal{F}^{-1}\{\text{Re}\{X(\Omega)\}\} \\ \text{Od}\{x[n]\} &= \mathcal{F}^{-1}\{j\text{Im}\{X(\Omega)\}\}\end{aligned}$$

Sőt ha $x[n]$ valós és páros függvény, akkor a transzformáltja is az, ha pedig tisztán komplex és páratlan, akkor a transzformáltja is.

4.7.4. Eltolási tétel időben és frekvenciában (Theorem of Time and Frequency Shifting)

Tetszőleges diszkrét függvény időbeli eltolójának transzformáltja csupán fázisában késik vagy siet az eredeti jel transzformáltjához képest. A transzformált amplitúdója független az időbeli eltolás műveletétől. Sőt, frekvencia eltolja a transzformálnak az eredeti jel komplex exponenciálissal való szorzását jelenti.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x[n]\} &= X(\Omega) \\ \mathcal{F}\{x[n - n_0]\} &= e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) \\ \mathcal{F}\{e^{j\Omega_0 n} x[n]\} &= X(\Omega - \Omega_0)\end{aligned}$$

4.7.5. Differencia tétel (Theorem of Difference)

A diszkrét időben értelmezett differenciált a folytonos idejű differenciálás párja, erre vonatkozóan a Fourier transzformáció tulajdonságai igen fontosak.

Tekintsük az $x[n]$ jelet amelynek transzformáltja $X(\Omega)$. Az előzőekben tárgyalt linearitási és eltolási tétel értelmében az első differenciált transzformáltja a következő féle keppen alakul:

$$x[n] - x[n - 1] = \mathcal{F}^{-1}\{(1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)\}$$

Azaz a differencia képzés az idő tartományon a frekvencia tartományon $(1 - e^{-j\Omega})$ -vel való szorzásnak felel meg.

4.7.6. Összegzési tétel (Theorem of Summation)

A másik folytonos esetben fontos művelet, az integrálás párja diszkrét esetben az összegzés. Ha tekintjük az alábbi $y[n]$ jelet:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$$

Ami kvázi az $x[n]$ jel integráltjának fogható fel. Ha most deriváljuk mindkét oldalt:

$$y[n] - y[n - 1] = x[n]$$

Ekkor azt várjuk, hogy az összegzés, a differencia képzéssel ellentétben pontosan $(1 - e^{-j\Omega})$ -vel való osztást fog jelenteni, ám ez csak részben igaz. A korrekt alak finomításra szorul:

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1 - e^{-j\Omega})} X(\Omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)\right\}$$

Az impulzus vonat a jel átlagos értékét jeleníti a summázás során, ami az integrált közép értékeként jelenik majd meg, ezért szükséges a korrekciója a 0 frekvenciás tagnak.

Ha most $x[n] = \delta[n]$, akkor mivel $X(\Omega) = 1$, az egység ugrás függvény transzformáltjára azt kapjuk, hogy:

$$u[n] = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(1 - e^{-j\Omega})} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \right\}$$

4.7.7. Hasonlósági tétel (Theorem of Time and Frequency Scaling)

A diszkrét időben kicsit másképp működik ez a tulajdonság mint ahogy azt a folytonos időben láthattuk. Tekintsük az $x[n]$ jelet amelynek transzformáltja $X(\Omega)$. Először is vizsgáljuk meg az $y[n] = x[-n]$ jel $Y(\Omega)$ transzformáltját.

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] e^{-j\Omega n}$$

Ha most $m = -n$ -el behelyettesítünk:

$$Y(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{-j(-\Omega)m} = X(-\Omega)$$

Azaz

$$x[-n] = \mathcal{F}^{-1} \{ X(-\Omega) \}$$

Bár ez egyenlőre azonos a folytonos esetben tapasztaltakkal, ám ha az idő vagy frekvencia skálázást nézzük már jelentős különbségeket tapasztalhatunk:

Folytonos esetben az kaptuk, hogy:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t)\} &= X(\omega) \\ \mathcal{F}\{x(at)\} &= \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

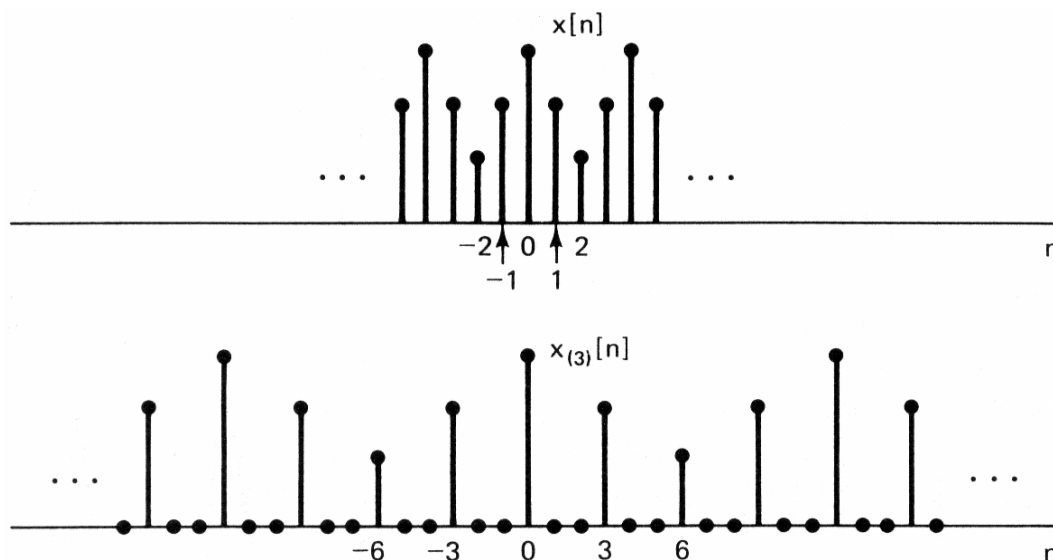
Azonban ha most az $x[an]$ jelet itt is szeretnénk definiálni, már nehézségekbe ütközünk, ha „a” nem egész szám. Ezért nem tudnánk lelassítani a jelünket, hisz $a < 1$ nem lehet, másrészt gyorsítani se tudnánk hisz $x[2n]$ nem produkálna egy arányosan összehúzódozó függvény képet, mivel $x[2n]$ csupán a páros értékeit adná az eredeti jelnek.

Hogy mégis végre tudjuk hajtani műveleteinket a következő féle képen kell azokat definiálni:

Legyen k egy pozitív valós szám, és definiáljuk a következő $x[n]$ -ből származtatott jelet:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{ha } n \text{ a } k \text{ többszöröse} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Így már tényleg tudjuk gyorsítani és lassítani a jelünket, mint ahogy azt $k = 3$ esetben láthatjuk is:

168. ábra Az $x[n]$ jelből származtatott $x_{(3)}[n]$

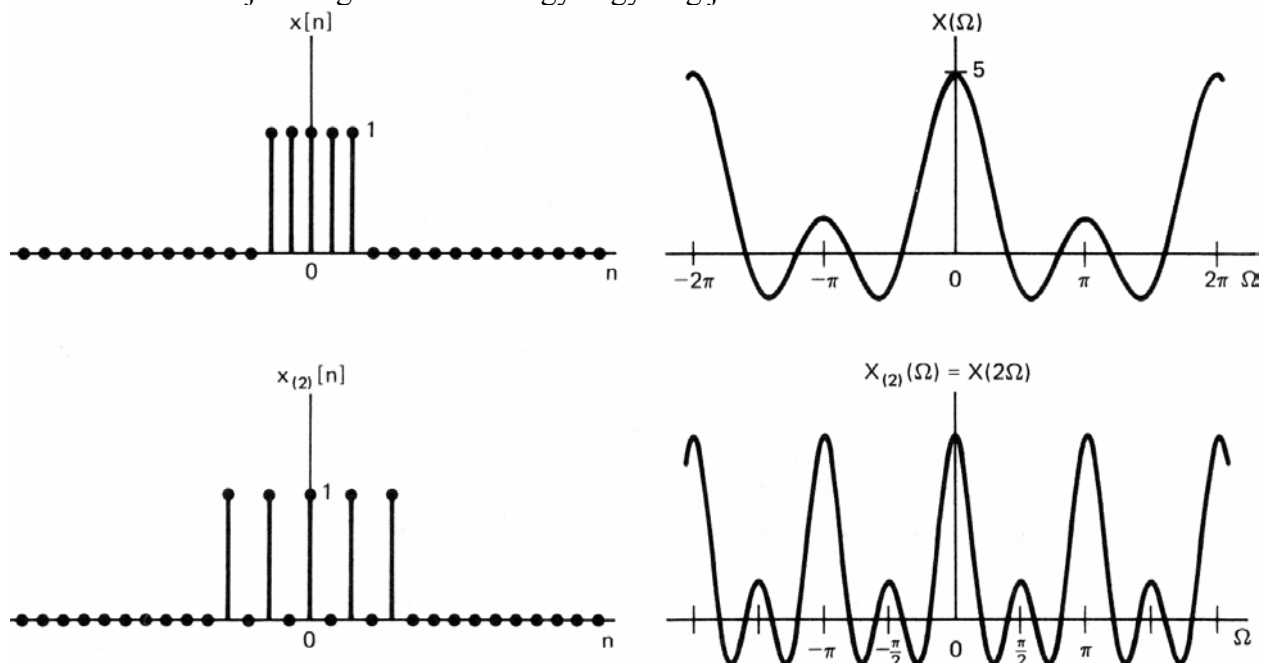
Ezen túlmenően, ha most megnézzük $x_{(k)}[n]$ transzformáltját:

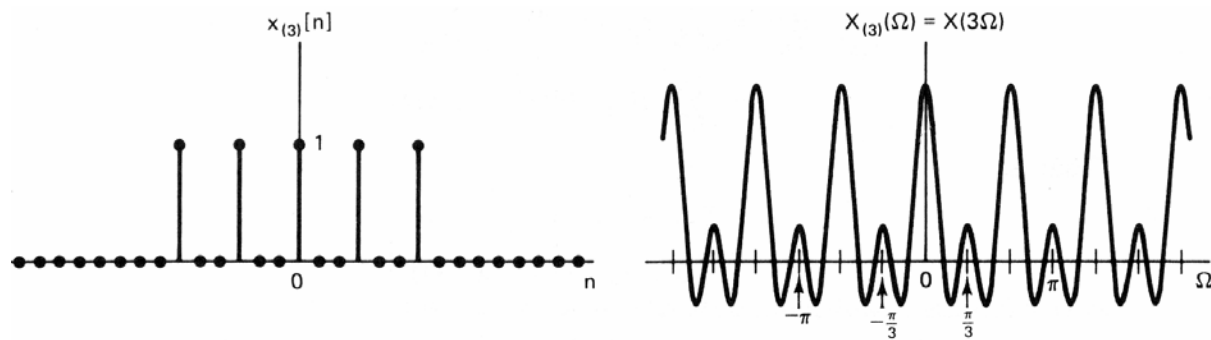
$$X_{(k)}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk] e^{-j\Omega rk} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r] e^{-j(k\Omega)r}$$

$$\mathcal{F}\{x_{(k)}[n]\} = X(k\Omega)$$

Itt is jól látható az inverz kapcsolat az idő és a frekvencia között. Ahogy a jelet lassítjuk és az megnyúlni látszik ($k < 1$), a frekvencia tartományba a transzformált függvényének jelalakja úgy zsugorodik egyre összébb, ha viszont a jelet gyorsítjuk és az zsugorodni látszik ($k > 1$), a frekvencia tartományba a transzformált függvényének jelalakja úgy nyúlik egyre nagyobbra. Sőt, mivel $X(\Omega)$ periodikus 2π -vel ezért $X(k\Omega)$ is periodikus lesz de $2\pi/|k|$ -val.

Ezt a jelenséget ábrázoltuk egy négyszög jelle:





169. ábra Az idő és a frekvencia tartomány közötti inverz összefüggés

4.7.8. Frekvencia deriválási tétel (Theorem of Differentiation in Frequency)

Legyen

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = X(\Omega)$$

Ha most az analitikus egyenletünkkel írjuk fel a transzformáltat és mindkét oldalt deriváljuk a frekvencia szerint:

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jnx[n]e^{-j\Omega n}$$

A jobb oldal nem más mint $jnx[n]$ transzformáltja így j -vel átszorozva kapjuk, hogy:

$$\mathcal{F}\{nx[n]\} = j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

4.7.9. Parseval összefüggés (Parseval's Relation)

Legyen

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = X(\Omega)$$

Ekkor:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Jól láthatóan teljes az analógia a folytonos esettel. A bal oldalt itt is az $x[n]$ jel energia tartalmának nevezzük míg $|X(\Omega)|^2$ pedig a jel az energia-sűrűségi spektrumának. Mivel azonban periodikus jelre az energia tartalom végtelen ezért itt is jobb egy periódusra vonatkoztatni, amelyre igaz, hogy:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

4.7.10. Konvolúció tétel (Theorem of Convolution)

Ahogy azt folytonos esetben is tapasztalhattuk, a konvolúciós tulajdonsága a Fourier transzformálnak igen praktikus módszert ad az LTI rendszerek kimeneteinek számolására.

Tekintsünk most egy ilyen LTI rendszert, az $x[n]$ bemenetei függvénnyel, a $h[n]$ impulzus válsz függvénnyel, és $y[n]$ a bemenet hatására létrejövő kimeneti jellel.

Ekkor, ahogy azt eddig is tudtuk:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Amiből, ahogy azt folytonos esetben is beláttuk következik, hogy:

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$$

Ahol $Y(\Omega), X(\Omega), H(\Omega)$ a Fourier transzformáltjai az $y[n], x[n], h[n]$ jeleknek. Ahogy folytonos esetben is, $H(\Omega)$ itt is hálózat jellemző függvény és a rendszer frekvencia válasz függvényének, vagy átviteli függvényének nevezzük. Segítségével tetszőleges bemenet Fourier transzformáltjának segítségével előáll a kimenet. Magának az átviteli függvénynek a kiszámolása is nagyon egyszerű, mivel tetszőleges LTI rendszer esetén a válasz és a bemenet Fourier transzformáltjainak hányadosaként megkaphatjuk az átviteli függvényt:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Azonban, paralel módon a folytonos esettel, nem minden LTI rendszernek létezik frekvencia átviteli függvénye. Például a $h[n] = 2^n u[n]$ súlyfüggvényű LTI rendszert, ha szinuszoidális jellel gerjesztjük, akkor kimenete nem véges jel lesz, ami azt a tényt támasztja alá hogy a Fourier transzformáltja $h[n]$ -nek divergál. Azonban ha egy LTI rendszer stabil, akkor az impulzus válasz függvénye abszolút összegezhető

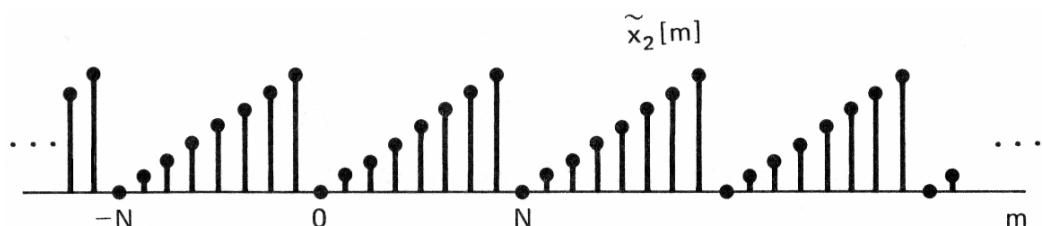
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

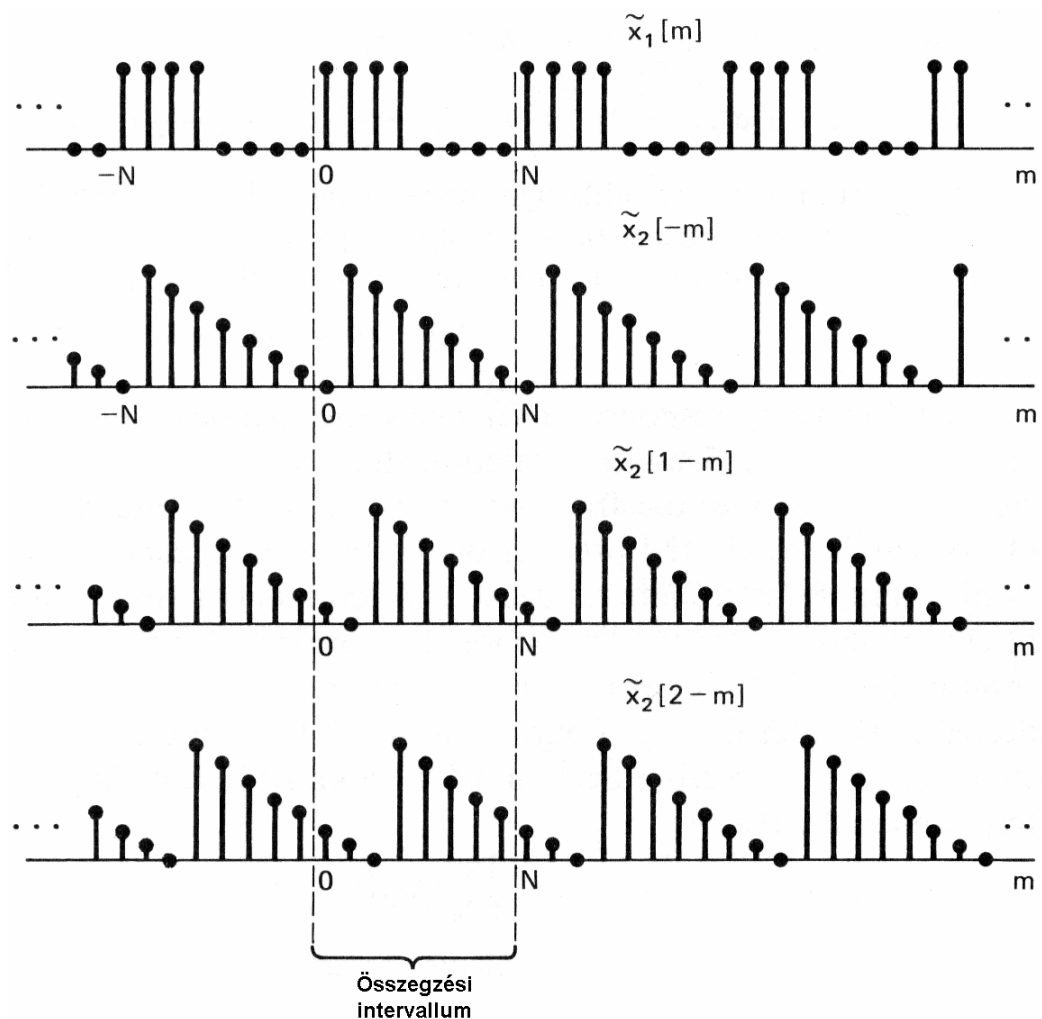
és ez garantálja, hogy a $h[n]$ függvény Fourier transzformáltja konvergens lesz. Ezért ennek az LTI rendszernek már létezni fog a frekvencia átviteli függvénye és emiatt a konvolúciós tétel alkalmazható lesz.

Ahogy azt az előzőekben is láthattuk, periodikus jelek esetén kicsit más a helyzet a konvolúció ügyében. Ugyanis direkt módon nem alkalmazható két periodikus jelre a konvolúció művelete mivel a konvolúciós összegzés nem lenne konvergens. Azonban bevezethetünk egy kiegészítő műveletet periodikus konvolúció néven amely által két N -el periodikus diszkrét jel $\tilde{x}_1[n]$, és $\tilde{x}_2[n]$ konvolúcióját tekintve:

$$\tilde{y}[n] = \tilde{x}_1[n] * \tilde{x}_2[n] = \sum_{m=\langle N \rangle} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m]$$

Ha ezt a speciális esetet követvén két egyenlő periódus idővel rendelkező, $\tilde{x}_1[n]$, $\tilde{x}_2[n]$ jel konvolúcióját tekintjük:





170. ábra A periodikus konvolúció lépési

Akkor elmondható hogy az eredmény Fourier együtthatói a következő képen alakulnak:

$$c_k = N a_k b_k$$

ahol a_k az $\tilde{x}_1[n]$ jel, b_k pedig az $\tilde{x}_2[n]$ jel Fourier együtthatói.

A leglényegesebb előnye ennek a tulajdonságnak a DFT alkalmazásával együtt főleg a különféle berendezések és eszközök működésének gyorsításában rejlik. A két elméleti eredmény együtt igen hatékony számolási módszert ad két aperiodikus jel konvolúciójának elvégzésére véges tartományon. Legyen $x_1[n]$ és $x_2[n]$ két véges szekvencia:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= 0, & \text{a } 0 \leq n \leq N_1 - 1 \text{ intervallumon kívül} \\ x_2[n] &= 0, & \text{a } 0 \leq n \leq N_2 - 1 \text{ intervallumon kívül} \end{aligned}$$

Legyen $y[n]$ az aperiodikus konvolúciója az $x_1[n]$, $x_2[n]$ jeleknek. Ekkor:

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = 0, \quad \text{a } 0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2 \text{ intervallumon kívül}$$

Tegyük fel, hogy választunk egy N egész számot amelyre igaz, hogy $N \geq N_1 + N_2 - 1$, és veszünk két N -el periodikus $\tilde{x}_1[n]$, $\tilde{x}_2[n]$ jelet, amelyre:

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[n], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$\tilde{x}_2[n] = x_2[n], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Legyen $\tilde{y}[n]$ az $\tilde{x}_1[n]$, $\tilde{x}_2[n]$ jeleknek periodikus konvolúciója. Ekkor:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=\langle N \rangle} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m]$$

Erre pedig igaz, hogy:

$$y[n] = \tilde{y}[n], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Így $y[n]$ aperiodikus konvolúciót, könnyen ki tudtuk számolni N megfelelően nagyra választásával a periodikus esetből. Sőt $\tilde{y}[n]$ Fourier együtthatóit is könnyen kit tudjuk számolni $x_1[n]$, $x_2[n]$ együtthatóinak szorzataként. Mivel $\tilde{y}[n]$, $\tilde{x}_1[n]$, $\tilde{x}_2[n]$ egyenlők $y[n]$, $x_1[n]$, $x_2[n]$ -el a $0 \leq n \leq N-1$ intervallumon, így a Fourier együtthatói ennek a három jelnek nem lesznek más mint a DFT-vel előálló $\tilde{Y}(k)$, $\tilde{X}_1(k)$, $\tilde{X}_2(k)$. Ezért most már eredményeinket összefoglalva egy igen gyors algoritmust tudunk készíteni $x_1[n]$, $x_2[n]$ aperiodikus konvolúciójának elvégzésére amely ráadásul könnyen meg is valósítható:

1. Kiszámítjuk DFT-vel $\tilde{X}_1(k)$ és $\tilde{X}_2(k)$, az adott $x_1[n]$, $x_2[n]$ szekvenciákból.
2. Ezeket a DFT-ket összeszorozzuk, hogy $y[n]$ DFT-jét megkapjuk:
 $\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k)$
3. Ezután inverz DFT-vel megkapjuk $y[n]$ -et.

Az egyetlen egy kikötés pedig amit a figyelembe kell vennünk, hogy $N \geq N_1 + N_2 - 1$, azaz N -pontos DFT műveletet kell végrehajtanunk. Ráadásul ezt a DFT-t könnyen gyorsan kiszámíthatjuk gyors Fourier transzformáció segítségével.

4.7.11. Modulációs tulajdonság (The Modulation Property)

Amint azt a folytonos esetben megismertük, a modulációs tulajdonság analóg módon a diszkrét esetben is él.

Levezetésünkhöz vizsgáljunk meg az $y[n]$ jelet amely két jel szorzata:

$$y[n] = x_1[n] x_2[n]$$

Ekkor:

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] x_2[n] e^{-j\Omega n}$$

Mivel

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) e^{j\theta n} d\theta$$

Ezért:

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) e^{j\theta n} d\theta \right\} e^{-j\Omega n}$$

Felcserélve az összegképzést az integrálással:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] e^{-j(\Omega-\theta)n} \right\} d\theta$$

Ebből viszont következik, hogy:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) X_2(\Omega - \theta) d\theta$$

A modulációs tulajdonság fontosságával majd a későbbi fejezetekben foglalkozunk.

4.7.12. Dualitási tétel (Theorem of Duality)

4.7.12.1. Diszkrét idejű Fourier sorok dualitása (Duality of Discrete-Time Fourier Series)

Polytonos esetben már felfedeztük a szimmetria tulajdonságot, más néven a dualitást, az analitikus és a szintetikus egyenletünk kapcsán. Azonban diszkrét időben nem létezik ilyen dualitás az analízis és a szintézis egyenlete között. Viszont a dualitás máshol jelentkezik, nem a transzformálás során, ahogy azt az előbb is említettük, hanem a sorba fejtés, a Fourier sor reprezentáció során.

Vegyünk két periodikus jelet, amelyek periodikusak N -el. Tegyük fel, hogy ezen két jel között a kapcsolat az alábbi:

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r=\langle N \rangle} g[r] e^{-jr(2\pi/N)m}$$

Ekkor ha $m = k$ és $r = n$ akkor:

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} g[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Nos összehasonlítva ezt az analízis egyenlettel azt kapjuk, hogy $f[k]$ pont a Fourier együtthatóit adja meg $g[n]$ -nek. Azaz:

$$\mathcal{F}\{g[n]\} = f[k]$$

Így mivel ha $m = n$ és $r = -k$ akkor:

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} g[-k] e^{jk(2\pi/N)n}$$

Azt találjuk hogy $(1/N)g[-k]$ pedig pont $f[n]$ Fourier együtthatóit adja meg, így:

$$\mathcal{F}\{f[n]\} = \frac{1}{N} g[-k]$$

Azaz mivel egy periodikus $x[n]$ jel spektrális együtthatói a_k -k maguk is periodikus jelsort alkotnak, így az ő Fourier soruk is létezik és együtthatóit pontosan $(1/N)x[-n]$ fogja megadni. Emiatt bármely diszkrét periodikus jelre él

a dualitás tétele, azaz bármelyik ilyen jelnek létezik egy duálisa amelyre igaz, hogy:

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = a_k$$

$$\mathcal{F}\{a_n\} = \frac{1}{N} x[-k]$$

4.7.12.2. A diszkrét idejű Fourier transzformált és a folytonos idejű Fourier sorok dualitása (Duality of Discrete-Time Fourier Transform and Continuous-Time Fourier Series)

A fenti dualitás mellett még egy dualitás létezik, azonban ez a diszkrét idejű Fourier transzformált és a folytonos idejű Fourier sorok között áll fenn. Hasonlítsuk össze a folytonos Fourier sorok és a diszkrét transzformáció egyenleteit:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

A hasonlóság máris szembeötlő.

Nézzük most az $f(u)$ folytonos periodikus jelet, ami 2π -vel periodikus, és legyen $g[m]$ egy olyan diszkrét jel amellyel $f(u)$ az alábbi kapcsolatban van:

$$f(u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g[m] e^{-jum}$$

Legyen most $u = \Omega$ és $m = n$, ekkor jól látható, hogy $f(\Omega)$ a diszkrét Fourier transzformáltja a $g[n]$ jelnek.

$$\mathcal{F}\{g[n]\} = f(\Omega)$$

De, ez által $g[m]$ kinyerhető $f(u)$ -ból inverz transzformációval:

$$g[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(u) e^{jum} du$$

Ekkor ha $u = t$ és $m = -k$, azt kapjuk hogy mivel $f(t)$ pontosan $T_0 = 2\pi$ -vel periodikus így $g[-k]$ az $f(t)$ jel Fourier együtthatóinak sorozatával egyenlő, azaz:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[-k] e^{-jk\omega_0 t}$$

Így ha két 2π -vel periodikus jel konvolúcióját vesszük folytonos időben akkor arra azt kapjuk, hogy:

$$\int_{2\pi} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (2\pi a_k b_k) e^{-jk\omega_0 t}$$

Ennek duálisa:

$$\mathcal{F}\{x[n]y[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) X_2(\Omega - \theta) d\theta$$

Még számtalan ilyen és ehhez hasonló összefüggés vezethető le a dualitás tételéből, de ezekkel mi most itt nem foglalkozunk bővebben. Maga a tulajdonság ismerete a lényeges. Hogy még jobban kihangsúlyozzuk ezen összefüggéseket egy táblázatban foglaltuk össze eddigi ismereteinket a dualitásról:

A Fourier sorok és transzformáltak alakjainak összefoglaló táblázata			
	Folytonos idő		Diszkrét idő
	Idő tartomány	Frekvencia tartomány	Idő tartomány
Fourier Sorok	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ időben folytonos és periodikus	$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ frekvenciában diszkrét és aperiodikus	$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ időben diszkrét és periodikus
	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ időben folytonos és aperiodikus	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ frekvenciában folytonos és aperiodikus	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$ frekvenciában diszkrét és periodikus
Fourier Transzformáltak			

171. ábra A transzformáltak és sorok dualitási kapcsolata

4.8. A Fourier transzformált ábrázolása (Representation of the Fourier Transform)

Diszkrét időben a Fourier transzformáltat általában egy féle képen szokták ábrázolni mégpedig az amplitúdó és a fázis változását logaritmikus egységek segítségével.

4.8.1. Spektrum

Ahogy azt a folytonos esetben is láttuk és az előzőek során diszkrét esetben is megmutattuk, a rendszer kimenete előáll a következő féle képen:

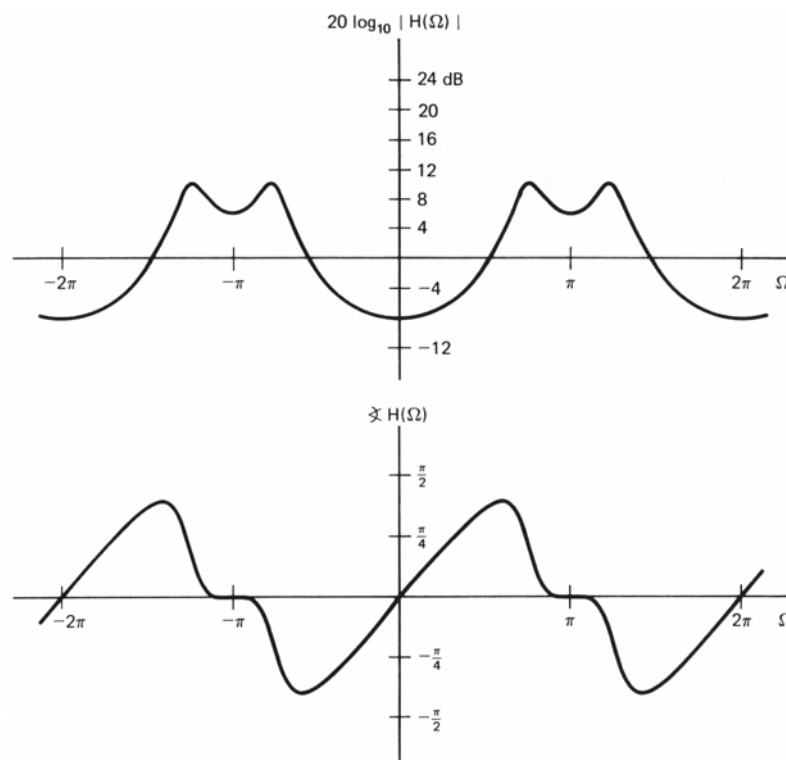
$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

Ha most ezen komplex függvényeket felírjuk poláris alakban:

$$|Y(\Omega)| = |H(\Omega)| \cdot |X(\Omega)|$$

$$\varphi_Y(\Omega) = \varphi_H(\Omega) + \varphi_X(\Omega)$$

Azaz jól láthatóan itt is az amplitúdó változás független a fázistól és a fázis függvénye is független az amplitúdótól. Úgy ahogy folytonos esetben itt is külön-külön ábrázolhatjuk tehát e két jellemző változását a frekvencia függvényében. A folytonos esetben a Bode diagrammok kapcsán a logaritmikus egységek használata lehetővé tette, hogy egy széles spektrumon ábrázolhassuk az amplitúdó és a fázis változását, így nyerve igen hatékony és szemléletes grafikus reprezentációt. Azonban mivel diszkrét esetben a frekvenciában, mind az amplitúdó mind a fázis periodikus, ezért nem lenne szerencsés a frekvencia tengelyt logaritmizálni. Másrészt, egyetlen periódus ábrázolásával leírtnak tekinthetjük az egész transzformáltat. Ezért bár gyakran az értékeket magát logaritmizálják, a grafikon mégis lineáris-lineáris (lin-lin) koordináta rendszer alapján rajzolandó ellentétben a Bode lineáris-logaritmikus (lin-log) szemléltetésével.



172. ábra Az amplitúdó és fázis spektrum ábrázolása

4.9. Differencia egyenletek reprezentációja és kapcsolata a Fourier transzformálttal (Representation and Calculation of the Difference Equations with their Fourier Transform)

Legyen adott egy LTI rendszerünk az alábbi differencia egyenlet által:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

A kérdés az, hogy a fenti rendszer frekvencia válaszát milyen módon tudnánk meghatározni.

Vegyük mind a bemenet, mind a kimenet Fourier transzformáltját ekkor:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^N a_k y[n-k]\right\} &= \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^M b_k x[n-k]\right\} \\ \sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F}\{y[n-k]\} &= \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F}\{x[n-k]\} \\ \sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega} Y(\Omega) &= \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega} X(\Omega) \\ H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}} \end{aligned}$$

Összehasonlítva eredményünket a folytonos esettel, látható, hogy diszkrét esetben a frekvencia átviteli függvény polinomiálisok aránya lesz, amely polinomiálisokban $e^{-j\Omega}$ szerepel változóként.

Mivel bármely polinom felbontható elsőfokú polinomok szorzatára, ezért a frekvencia átviteli függvény felírható egy másik alakban diszkrét esetben is:

$$H(\Omega) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 + \mu_k e^{-j\Omega})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 + \eta_k e^{-j\Omega})}$$

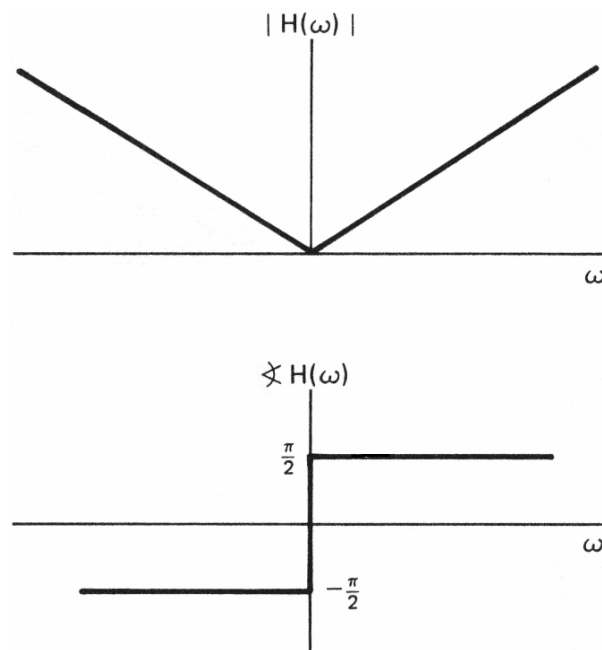
5. Szűrés (Filtering)

Bármely olyan megvalósítása a digitális jelfeldolgozásnak amely a jel relatív amplitúdójának vagy a frekvencia komponenseinek megváltoztatását végzi, összefoglaló néven szűrést végez, vagyis szűrőként működik. Az LTI rendszerek egyik fontos tulajdonsága volt, hogy a kimenetük spektruma a bemenet spektrumának a frekvencia átviteli függvénnyel való szorzatából állt össze. Így megfelelő átviteli függvény választása esetén, azaz a szűrő hangolásával, a szűrni kívánt kritériumoknak megfelelő jel állítható elő a kimeneten. Ez a tény számtalan elektronikus eszköz működésében játszik szerepet mindennapi életünkben. Ilyenek például az audio berendezések, ahol lineáris időinvariáns szűrők gondoskodnak arról, hogy a felhasználó, azaz a hallgató számára lehetővé tegyék, hogy a kimeneti jel alacsony frekvenciájú komponenseinek (bass) és magas frekvenciájú komponenseinek (treble) relatív energia arányát megváltoztathassa. Másik példának lehet az equalizer, amely a hangszórók frekvencia válasz függvényének és a hangtér torzító szerepének kompenzálására tervezett áramkör.

A szűrők egyik másik nagy csoportját differenciáló szűrőknek nevezzük, amelyek a kimenet bizonytalanságát szűrik ki a szűrő bemenetének differenciálása által. Ilyen szűrő közvetlenül megadható a Fourier transzformációból ismert deriválási tulajdonság által, azaz ha

$$H(\omega) = j\omega$$

akkor a frekvencia átviteli függvénnyel való szorzás nyomán lényegében időben differenciálunk. A differenciáló szűrő frekvencia válaszának amplitúdó és fázis diagramja tehát:



173. ábra Differenciáló szűrő frekvencia válaszáinak amplitúdó és fázis spektruma

Ilyen szűrőket főleg a képfeldolgozás során használnak, ahol a szűrő hatására a kép élei válnak láthatóvá míg a kép többi részlete eltűnik, lényegében a képen az egységes alakzatokat határoló vonalak maradnak csak meg.

Ezen fejezet további részében csupán bepillantunk a szűrők világába, megemlítve azokra vonatkozó legfontosabb ismereteket. Azonban mivel ez a nagyirányú ipari felhasználás miatt igen kiterjedt szakterület ezért az itt megemlítették tényleg csak a legalapvetőbb ismereteket villantják fel.

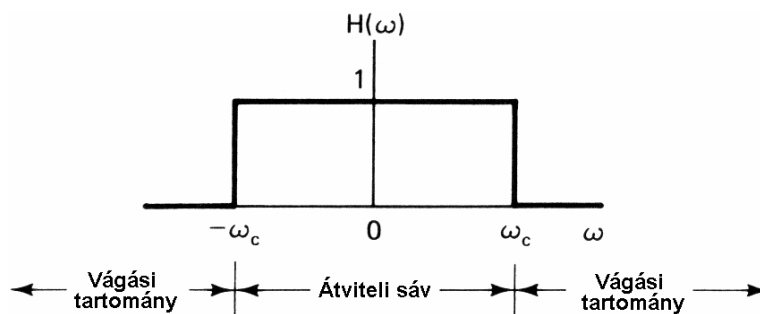
5.1. Ideális frekvencia szelektív szűrők (Ideal Frequency Selective Filters)

5.1.1. Frekvencia tartománybeli jellemzők (Characteristics in Frequency-Domain)

Maga a szűrés matematikai elgondolása nélkülözhetetlenné teszi az LTI rendszerek azon tulajdonságát, hogy a válsz Fourier transzformáltja a rendszeren áthaladó bement Fourier transzformáltjának és a rendszer frekvencia átviteli függvényének, azaz az impulzus válasz függvény Fourier transzformáltjának a szorzata. Egy ideális frekvencia szelektív szűrő tehát egy olyan szűrő amely a komplex exponenciálisok halmazának egy bizonyos frekvencia tartományba eső részét átereszt a többi pedig nem. A frekvencia válsz függvénye egy ilyen frekvencia szelektív szűrőnek tehát olyan függvény, amely átereszt a komplex exponenciális $e^{j\omega t}$ függvényt ha $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$ tartományba esik a frekvenciája és nem ereszt át ha nem esik a tartományba. Mivel az áteresztés jelen esetben azt jelenti, hogy a kimeneten ugyanaz az exponenciális függvény jelenik meg mint a bemeneten kaptunk, az át nem eresztés pedig jel nélküli kimenet jelent aktív bemenet esetén, így $H(\omega)$ a következő féle képen alakul:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

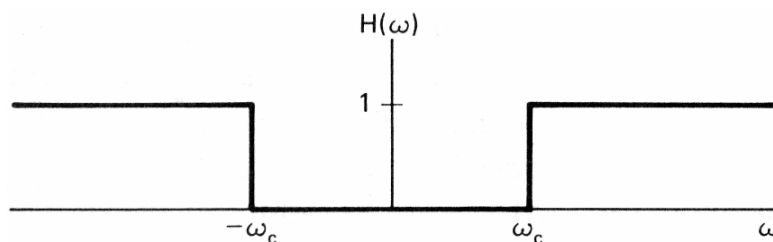
Ábrázolva:



174. ábra Ideális alul áteresztő szűrő frekvencia válaszfüggvénye

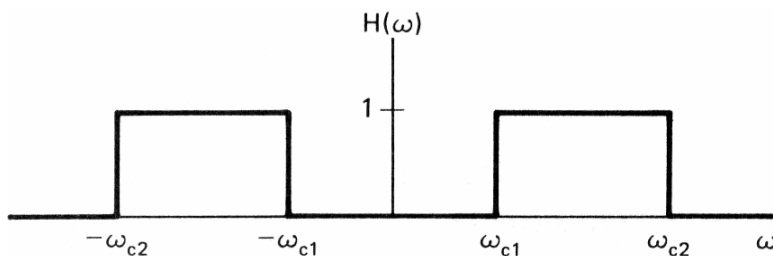
Egy ilyen frekvencia átviteli függvénnyel jellemzett rendszert ideális alul áteresztő (lowpass) szűrőnek nevezünk, mivel a 0-hoz közeli frekvencia sávban engedi át csak a jeleket. A frekvencia tartomány amelyet a szűrő átereszt, átviteli sávnak (passband) hívjuk, azokat a frekvencia értékeket amelyeket a szűrő nem ereszt át levágási tartománynak (stopband) nevezzük. A két tartomány határát jelképező ω_c pedig a vágási frekvencia (cutoff frequency) nevet kapta.

Két másik ilyen ideális szűrő is fontos szerepet játszik, az egyiket felüláteresztő (highpass)



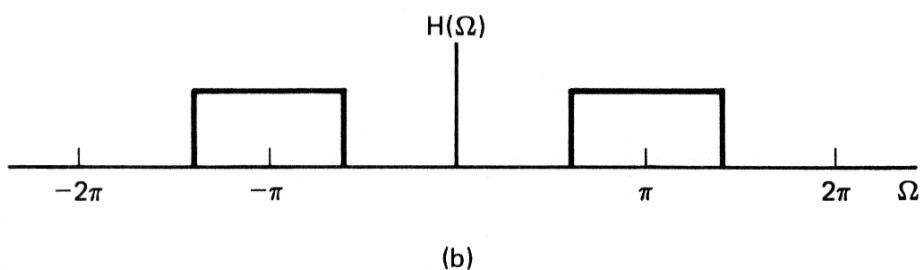
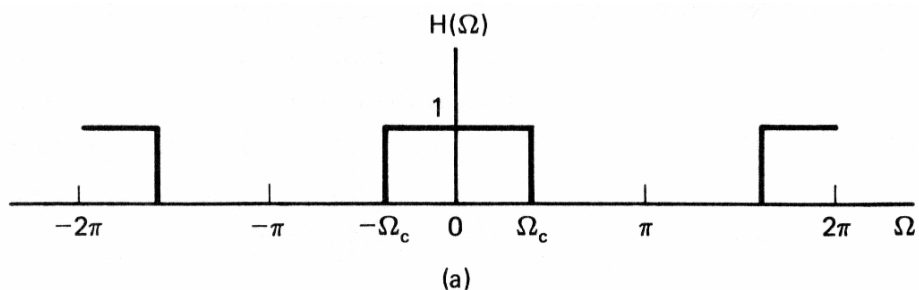
175. ábra Ideális felüláteresztő szűrő

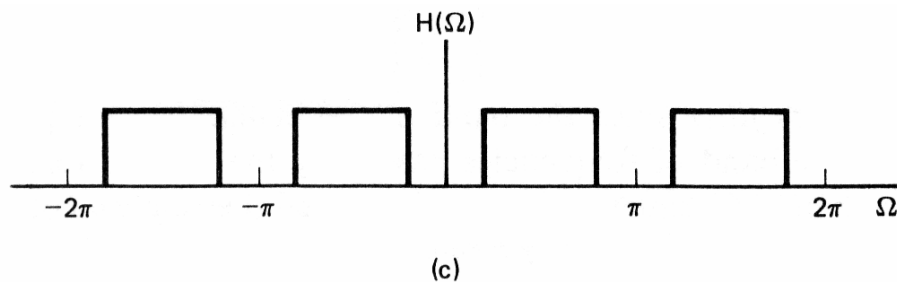
a másikat pedig sáváteresztő (bandpass) szűrőnek hívjuk aszerint, hogy milyen frekvencia sávot eresztenek át.



176. ábra Ideális sáváteresztő szűrő

Diszkrét esetben a helyzet változatlan, attól eltekintve, hogy mivel a frekvencia reprezentáció periodikus ezért a frekvencia karakterisztikája a szűrőknek ugyancsak periodikusnak kell lennie, hiszen bármely periódusban szűrnie kell az alacsony, 2π többszöröseihez közeli, vagy a magas, π többszöröseihez közeli frekvenciájú jelösszetevőket. Így $H(\Omega)$ periodikus függvény 2π periódus idővel, és az alul, felül és sáv áteresztésnek megfelelő átviteli függvények pedig az alábbi módon néznek ki:

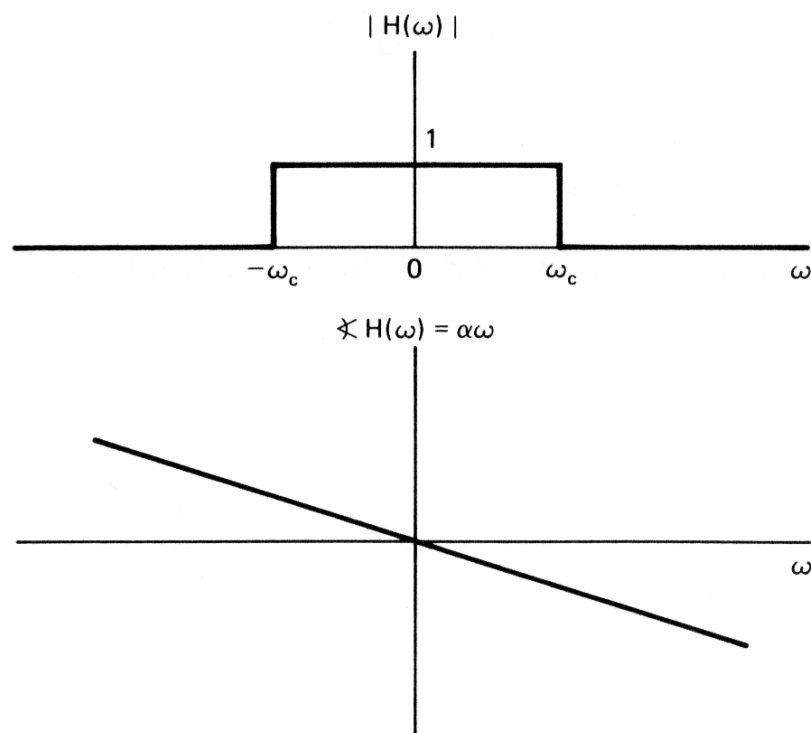




177. ábra Ideális diszkrét (a) alul; (b) felül; (c) sáváteresztő szűrő

Fontos megjegyezni, hogy mivel ideálisak a szűrők így vagy 1 vagy 0 a frekvencia átviteli függvényük, azaz a jel fázisa nem változik rajtuk való áthaladáskor, ezért a jel nem torzul. Így azonban az ideális szűrők fázisa zérus bármely frekvenciára nézve, tehát fázis diagramjuk is konstans nulla. Azonban az előző fejezetek során sok példát láthattunk ahol a rendszer frekvencia válasz függvények fázis változása miatt a jel sokszor torzulást szenvedett anélkül, hogy a frekvencia komponensek amplitúdóját drasztikusan módosítottuk volna. Ebből viszont az következik, hogy az ideális eset, még matematikai értelemben is ideális, mivel relatíve elég kevés olyan rendszer létezik amelyik ilyen ideális frekvencia szelektív karakterisztikával rendelkezne.

Egy másik speciális eset amikor a jel torzítása a fázis változás miatt lineáris, azaz a rendszer olyan frekvencia átviteli függvénnyel rendelkezik amely a fázisában lineárisan változik. Ilyen alul áteresztő szűrőre példa folytonos esetben az alábbi karakterisztika:



178. ábra Ideális alul áteresztő szűrő lineáris fázisváltozással

Lényegében a lineáris fázis változás időtolást eredményez a szűrt jelre nézve, és ez igaz mind folytonos, mind diszkrét esetben.

5.1.2. Idő tartománybéli jellemzők (Characteristics in Time-Domain)

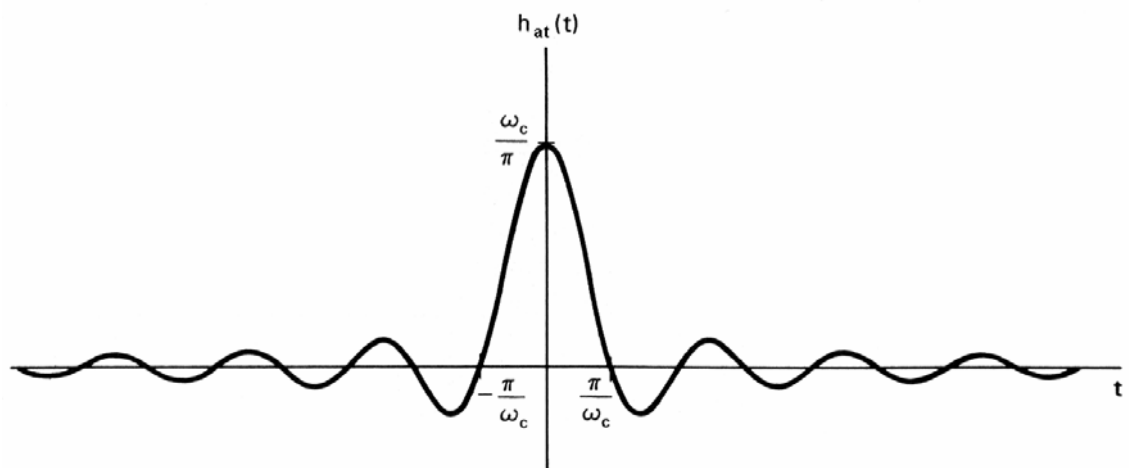
Eddig csupán a frekvencia tartománybéli karakterisztikára koncentráltunk, azonban a szűrők tervezésekor és hangolásánál igen fontos szerepet játszik a szűrő időtartományban való viselkedése, azaz például impulzus válasz függvényének alakja, hisz valamely módon ezeket a matematikai eredményeket meg is szeretnénk valósítani.

Az elkövetkezők során az ideális alul áteresztő szűrőn mutatjuk be a jellemzőket mind folytonos, mind diszkrét esetben.

Az ideális alul áteresztő szűrő impulzus válasz függvénye az inverz Fourier transzformáltja lesz a frekvencia tartománybéli karakterisztikának, amely a már oly sokszor vizsgált aperiodikus négyszög jellel egyenlő. Erre beláttuk a folytonos Fourier transzformációval való ismerkedés során, hogy inverz transzformáltja:

$$h_{at}(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$

Amit ábrázolva idő szerint:

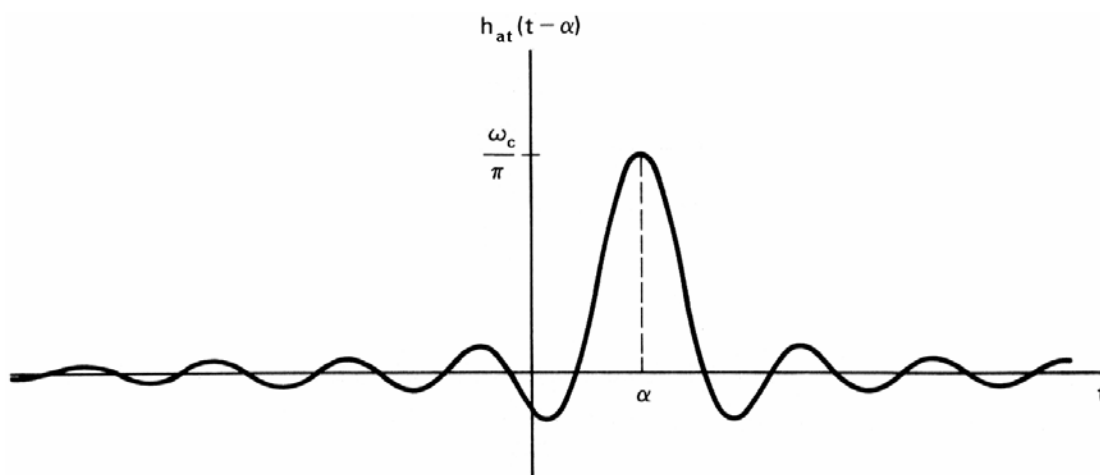


179. ábra Ideális alul áteresztő szűrő impulzus válasz függvénye

kapjuk. Jól látható, hogy az időfüggvény nagysága a nullában a szűrő vágási frekvenciájával, ω_c -vel arányos, és ezzel együtt az amplitúdó nagysága a teljes tartományon is arányos ω_c -vel, míg a nullában tapasztalható fő hullám szélessége pedig fordítottan arányos, és ezzel együtt a fluktuációk szélessége is fordítottan arányos a vágási frekvenciával a teljes tartományon.

Ahogy az áteresztési sávja a szűrőnek nő, az időfüggvénye úgy válik egyre keskenyebbé, ha pedig csökken akkor szélesebbé. Természetesen ez a hasonlósági tételnek, azaz a skálázási tulajdonságnak köszönhető.

Ha most lineáris fázis változással egészítjük ki ideális szűrőnket α meredekséggel akkor az, az időtartományban α -val való késleltetesként jelentkezik:

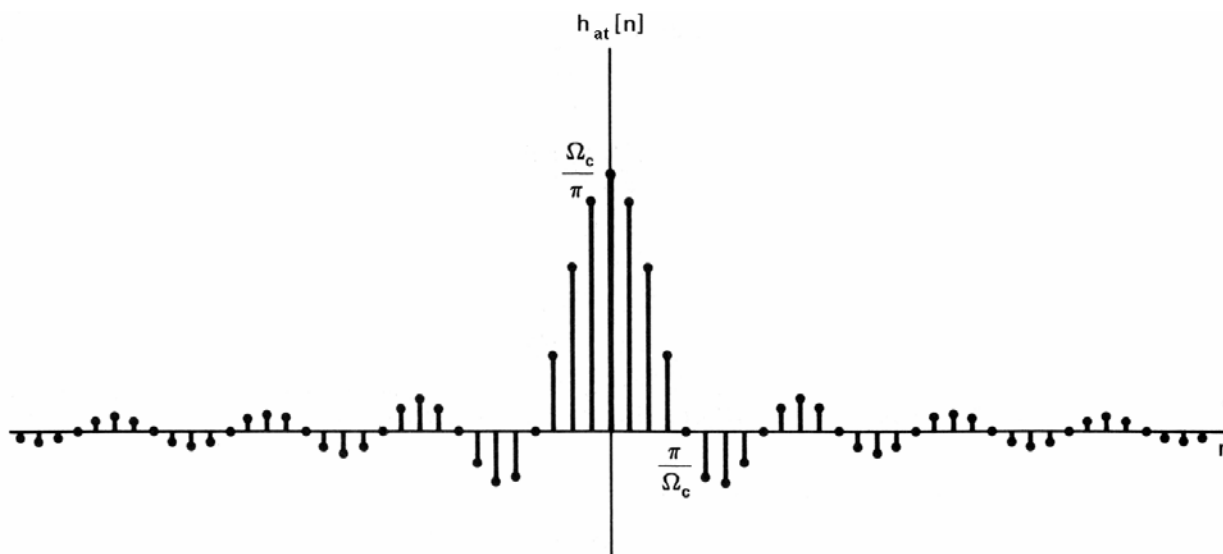


180. ábra Ideális alul áteresztő, lineáris fázis változású szűrő impulzus válasz függvénye

Diszkrét esetben is, a már taglalt példa értelmében, az impulzus átviteli függvény az alábbi lesz ideális alul áteresztő szűrő esetén:

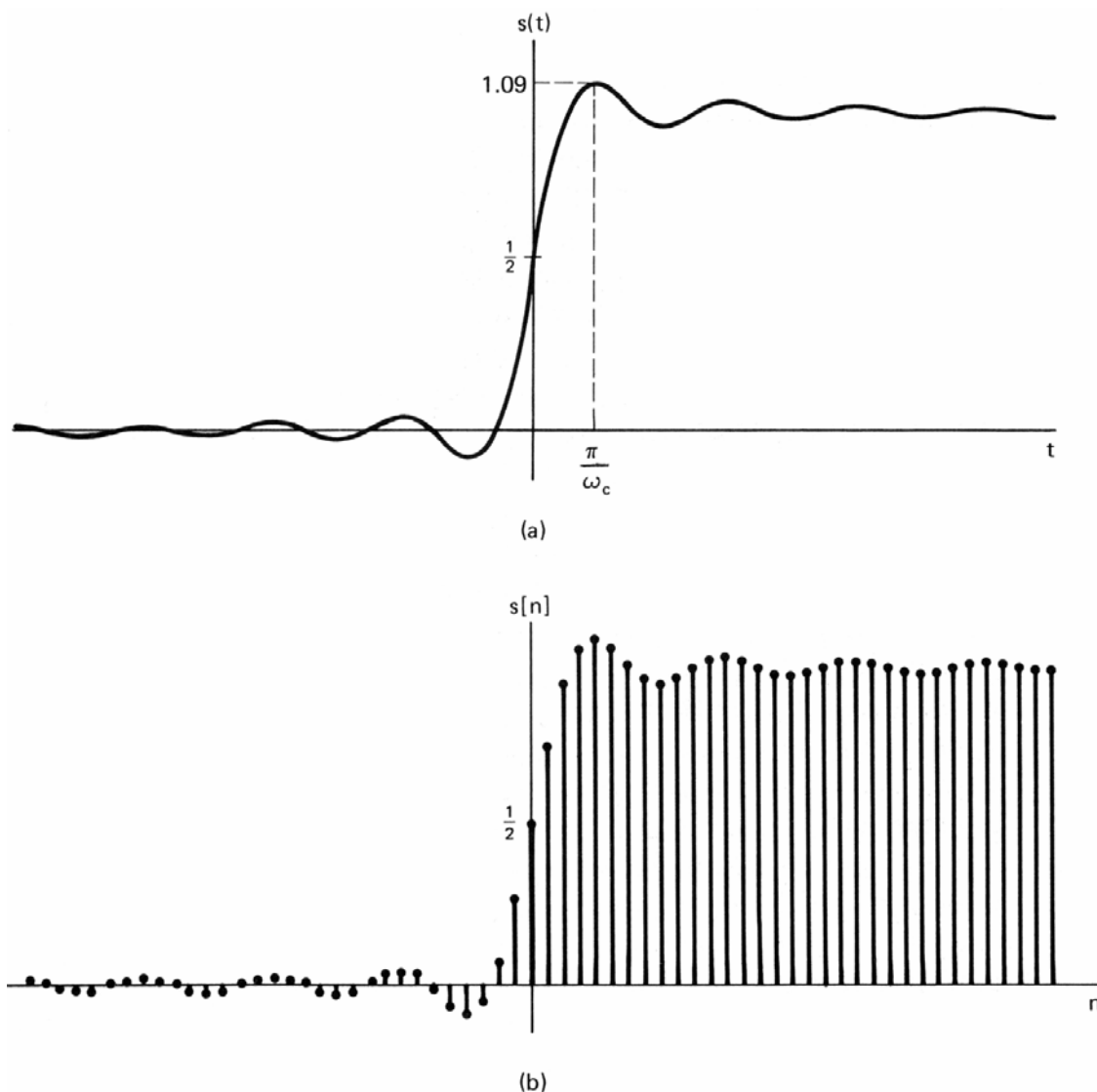
$$h_{at}[n] = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sin}_c\left(\frac{\Omega_c n}{\pi}\right)$$

Amit $\Omega_c = \pi/4$ esetén ábrázolva:



181. ábra Ideális, diszkrét alul áteresztő szűrő frekvencia válasz függvénye

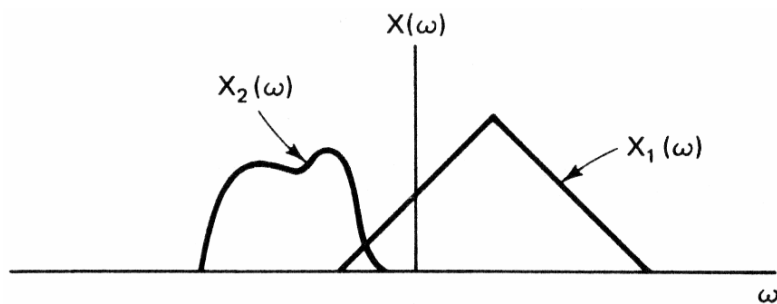
Ha most az egység ugrás függvényre adott válaszát tekintjük az ideális alul áteresztő szűrőnek mind folytonos mind diszkrét esetben, akkor azt tapasztaljuk, hogy egy túl lövés után csillapodó fluktuációval áll be a rendszer az egyéngnyi értékhez, így nagyon hasonlóan viselkedik mint egy másodrendű rendszer.



182. ábra Az ideális alul áteresztő szűrő egységugrás válasz függvénye
(a) folytonos (b) diszkrét esetben

5.2. Nem ideális frekvencia szelektív szűrők (Nonideal Frequency Selective Filters)

Az előzőekben tárgyalt szűrők azért voltak ideálisak mert pontosan definiálható frekvencia tartományon engedték át a jeleket, és a fennmaradó tartományon lévő jeleket pedig teljesen kiszűrték. Azonban ez nemcsak megvalósíthatatlan fizikai eszközökkel, hanem nem biztos, hogy célszerű is. Sok jelfeldolgozási feladatban előfordul, hogy olyan jeleket szeretnénk szeparálni egymástól amelyek spektruma egymásba tolódik.

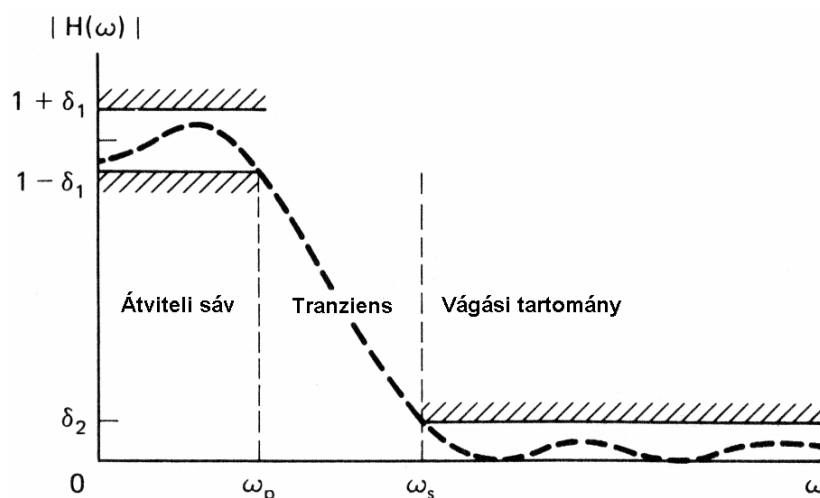


183. ábra Enyhén átlapolódó spektrumok

Ekkor célszerű olyan szűrőt használni amely a vágási és az áteresztési tartománya valamilyen tranziens jelleggel kapcsolódik, nem pedig egység ugrás szerűen. Így két jel összegéből mégis kiszűrhető az egyik vagy a másik jel.

A másik ok ami miatt az ideális szűrőkkel szemben a nem ideálosokat preferáljuk, az, hogy amint az láthattuk az egység ugrásra adott válasza az ideális aluláteresztő szűrőnek túllövést és csillapodó fluktuációt tartalmaz, ami nem kívánatos tulajdonság egy áramkörü elemnél. Ezzel szemben a nem ideális esetben pont az ugrás helyetti tranziens frekvencia átvitel változás miatt exponenciális beállítás fogja jellemezni az egység ugrás választ a szűrőnek, ami sokkal kedvezőbb mint az esetleges túlterhelést és zajt eredményező fluktuáció.

A nem ideális szűrők tehát tranzienssel mennek át a vágási tartományba ezért frekvencia átviteli függvényük jellemzői a következő féle képen alakulnak:



184. ábra Nem ideális szűrők spektrumát jellemző tartományok

Azt a tartományt nevezzük itt áteresztési sávnak, ahol az amplitúdó karakterisztikában valamely maximum δ_1 eltéréssel ingadozik 1 körül az átviteli érték. Ezt a δ_1 -et az átviteli fodrozódás maximális értékének (passband ripple) hívjuk. Amint az átvitel amplitúdója kilép ebből a tartományból, azaz az ingadozás túllépi a δ_1 értéket, ekkor már a tranziens szakaszban vagyunk. A tranziens szakasz hossza illetve meredeksége jellemzi a szűrés élességét és egyben a szűrő instabilitásra való hajlamát is. A tranziens tartományt nagyságával jelöljük, amit tranziens sávnak (transition band)

$$\Delta\omega_t = \omega_p - \omega_s$$

hívunk. Vágási tartományról akkor beszélünk amikor az átvitel amplitúdója már nulla körül ingadozik maximum δ_2 eltéréssel. Ezt a δ_2 -et a vágási fodrozódás maximális értékének (stopband ripple) nevezzük. A tartományokat határoló frekvenciákat áteresztési frekvenciának (passband edge) hívjuk és ω_p -vel jelöljük és vágási frekvenciának (stopband edge) hívjuk és ω_s -sel jelöljük.

Ezzel a négy adattal:

$$\omega_1, \delta_1, \omega_2, \delta_2$$

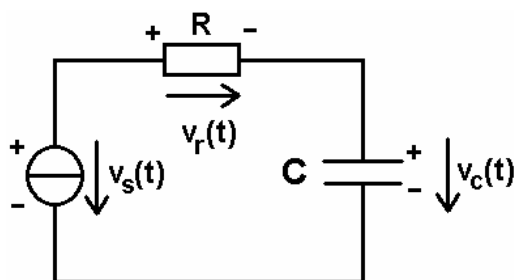
bármely nem ideális alul áteresztő szűrő jellemezhető. Természetesen a felül és sáv áteresztő szűrők esetében is analóg módon használhatóak ezek a terminusok. Persze vannak olyan problémák ahol az ideális szűrő alkalmazása lenne a leginkább kívánatos. Sajnos az ideális szűrők, ahogy azt alul áteresztő esetben az impulzus válasz függvényen is láthattuk, nem kauzálisak. Így minél inkább törekszünk megvalósításukra fizikai eszközökkel annál inkább előre jósó rendszerek, algoritmusok és mindezek miatt egyre több pénzre van szükségünk. Mivel a tökéletes nem kauzalitás elérése fizikailag is lehetetlen, így csupán azt közelítő rendszereket tudunk tervezni és építeni. Ráadásul a fizikai jelek sem tökéletesek és így szűrésük sem történhet mindenféle zavartól mentesen, ezért sok esetben egyszerű áramköri elemekből, vagy diszkrét esetben egyszerű műveletvégző struktúrákkal megépített szűrők is kielégítő eredményre vezetnek.

5.3. Folytonos idejű differenciál egyenletekkel megadható frekvencia szelektív szűrők (Continuous-Time Frequency-Selective Filters Described by Differential Equations)

Mivel a az elektronikai és mechanikai rendszerek általánosságában véve leírhatóak lineáris állandó együtthatós differenciál, vagy differencia egyenletekkel ezért a belőlük megvalósított nem ideális szűrők leírására is jól használhatóak ezen matematikai egyenletek. Ahogy azt az előzőek során láthattuk az ilyen differenciál és differencia egyenletek könnyen áttanszformálhatóak a frekvencia tartományban nekik megfelelő frekvencia átviteli függvényekké, amiből kézenfekvő az ötlet, hogy a kívánt átviteli karakterisztikát írjuk fel differenciál egyenletekkel és azokból a fizikai megvalósításhoz szükséges elemek és kapcsolatok már adódnak. Mivel a variációk és a lehetőség száma csak a megvalósításon fáradozó mérnök fantáziáján múlik ezért csupán két fontosabb példa nyomán tekintünk be ezen témakörbe.

5.3.1. RC aluláteresztő és feluláteresztő szűrő (RC Lowpass and Highpass Filters)

Az egyik legegyszerűbb folytonos idejű elsőrendű szűrő az RC soros kapcsolás, ahol egy ideális kondenzátor és egy ellenállás soros kapcsolásával kapunk szűrőt.



185. ábra Elsőrendű RC szűrő

Ha a kondenzátor feszültségét tekintjük a rendszer kimenetének, és bemenetnek az RC kör kapcsinak feszültségét akkor az alábbi differenciál egyenlet írja le rendszerünket:

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t)$$

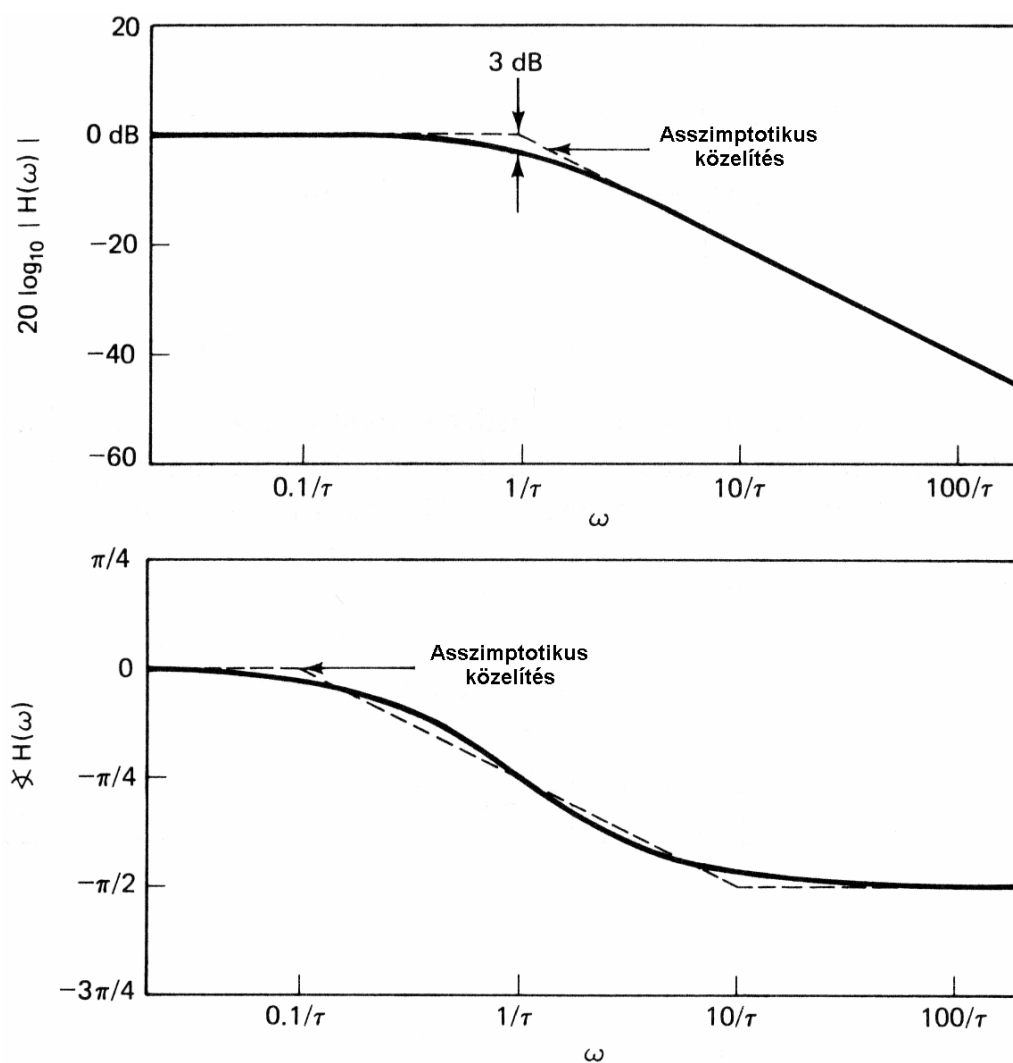
Az egyenlet mivel elsőrendű, ezért könnyen átírható transzformált alakba:

$$(RCj\omega + 1) \cdot V_c(t) = V_s(t)$$

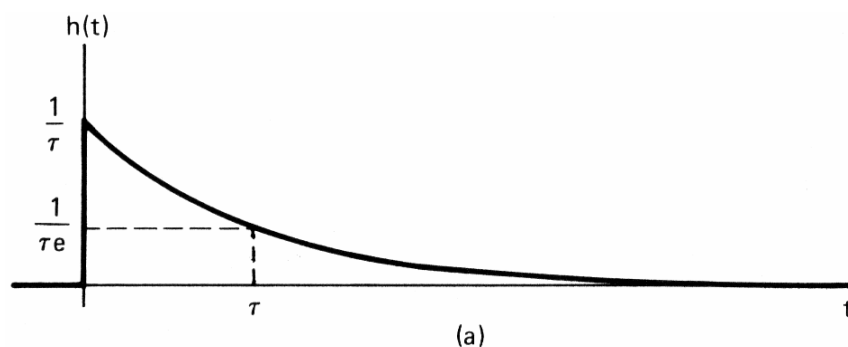
$$H(\omega) = \frac{1}{RCj\omega + 1}$$

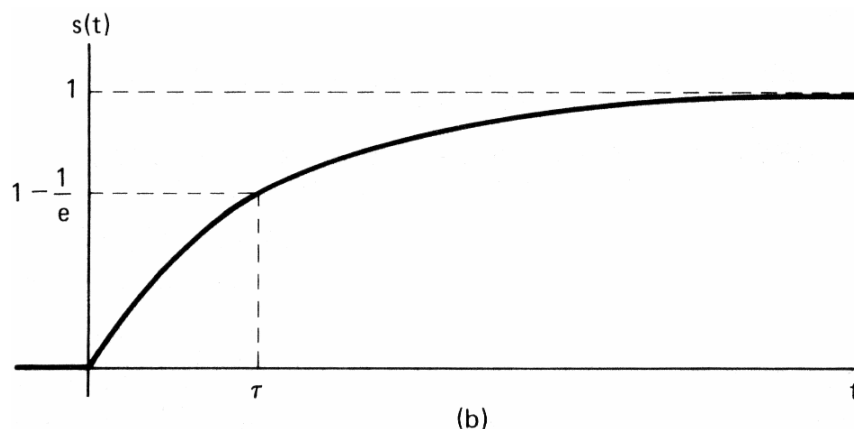
$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \cdot u(t)$$

Tehát az időállandó $\tau = RC$.



186. ábra Az elsőrendű RC szűrő frekvencia válaszáának Bode diagrammja a kondenzátor feszültségére nézve





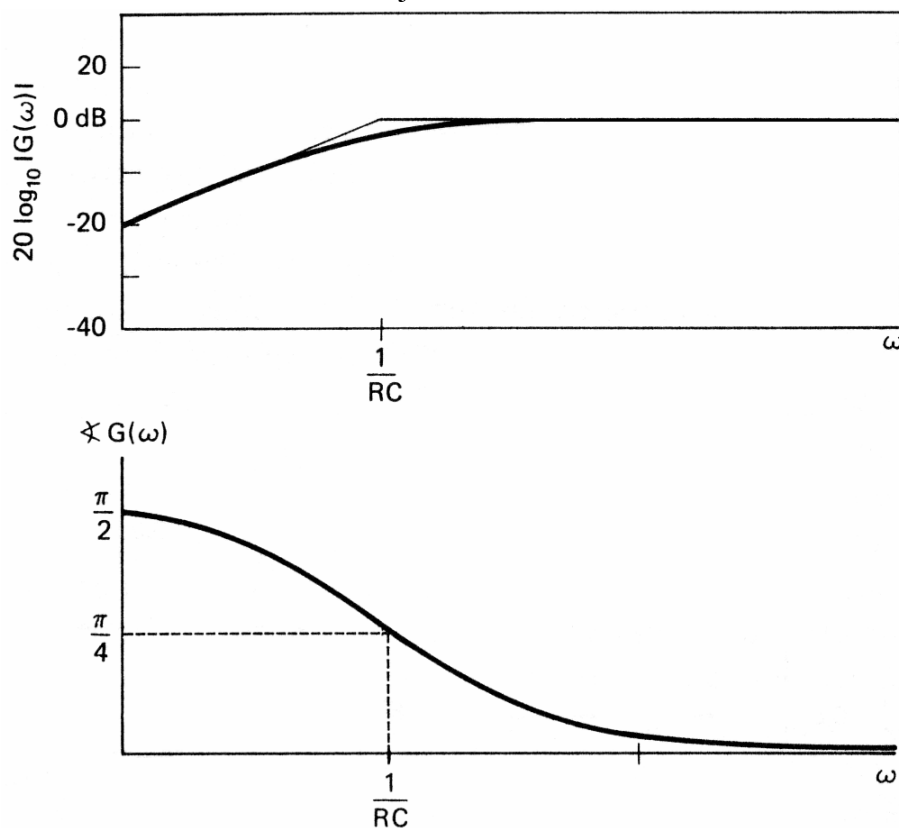
187. ábra Az RC szűrő (a) impulzus; (b) egységugrás válasz függvénye a kondenzátor feszültségére nézve

Jól láthatóan alul áteresztő szűrőt kaptunk ami $1/\tau$ vágási frekvenciával rendelkezik.

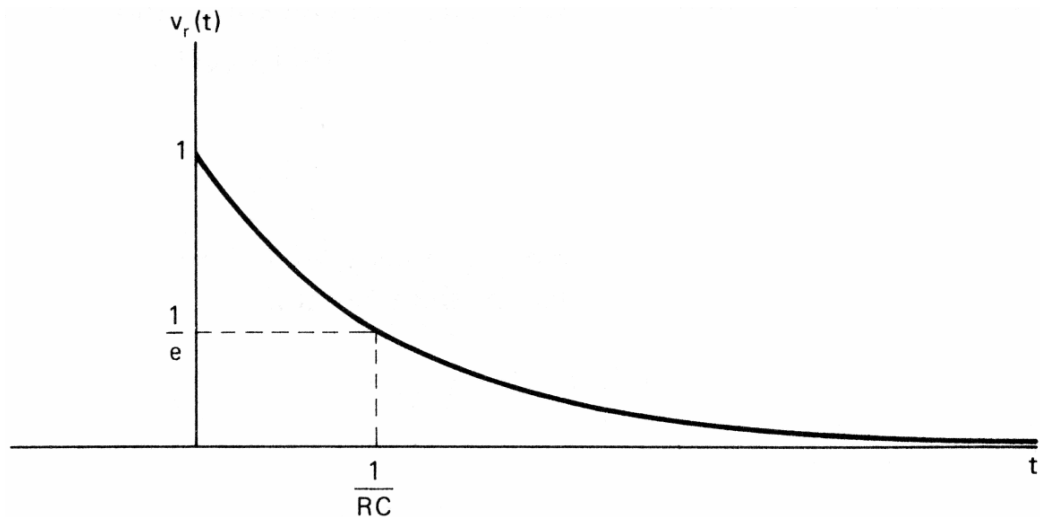
Ha most viszont a kondenzátor feszültsége helyett az ellenállás feszültségét vizsgáljuk:

$$RC \frac{dv_R(t)}{dt} + v_R(t) = RC \frac{dv_S(t)}{dt}$$

$$G(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$



188. ábra Az elsőrendű RC szűrő frekvencia válaszáának Bode diagrammja az ellenállás feszültségére nézve



189. ábra Az RC szűrő egységugrás válasz függvénye az ellenállás feszültségére nézve

Azonban így már felül áteresztő szűrőként viselkedik a rendszerünk.

Sajnos a tartományok közötti tranziens meredeksége nem befolyásolható R és C értékének megválasztásával, így ha élesebb szűrőre van szükségünk akkor komplexebb áramkört kell terveznünk, magasabb rendű szűrővel.

5.3.2. Magasabb rendű szűrők (Higher Ranked Filters)

Tekintsünk egy magasabb rendű szűrőre példát egy gépkocsi lengéscsillapító rendszere által.

Legyen y_0 nyugalmi helyzetben az alváz távolsága az úttól. Ekkor $y(t)$ az alváznak ettől a referencia ponttól való függőleges eltérülését adja meg az idő függvényében. Ha most $x(t)$ -vel az út kezdeti referencia pontjához képest való magasságbéli változását írja le az idő függvényeként, azaz ahogy a kerék alatt előrehaladáskor változik az út szintje akkor az alábbi differencia egyenletet írhatjuk fel a lengéscsillapító rendszer modellezésére:

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = kx(t) + b \frac{dx(t)}{dt}$$

Ahol M a kocsi tömege, k a rugalmassági állandó, b pedig a rezgés elnyelési tényezője a rendszernek. Ekkor a teljes rendszer frekvencia válasz függvénye:

$$H(\omega) = \frac{k + bj\omega}{(j\omega)^2 M + b(j\omega) + k}$$

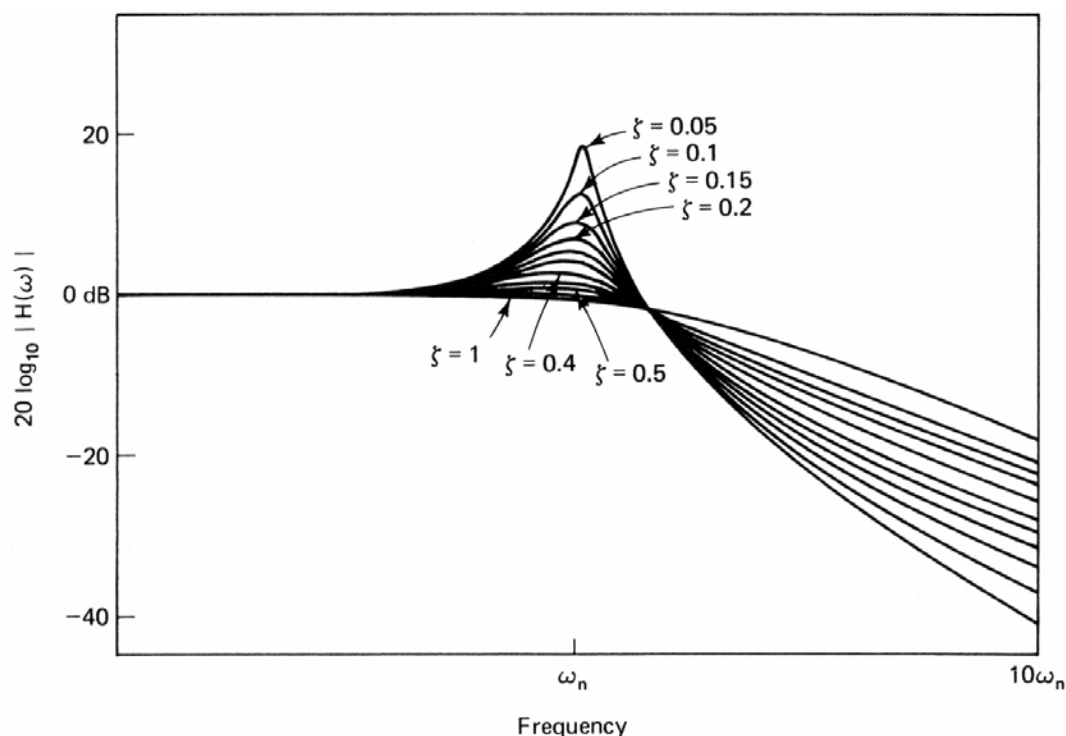
vagy

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

ahol

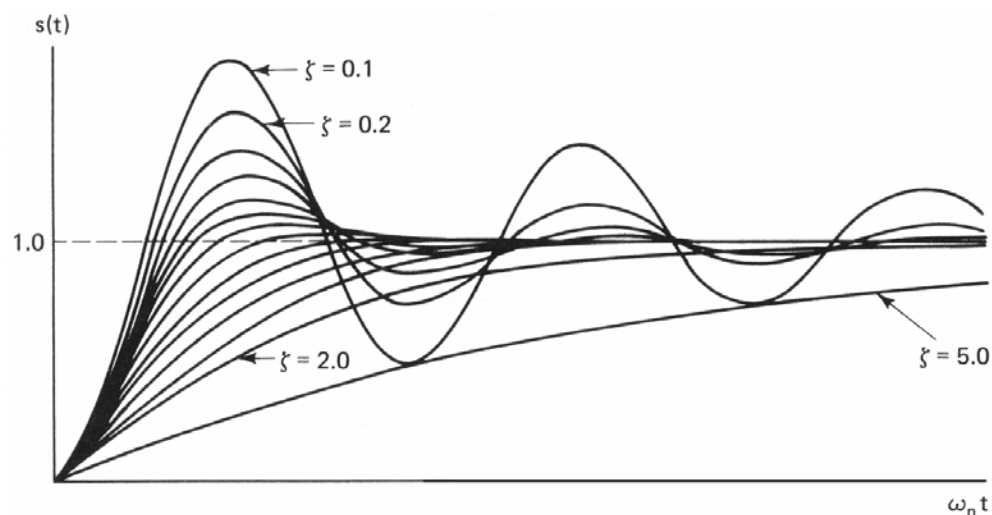
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{b}{M}$$

Így a nevező egy elsőrendű, a számláló pedig egy másodrendű rendszer. A Bode diagrammot megrajzolva, azt kapjuk, hogy:



190. ábra A lengéscsillapító rendszer Bode diagramja különböző ζ esetén

Ahol jól láthatóan a vágási frekvencia ω_n -en keresztül hangolható, ami fix tömegnél a k rugó állandó megválasztásával befolyásolható. Adott ω_n esetén a csillapítás meredeksége pedig b -vel van összefüggésbe. Ha ω_n -et csökkentjük akkor az alacsony frekvenciás zavarokat is kiszűrhetjük ami sokkal kényelmesebb utazást tesz lehetővé, azonban ha megvizsgáljuk a rendszer impulzus válaszát:



191. ábra A lengéscsillapító rendszer egységugrás válasza különböző ζ esetén

Jól látható, hogy ω_n csökkenésével egyre nagyobb túllövással és fluktuációval áll be a rendszer ami nem lágy ringatózást hanem nagy lengéseket, szinte állandó hullámzást okoz. Tehát az lenne a jó, ha kicsire tudnánk választani ω_n -et az

alacsony frekvenciás zavarok kiszűrésére, és így nem rázkódna az egész autó minden apró kavicsra, de az is jó lenne ha értéke nagy lenne és így lassú beállásával a rendszer lágyan ringatná az utastért. Ördögi, kör? Nem egészen. A mostani lengéscsillapító rendszerek már az út viszonyoknak megfelelően választják meg az állandók értékét, így alkalmazkodva mindig, téve a lehető legoptimálisabbá a csillapítást és így az utazás kényelmét. Azonban az ilyen rendszerek differenciál egyenletei már nem állandó együtthatós lineáris egyenletek, így megoldásuk is problémás lehet, megvalósításuk még inkább. Ezért a jelenlegi modern autókban már digitális jelprocesszorok kalkulálják minden pillanatra az optimális rugó feszességet vagy a sokk csillapítását a rendszernek.

5.4. Diszkrét idejű differencia egyenletekkel megadható frekvencia szelektív szűrők (Discrete-Time Frequency-Selective Filters Described by Difference Equations)

A diszkrét szűrők megvalósítása digitális technikai eszközökkel történik. Fő alkatrészeik szorzókból, összeadókból, késleltető és tároló regiszterekből állnak amik együttes működését differencia egyenletekkel írhatjuk le, ezért a diszkrét szűrők reprezentációjánál hasznos lehet a szűrőt differencia egyenlettel modellezni, mert így egyben a megvalósítás is kézenfekvővé válik.

A differencia egyenleteket két nagy csoportra oszthatjuk: rekurzív és nem rekurzív differencia egyenletekre aszerint, hogy az általa modellezett rendszer véges (nem rekurzív eset) vagy végtelen (rekurzív eset) impulzus válasz függvényrel rendelkezik-e. Mivel mindkét típusú differencia egyenlet más-más tulajdonságokkal rendelkezik, és így különböző szűrő családot definiálnak. A két esetet egymástól elkülönítve tárgyaljuk a továbbiakban. Fontos megjegyezni, hogy mindkét eset hasznos és gyakran használatos, csak a feladat specifikáció dönti el, melyiket érdemesebb vagy lehetséges használni. A rekurzív szűrőket gyakran IR (infinite impulse response) a nem rekurzív szűrőket pedig FIR (finite impulse response)ként említik a szakirodalomban.

5.4.1. Nem rekurzív diszkrét idejű szűrők (Nonrecursive Discrete-Time Filters)

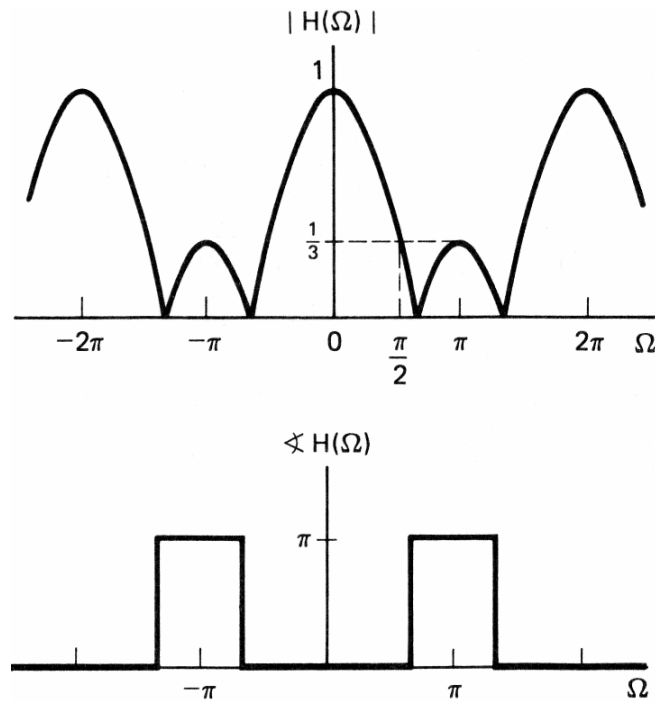
Az eddigiek során tárgyalt alul áteresztő szűrők lényegében egy simítást vittek véghez a jelen, mivel kiszűrték abból a nagyfrekvenciás komponenseket. A diszkrét jeleken végzett simítási eljárást gyakran mozgó átlag néven is nevezik, azért mivel $y[n]$ „simított” jelérték, bármely n -re nézve, a bemeneti $x[n]$ jel átlaga valamely n_0 hosszú intervallumon. A mozgó átlagolás ötlete a következő: ha a jel gyors változásainak átlagértékét veszem, akkor a nagyfrekvenciás, azaz a gyors változások ki simulnak a jelből, míg a kellően lassú változások megmaradnak. Tekintsük egy példát erre. Legyen adott az alábbi rendszerünk:

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n-1] + x[n] + x[n+1])$$

Tehát a kimenet a bemenet három egymást követő értékével egyenlő. Ez az egyenlet viszont egy konstans együtthatós lineáris differencia egyenlet, és így meghatározható a frekvencia átviteli függvény belőle:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{3}X(\Omega)(e^{-j\Omega} + 1 + e^{+j\Omega})$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{3}(1 + 2\cos(\Omega))$$



192. ábra A három pontos mozgó átlaggal számoló szűrő amplitúdó és fázis spektruma

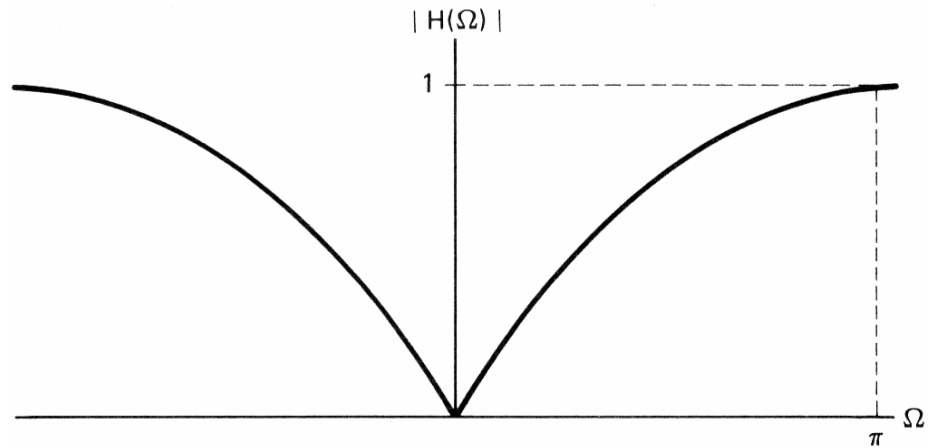
Nos bár jól láthatóan a három pontos mozgó átlag egy alul áteresztő szűrő karakterisztikájával rendelkezik, de tranzienssel vált tartományt nem pedig ugrással. Ezért ezt a könnyen megvalósítható eljárást, bár hasonlóan az RC körhöz nem ideális szűrőt definiál, mégis sok probléma megoldáskor felhasználják, mint alul áteresztő szűrőt.

Hasonló módon foghatunk neki a felül áteresztő szűrők közelítésének is. Tekintsük az alábbi differencia egyenletet:

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2}$$

Olyan jelekre amelyek szinte konstans értékűek a fenti kifejezés nullát ad eredményül. Azokra a jelekre pedig, melyek hirtelen nagyokat változnak pontról-pontra, $y[n]$ nagy értékű lesz és változás irányával és nagyságával egyenlő. Ebből már sejthető, hogy a fenti egyenlet egy felül áteresztő szűrő közelítését fogja definiálni. Számoljuk ki a frekvencia válasz függvényt:

$$H(\Omega) = \frac{1}{2} [1 - e^{-j\Omega}] = j e^{-j\Omega/2} \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$



193. ábra A két pontos mozgó különbség átlaggal dolgozó felül áteresztő szűrő amplitúdó spektruma

Itt már jól látható a felüláteresztő szűrő jelleg.

A fent nézett mozgó átlagolási eljárásnak azonban nincsen paramétere amit változtathatnánk így nem tudjuk pontosan beállítani a számunkra megfelelő vágási frekvenciát. Így általánosítására törekszünk a mozgó átlag képletnek. A legszéleskörűbb lehetőségeket figyelembe véve, $N + M + 1$ pontos mozgó átlagolást definiálunk az alábbi képlettel:

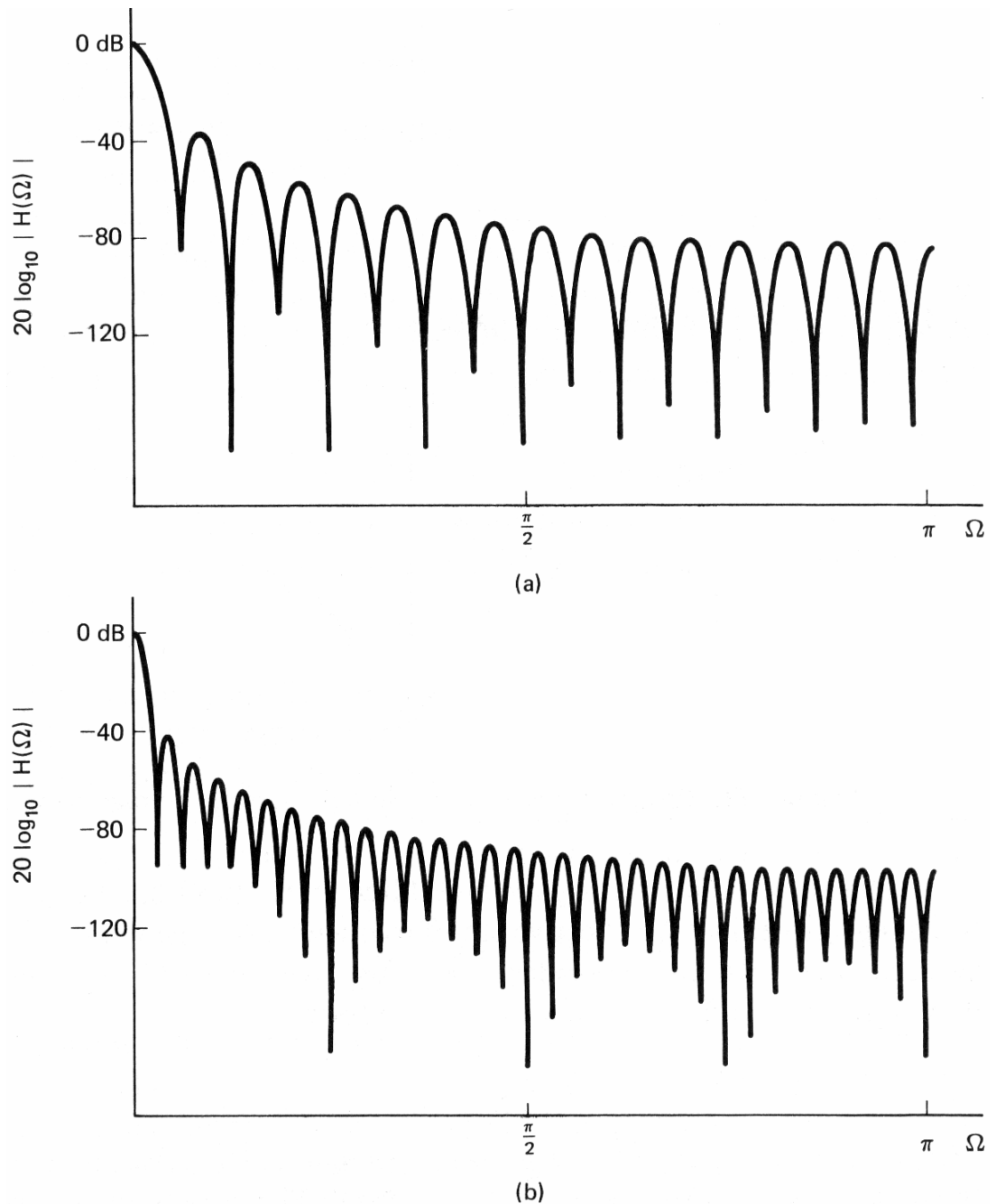
$$y[n] = \frac{1}{N + M + 1} \sum_{k=-N}^M x[n - k]$$

Ha $N = 0$ vagy negatív akkor a mozgó átlagolási eljárásunk kauzális, elenkező esetben sajnos nem és megvalósítása már komoly gondot okoz. Azonban jó hír az, hogy ennek az egyenletnek megfelelő impulzus válsz függvény már jó közelítése a négyszög jelnek. Ha az egész szűrőre vonatkozó frekvencia választ kiszámoljuk:

$$H(\Omega) = \frac{1}{N + M + 1} \sum_{k=-N}^M e^{-j\Omega k}$$

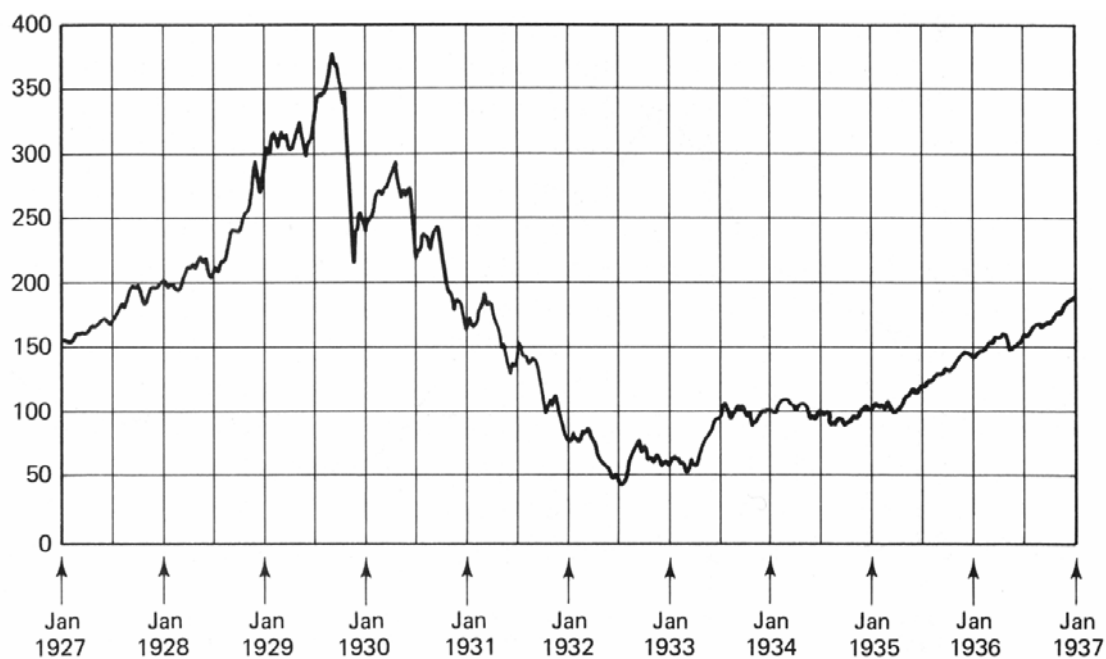
$$H(\Omega) = \frac{1}{N + M + 1} e^{-j\Omega(N-M)/2} \frac{\sin\left[\Omega \frac{M + N + 1}{2}\right]}{\sin(\Omega/2)}$$

Az frekvencia átviteli függvényt ábrázolva az $M + N + 1 = 33$ és $M + N + 1 = 65$ esetben a következőt kaptuk:



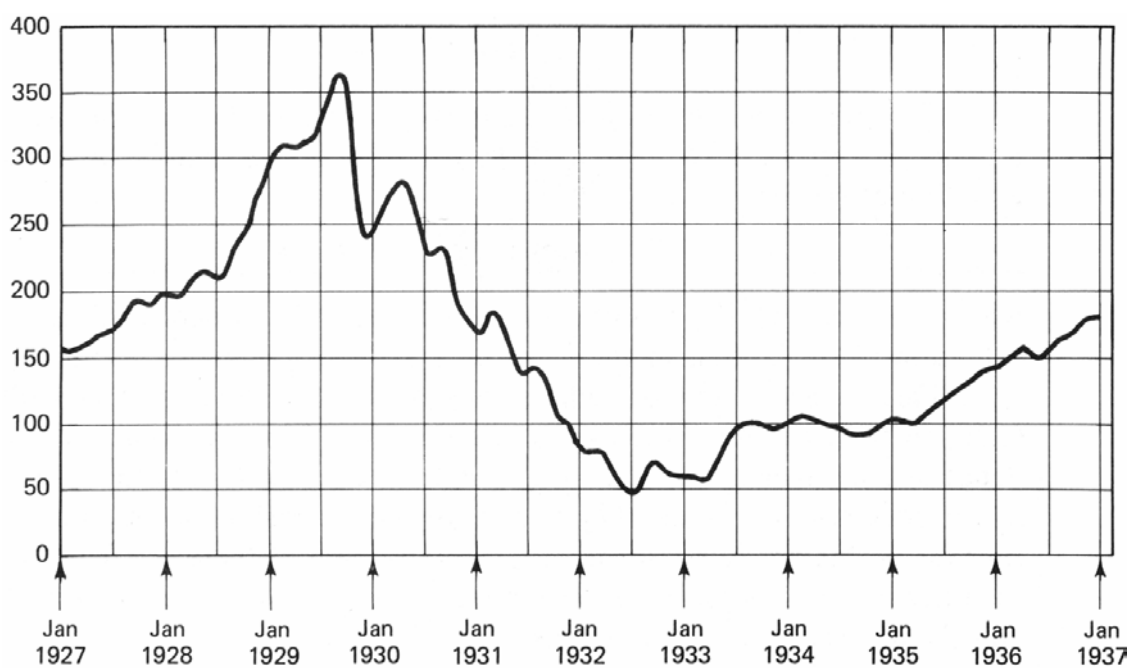
194. ábra A (a) $M = N = 16$; (b) $M = N = 32$ pontos mozgó átlagot használó alul áteresztő szűrők amplitúdó spektruma

A mozgó átlagolási eljárást azonban nem csak elektronikai célokra használják fel. A sok más terület közül talán az egyik legfontosabb a közgazdaságtan. Diszkrét szűrőket használnak például a trendek hosszú távú változásainak vizsgálatára, ahol a rövid távú fluktuációkat szűrik ki egy alul áteresztő szűrővel. Az alábbi példa a Dow Jones tőzsde indexének heti változását mutatja 7 éves időtartamra nézve.



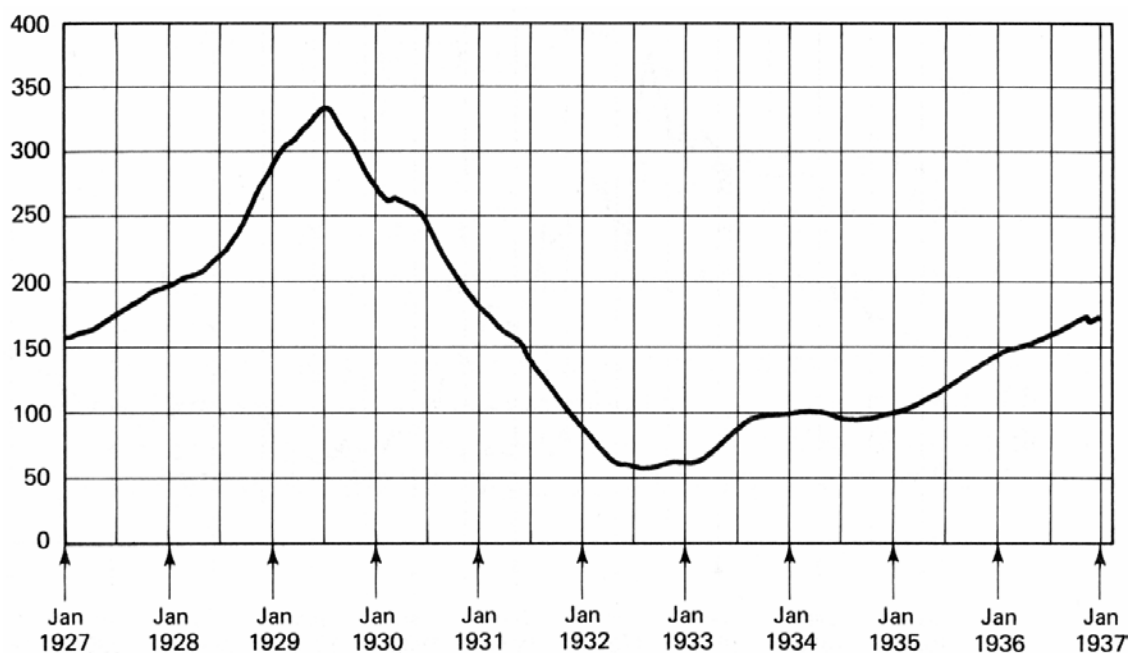
195. ábra Tőzsde index ingadozás

A következő ábra már az 51 napra kiterjedő ($M + N + 1 = 25$) mozgó átlag által simított változást mutatja.



196. ábra Tőzsdei index 51 napos mozgó átlagolás után

Vagy ugyanez 201 napra ($M + N + 1 = 100$) nézve:



197. ábra Tőzsdei index 201 napos mozgó átlagolás után

Mind a két átlagolt ábra hasznos lehet egy gazdasági szakember hasznára, mivel az 51-napos átlagolásból a ciklikus trend változásokat, míg a 201 napra vett átlagból a hosszú távú trend változásokat tudja leolvasni.

Azonban a mozgó átlagolási eljárásunkat tovább általánosíthatjuk, ha súlyozott átlagát vesszük a pontoknak. Így definiálhatunk egy $N + M + 1$ pontos mozgó átlagot az alábbi nem rekurzív differencia egyenlet segítségével:

$$y[n] = \frac{1}{N + M + 1} \sum_{k=-N}^M b_k x[n - k]$$

Ahol már a b_k együtthatók megválasztásával az elérendő szűrési karakterisztika megvalósítható.

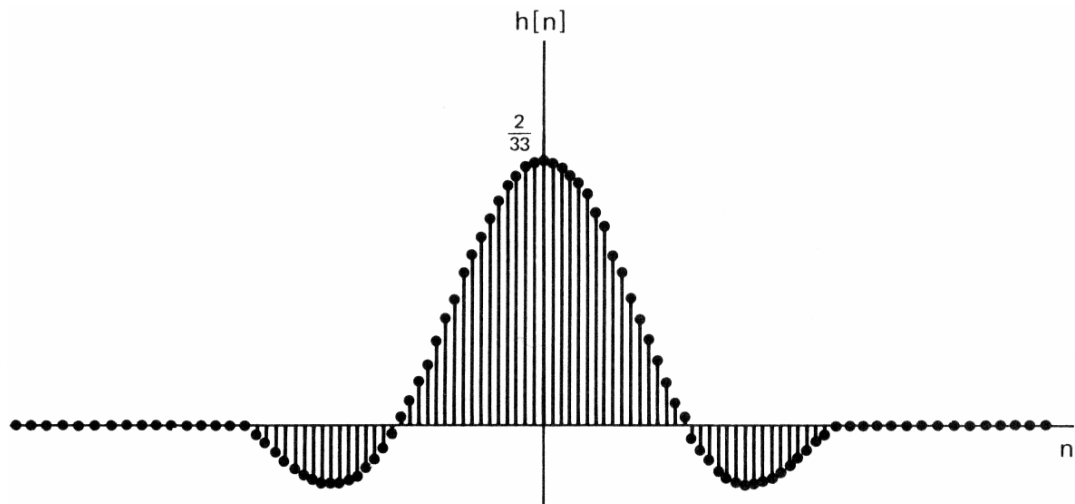
Sokféle eljárás létezik arra, hogy bizonyos karakterisztika eléréséhez hogyan válasszuk meg az együtthatók értékét. Azonban ezek főleg feladat specifikusak így tárgyalásuk helyett inkább egy példában mutatjuk be használhatóságukat.

Az $N = M = 16$ esetre nézve válasszuk meg az együtthatókat az alábbi módon:

$$b_k = \begin{cases} \frac{2}{33} \sin_c\left(\frac{2k}{33}\right), & |k| \leq 32 \\ 0, & |k| > 32 \end{cases}$$

Ekkor az impulzus válasz függvény:

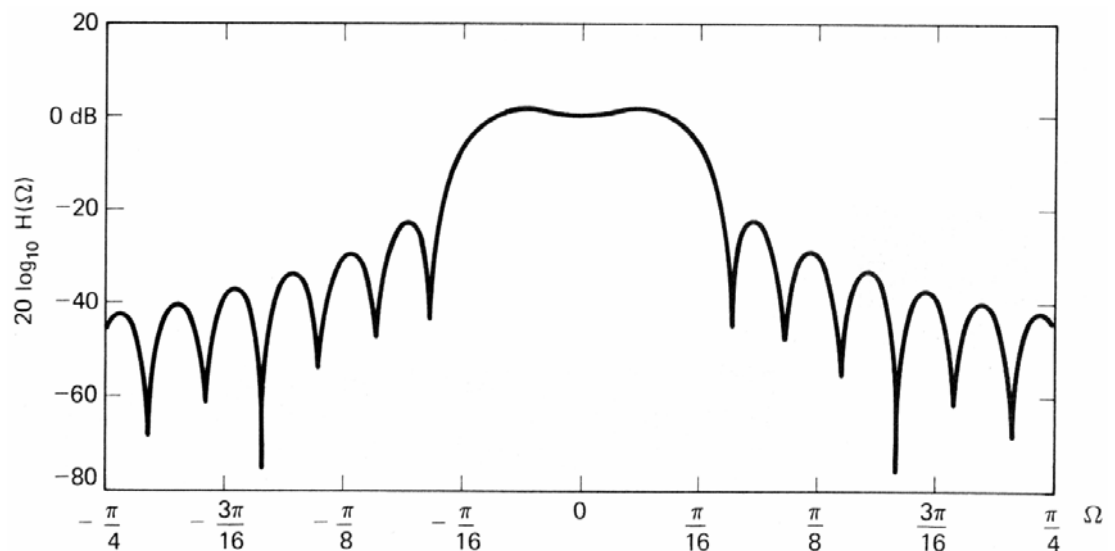
$$h[n] = \begin{cases} \frac{2}{33} \sin_c\left(\frac{2n}{33}\right), & |n| \leq 32 \\ 0, & |n| > 32 \end{cases}$$



198. ábra A példában szereplő nem rekurzív szűrő impulzus válasza

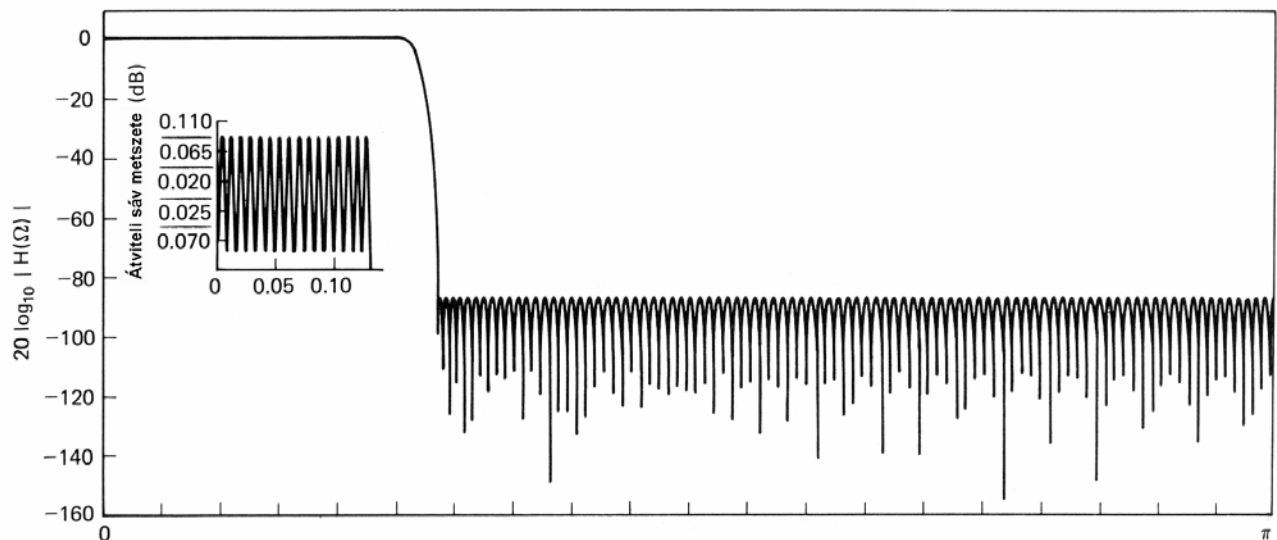
Az együtthatók megfelelő megválasztásának köszönhetően a fenti impulzus függvény nagyjából megfelel a az ideális $\Omega_c = 2\pi/33$ vágási frekvenciájú aluláteresztő impulzus függvényének.

Ha viszont megnézzük a frekvencia átviteli függvényt:



199. ábra A példában szereplő nem rekurzív szűrő frekvencia átviteli függvénye

Akkor láthatjuk, hogy bár az előbbi esetekhez képest javult a helyzet azonban az ideális eset még elég messze van. Általánosságban véve elmondható hogy a mozgó átlag szélesítésével a frekvencia vágás élesíthető, az együtthatókkal pedig a sávok szélessége és a vágás meredeksége is állítható. Tehát sok-pontos mozgó átlag használatával, és az együtthatók bölcs megválasztásával az ideális karakterisztika megközelíthető. Így $N = M = 125$ esetén és Parks-McClellan algoritmussal megválasztott együtthatókkal akár az alábbi, az ideálishoz elég közel eső aluláteresztő szűrőt is kaphatunk:



200. ábra Nem rekurzív alul áteresztő szűrő, a lehető legélesebb vágáshoz kiszámolt 251 optimális együtthatóval

5.4.2. Rekurzív diszkrét idejű szűrők (Recursive Discrete-Time Filters)

A rekurzív szűrők az előzőekben megismert nem rekurzív eset mellett igen fontosak a jelfeldolgozás szempontjából. Ezek között a szűrők között is ugyanúgy különböztetünk meg alul, felül illetve sáv áteresztő típusokat, sőt a differencia egyenletek által ezen szűrők is leírhatóak, és frekvencia válasz függvényük a differencia egyenletből megkapható.

Egy egyszerű példán keresztül mutatjuk be ezen szűrő osztályt.

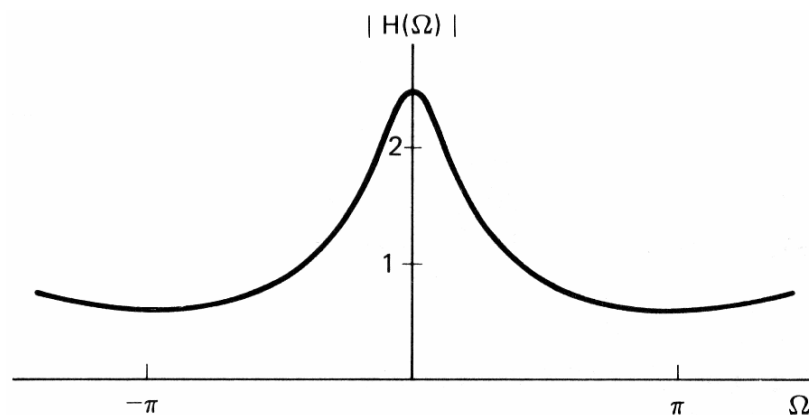
Tekintsük az alábbi rekurzív differencia egyenletet:

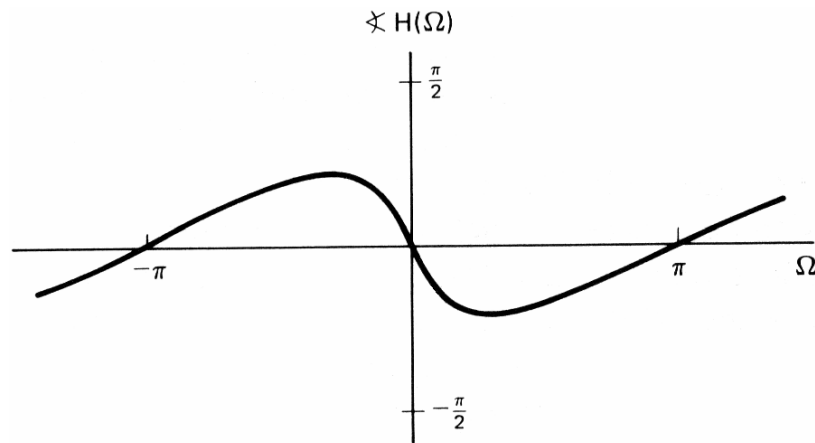
$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

A frekvencia válasz függvény ezen egyenlet alapján:

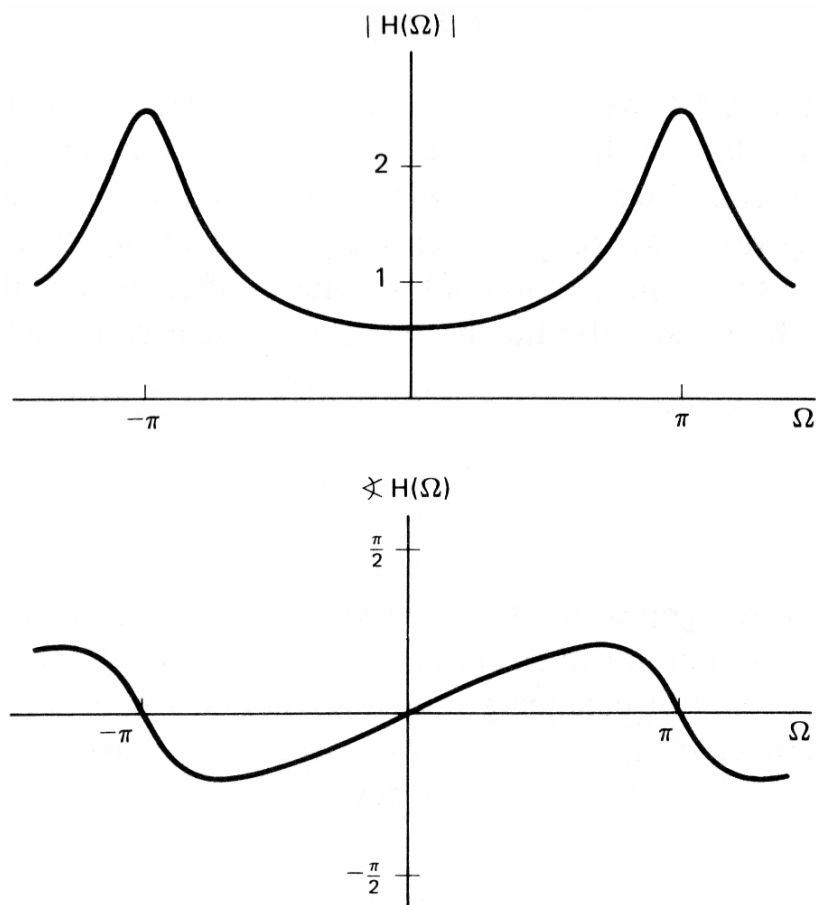
$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

A fenti válasz függvény amplitúdóját és fázisát ábrázoltuk az $a = 0.6$





201. ábra A rekurzív szűrő amplitúdó spektruma $a = 0.6$ esetén és az $a = -0.6$ esetre:



202. ábra A rekurzív szűrő amplitúdó spektruma $a = -0.6$ esetén

Megfigyelhető, hogy pozitív „a” esetén a differencia egyenlet aluláteresztő, míg negatív „a” esetén feluláteresztő szűrőként viselkedik. Ahogy azt a folytonos esetben vizsgáltuk, magasabb rendű differencia egyenletek segítségével élesebb szűrési karakterisztikákat tudunk előállítani és több lehetőséget nyerünk a az idő és a frekvencia tartomány formálására. A nagy igény miatt sokféle eljárás és ezáltal szűrő osztály keletkezett az együtthatók megválasztásának optimalizálására a vizsgált probléma függvényében. Az egyik ilyen szűrő osztályt mutatjuk be a továbbiakban.

5.5. Butterworth féle frekvencia szelektív szűrők osztálya (*The Class of Butterworth Frequency-Selective Filters*)

Az előzőek során láthattuk, hogy folytonos esetben a differenciál, diszkrét esetben a differencia egyenletek segítségével jól alkalmazható szűrők implementációjára nyílt lehetőség. Ahogy az egyenletek rendjét növeltük, az ideális szűrők egyre jobb közelítését tudtuk elérni. Magának a szűrő tervezésnek azonban igen széles és kiterjedt irodalma van, ami elég sok lehetőséget ad a szűrők megvalósítására. Az egyik ilyen igen széles körben használt eljárás a Butterworth féle tervezési eljárás, amivel a Butterworth szűrők osztályába tartozó szűrőket határozhatunk meg. A következőkben a frekvencia válasz szempontjából vizsgáljuk az eljárás eredményét, és ezen keresztül említjük meg az ide kapcsolódó tényeket, előnyöket és hátrányokat.

A levezetéshez tekintsünk vissza az RC aluláteresztő szűrő példájára, amit már vizsgáltunk az előzőekben. Ahogy azt akkor megemlítettük ezen elsőrendű szűrő frekvencia válasz függvénye az alábbi volt:

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}, \quad \tau = RC$$

A Bode diagram általi reprezentáción a vágási frekvencia után -20db/dekád tranzienssel tért át a szűrő a áteresztési sávból a vágási tartományba. Azonban ha ω rendjét növeljük a nevezőben akkor a tranziens egyre gyorsabban tart a vágási tartományhoz, azaz a tranziens szélessége egyre kisebb lesz, így téve élesebbé a vágást. Azokat a szűrőket ahol ezzel a módszerrel formálják a frekvencia válasz függvényt Butterworth féle szűrőknek és ezen szűrők halmazát Butterworth féle szűrő osztálynak nevezzük. Buterworth féle szűrőnek nevezünk minden olyan szűrőt ahol a $B(\omega)$ frekvencia válasz függvényre az alábbi igaz:

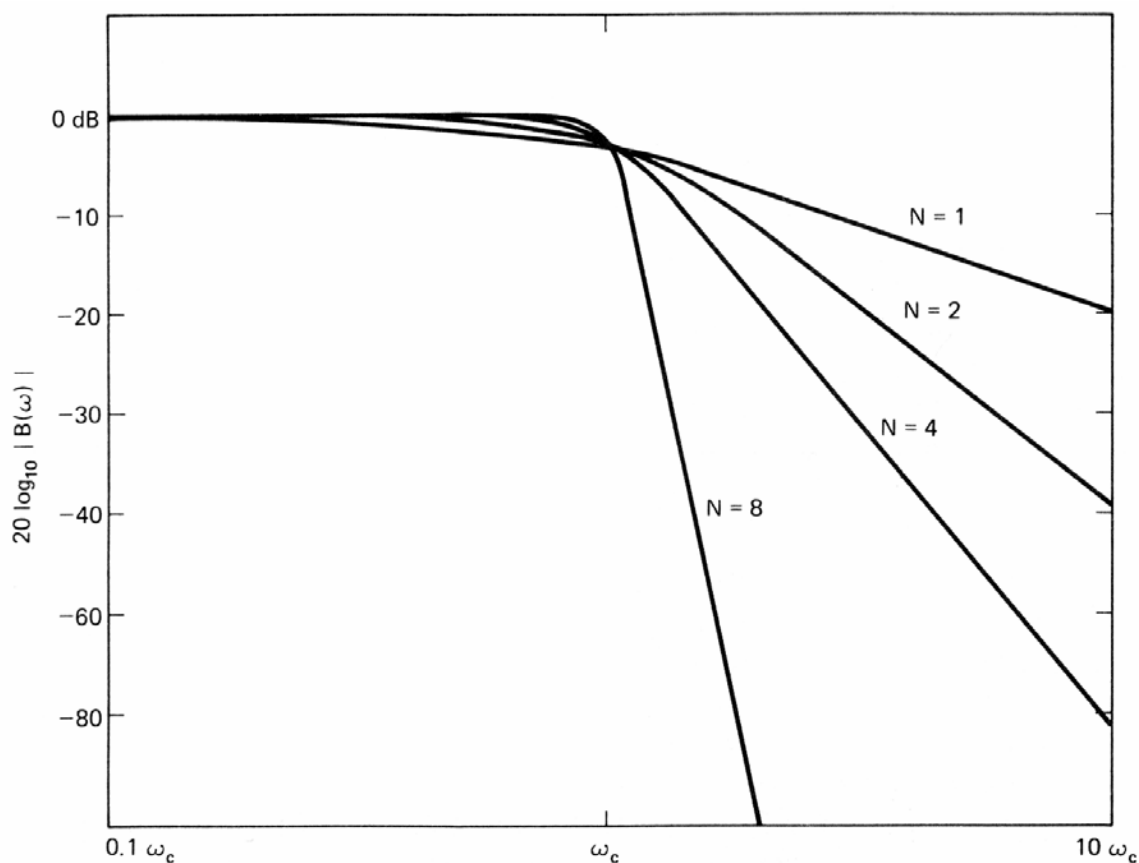
$$|B(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}$$

Ahol az N paraméter a szűrő rendjét adja meg, és egyben az őt megvalósító differencia egyenlet rendjét is. Az ω_c paraméter pedig az a frekvencia értéket amelyre igaz, hogy:

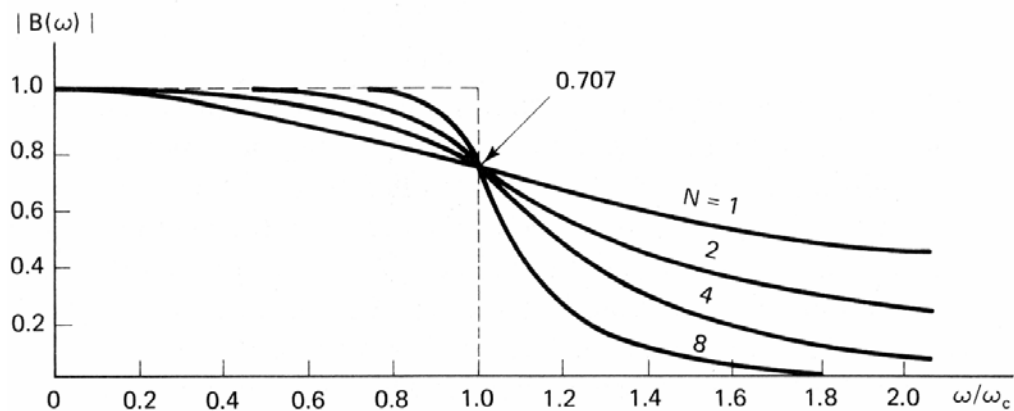
$$|B(\omega_c)|^2 = \frac{1}{2} |B(\omega = 0)|^2$$

azaz -3dB ezen frekvencián a karakterisztika.

Ezen Butterworth féle szűrők Bode diagramját ábráztuk az alábbi ábrán N különböző eseteire nézve:

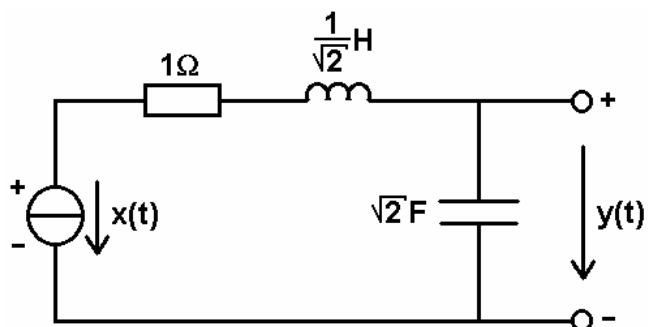


203. ábra Eltérő rendű Butterworth szűrők Bode diagramja

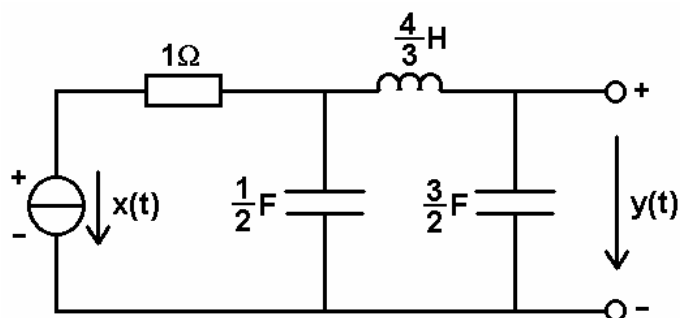


204. ábra Vágási pontban nagyított metszete az előbbi ábrának

Jól látható, hogy ω_c és az itt felvett -3dB-es érték független a szűrő rendjétől, és hogy minél magasabb a szűrő rendje annál élesebb a vágás. Az elsőrendű Butterworth szűrőre megvalósítására példa az előzőekben már vizsgált RC kör. Az alábbiakban a másod, illetve harmadrendű megvalósításokat vázoltuk fel.

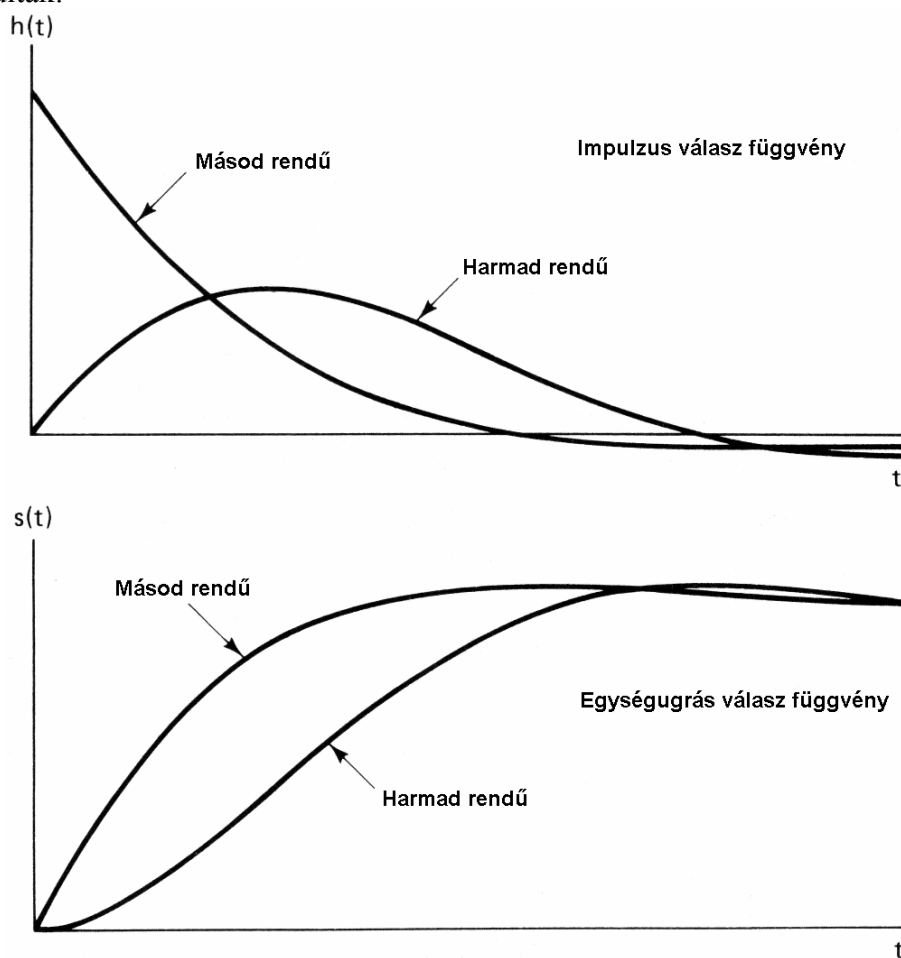


205. ábra Másodrendű Butterworth szűrő



206. ábra Harmadrendű Butterworth szűrő

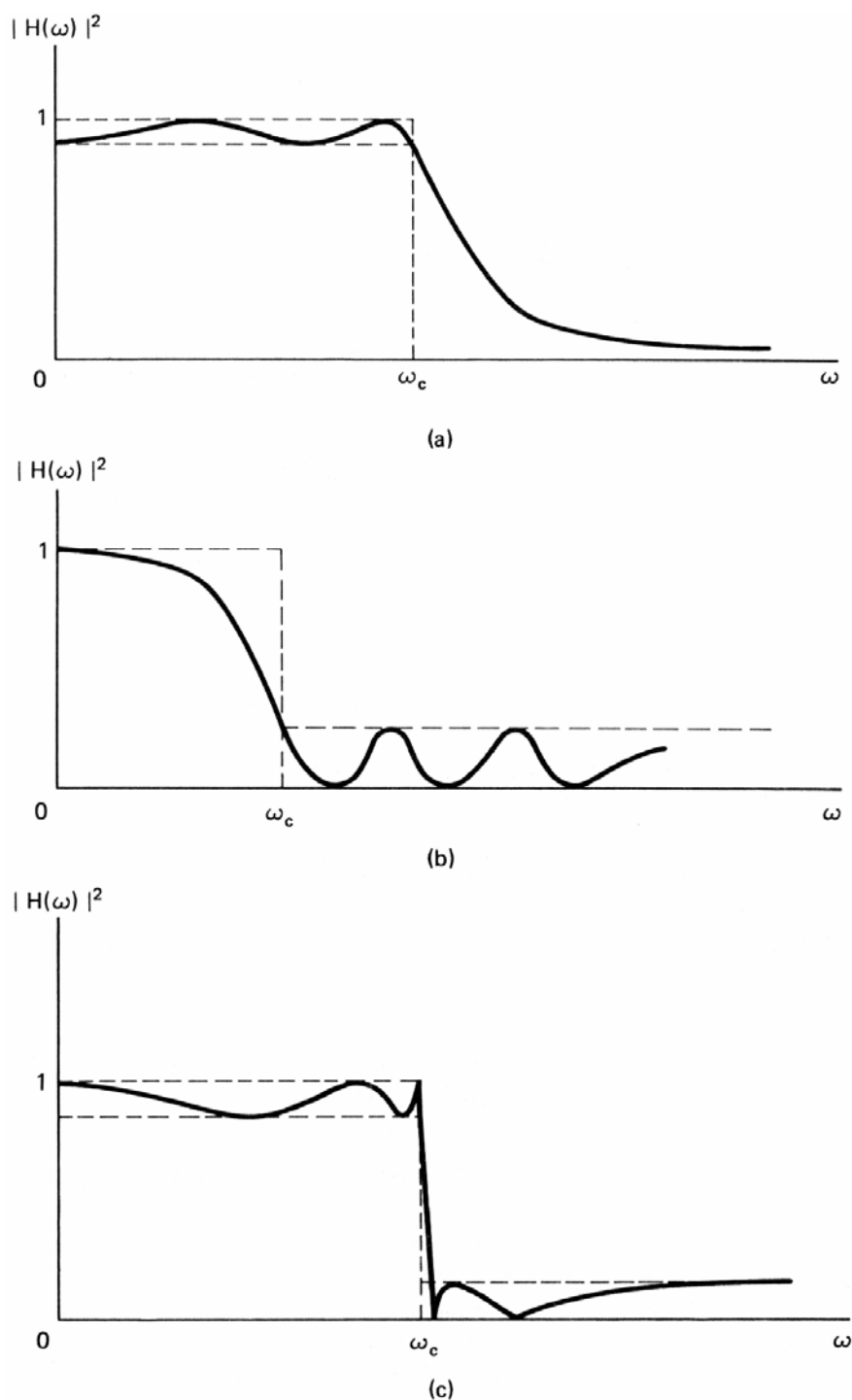
Ezekre adott impulzus és egység ugrás válasz függvények pedig az alábbi módon alakultak:



207. ábra Impulzus és egységugrás válasz függvényei a Butterworth szűrőknek

A Butterworth féle szűrőket igen széles körben használják mivel könnyen méretezhetőek az áteresztési, tranziens és vágási sáv megválasztása szempontjából. A másik hasznos tulajdonságuk pedig, hogy a karakterisztikájuk maximálisan monoton alakú függvények az áteresztési és a vágási tartományon, ezért a szűrés sima, rögögés mentes.

Persze vannak más alacsony rögögéssel rendelkező szűrési karakterisztikájú szűrők is. Ilyen szűrőkre vonatkozólag az áteresztési, tranziens vagy a vágási sávban a frekvencia válasz karakterisztika alacsony hullámzással bír annak maximális és minimális eltérési határa között. Ilyen szűrőkre példák az alábbiak:



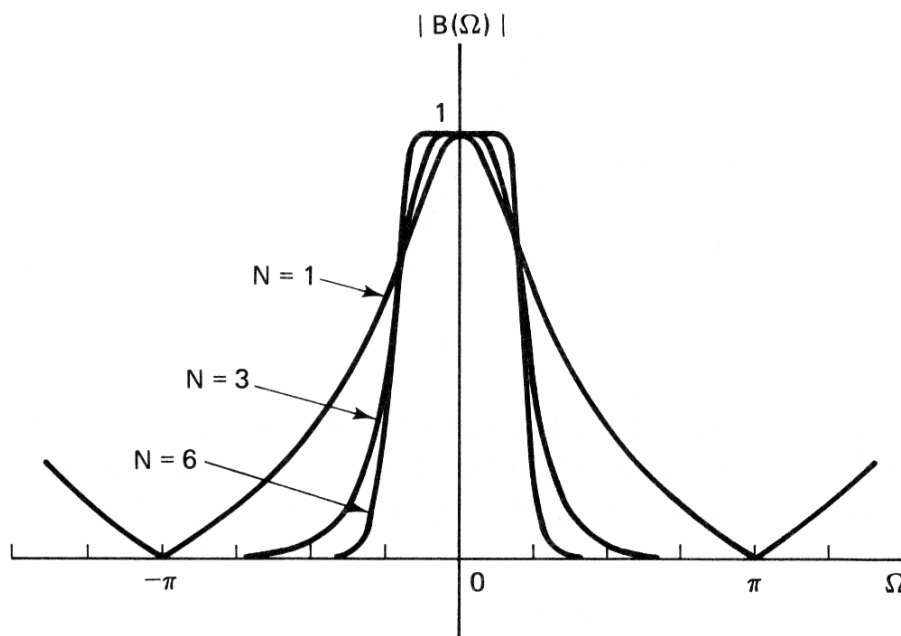
208. ábra Csebisev és ekliptikus szűrők

Az első karakterisztika alacsony hullámzással bír az áteresztési sávban, míg a vágási sávban monoton. A második karakterisztikája hullámzással bír a vágási sávban míg az áteresztési tartományban monoton. Az első és második esetnek megfelelő szűrők osztályát Csebisev szűrőknek nevezzük. A harmadik eset hullámzással bír mind a vágási min az áteresztési tartományban, ezen szűrők osztályát Ekliptius szűrőknek nevezzük.

Bár eddig csak az alul áteresztő szűrőket vizsgáltuk hasonló eljárások léteznek felüláteresztő szűrők és sáváteresztő szűrők tervezésére is.

Sőt a fent tárgyalt szűrő osztályoknak léteznek a diszkrét megfelelője is. A diszkrét Butterworth szűrők osztályát az alábbi frekvencia válasz függvény összefüggés definiálja:

$$|B(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan(\Omega/2)}{\tan(\Omega_c/2)} \right)^{2N}}$$



209. ábra Diszkrét idejű Butterworth szűrők amplitúdó spektruma

Ahol N ismét a szűrő rendjét és egyben az őt megvalósító differencia egyenlet rendjét is jelenti. A monotonitás itt is megfigyelhető mind az áteresztési mind a vágási tartományban.

Itt is az Ω_c -re igaz, hogy:

$$|B(\Omega_c)|^2 = \frac{1}{2} |B(\Omega = 0)|^2$$

A diszkrét esetben azonban még egy fontos tulajdonság megemlítésre szorul. A folytonos Butterworth esetben megfelelő rendre felírt differenciál egyenlet átranzformálható differencia egyenletté amely pontosan N -ed rendű diszkrét Butterworth szűrőt valósít meg. Így elég folytonos esetre való eljárásokat kidolgozni és azokból származtatható a diszkrét eset eljárásai.

6. Moduláció (Modulation)

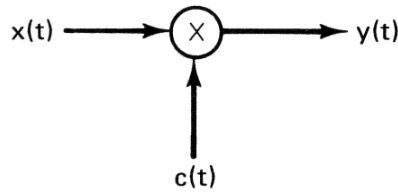
A hírközlés és az információ továbbítás, de még sok más mérnöki területen a modulációs technikák igen fontos szerepet játszanak. Lényegében modulációs rendszernek nevezünk egy olyan rendszert ahol egy jel valamely jellemzőjének változását egy másik jellel szabályozzuk. A Fourier transzformációval kapcsolatban már érintettük az amplitúdó moduláció fogalmát, mikor a jel szinuszoidális függvénnyel való szorzatának transzformáltját vizsgáltuk. Az elkövetkezendő részben ezzel a technikával és a hozzá kapcsolódó elméleti ismeretekkel foglalkozunk majd.

Talán az egyik legfontosabb alkalmazási területe a modulációnak a kommunikáció. Bármely kommunikációs csatornához általában egy bizonyos frekvencia tartományt rendelnek hozzá, amelyen a legjobb a kommunikáció lehetősége. Ezt a tartományt a frekvencia sáv szélessége szerint sáv szélességként is nevezik. Egy kommunikációs csatornán akkor tudok átvinni egy jelet ha annak sáv szélessége legalább akkora, hogy a jelben előforduló fontos komponensek frekvenciái belesnek, tehát a jel transzformáltja belesik ebbe a tartományba. Például ha egy emberi beszélgetést szeretnék közvetíteni, ahol a fontos információ az emberi fül számára hallható 10Hz-től 20kHz-es tartományba esik akkor legalább ilyen szélességű csatornára van szükségem. Azonban a rádióadók manapság egymással párhuzamosan üzemelnek mindenféle átfedés nélkül, s mégis jól tudják továbbítani a számunkra fontos riportok vagy zenék hangzását. Ez úgy lehetséges, hogy pont a modulációs technikának köszönhetően az átvinni kívánt jelet egy másik akár nagyfrekvenciás jel valamely információ hordozásra képes jellemzőjének változtatására használják fel, így ha minden adó különböző frekvenciájú vivőjelekkel rendelkezik akkor az adások nem zavarják egymást. Persze ez nem igazán felel meg a valóságnak, ahogy azt a későbbiekben látni fogjuk, de így legalább kaptunk egy képet a modulációról amelyet tovább tudunk majd építeni.

Számos fajtája és technikája létezik a modulációnak amikről a későbbiben szó lesz, de most tekintsük a legalapvetőbb fajtát a szinuszoidális amplitúdó modulációt. Az amplitúdó moduláció lényege, hogy a vivő jel amplitúdóját, változtatom az átvinni kívánt jel függvényében, így ezen amplitúdó változásokból a vevő oldalán az átvinni kívánt jel ismételtén kinyerhető. Az amplitúdó moduláció ezen fajtáját azért hívjuk szinuszoidális amplitúdó modulációnak, mivel itt szinuszoidális jelet használunk vivő jelként.

6.1. Folytonos-idejű szinuszoidális amplitúdó moduláció (AM) (Continuous-Times Sinusoidal Amplitude Modulation)

Sok olyan rendszer létezik a mai gyakorlatban amely szinuszoidális AM-et használ információ továbbítás céljából. Ha tekintünk egy $x(t)$ folytonos jelet, amit át szeretnénk juttatni a csatornán moduláció segítségével, akkor ha a $c(t)$ vivő jelet egy folytonos komplex exponenciálisként vagy szinuszoidális jelként választjuk meg akkor szinuszoidális AM-ről beszélünk. Az AM moduláció során a vivő jel amplitúdóját szorozzuk meg az átvinni kívánt jellel. Ezt a műveletet folytonos időben egy egyszerű szorzás segítségével tehetjük meg. Egy ilyen rendszert könnyen elképzelhetünk:



210. ábra Amplitúdó modulációs rendszer

A vivő jel alapján két általános formáját különböztetjük meg a szinuszoidális amplitúdó modulációnak. Az egyik ilyen esetben a vivő jel egy az alábbi alakban megadott komplex exponenciálissal egyenlő:

$$c(t) = e^{j(\omega_c t + \theta_c)}$$

A másik esetben pedig tisztán szinuszos jellegű a jel:

$$c(t) = \cos(\omega_c t + \theta_c)$$

Mindkét esetben ω_c -t vivő frekvenciának nevezzük.

Vizsgálódásunkat kezdjük azzal az esettel amikor a vivő jel olyan komplex exponenciális amelyre $\theta_c = 0$, azaz $y(t)$ modulált jelre vonatkozólag:

$$y(t) = x(t)e^{j\omega_c t}$$

Ekkor viszont a Fourier transzformálttal kapcsolatban megemlített modulációs tulajdonság miatt:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * C(\omega)$$

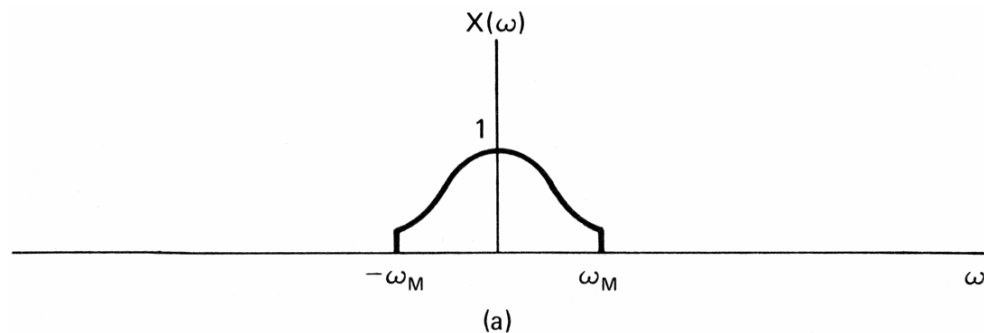
Ahol a $c(t)$ komplex exponenciális jel Fourier transzformáltja nem más mint:

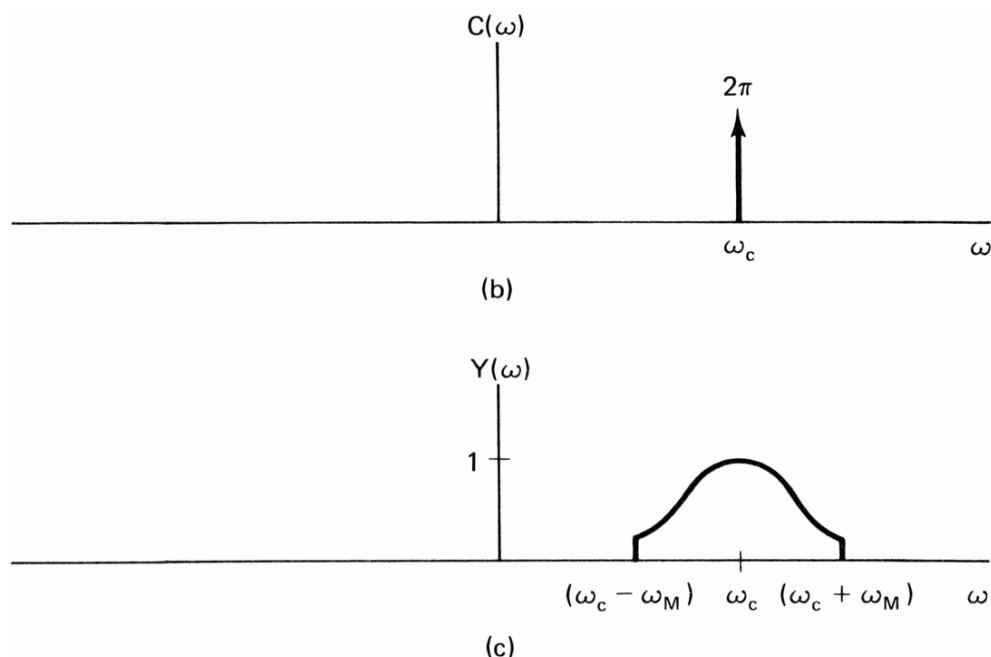
$$C(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_c)$$

Emiatt a konvolúció eredménye:

$$Y(\omega) = X(\omega - \omega_c)$$

Ezért a modulált kimeneti jel a bementi jel ω_c frekvenciával való eltoltja. Így ha a modulálni kívánt jel sávhatárolt, és maximális frekvenciája ω_M (emiatt sáv szélessége $2\omega_M$), akkor a kimeneti jel spektruma az alábbiakban alakul:





211. ábra Az (b) vivő jel az (a) jellel történő amplitúdó modulációjának hatása a spektrumon

A modulációs egyenletből egyértelmű, hogy a jel demodulációjához, azaz az eredeti jel kinyeréséhez csupán a komplex exponenciális inverzával kell megszoroznunk a modulált függvényt:

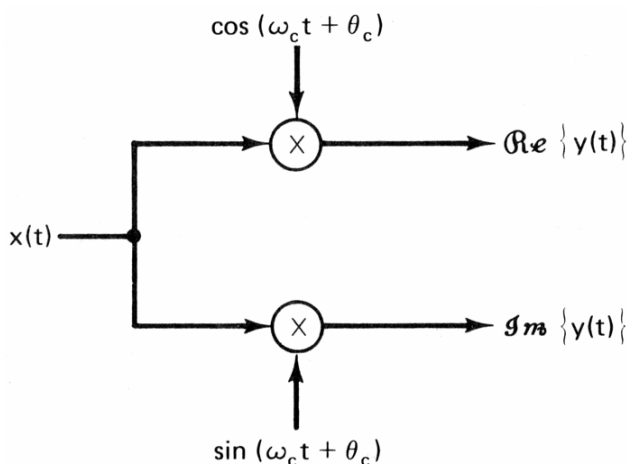
$$x(t) = y(t)e^{-j\omega_c t}$$

A frekvencia spektrumban a demodulációs művelet ismét frekvencia tolással jár, mégpedig a jelet visszatolja az origóba, azaz a kiindulási spektrumába.

Mivel az $e^{j\omega_c t}$ komplex exponenciális függvény Euler képlete szerint felbontható, ezért:

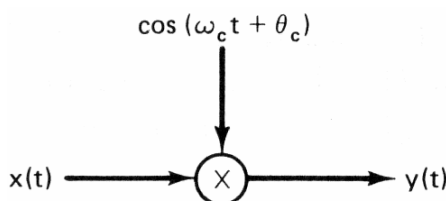
$$y(t) = x(t)\cos\omega_c t + jx(t)\sin\omega_c t$$

Ennek az egyenletnek a reprezentációja ahol $x(t)$ valós és $c(t)$ komplex. így $y(t)$ is komplex függvény, az alábbi ábrán látható:



212. ábra Komplex exponenciális vivő jellel történő amplitúdó moduláció megvalósítása

Így ez a fajta moduláció két külön szorzó egységét és két vivő jelet kíván, ahol az egyik jel a valós, másik az imaginárius részét hordozza a modulált jelnek. A két szinuszos vivő jel között ráadásul $\pi/2$ fázis differencia van. Bár vannak esetek, lsd. a későbbiek során, ahol hasznos lehet a modulált jel imaginárius és valós részét külön-külön közvetíteni, az alkalmazások nagy részében ez felesleges. Sokkal egyszerűbb és gazdaságosabb egy teljesen szinuszos vivő jel használata, azaz vagy a valós vagy az imaginárius rész közvetítése. Egy ilyen rendszere példa az alábbi:



213. ábra Szinuszos vivő jellel történő amplitúdó moduláció megvalósítása

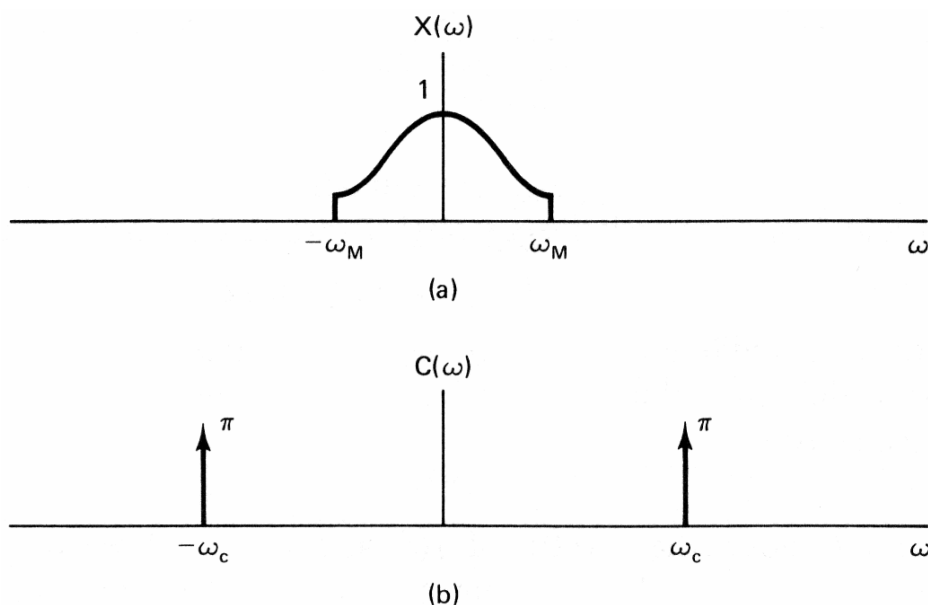
A teljesen szinuszos jellel történő moduláció hatását hasonlóképpen vizsgálhatjuk, mint ahogy azt az előbb tettük. Az egyszerűség kedvéért válasszuk $\theta_c = 0$ -ra ismét. Ekkor a vivő jel spektruma a következő féle képen alakul:

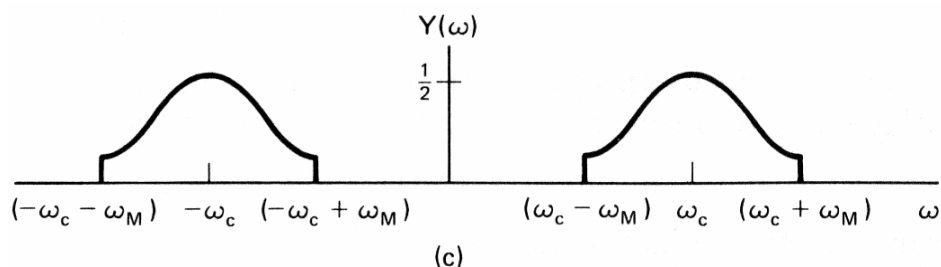
$$C(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

Emiatt a moduláció után a spektrum alakja:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_c) + X(\omega + \omega_c)]$$

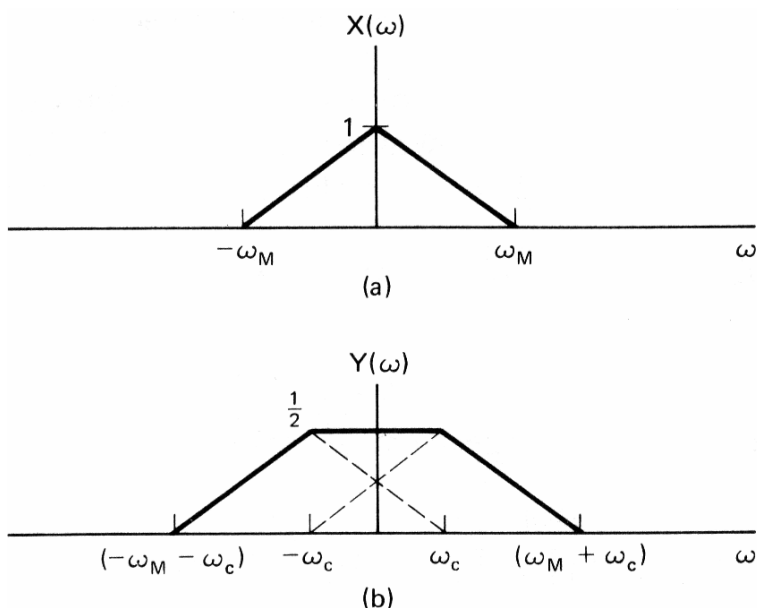
Ha $X(\omega)$ spektruma az alábbiak szerint alakul, akkor $Y(\omega)$ a következő féle képpen fog kinézni:





214. ábra Az amplitúdó moduláció hatása a spektrumra $c(t) = \cos\omega_c t$ vivő jel esetén

Jól látható, hogy ebben az esetben az eredeti jel spektruma $+\omega_c$ és $-\omega_c$ körül helyezkedik el, fele akkora amplitúdóval, ellentétben a komplex exponenciális esettel ahol csupán ω_c -be tolódott el és teljes amplitúdóját megőrizte a frekvencia spektrumban. Ebből egy másik különbség is származik, nevezetesen az $x(t)$ jel teljes spektruma megőrződött komplex exponenciális esetben a modulált $y(t)$ jel spektrumában ahonnan $x(t)$ bármilyen esetben újra kinyerhető volt a spektrum visszatolásával a kiindulási pozícióba, azonban a tisztán szinuszos vivő jel esetén, ha $\omega_c < \omega_M$ akkor $X(\omega)$ dublikációi egymásba lapolódnak a frekvencia spektrumban, olyan jelet eredményezve, amelyből az eredeti már nem nyerhető vissza. Ilyen esetre példa az alábbi rosszul megválasztott modulációs frekvenciával kapott $y(t)$ spektruma:



215. ábra Szinuszoidális amplitúdó moduláció átlapolódó spektrummal

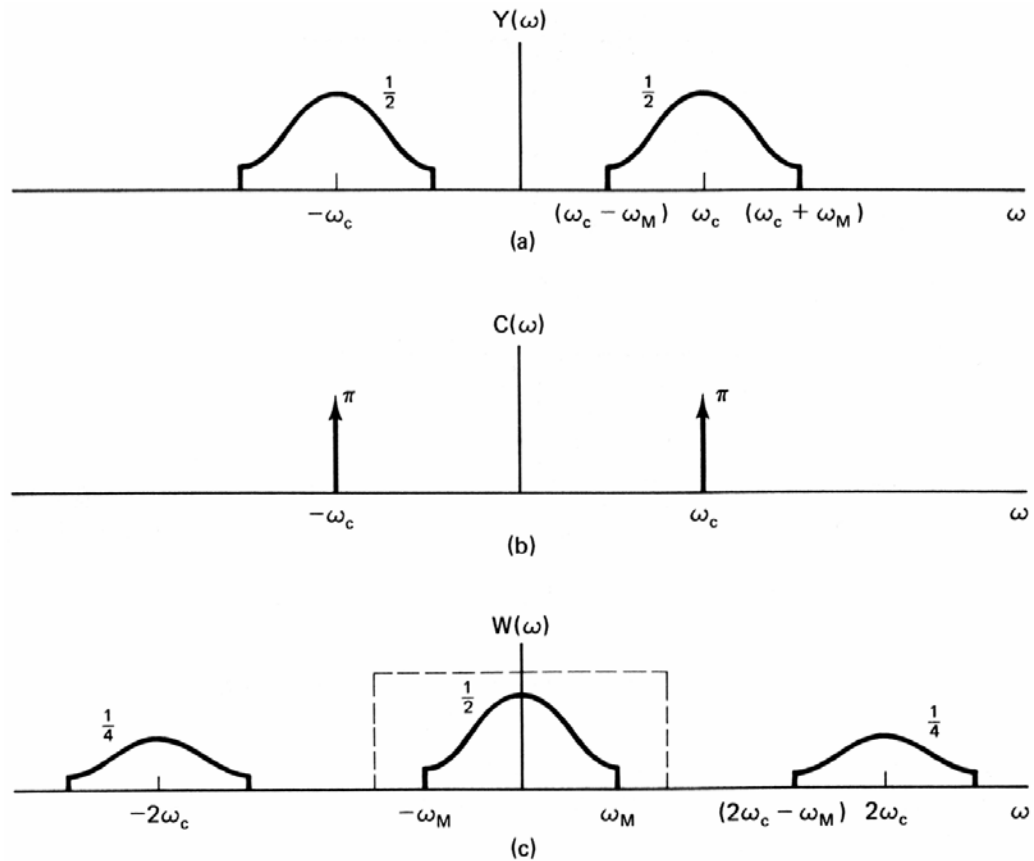
Hogyha viszont $\omega_c > \omega_M$, akkor a jel demodulációját ismét relatíve könnyen megkaphatjuk. Tekintsük az alábbi esetet:

$$y(t) = x(t)\cos\omega_c t$$

Azonban most nem a moduláló jel inverzével kell szorozni a demodulációhoz, hanem ismét modulálni kell a jelet ugyanazon vivő jellel, majd egy alul áteresztő szűrővel levágni a triplázódott spektrumot. Így ha:

$$w(t) = y(t)\cos\omega_c t$$

Akkor a spektrumok az alábbi módon alakulnak:



216. ábra Az a szinuszoidális amplitúdó modulált jel demodulációja

Ebből viszont jól látszik, hogy $w(t)$ -ből egy ideális alul áteresztő szűrő segítségével visszakapható az eredeti $x(t)$ jel, bár fele akkora amplitúdóval. Az alul áteresztő szűrő vágási frekvenciájának legalább ω_M -nek kell lennie, hogy minden fontos komponens megőrizsünk a jeltől, és maximum $2\omega_c - \omega_M$, hogy a kiszűrendő triplázódott spektrum eltűnjön.

Az alul áteresztő szűrő szükségessége algebrai úton is belátható. Az egyenletekből egyértelműen következik, hogy:

$$y(t) = x(t) \cos^2 \omega_c t$$

Ekkor viszont az alábbi trigonometrikus azonosság igaz:

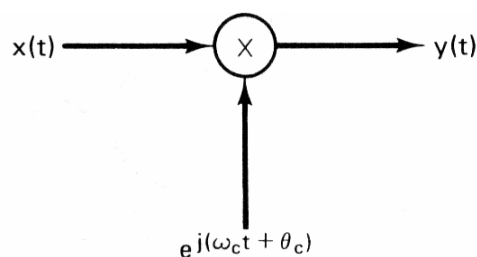
$$\cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \omega_c t$$

Így:

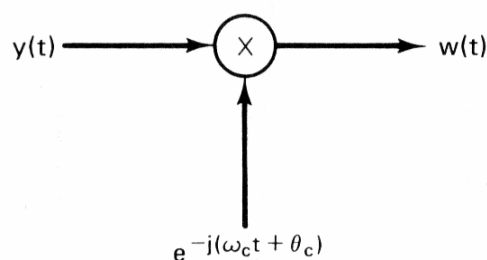
$$w(t) = \frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2} x(t) \cos \omega_c t$$

Tehát $w(t)$ két rész összegéből áll elő, ahol az egyik az eredeti jel fele akkora amplitúdóval, a másik pedig az eredeti jel moduláltja ω_c frekvencián. Ekkor csak egy olyan alul áteresztő szűrő segítségével kaphatjuk meg az eredeti jelet amely az $x(t)$ jelet nem módosítja, de a modulált jelet már kivágja a vizsgált jeltől.

A komplex exponenciálissal moduláló és demoduláló teljes rendszert az alábbi ábrán ábrázoltuk:



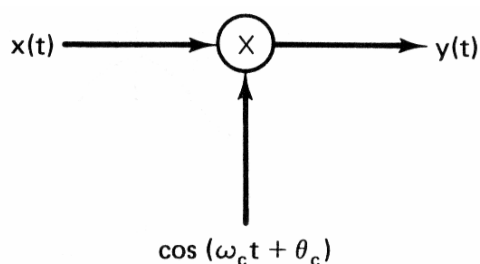
(a)



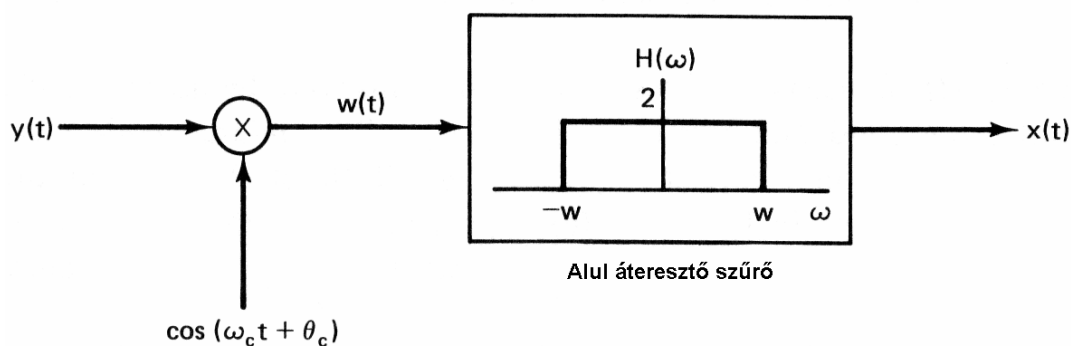
(b)

217. ábra Komplex exponenciális vivő jellel történő amplitúdó (a) moduláció; (b) demoduláció

Míg a szinuszos jellel dolgozót a következő féle képen adhatjuk meg:



(a)



(b)

218. ábra Szinuszos vivő jellel történő amplitúdó (a) moduláció; (b) demoduláció

Ezek az ábrák egy sokkal általánosabb esetet tüntettek fel, amikor is $\theta_c \neq 0$. Ez esetben is helyes eredményt kapunk, bár a levezetés egy kissé bonyolultabb.

Az előbbi esetekben a demoduláló jel tökéletes szinkronban volt fázisában a moduláló jellel. Most vegyük azt az esetet ahol ez nem teljesül.

A komplex exponenciálissal való moduláció esetén ha θ_c jelöli a moduláló jel fázisát és ϕ_c a demoduláló jelét, akkor:

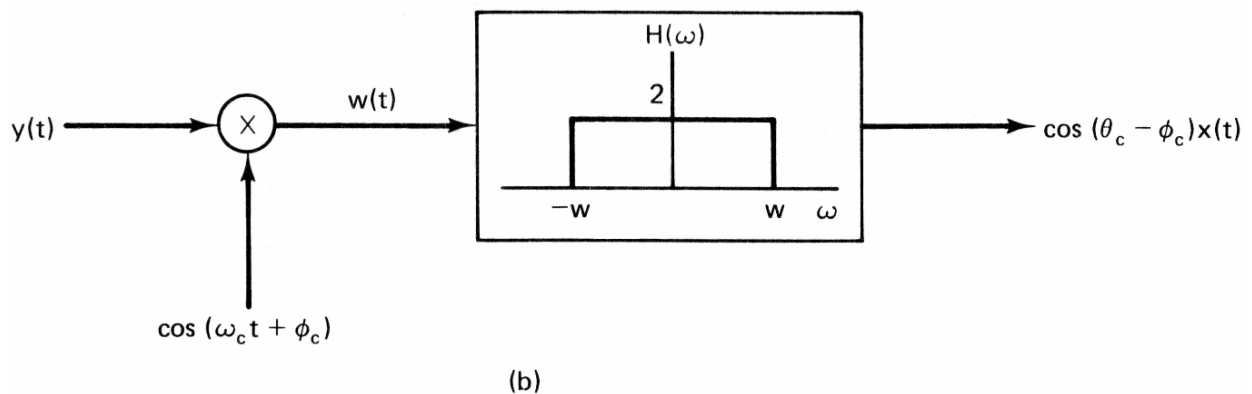
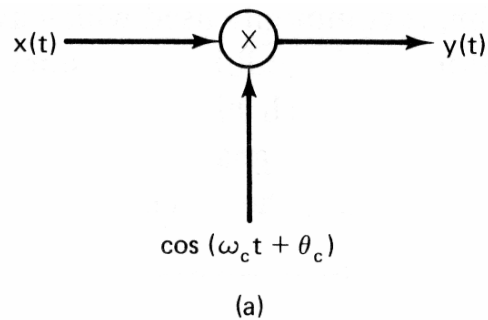
$$y(t) = x(t)e^{j(\omega_c t + \theta_c)}$$

$$w(t) = y(t)e^{-j(\omega_c t + \phi_c)} = x(t)e^{j(\theta_c - \phi_c)}$$

Ha feltesszük, hogy $\theta_c \neq \phi_c$ akkor $w(t)$ komplex amplitúdójú jel lesz. Ha viszont $x(t)$ pozitív jel akkor, mégis kinyerhető a komplex $w(t)$ jelből, hiszen:

$$x(t) = |w(t)|$$

Ha most hasonló kikötések mellett a szinuszos jellel történő modulációt vizsgáljuk akkor az alábbi módon ábrázolhatjuk a rendszert:



219. ábra Nem szinkronizált szinuszoidális vivő jellel történő amplitúdó (a) moduláció; (b) demoduláció

Ahol az alul áteresztő szűrő bemenete:

$$w(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c)\cos(\omega_c t + \phi_c)$$

Az alábbi trigonometrikus azonosságot felhasználva:

$$\cos(\omega_c t + \theta_c) \cos(\omega_c t + \phi_c) = \frac{1}{2} \cos(\theta_c - \phi_c) + \frac{1}{2} \cos(2\omega_c t + \theta_c + \phi_c)$$

kapjuk, hogy:

$$w(t) = \frac{1}{2} x(t) \cos(\theta_c - \phi_c) + \frac{1}{2} x(t) \cos(2\omega_c t + \theta_c + \phi_c)$$

és az alul áteresztő szűrő kimenete:

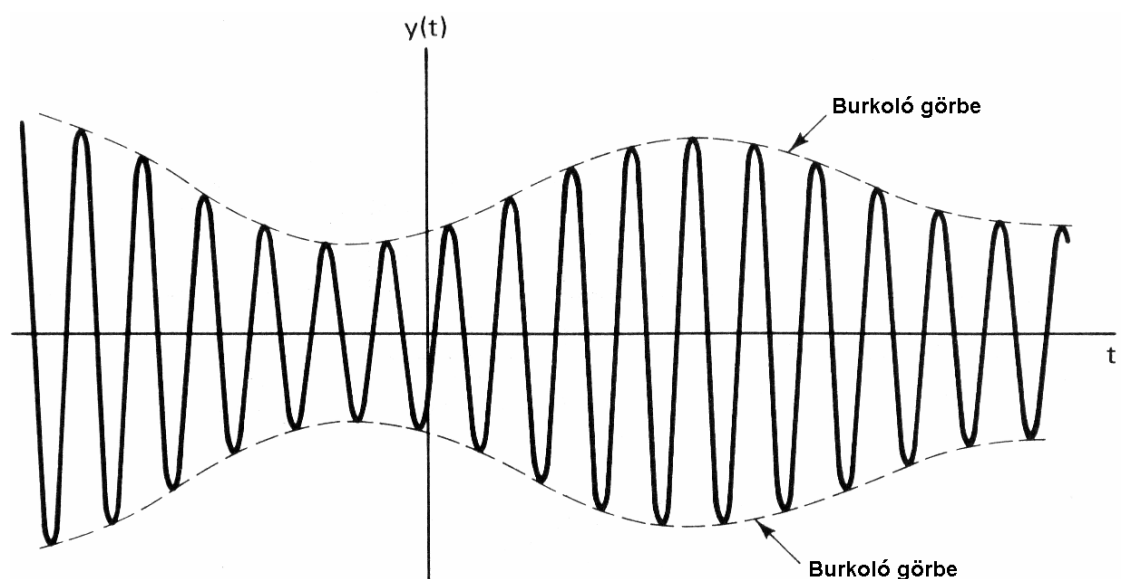
$$y(t) = x(t) \cos(\theta_c - \phi_c)$$

Ha a fázis mégis egyenlő lenne a moduláló és a demoduláló jelben akkor a $\cos$ függvény értéke 1, ami az eredeti $x(t)$ jelet eredményezi. Ha viszont a két oszcillációnak $\pi/2$ fázis különbsége van, akkor a $\cos$ függvény 0 értéke miatt a jel eltűnik, azaz a kimenet zérus lesz. Tehát ha a két jel egymással fázisban van akkor a leghatékosabb a demoduláció, ellenkező esetben a demodulált jel amplitúdó csökkenést szenved el. Azonban igen fontos, hogy a moduláló jel és a demoduláló jel fázis különbsége időben ne változzon. Ez nagyon pontos szinkronizációt igényel és ezért igen nehezen megvalósítható, főleg olyan rendszerek esetén amik földrajzilag elkülönülnek egymástól.

6.1.1. Aszinkron demoduláció (Asynchronous Demodulation)

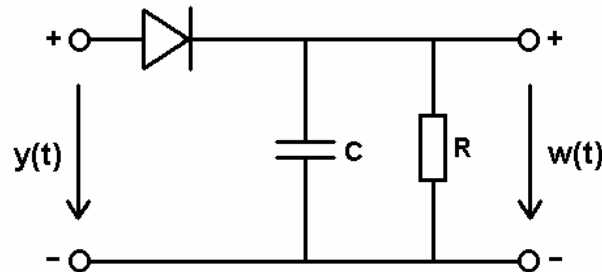
A demoduláció azon fajtáját ahol a demoduláló vivő jel fázisa teljes szinkronban van a moduláló vivő jel fázisával, szaknyelven szinkron demodulációnak nevezzük. Azonban sok szinuszoidális amplitúdó modulációt használó gyakorlati alkalmazásban egy másik, alternatív demodulációs eljárást alkalmaznak, amit aszinkron demodulációnak hívunk. Főleg azért használják inkább ezt a gyakorlatban, mivel ezen eljárás nem igényli a modulálás és a demodulálás szinkronizációját.

Tegyük fel, hogy a modulálni kívánt $x(t)$ jel pozitív értékkészletű, és a vivő jel frekvenciája, ω_c , sokkal nagyobb mint az $x(t)$ jel legmagasabb frekvenciája: ω_M . Ekkor a modulált $y(t)$ jel általános alakja hasonló lesz az itt ábrázolthoz:



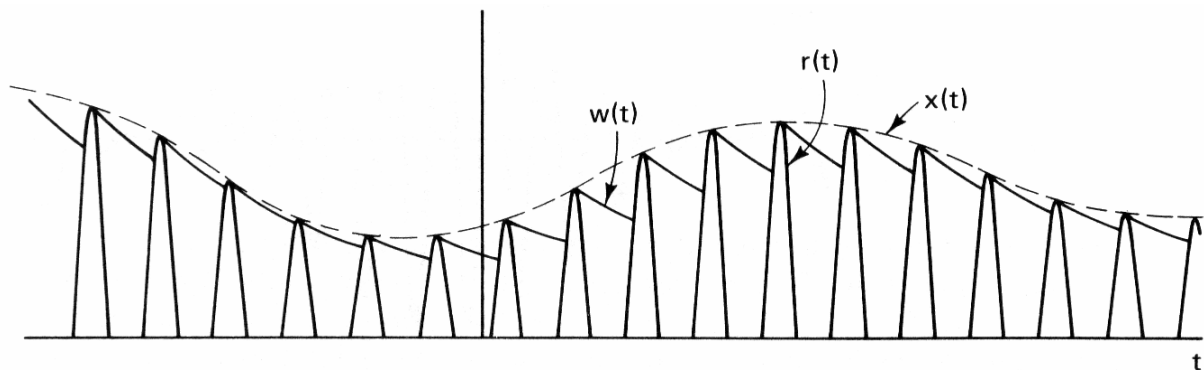
220. ábra Amplitúdó modulált jel ahol a modulált jel pozitív

Jól látható, hogy az $y(t)$ csúcsait összekötő burkológörbe egy törés nélküli, sima görbe vonal, ami lényegében az $x(t)$ jel közelítése. Ezért $x(t)$ könnyen kinyerhető a jelből, ha csupán a csúcsok amplitúdó változását követi a demoduláló rendszer. Egy ilyen elven működő rendszert „envelope detector”-nak nevezünk, és a legegyszerűbben az alábbi módon valósítható meg:



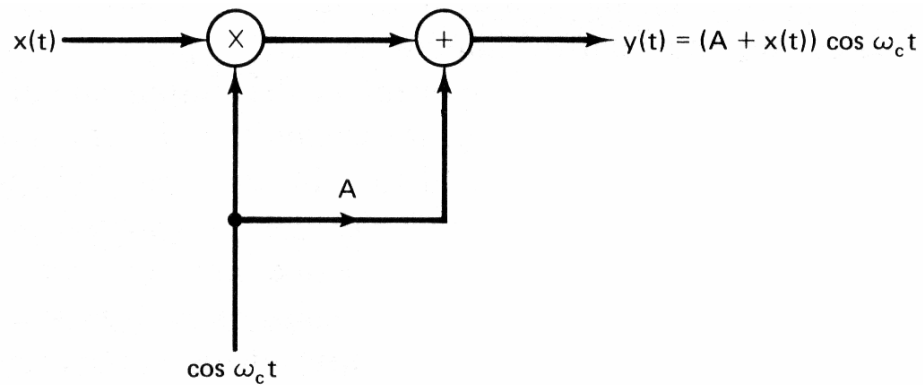
221. ábra Envelope detector

Lényegében csak a hullámtér felét használjuk fel a detektáláshoz. Ezt a fél jelet ($r(t)$) az RC áramkör tehetetlensége finomítja az R ellenálláson megjelenő ($w(t)$) jel formára amit aztán az áramkör mögé kapcsolt alul áteresztő szűrő segítségével a vivő jel változásait simítjuk el a detektált jelen, így kapva vissza az eredeti $x(t)$ jelet.



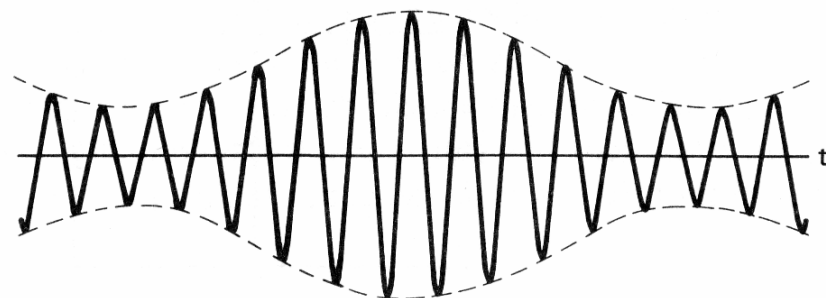
222. ábra Demodulálás "envelope detectorral" és szűrő segítségével, $r(t)$ a fél hullámtér, $w(t)$ a detektor kimenete, $x(t)$ pedig a szűrés után visszakapott eredeti jel

Két lényeges kikötésre van szükségünk a sikeres aszinkron demodulációhoz. Az egyik az, hogy $x(t)$ mindig pozitív értéket felvevő jel legyen, a másik pedig, hogy sokkal lassabban változzon mint a vivő jel, tehát frekvencia komponensei legyenek sokkal kisebbek mint a vivő jelé. Például audio jelek továbbításánál a 10Hz-20kHz sávot egy 500 és 2000kHz közötti vivő frekvenciájú jelre modulálják rá. Azonban ezen kritériumok nem minden jelre teljesülnek, így felvetődik a kérdés, hogy vihetünk át tetszőleges jelet ezen modulációs eljárás segítségével. A válasz egyszerű, tetszőleges $x(t)$ jel esetén a jelhez meghatározott pozitív konstans jelet hozzáadva azt pozitív értékkészletűvé tehetjük, vagy magát az $x(t)$ jelet moduláljuk az alábbi ábrának megfelelően:

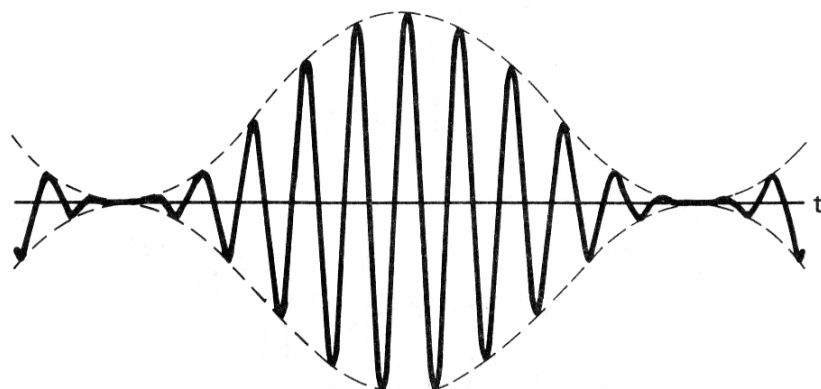


223. ábra Aszinkron moduláló rendszer

Ha most ezt a jelet egy envelope detector segítségével demoduláljuk akkor $x(t) + A$ jelet kapunk amiből már egyszerűen megkapható $x(t)$. Azonban ahhoz, hogy a detektálás helyes legyen meg kell követelnünk, hogy A elég nagy legyen ahhoz, hogy bármely t -re $x(t) + A$ pozitív legyen. Legyen K az $x(t)$ jel maximális amplitúdó nagysága, azaz, $|x(t)| \leq K$. Ahhoz, hogy $x(t) + A$ pozitív legyen tehát teljesülnie kell annak, hogy $A > K$. Az K/A arányt gyakran „ m modulációs index” -nek nevezik. Ugyanezt százalékban, pedig „ $m\%$ -os modulációnak”. Egy $x(t)$ jel $m = 0.5$, azaz 50%-os modulációját, és $m = 1$, azaz 100%-os modulációját ábrázoltuk az alábbi példában:



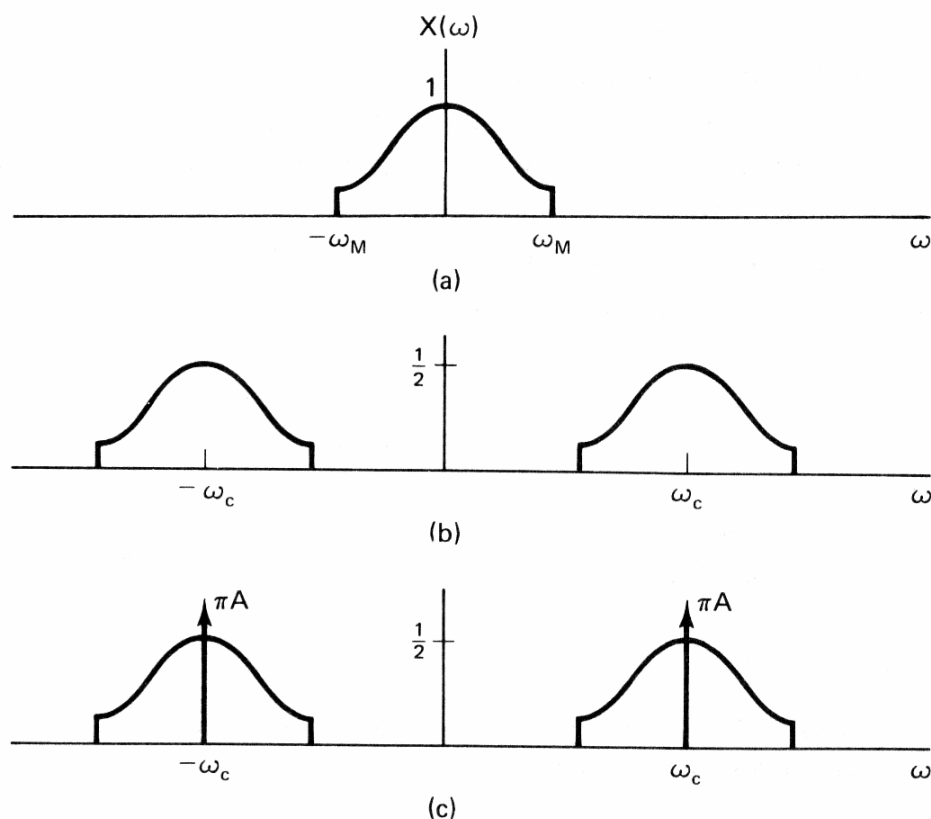
(a)



(b)

224. ábra Amplitúdó moduláció (a) $m = 0.5$; (b) $m = 1$

Az alábbi ábrán egy $x(t)$ jel szinkron és a aszinkron modulációja során kapott spektrumbéli különbséget ábrázoltuk:



225. ábra Az $x(t)$ jel (a) szinkron; (b) aszinkron modulációja során létrejövő spektrumváltozások

Ahol a b esetben szinkron modulációt hajtottunk végre $\cos \omega_c t$ -vel és $x(t)\cos \omega_c t$ spektrumát, míg a másik esetben aszinkron moduláció utáni $(A + x(t))\cos \omega_c t$ jel spektrumát ábrázoltuk. Jól láthatóan a két spektrum közötti eltérés csupán az aszinkron eset $A \cos \omega_c t$ hozzáadott tagjából származó a $+\omega_c$ és $-\omega_c$ frekvenciákon fellépő impulzus. Ha most egy fix maximális amplitúdóval rendelkező jel modulációs arányát növeljük, azaz A értékét csökkentjük, míg K fix marad, akkor a vivő jel relatív aránya is csökken a modulált jelben. Mivel maga a vivő jel nem hordoz információt, így jelenléte nem effektív, mert a jel továbbításához felhasznált energia egy részét mindenféle haszon nélkül felemészti. Így a gazdaságosság megkívánja, hogy m értékét a lehető legnagyobbra válasszuk. Azonban másik oldaláról szemlélve a problémát, az „envelope detector” számára annál könnyebb követni az amplitúdó változást, azaz annál kevésbé érzékeny detektort kell építenünk, hogy az $x(t)$ jelet minél pontosabban előállítsuk, ha minél kisebb m értéke. Ezért e két szempont alapján az optimális „ m ” érték megválasztását mindig a gazdasági szempont és a jel minőségével szemben felállított követelmény határozza meg.

Tehát az aszinkron és szinkron demodulációknak meg vannak a maguk előnyei és hátrányai is. A szinkron esetről igen jól összehangolható berendezések szükségesek a modulátor és a demodulátor frekvencia és fázis összehangolásához, és ennek fenntartásához, míg az aszinkron esetben a jel továbbítása sokkal több energiát emészt fel, hisz a jelnek pozitívnak kell lennie,

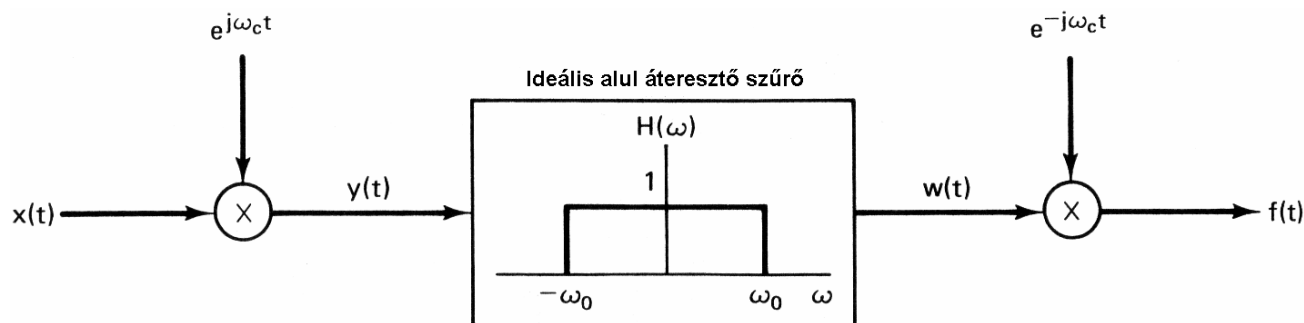
hogyan a detektor demodulálni tudja. Az utóbbi megoldás sokkal közkedveltebb a hétköznapi rádió adás sugárzásban, hisz mivel ez a tömeg kommunikáció része, így elengedhetetlen, hogy mint az adók, de legfőképpen a vevő berendezések, és bennük a demodulátorok ára alacsony legyen. A szinkron kommunikációt pedig olyan esetekben használják ahol pont a jel elküldéséhez szükséges energia szűkös, például műhold rendszereknél, ahol a többletköltsége az adónak eltörpül egy esetleges önálló energia forrás beszerelése mellett.

6.2. A szinuszoidális AM néhány alkalmazása (Some Applications of Sinusoidal AM)

6.2.1. Frekvencia szelektív szűrés változó középfrekvenciával (Frequency Selective Filtering with Variable Center Frequency)

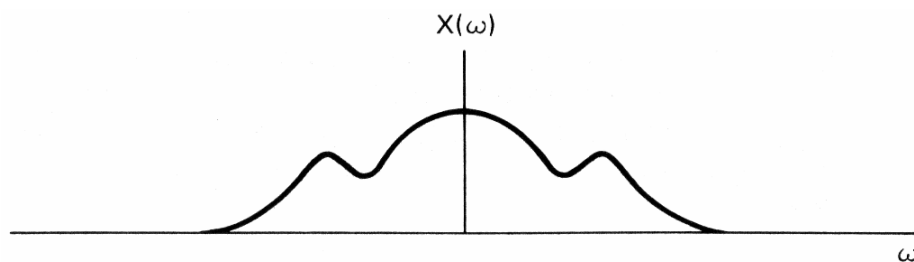
Egy másik nagyon fontos alkalmazási területe a modulációnak a változtatható középfrekvenciájú sáv áteresztő szűrők megvalósítása. Ha egy sáv áteresztő szűrőt szeretnénk tervezni akkor kapacitásokat, induktivitásokat, és ellenállásokat kell megfelelő módon kapcsolnunk, hogy létrejöjjön a kívánt sáv szűrés. Ezen elemek kapcsolata határozza meg a sáv nagyságát és a sáv középfrekvenciájának értékét is. Ha változtatható középfrekvenciájú szűrőt akarunk építeni akkor ezen elemeknek nem csupán az értékét hanem kapcsolásukat is változtathatóvá kell tenni ami rendkívül bonyolult felépítést eredményez. Egy másik és jóval egyszerűbb megvalósítása ennek a problémának egyetlen sáváteresztő szűrő alkalmazása, úgy, hogy a szűrni kívánt jelet szinuszoidális amplitúdó modulációval a megfelelő tartományba toljuk a spektrumot majd elvégezve a szűrést a jelet demoduláljuk.

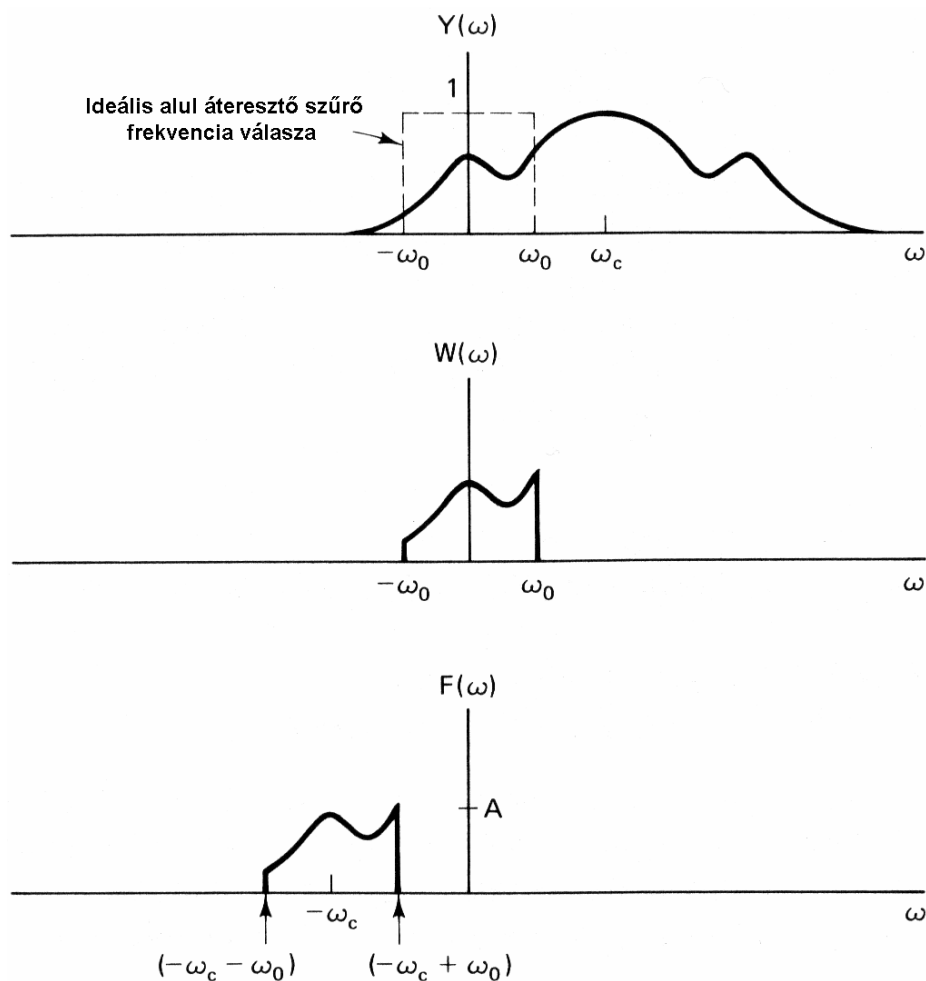
Egy ilyen rendszert mutat be az alábbi ábra:



226. ábra Sáváteresztő szűrő megvalósítása amplitúdó moduláció segítségével

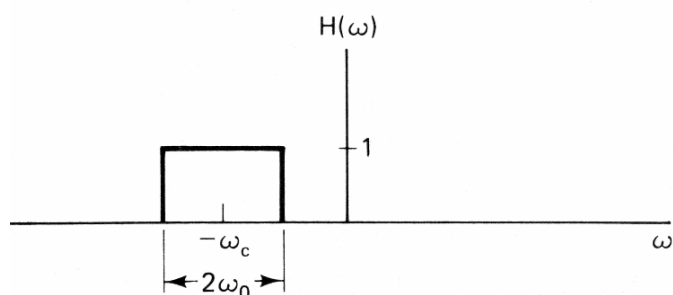
Ha most egy $x(t)$ jelet tekintünk aminek a spektruma az alábbi ábrán látható, akkor a szűrés eljárás közbeni jelek: $y(t)$, $w(t)$, $f(t)$ spektrumai a következő féle képen alakulnak:





227. ábra Az előző rendszerben szereplő jelek spektrumai

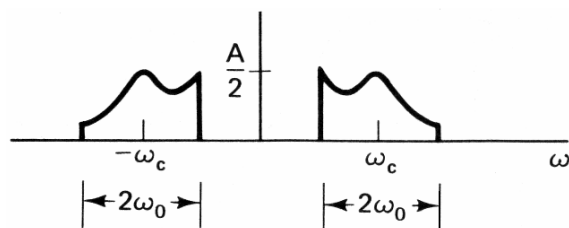
Tehát az egész rendszer lényegében egy ideális sáváteresztő szűrővel egyezik meg aminek közép frekvenciája ω_c , sávszélessége pedig $2\omega_0$.



228. ábra A rendszernek megfelelő sáváteresztő szűrő

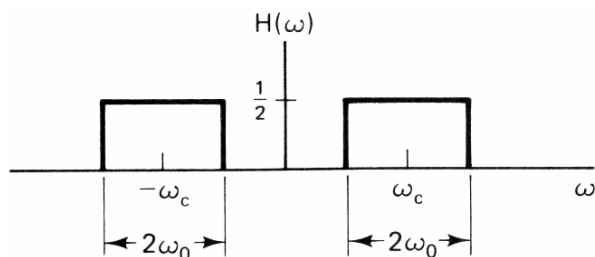
Ahogy pedig az oszcillátor frekvenciája változik, úgy változik a szűrő közép frekvenciája is.

A fenti rendszerben míg $x(t)$ valós jel volt, $y(t)$, $w(t)$, és $f(t)$ már komplex értékűekké váltak. Ha viszont csak a valós részét vesszük az $f(t)$ jelnek akkor a fentiekkel szemben $f(t)$ spektruma a következő féle képen alakul:



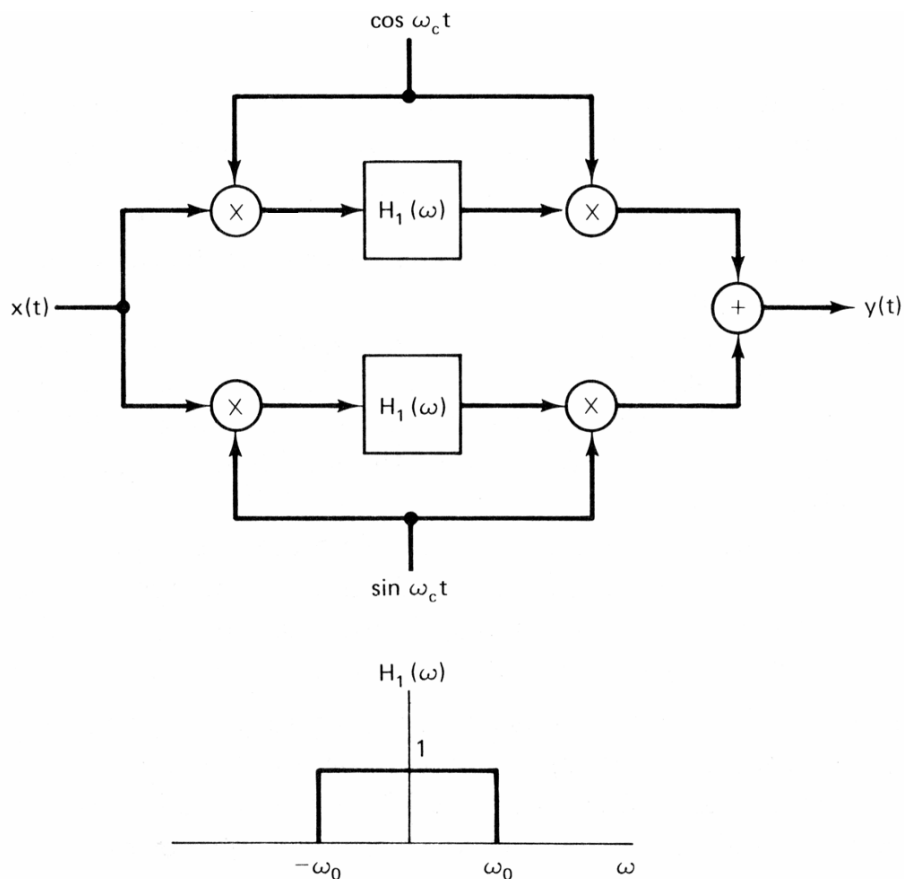
229. ábra A rendszerben szereplő $f(t)$ függvény valós részének spektruma

Ami miatt ezen esetben a rendszer az alábbi sávszűrőt valósítja meg:



230. ábra A valós esetnek megfelelő sáváteresztő szűrő

Bizonyos körülmények között lehetséges a moduláló komplex exponenciálist tisztán szinuszos jellel kiváltani, és így megvalósítani a sávszűrést. Erre példa az alábbi elrendezés:

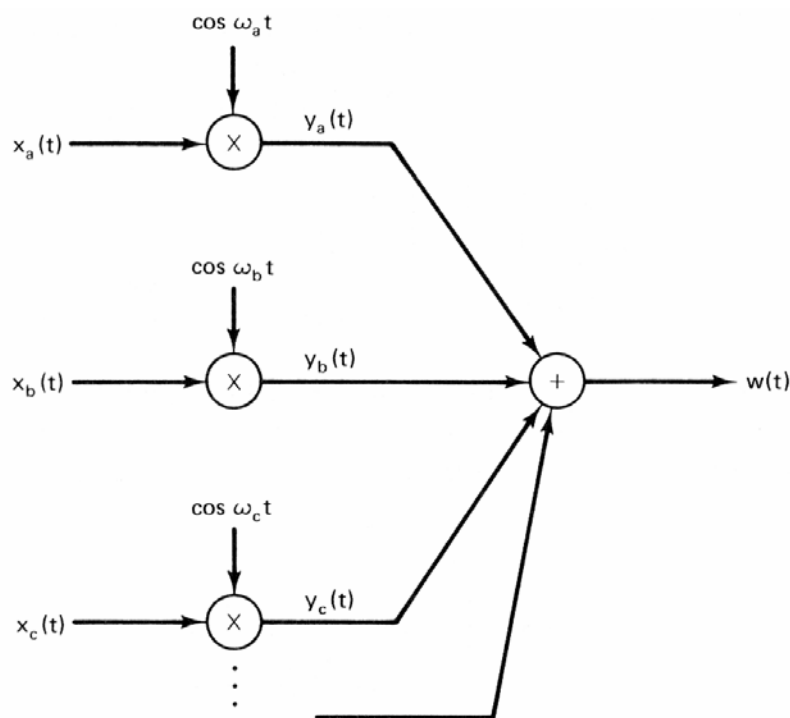


231. ábra Komplex exponenciálissal történő moduláció megvalósítása tisztán szinuszos formában

6.2.2. Frekvencia osztásos multiplexálás (Frequency-Division Multiplexing)

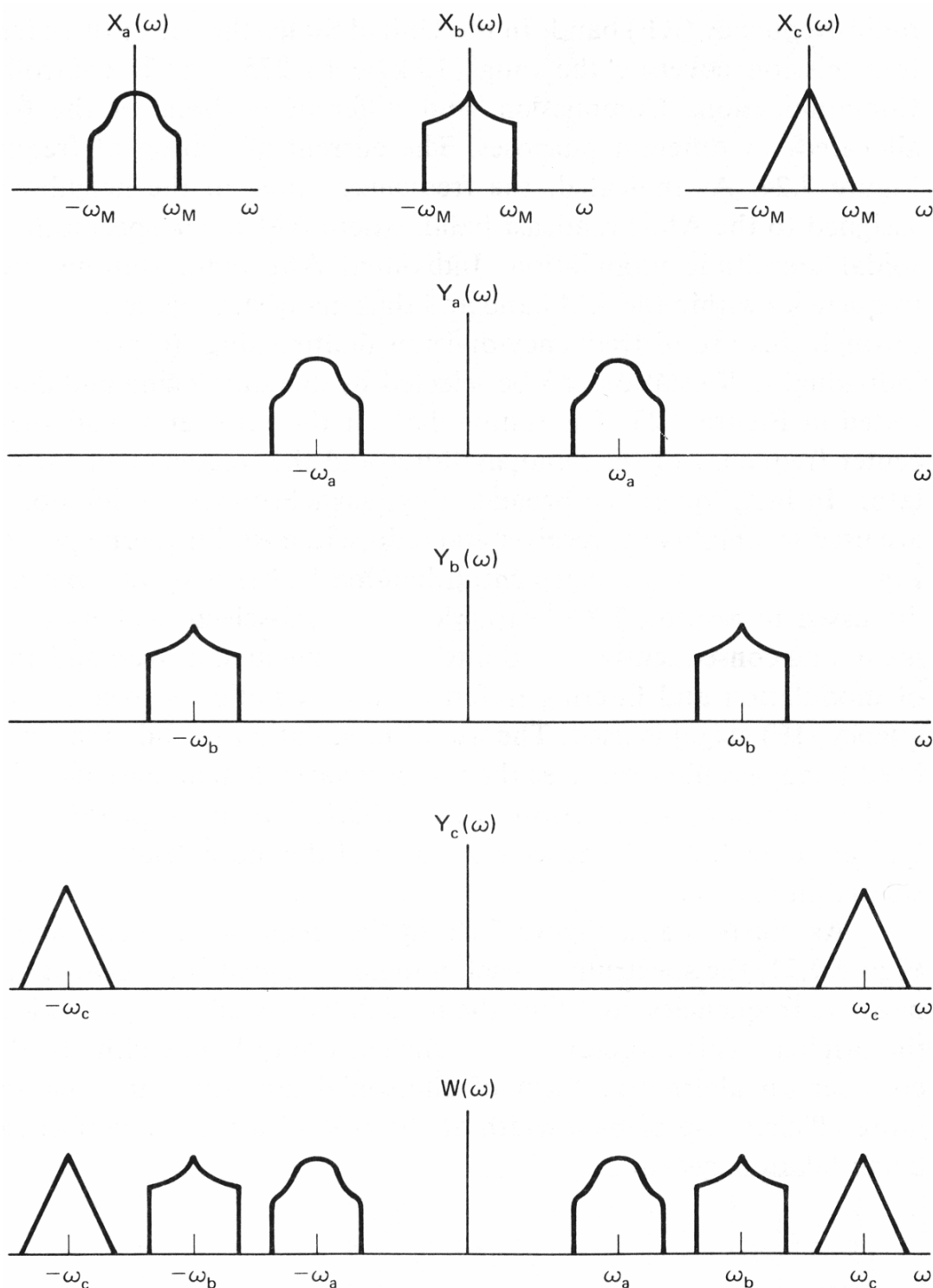
Az egyik legelterjedtebb felhasználása a szinuszoidális AM-nek az információ továbbító rendszerek. A moduláció két okból is szükséges ezen a területen. A különböző szolgáltatók általi adások egy-egy jól meghatározott frekvencia sávban folynak, amelyek legtöbbször nem esnek bele az éppen továbbítandó jel sávjába. Például a nagy telefon rendszerekben a távolsági hívásokat sokszor mikrohullámú vagy műhold kapcsolat segítségével továbbítják. Azonban a telefon vonalon átvitt jel a 200Hz-4kHz frekvencia sávban van, míg a mikrohullámú összeköttetéshez használatos jelek a 300Mhz-től egészen a 300Ghz-ig terjednek ki. Ha pedig műholdas összeköttetést szeretnénk akkor annak frekvencia tartománya 1.5Ghz-20Ghz-ig terjed. Ezért, hogy ezeket a csatornákat felhasználjuk a telefonos vonal rendszerünkben hang továbbítására valamilyen módon át kell alakítanunk a jelünket, hogy azokat az ezekben a frekvencia tartományokban lévő vivő jel segítségével át tudjuk juttatni a csatornán. Erre megoldást kínál megoldást az előzőekben tárgyalt szinuszoidális amplitúdó moduláció.

Egy másik fontos oka a modulációnak, hogy rendkívül sok rendszer szeretne egymással párhuzamosan kommunikálni, amire lehetőséget is ad ezeknek a csatornáknak az egy kommunikációs jelnél lényegesen nagyobb sáv szélessége. Így ha ezeket a jelek mindegyikét el tudjuk úgy tolni különböző frekvenciájú vivő jelekkel, hogy spektrumok egymásba ne lapolódjon át, akkor lényegében több kommunikációt tudunk lefolytatni egy csatornán, mivel a demoduláló oldalon elhelyezkedő alul áteresztő szűrő majd úgyis csak a megfelelő sávból érkező jelet fogja átengedni, és a többi párhuzamos kommunikáció nem fogja zavarni az egyedit. Ezt az eljárást frekvencia-osztásos multiplexálásnak (FDM) (frequency-divison multiplexing) nevezzük. Egy ilyen frekvencia osztásos multiplexálásra példa az alábbi elrendezés ahol különböző vivő frekvenciájú szinuszoidális jeleket használunk fel a modulációra.



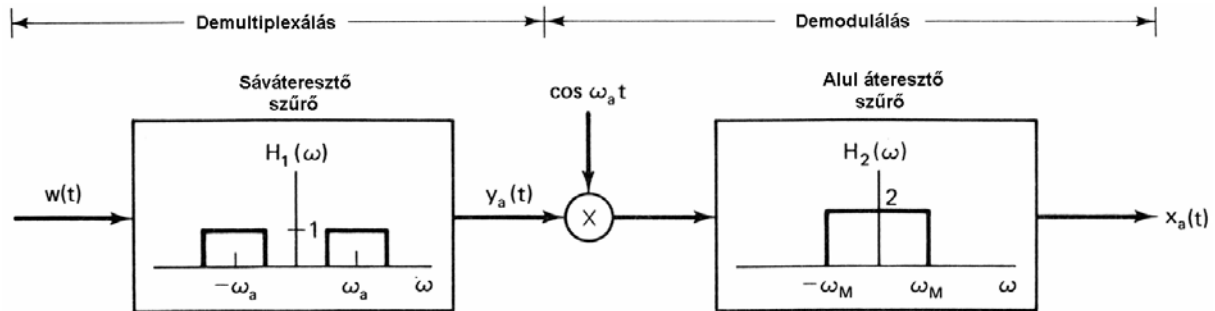
232. ábra Frekvencia osztásos multiplexálás szinuszoidális AM-el

Az egyes jelekről persze fel kell tételeznünk hogy sávhatároltak és sávszélességük kisebb mint a multiplexáláshoz rendelkezésre álló sávselet. A moduláció után a multiplexálni kívánt modulált jeleket egyszerűen összegezzük és egy jelként továbbítjuk a kommunikációs csatornán. Egy ilyen multiplexálásra példa az alábbi ábrásor, ahol három sávhatárolt jelet modulálunk különböző vivő frekvenciákra, majd összegzés után a $w(t)$ jel spektrumában, mivel jól voltak megválasztva a vivő frekvenciák, átlapolódás nélkül megjelenik mindhárom jel modulált spektruma.



233. ábra Frekvencia multiplexálás hatás a spektrumon

Az egyes jelek tehát a számukra fenntartott frekvencia sávba kerültek a csatorna jelében. Hogy ezen jeleket a vevő oldalon vissza tudjuk kapni, két alapvető lépést kell megtennünk. Az egyes jelekre tekintve a demoduláció első fázisában a csatorna jelet a kiválasztott vivő frekvenciának megfelelő sáváteresztő szűrőn kell átvinnünk, hogy a csatornából a jel modulált spektrumát megkapjuk. Ezt nevezzük a demultiplexálási fázisnak. Második lépésként pedig a demodulált jelet kell előállítanunk a korábbról már ismert eljárással. Ezt a két lépcsős folyamatot szemlélteti az alábbi ábra:



234. ábra Frekvencia osztásos jel demultiplexálása és demodulációja

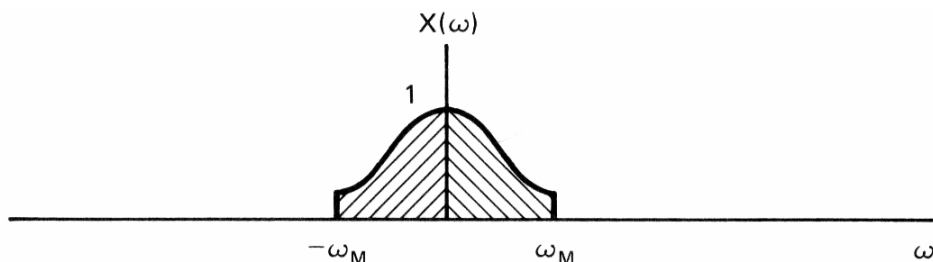
Mivel a kommunikációra nagy igény van azonban annak eredményességéhez két modulált jel nem lapolódhat egymásra, ezért valamilyen módon biztosítani kell a frekvenciák kiosztását az egyes szolgáltatók között. Ezt a rádió frekvenciára vonatkozólag Európában az ITU-R (International Telecommunicating Union), az Egyesült Államokban pedig a FCC (Federel Communications Commision) szabályozza az RF 10kHz-275Ghz sávban

Az AM kommunikáció általában 1Ghz környékén valósul meg, ahol minden rádió állomásnak saját vivő frekvenciája van.

6.3. Egy oldalsávós AM (Single-Sideband AM)

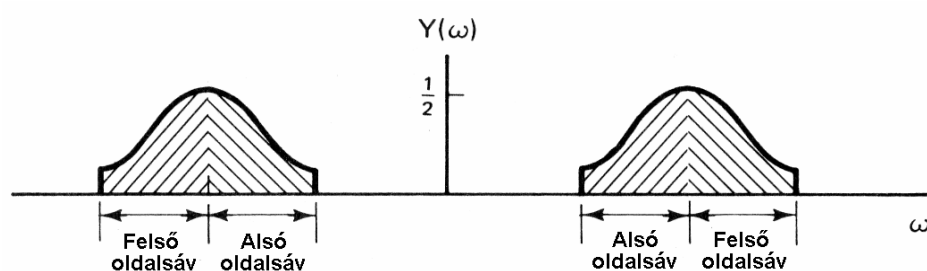
A következőkben a szinuszoidális amplitúdó moduláció egyik alternatív formáját fogjuk tárgyalni, ami bár bonyolultabb moduláló és demoduláló berendezést követel, de a rendelkezésre álló sáv szélesség sokkal gazdaságosabb kihasználtságához vezet. A szinuszoidális AM-nél az eredeti jel teljes sáv szélessége $2\omega_M$ volt, ami a pozitív és negatív frekvenciákat is magába foglalta egészen a maximális ω_M frekvenciáig. A komplex exponenciálist felhasználva a spektrumot teljes egészében el tudtuk tolni ω_c -be. és a sáv szélessége jelünknek továbbra is $2\omega_M$ maradt, habár a jelünk most már komplex értékű volt. Teljesen szinuszos vivő jellel a spektrumot $+\omega_c$ és $-\omega_c$ -be is eltoltuk, és bár a jelünk továbbra is valós maradt, a szükséges sáv szélesség azonban megduplázódott. Ez viszont az jelenti, hogy a jel belső redundanciával rendelkezik. Az úgynevezett egy oldalsávós modulációs technikával ezt a redundanciát megszüntethetjük és a sáv szélesség ismét csak $2\omega_M$ lesz.

Tekintsünk egy $x(t)$ jelet amelynek spektruma az alábbi:

235. ábra Egy adott $x(t)$ jel spektruma

Különböző irányú satírozással jelöltük a pozitív és a negatív frekvenciákhoz tartozó részét a spektrumnak.

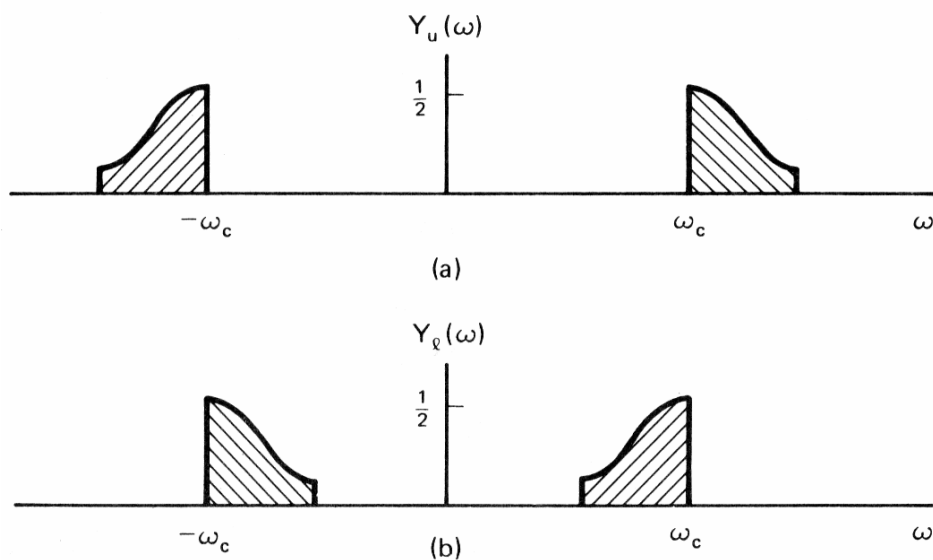
Ha most modulálva a jelet a $+\omega_c$ és $-\omega_c$ -ra toljuk a jelet akkor az alábbi spektrumot kapjuk:



236. ábra A modulált jel spektruma

Itt bejelöltük mindkét spektrum rész felső, illetve alsó oldalsávját. Ha most ezt összehasonlítjuk az előző ábrával akkor jól láthatóan az $x(t)$ jel eredeti spektruma előállítható csupán a modulált jel felső oldalsávjaiból, vagy az alsó oldalsávok segítségével, a többi információ pedig nem szükséges a demodulációhoz.

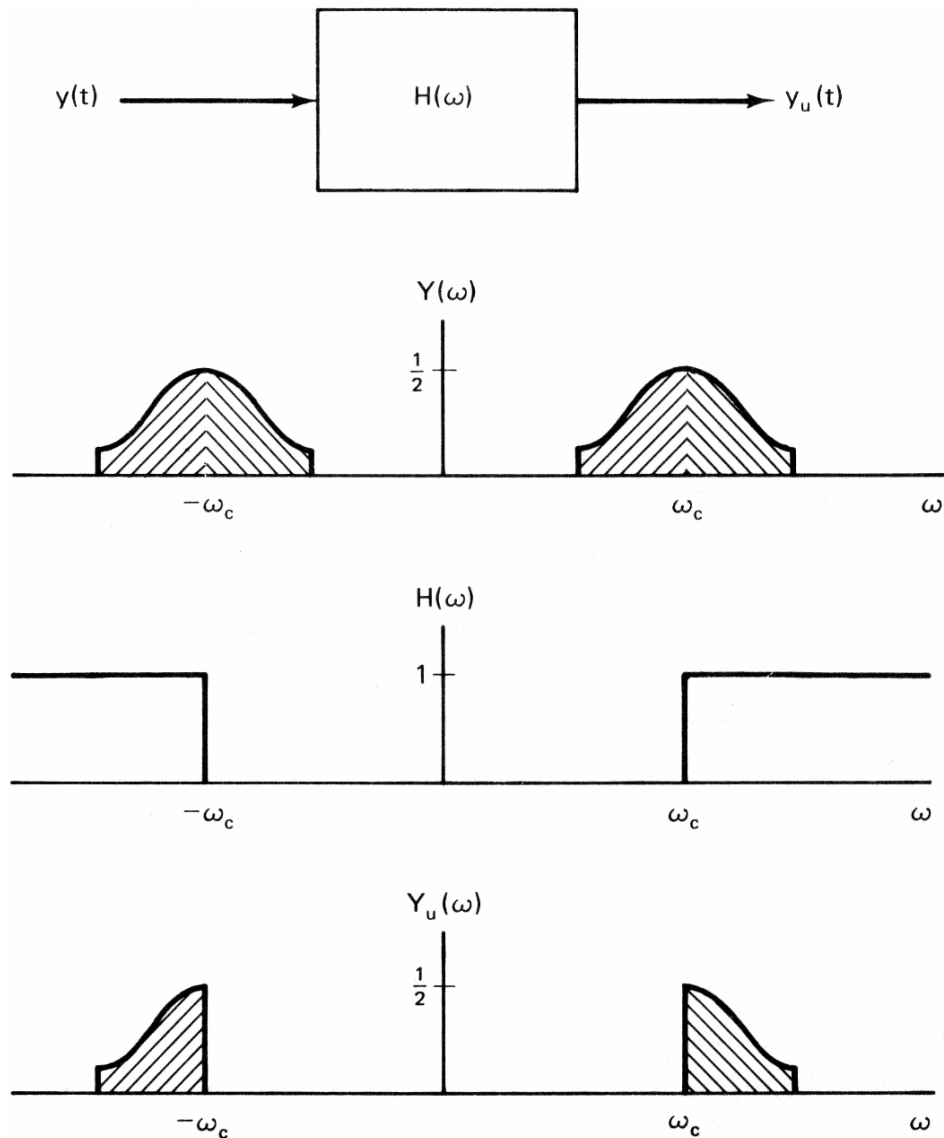
Így elég számunkra a felső vagy az alsó oldalsávokat megőriznünk a kommunikációs csatornára adott jelben.



237. ábra A modulált jel (a) felső; (b) alsó oldalsávjai

Az ezen formára való transzformációját a jelnek egy oldalsáv modulációnak (SSB) (single sideband modulation) nevezzük, ellentétben az előbbieken már tárgyalt két-oldalsáv modulációval (DSB) (double sideband modulation).

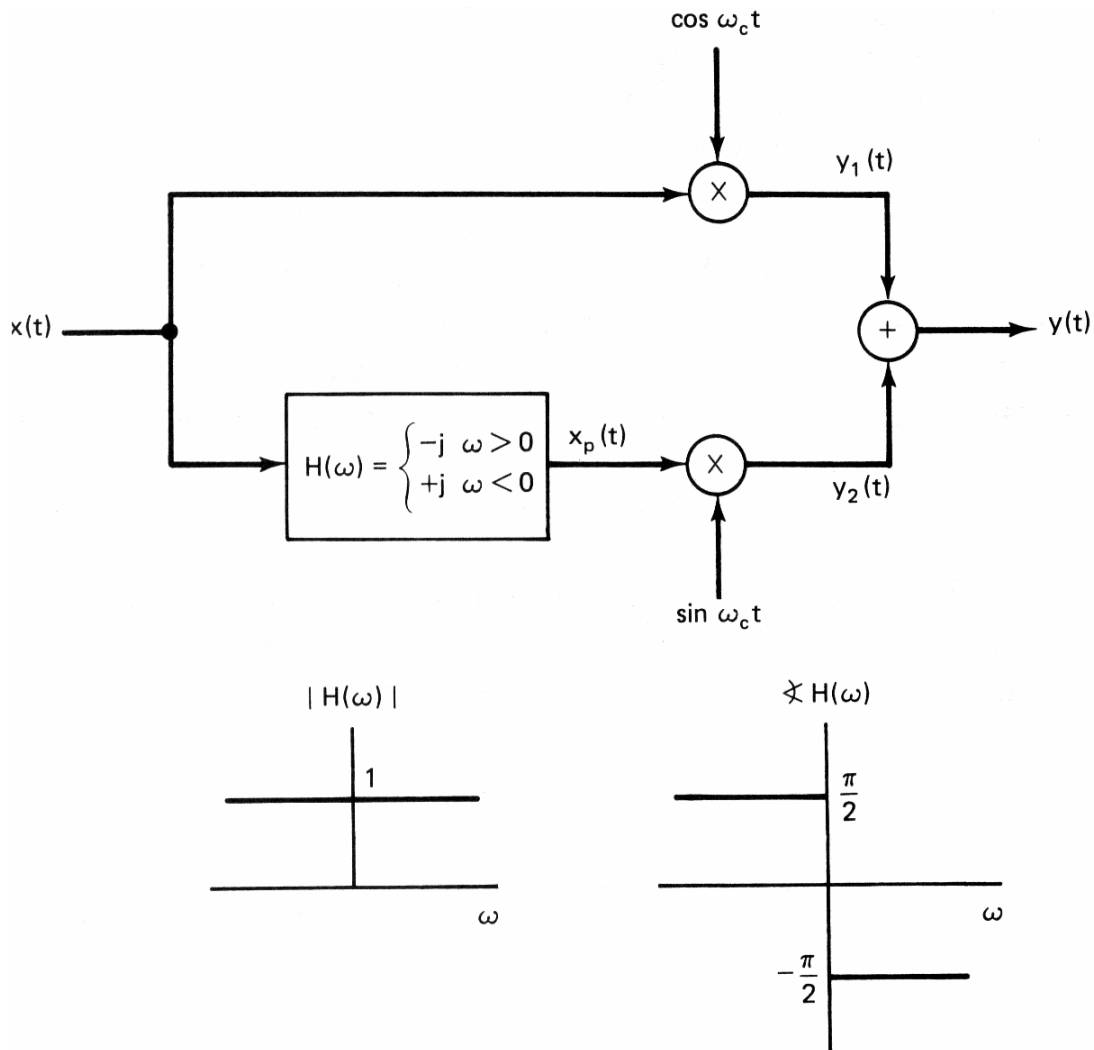
Sokféle eljárás létezik amivel egy ilyen egy oldalsávú moduláció megvalósítható. Az egyik talán legkézenfekvőbb megoldás egy éles sáv, vagy felül áteresztő szűrő alkalmazása közvetlenül a szinuszos moduláció után.



238. ábra A felső oldalsávú moduláció megvalósulása

Egy másik megoldás a fázis váltás tulajdonságát használja ki.

Az alábbi ábrán látható rendszer egy ilyet valósít meg:

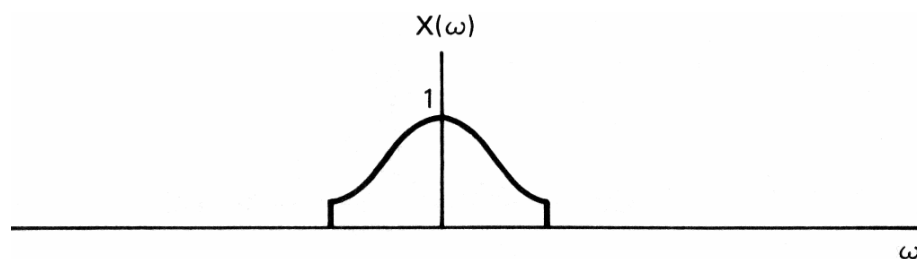


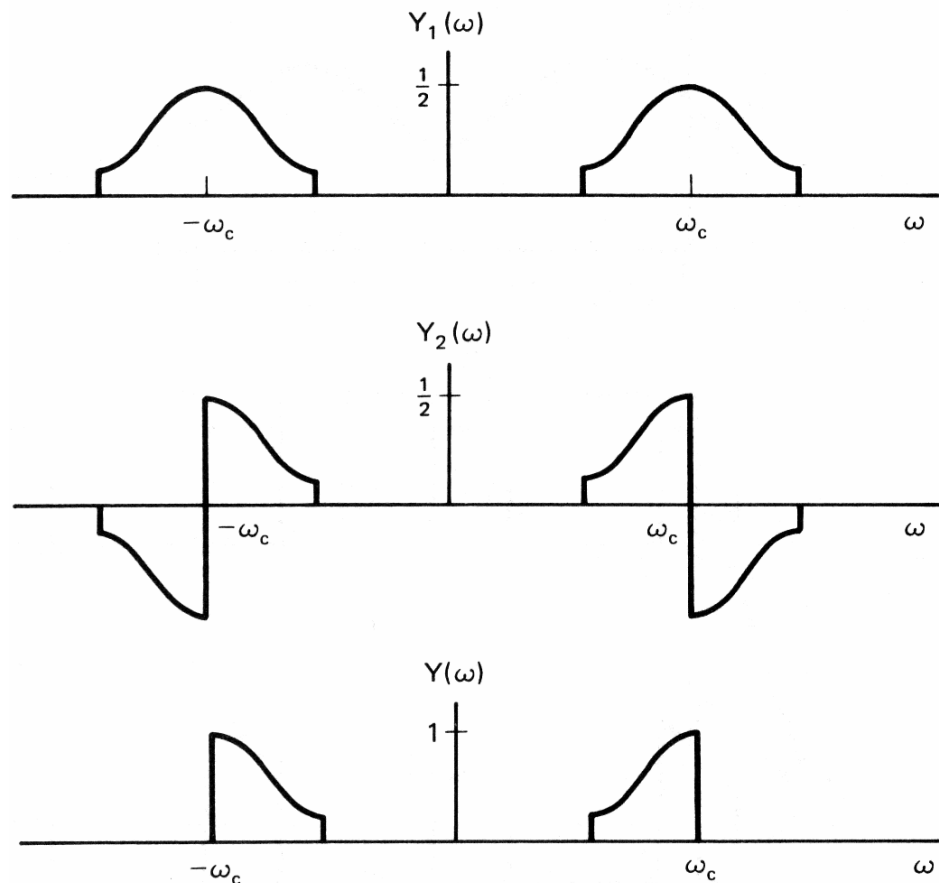
239. ábra Alsó oldalsávós amplitúdó modulációt megvalósító rendszer

A $H(\omega)$ -vel jelölt rendszer egy 90° -os fázis váltást végrehajtó hálózati elem, amelynek frekvencia átviteli függvénye:

$$H(\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases}$$

Az $x(t)$, $y_1(t) = x(t)\cos\omega_c t$, $y_2(t) = x_p(t)\sin\omega_c t$, és $y(t)$ spektrumát az alábbi ábrán tüntettük fel:





240. ábra Az előző rendszerben szereplő jelek spektrumai

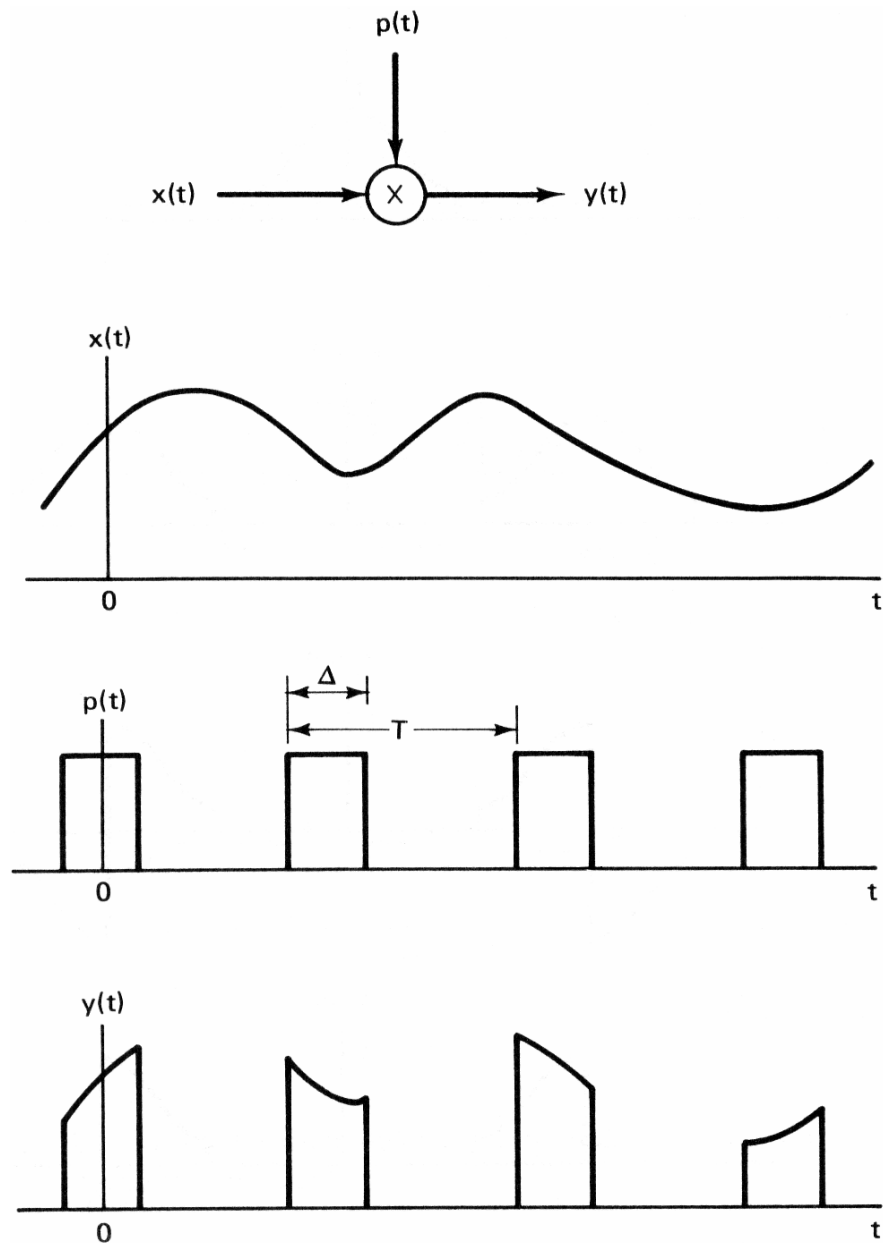
Ha mégis felső oldalsávós modulációt szeretnénk akkor az egész rendszerben csupán $H(\omega)$ -t kell megváltoztatni mégpedig úgy, hogy frekvencia átviteli függvénye az alábbi legyen:

$$H(\omega) = \begin{cases} j, & \omega > 0 \\ -j, & \omega < 0 \end{cases}$$

A demodulálás teljesen hasonlóan történik mind az AM-DSB esetben, az egyetlen különbség, hogy a modulátor sokkal komplikáltabb felépítésű és a kommunikáció lényegesen effektívebb.

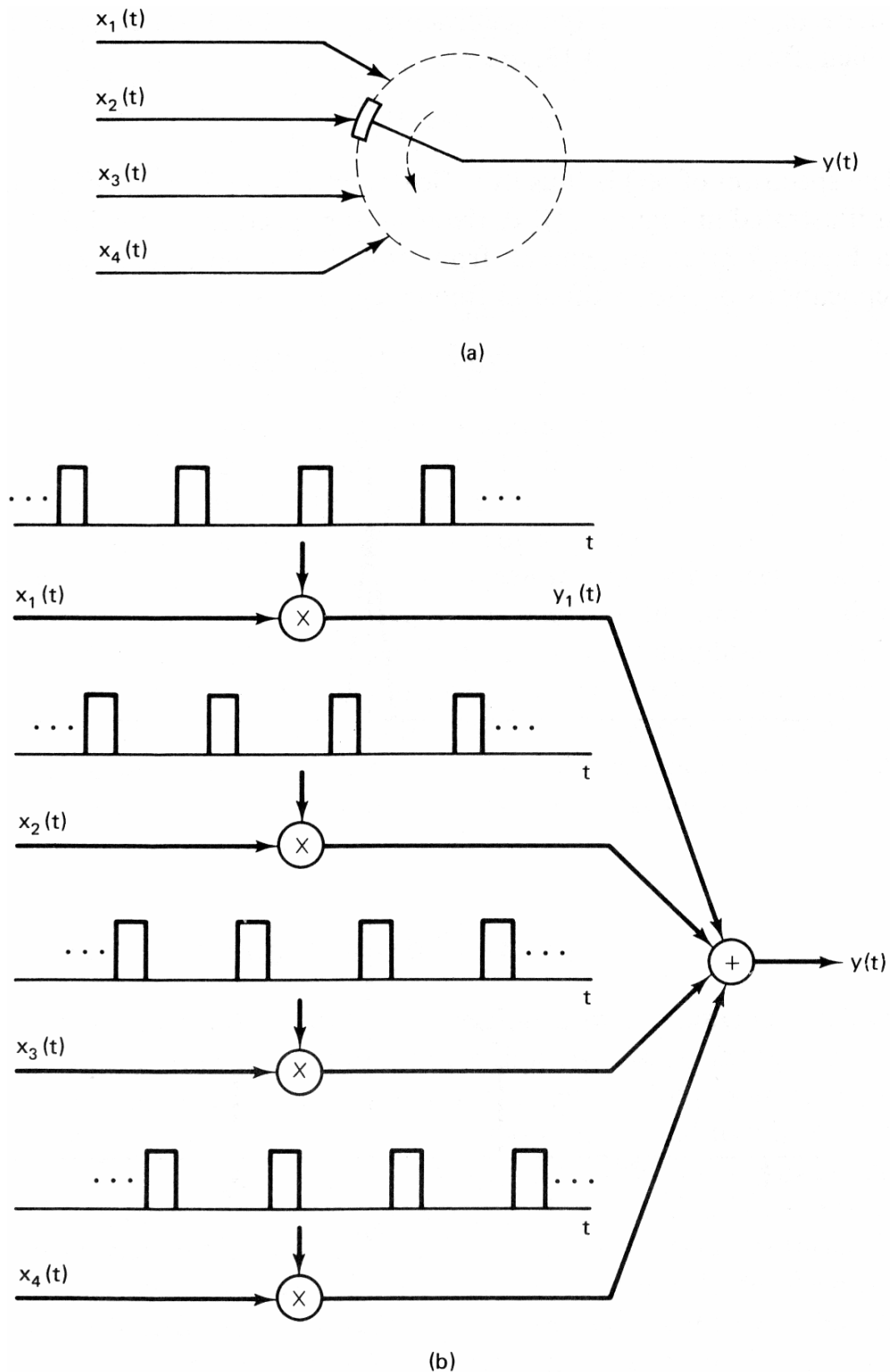
6.4. Impulzus AM és idő osztásos multiplexálás (Pulse AM and Time-Division Multiplexing)

Az előzőek során az amplitúdó modulációt szinuszoidális jelekkel végeztük, habár más jelek is használhatóak effektív moduláció elérésére. Egy másik ilyen jel az impulzus vonat. Ezt a moduláció típust impulzus amplitúdó modulációnak (PAM) (Pulse Amplitude Modulation) nevezzük. Tekintsünk egy példát erre. Az alábbi ábrán látható $x(t)$ jelet a $p(t)$ impulzusvonat segítségével moduláltuk, összeszorozva $x(t)$ és $p(t)$ kaptuk az $y(t)$ jelet.



241. ábra Impulzus amplitúdó moduláció

Az egyik legfontosabb tulajdonsága ennek a modulációnak, hogy egy csatornán több jelet vihetünk át egyszerre, mivel a modulált jel csupán akkor nem nulla, hogyha éppen nem nulla a vivő jel. Emiatt azon időközökben ahol a jel nulla másik jelet vihetünk át olyan moduláció segítségével ahol az előző vivő jel nulla értékénél a másik jel vivő jele nem nulla, míg nem nulla értékénél pedig null értékű. Így két ilyen módon modulált jelet összeadva egy csatornán két jelet tudunk egyszerre átvinni. Ezt akár több jellel megtehetjük, ha mindig a vivő jelek közül, bármely időpillanatban, csak egy aktív. Egy ilyen rendszerre példa a következő elrendezés:



242. ábra Idő osztásos multiplexálás

Ezen elgondolás alapján minden jelhez egy Δ időintervallumot jelölünk ki amiben az átvitele történik, ezen átviteli intervallumok pedig T időközöként ismétlődnek, azaz T időközönként ismét átvitel történik a vizsgált jelre nézve.

Ezek az időintervallumok csupán egyetlen jelhez tartoznak ezért nincs átlapolódás a jelek között. Minél kisebb a Δ/T arány annál több jelet tudunk egyszerre átküldeni a csatornán. Ezt az eljárást más néven idő osztásos multiplexálásnak (TDM) (Time-Division Multiplexing) nevezik. Ahol ellentétben a frekvencia osztásos multiplexálással, ahol frekvencia sávokra osztottuk a vivő jelet a párhuzamos kommunikáció miatt, itt a jelet idő tartományokra osztjuk, amelyben a párhuzamos kommunikáció folyik. Lényegében ez soros kommunikáció csak az adók és a hozzájuk tartozó vevők között változtatunk. Egy ilyen TDM jel (vagy más néven TDM keretek) demodulálása csupán a megfelelő idő intervallumok kiválasztásával végrehajtható.

Igen valószínűtlen lehet az a lehetőség, hogy tetszőleges folytonos jel visszanyerhető egy impulzus amplitúdó moduláció után, pedig ez bizonyos feltételek teljesülése esetén teljes egészében kivitelezhető egy alul áteresztő szűrő segítségével, no meg egy kis furfanggal. Hogy ezeket a kritériumokat le tudjuk vezetni tekintsük az $x(t)$ jel modulációját egy $p(t)$ impulzus vonat vivő jellel:

$$y(t) = x(t)p(t)$$

Ekkor szinuszoidális vivő jel esetén láttuk, hogy a Fourier transzformált modulációs tulajdonsága értelmében:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$

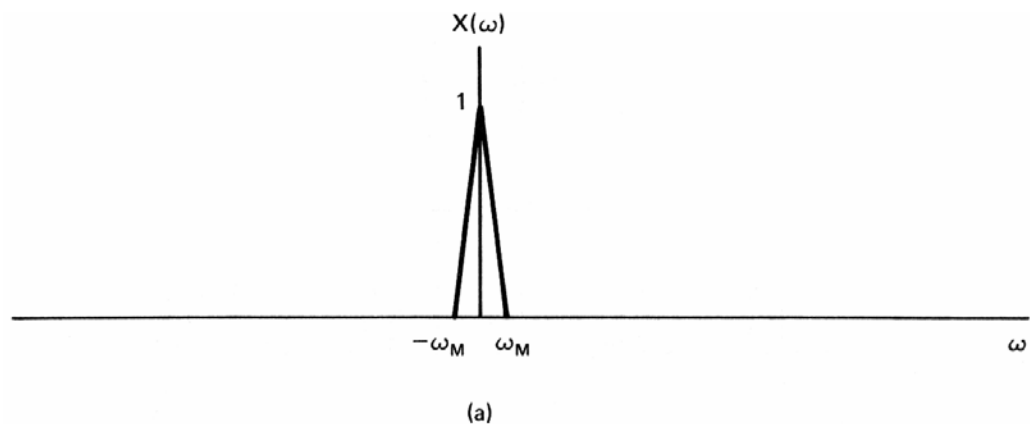
Mivel a $p(t)$ jel periodikus T alapperiódus idővel, ezért $P(\omega)$ is egymástól egyenlő frekvenciára lévő impulzusokból áll a frekvencia tartományban, sőt periodikus még hozzá $2\pi/T$ periódus idővel, azaz:

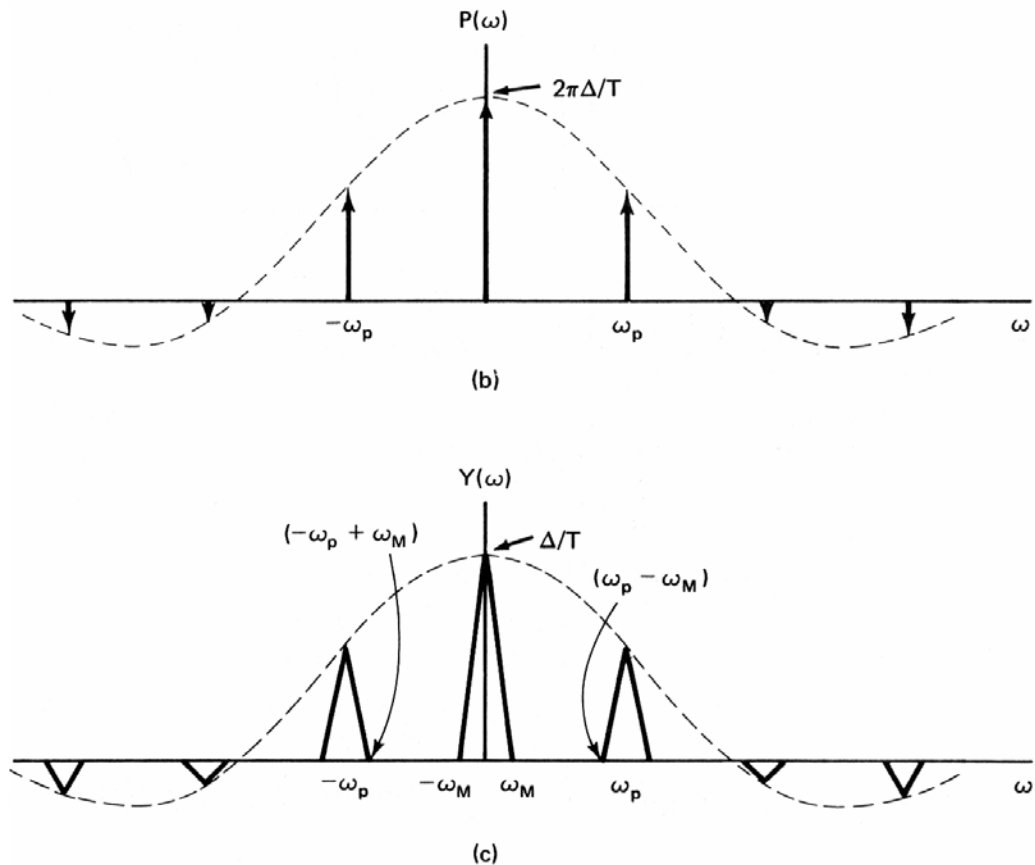
$$P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_p)$$

Ahol $\omega_p = 2\pi/T$ és az a_k együtthatók a $p(t)$ jel Fourier együtthatói, amikre igaz, hogy:

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_p \Delta/2)}{\pi k}$$

A $p(t)$ jel spektruma és egy adott $x(t)$ jelre a modulált jel spektruma az alábbi példán látható:





243. ábra Az impulzus amplitúdó moduláció hatása a spektrumra

Jól látható hogy $Y(\omega)$ nem más, mint az $X(\omega)$ replikációi, a ω_p többszöröseinek megfelelő frekvenciákba tolva úgy, hogy amplitúdójuk a $p(t)$ jel transzformáltjának burkoló görbéjével arányosan változik. Azaz:

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k X(\omega - k\omega_p)$$

Az ábrából egyértelmű, hogy $X(\omega)$ egyértelműen kinyerhető $Y(\omega)$ -ből ha

$$(\omega_p - \omega_M) > \omega_M$$

vagyis

$$\omega_p > 2\omega_M$$

Ahol $X(\omega)$ értéke zérus ha $|\omega| > \omega_M$. Így ezek alapján látható, hogy a megfelelő T választása esetén a jelnek elegendő sávszélesség áll majd rendelkezésre a hibátlan átvitelhez. A demoduláláshoz pedig egy aluláteresztő szűrő szükséges csak amelyik levágási frekvenciája ω_M -nél nagyobb de kevesebb mint

$$(\omega_p - \omega_M).$$

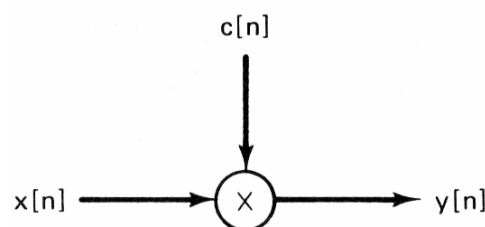
Érdekes lehet az észrevétel, hogy az $x(t)$ jel visszanyerhetőségének feltétele csupán a T periódus időn múlik, és független a Δ időintervallum nagyságától. Így egyértelműen az a cél, hogy minél kisebbre válasszuk az időszelvények nagyságát, hisz így több jelet tudunk egyidejűleg átvinni, azonban a gyakorlati eredmények azt mutatják, hogy az időszelvények csökkenésével az impulzusok

amplitúdója olyannyira megnövekszik, hogy a modulált jel már igen érzékeny lesz a zajokra, emiatt sokszor lényegesen módosul a demodulált jel az eredetihez képest. Ahogy Δ értéke tart a nullához a $p(t)$ jel amplitúdója határértékében tart $1/\Delta$ -hez azaz a végtelenhez, és $p(t)$ egy periodikus folytonos impulzus vonattá válik, ami az $x(t)$ jelből minden idő pillanatban mintát vesz. Ezzel az esettel majd a következő fejezetben foglalkozunk.

6.5. Diszkrét idejű AM (Discrete-Time AM)

Az előzőekben megismert amplitúdó modulációs technikákat diszkrét időben is alkalmazhatjuk. Mivel napjaink kommunikációs rendszerei az analóg külső világ jeleit mintavételezéssel diszkrét jelekké alakítják át, majd digitalizálják és így a számítógépek számára feldolgozható adattá konvertálják. Elengedhetetlenül szükséges, hogy az egyes műszer elemek közötti diszkrét jelkapcsolat valamilyen moduláción menjen át, így biztosítva majd az effektívebb és biztonságosabb csatorna kihasználtságot. Tehát ezekben a rendszerekben diszkrét időben moduláljuk a jeleket, gyakran a közös átviteli csatorna miatt multiplexáljuk, sőt sok ilyen rendszerben szükséges, hogy a frekvencia-osztásos multiplexált jelet át is tudjuk transzformálni idő-osztásos multiplexált jellé vagy éppen fordítva. Az ilyen rendszereket transzmultiplexer (transmultiplexing) rendszereknek nevezzük, amik egy rendkívül fontos alkalmazását valósítják meg a diszkrét idejű modulációnak, de ezeket a rendszereket majd a következő fejezetben tárgyaljuk bővebben. Egy másik fontos alkalmazását, nevezetesen a sáv szűrők egyszerű megvalósítását, is meg kell említenünk a diszkrét idejű amplitúdó modulációnak, amint az folytonos esetben is megtettük. Nos, nézzük meg, hogy is működik az amplitúdó moduláció diszkrét esetben:

Az alábbi elrendezés egy diszkrét amplitúdó modulációt valósít meg:



244. ábra Diszkrét idejű amplitúdó moduláció

Ahol a $c[n]$ jel a vivő jel, és $x[n]$ pedig a modulálni kívánt jelünk. Folytonos időben, levezetésünk alapja a Fourier transzformált modulációs tulajdonsága volt, azaz az a tény, hogy az idő intervallumban két jel szorzata, a frekvencia tartományban a két jel spektrumának konvolúcióját jelenti. Ahogy azt a diszkrét Fourier transzformáltak kapcsán láttuk, diszkrét esetben is él e tulajdonság csak egy kicsit más alakban.

Vegyük az alábbi $y[n]$ jelet:

$$y[n] = x[n]c[n]$$

Ekkor, ha $X(\Omega)$, $C(\Omega)$, és $Y(\Omega)$ a diszkrét idejű Fourier transzformáltját jelentik a fenti jeleknek, akkor tudjuk, hogy a diszkrét modulációs tulajdonság értelmében $Y(\Omega)$ arányos a $X(\Omega)$, $C(\Omega)$ transzformáltak periodikus konvolúciójával:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\theta) C(\Omega - \theta) d\theta$$

Mivel $X(\Omega)$ és $C(\Omega)$ 2π -vel periodikus ezért az integrálást elég egy 2π hosszú intervallumra korlátozni.

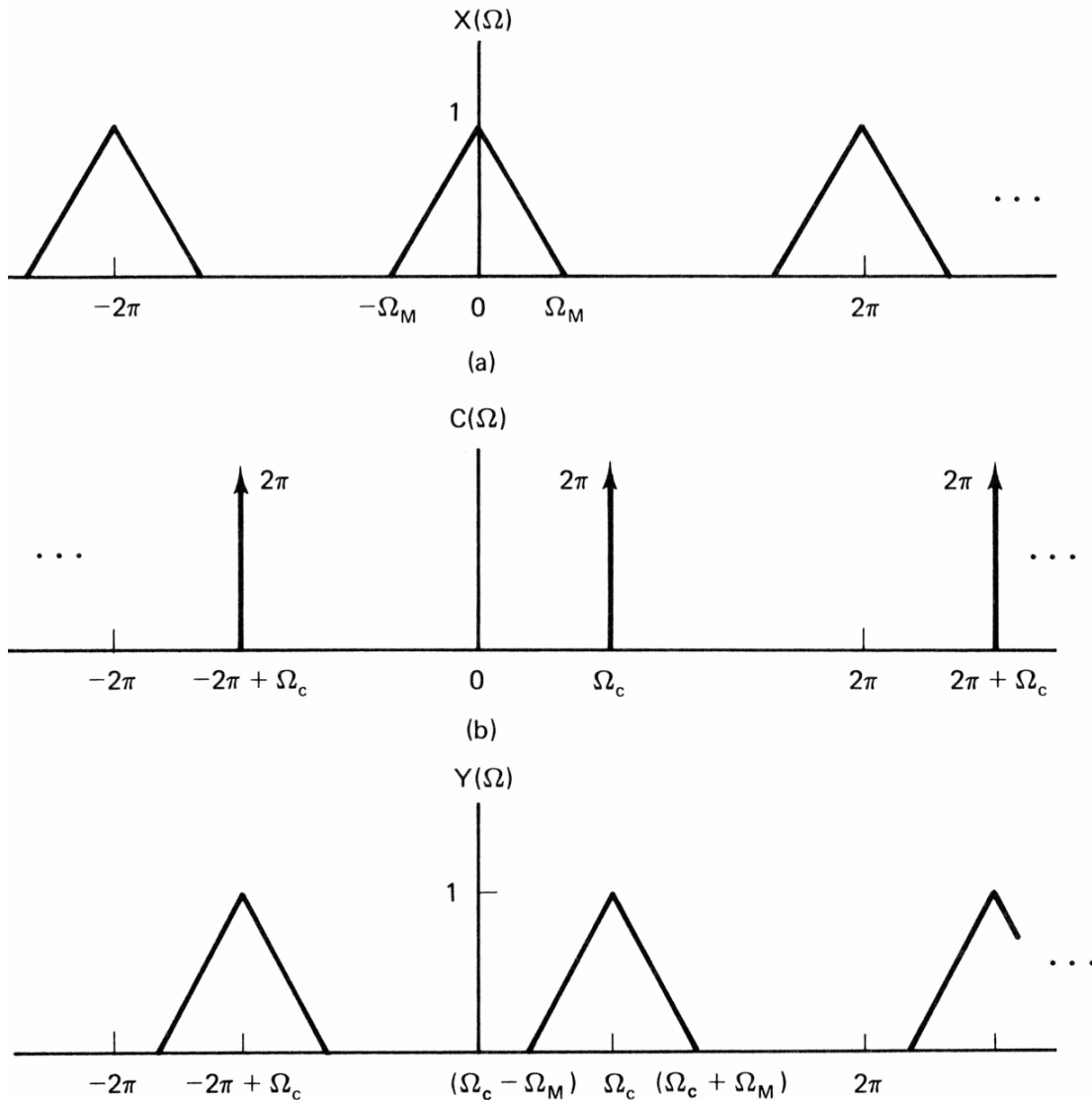
Elsőnek nézzük a szinuszoidális amplitúdó modulációt komplex exponenciális vivő jel segítségével:

$$c[n] = e^{j\Omega_c n}$$

Ahogy azt az előzőekben már láthattuk, egy diszkrét komplex exponenciális jel Fourier transzformáltja egy impulzus vonat, ami az alábbi alakban áll elő:

$$C(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_c + k2\pi)$$

Ha most egy példán keresztül megvizsgáljuk a fentieket, és ha $X(\Omega)$ az alábbi alakú, akkor mivel $C(\Omega)$ egy impulzus vonat így a modulált jel frekvencia spektruma a következő féle képen alakul:



245. ábra Az (a) $x[n]$; (b) $c[n]$; (c) $y[n] = x[n]c[n]$ jel spektruma

A fenti ábrásorból könnyen leolvasható a következő tény, miszerint:

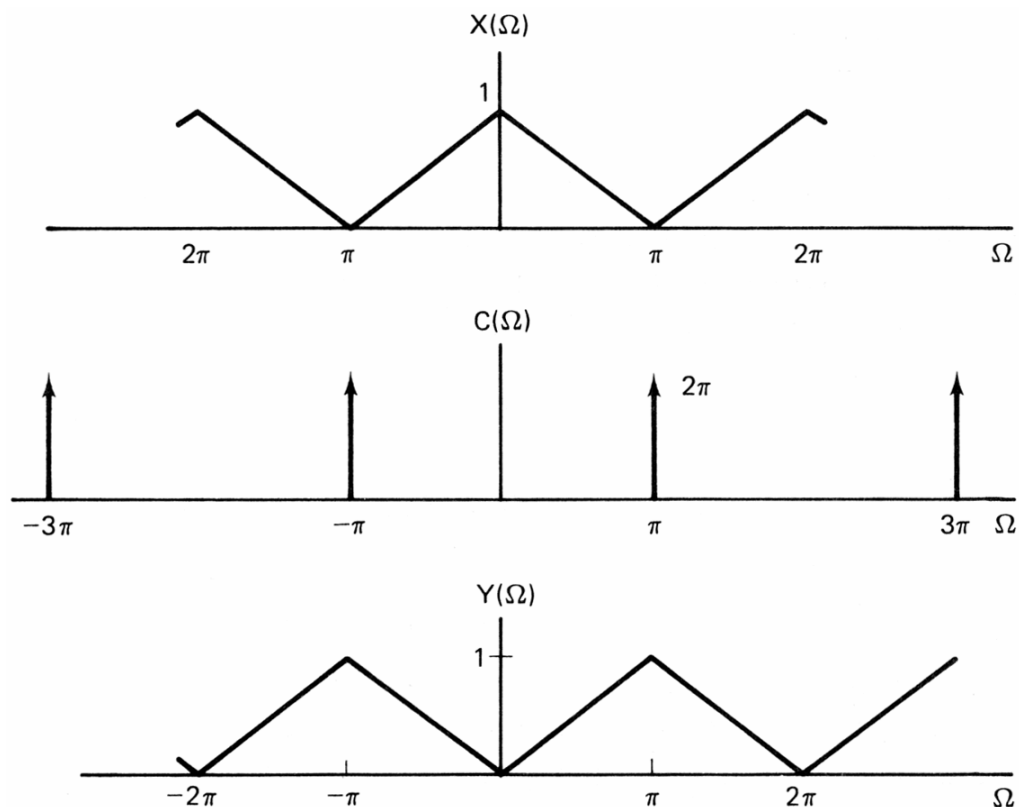
$$Y(\Omega) = X(\Omega - \Omega_c)$$

Ez a diszkrét párja a folytonos esetben kapott eredményünknek. Azonban, ahogy azt a folytonos esetben is tapasztaltuk, ha $x[n]$ valós jel, akkor komplex exponenciálissal való modulációja komplex jelet eredményez.

A demoduláció is teljesen hasonló a folytonos esethez, ugyanis a komplex exponenciális inverzével szorozva a jelet a spektrum visszatolódik az eredeti alakjába, így helyreáll az $x[n]$ jel.

$$x[n] = y[n]e^{-j\Omega_c n}$$

Ha $\Omega_c = \pi$ akkor $c[n] = (-1)^n$, azaz pozitív és negatív váltakozó impulzusok sorozata. Ez által, az ilyen jellel történő moduláció kicseréli a magas frekvencia komponenseket alacsony frekvencia komponensekre, ahogy az a következő példán láthatjuk:

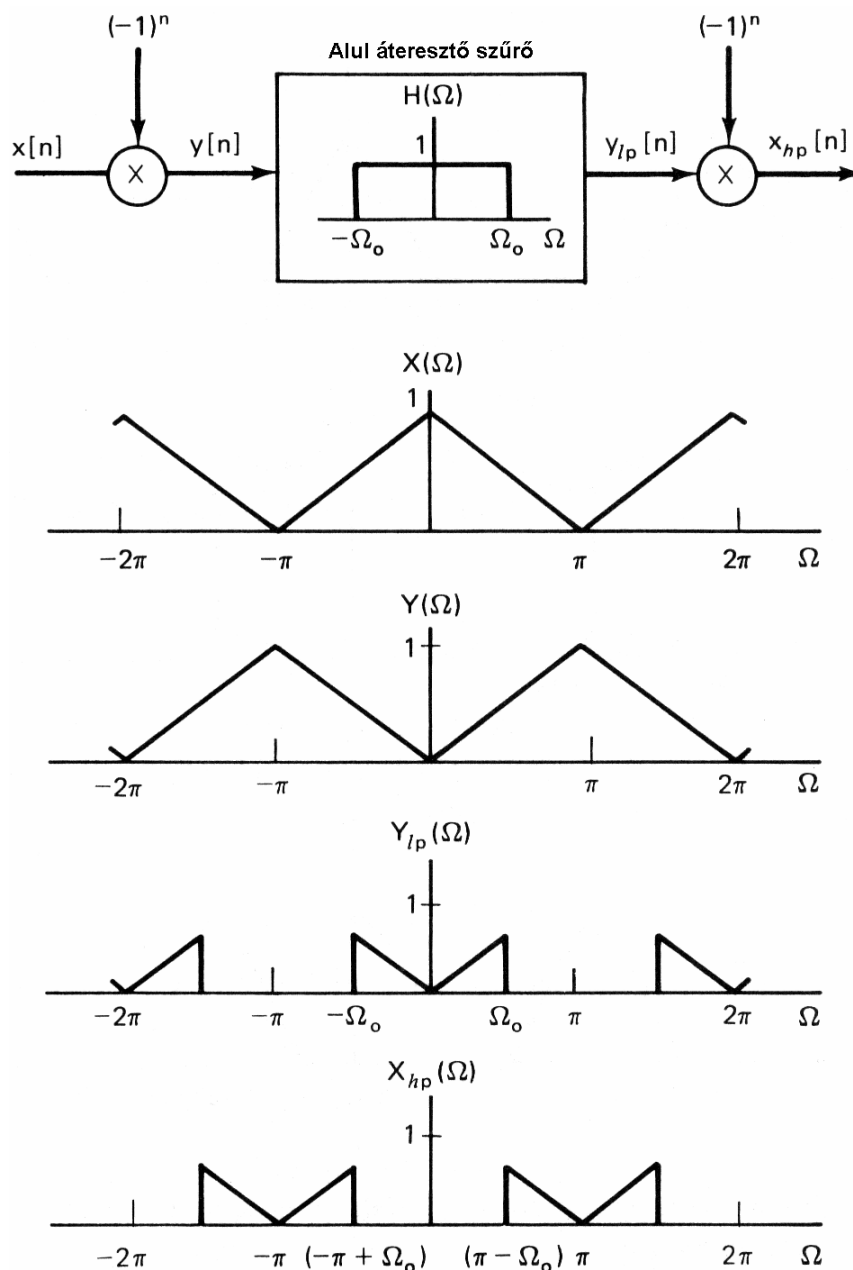


246. ábra Amplitúdó moduláció a $c[n] = (-1)^n$ vivő jelel

$c[n]$ ilyen speciális megválasztása lényegében az algebrai előjelét változtatja meg az $x[n]$ jelnek n páratlan értékeire nézve, és az $y[n]$ jelből előáll az $x[n]$ ha annak minden páratlan n -re megfordítjuk az algebrai előjelét.

Az $\Omega_c = \pi$ vivő frekvenciával való amplitúdó moduláció így felhasználható arra, hogy egy alul áteresztő szűrő segítségével érjünk el felül áteresztő szűrést, vagy egy felül áteresztővel, alul áteresztő szűrést, mivel a speciálisan megválasztott frekvenciával a moduláció során a magas frekvenciákat az alacsony, míg az alacsony frekvenciákat a magas tartományba toljuk, azaz a

spektrumot pontosan π -vel toljuk arrébb. Egy ilyen rendszerre példa az alábbi elrendezés és a hozzá kapcsolódó jelek ábrái:

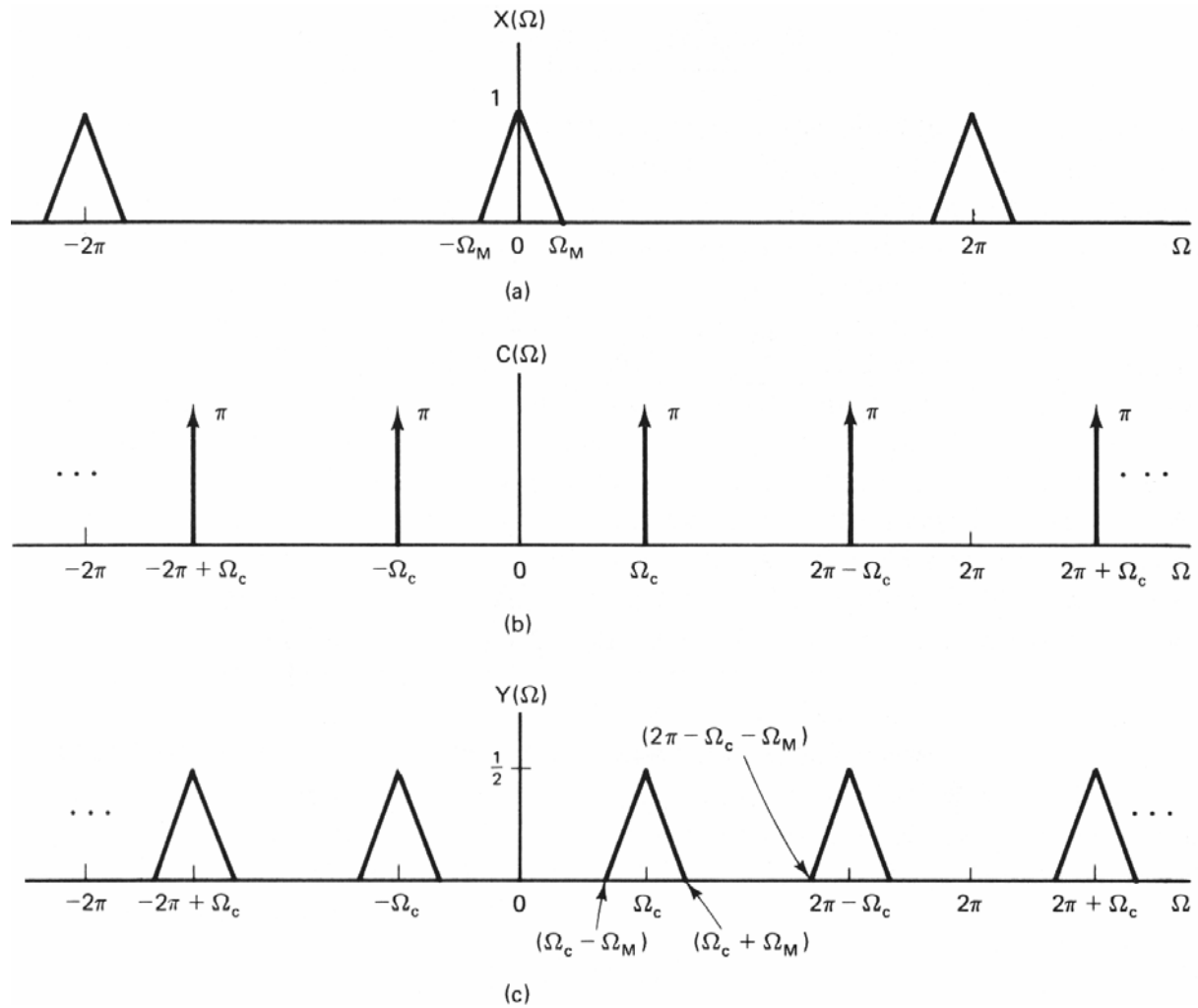


247. ábra Felül áteresztő szűrő megvalósítása
alul áteresztő szűrővel és modulálással

Tisztán szinuszos jellel is végezhetünk amplitúdó modulációt, ahogy arra folytonos esetben számtalan példát láthattunk. Egyik nagy előnye ennek a modulációnak, hogy valós $x[n]$ jel esetén a modulált $y[n]$ jel is valós lesz. Tekintsük az alábbi modulációt:

$$y[n] = x[n] \cos \Omega_c n$$

Ekkor a vivő jel spektruma periodikusan ismétlődő impulzus párokat tartalmaz a $\Omega = \pm \Omega_c + k2\pi$ frekvenciákon. Ha egy $x[n]$ példajelen, aminek spektruma az alábbi ábrán látható, alkalmazzuk a $c[n]$ jellel való modulációt akkor a következőt kapjuk:



248. ábra Diszkrét idejű amplitúdó moduláció szinuszos vivő jellel

Az eredményül kapott $y[n]$ jel spektruma ismét az $X(\Omega)$ eltoltjait tartalmazza. csak most a $\Omega = \pm \Omega_c + k2\pi$ frekvenciákon. Ezért, hogy $X(\Omega)$ másolatai nehogyan átlapolódjanak, fel kell tennünk, hogy:

$$\Omega_c > \Omega_M$$

és, hogy

$$(2\pi - \Omega_c - \Omega_M) > (\Omega_c + \Omega_M)$$

azaz

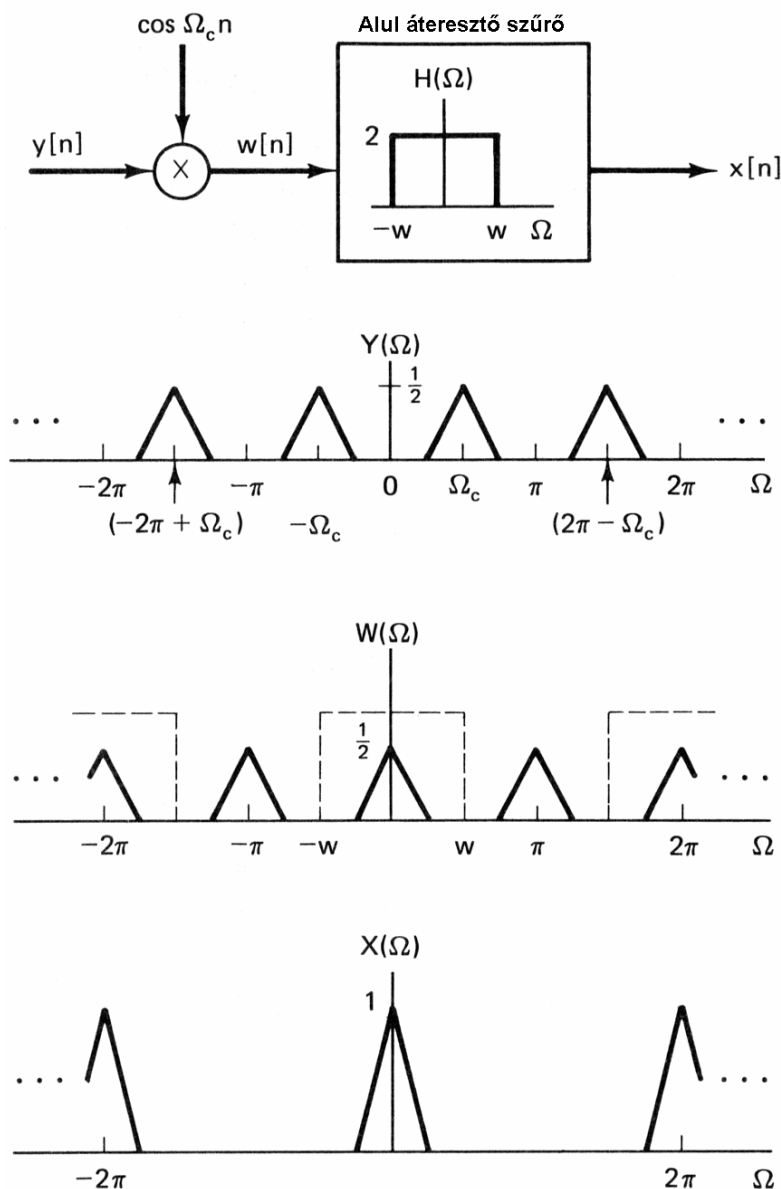
$$\Omega_c < (\pi - \Omega_M)$$

Az első kritériumunk a folytonos esetből már jól ismert, a második viszont a diszkrét eset spektrumainak periodikussága miatt szükséges.

Tehát a két feltétel alapján a következő megállapítást tehetjük. Diszkrét esetben a tisztán szinuszos jellel való moduláció csak akkor nem eredményezi a frekvencia komponensek átlapolódását, ha:

$$\Omega_M < \Omega_c < (\pi - \Omega_M)$$

A demoduláció teljesen úgy zajlik, mint folytonos esetben. Erre példa az alábbi elrendezés és a benne szereplő jelek spektrumai:



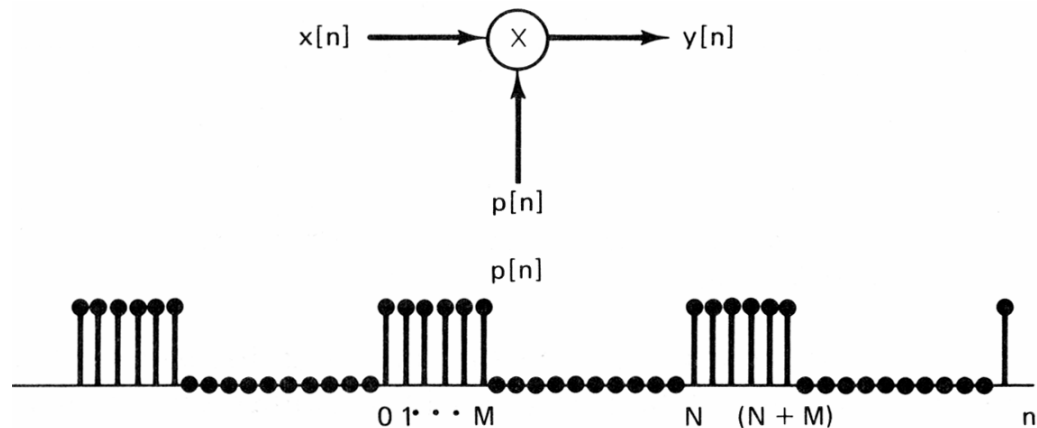
249. ábra Diszkrét idejű szinkron demoduláció

A modulált jel azonos vivő jellel történő újra modulálása után az eredeti spektrum igen sok replikánsa keletkezik a frekvencia tartományban, az egyik ilyen replikáns pont a $\Omega = 0$ frekvencia körül. Egy alul áteresztő szűrő alkalmazásával a többi replikáns eltávolítható és az eredményül kapott jel spektruma teljesen azonos lesz $X(\Omega)$ -nel, így a maga jel azonos lesz $x[n]$ -nel.

Ahogy az előzők során láthattuk, diszkrét időben az amplitúdó moduláció, bár apró különbségekkel, de szinte teljesen azonos módon történik, mint folytonos időben. Így például moduláció és demoduláció esetén felhasznált szinuszoszoidális vivő jelek közötti fázis és frekvencia eltérés a folytonos esettel teljesen azonos módon jelentkezik.

Az előző részben foglalkoztunk az impulzus amplitúdó modulációval és a hozzá szorosan kapcsolódó idő osztásos multiplexálással, nézzük meg, hogy hogyan

működnek ezek a technikák diszkrét esetben. Egy ilyen rendszer egy csatornáját ábrázoltuk a következő ábrán:



250. ábra Diszkrét idejű impulzus moduláció

A fenti rendszer a moduláció során $x[n]$ -nek $M+1$ egymás követő értékét teszi rá a csatornára minden egyes N hosszú periodikusan ismétlődő időintervallumban. Egy ilyen rendszer analízise teljesen hasonló módon végigvihető, mint, ahogy azt folytonos esetben láthattuk. Ott megmutattuk, hogyha az $X(\Omega)$ jel sávszélessége relatíve kicsi $2\pi/N$ -hez képest, ami az alap frekvenciája a $p[n]$ jelnek, akkor $x[n]$ visszanyerhető $y[n]$ -ből egy alul áteresztő szűrő segítségével. Ahogy folytonos időben észrevettük, itt is az eredmény helyessége csupán N -től és $X(\Omega)$ sávszélességétől függ és nem függ az $M+1$ -től, azaz a minta hosszától. Ezért ha az $M=0$ esetet vizsgáljuk, akkor csupán egy mintát küldenénk el az $x[n]$ jelből minden idő intervallumban, s ha $x[n]$ sávszélessége megfelelően kicsi, azaz nem tartalmaz gyors változásokat, akkor az $x[n]$ jelet teljes egészében vissza tudnánk állítani alul áteresztő szűrő alkalmazásával. Ez lesz majd az alapja a következő fejezetben tárgyalt diszkrét idejű mintavételezésnek.

6.6. Folytonos idejű frekvencia moduláció (FM) (Continuous-Time Frequency Modulation)

A fejezet előző részeiben az amplitúdó moduláció különböző fajtáit és technikáit vizsgáltuk végig. Az amplitúdó moduláció lényege az volt, hogy a vivő jel amplitúdójának változásait használtuk fel a továbbítani kívánt jel reprezentálására. Egy másik nagyon fontos modulációs elv, a frekvencia moduláció, ami nem a vivő jel amplitúdójával, hanem annak frekvenciájával, vagy fázisával operál, az átvinni kívánt jel reprezentálása érdekében. Az ilyen fajta modulációs rendszereknek igen sok előnye van az amplitúdó modulációval szemben. A modulált jel amplitúdója konstans értékű ezért a jeladó mindig csúcs teljesítményen járhat, másrészt az additív csatorna zajok és a légkörben tapasztalható elhalkulás (fading) (a megtört hullámok fázisa nem egyezik meg a közvetlenül beérkező hullámok fázisával) komoly gondot okoztak az amplitúdó modulált jel továbbításakor, viszont a frekvencia modulált jelek ezekre a hatásokra sokkal kevésbé érzékenyek. Emiatt a hétköznapi távközlés számára sokkal inkább előnyösebb az FM használata, ezért szinte minden rádió állomás már manapság frekvencia modulációt használ műsorszórásra, bár még a mai rádió készülékek mindegyike képes AM vételre is. Sokszor ezért a frekvencia modulációt a köztudatban jobbnak tartják mint az amplitúdó modulációt, bár,

ahogyan azt látni fogjuk nagyobb sávszélességet igényel mint elhanyagolt testvére.

A frekvencia modulált, más néven szög-modulációs rendszerek (angle modulation systems) erősen nem lineárisak, ezért vizsgálatuk nem tehető meg az előzőhöz hasonló egyszerű módon. Azonban a frekvencia tartományra vonatkozó tulajdonságok, amelyeket épp a Fourier transzformáltakkal kapcsolatban tárgyaltunk, lehetőséget adnak majd arra, hogy megértsük a modulációs technika lényegét. Levezetésünkhöz tekintsünk egy szinuszoidális $c(t)$ vivő jelet, ami az alábbi formában adott:

$$c(t) = A \cos(\omega_c t + \theta_c)$$

Ahol ω_c a frekvenciája és θ_c a fázisa a vivő jelnek. A szög moduláció azonban olyan vivő jelet használ, aminek fázis változik, például az alábbi módon:

$$\theta(t) = (\omega_c t + \theta_c)$$

Ha fázist az $x(t)$ jel alapján változtatják akkor a vivő jel fázis változást fogják hordozni az $x(t)$ jelet, mint információt. Így a fentiek szerint a modulált jel a következő féle képen alakul:

$$y(t) = A \cos[\omega_c t + \theta_c(t)]$$

Ahol θ_c az $x(t)$ jel függvénye és rajta közvetten az időre:

$$\theta(t) = \theta_0 + k_p x(t)$$

Ha az $x(t)$ jel konstans, akkor az $y(t)$ jel fázisa is konstans marad és arányos lesz az $x(t)$ jel amplitúdójával. A szög modulációt ezért fázis modulációnak (phase modulation) is hívják.

A fázis moduláció egyik másik formája mikor a fázis változás áll lineáris kapcsolatban a modulálni kívánt $x(t)$ jellel, azaz:

$$y(t) = A \cos \theta(t)$$

Ahol

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_f x(t)$$

Ha az $x(t)$ jel konstans akkor az $y(t)$ jel egy szinuszoidális jel amelynek frekvenciája arányos az $x(t)$ jellel, ezért ezt a modulációt frekvencia modulációnak hívják.

Habár a frekvencia és a fázis moduláció különböző formái a szög modulációnak a kettőjük közötti különbség nem igazán jelentős, mivel a köztük lévő kapcsolat könnyen fellelhető. Például a fázis modulációra igaz, hogy:

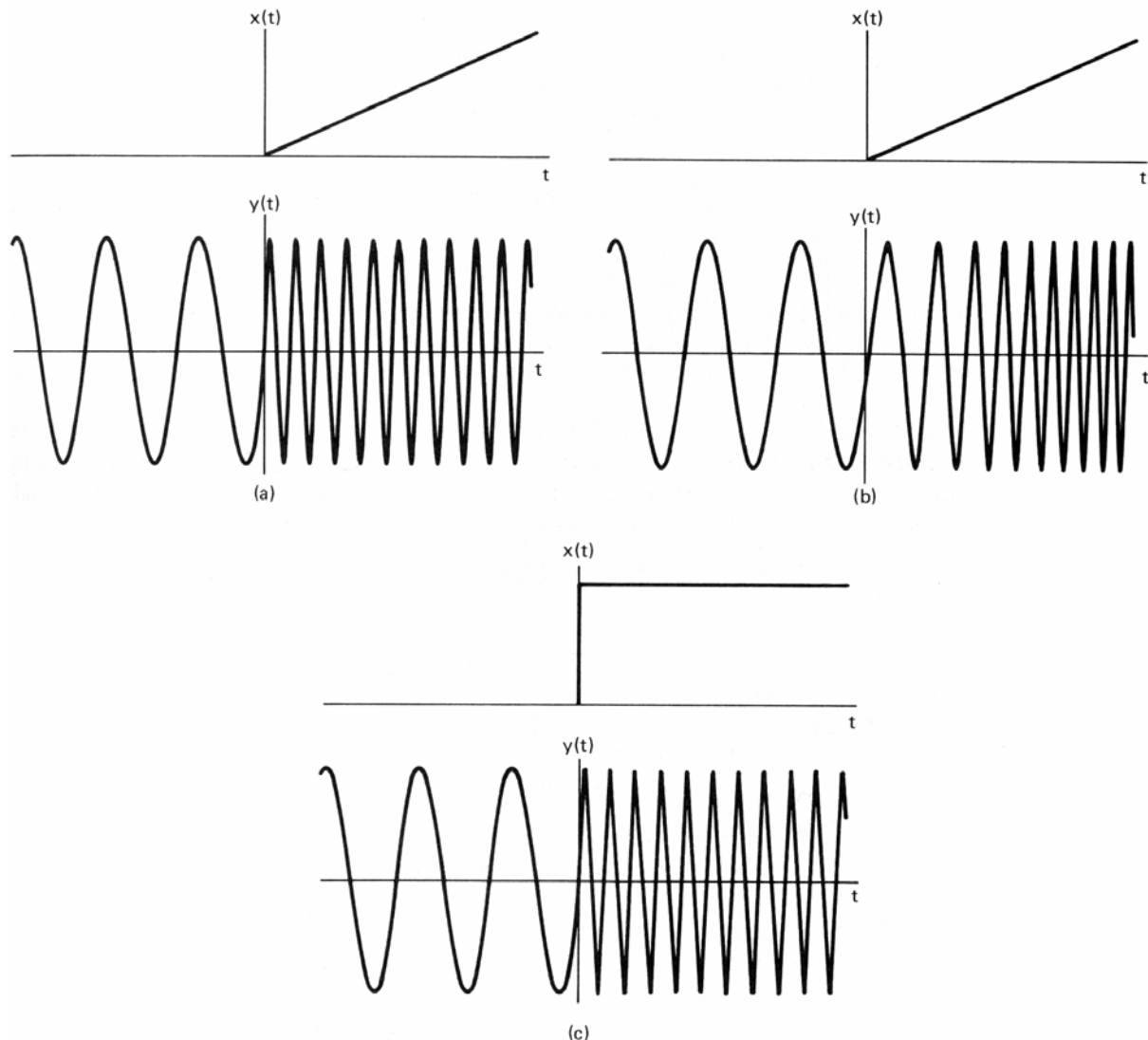
$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_p \frac{dx(t)}{dt}$$

Ezért jól látható, hogy a fázis moduláció megfelel a jel deriváltjával történő frekvencia modulációnak, ugyanígy a frekvencia moduláció megfelel a jel integráltjával történő fázis modulációnak.

A frekvencia és a fázis modulációját ábrázoltuk az egység sebesség ugrás (RAMP) azaz a

$$x(t) = tu(t), \quad t > 0$$

függvényre nézve:



251. ábra (a) RAMP függvény fázis modulációja; (b) RAMP függvény frekvencia modulációja; (c) egységugrás függvény frekvencia modulációja

Ahol a kapcsolatot is igazoltuk a két moduláció között hisz a RAMP függvény deriváltjának, azaz az egység ugrás függvénynek a frekvencia moduláltja megegyezik a RAMP függvény fázis moduláltjával.

A fenti ábra értelmében az egység ugrás függvény frekvencia moduláltja olyan szinuszoidális jel amelynek frekvenciája arányos az $x(t)$ jel értékével, ezért az origóban, ahol a függvény felugrik az 1 értékre a vivő jel frekvenciája is megugrik, míg a RAMP függvény frekvencia moduláltjának esetén is észrevehető az ugrás, azonban itt pontról-pontra lineárisan növekszik a vivő jel frekvenciája. Ezt az idő hatására azonnal változó frekvenciát, pillanatnyi frekvenciának (instantaneous frequency) nevezzük. Egy $y(t)$ jelre ami az alábbi formában adott:

$$y(t) = A \cos \theta(t)$$

a pillanatnyi frekvencia (ω_i) nem más mint:

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Ezért, hogy $y(t)$ valóban szinuszoidális függvény legyen, szükséges, hogy $\theta(t) = (\omega_c t + \theta_0)$ -vel legyen egyenlő, ahol a pillanatnyi frekvencia állandó és értéke ω_c .

A fázis modulációnál is értelmezhetjük a pillanatnyi frekvencia fogalmát ami a $\omega_c + k_f(dx(t)/dt)$ -vel egyenlő.

Mivel a frekvencia és a fázis moduláció erősen kötődik egymáshoz, így a továbbiakban csupán a frekvencia modulációval foglalkozunk. Az itt tett megállapítások ugyanúgy vonatkoznak a fázis modulációra is, és könnyen áttanszformálhatóak.

6.6.1. Keskenysávú FM (Narrowband FM)

Tehát nézzük az $x(t)$ szinuszoidális jel frekvencia modulációját,

$$x(t) = A \cos \omega_m t$$

A pillanatnyi frekvencia ekkor:

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f A \cos \omega_m t$$

ami szinuszosan váltakozik a $\omega_c - k_f A$ és a $\omega_c + k_f A$ frekvencia érték között, ahol a változás sávszélessége: $\Delta\omega = k_f A$.

Így:

$$\omega_i(t) = \omega_c + \Delta\omega \cos \omega_m t$$

és

$$y(t) = \cos\left[\omega_c t + \int x(t)dt\right] = \cos\left(\omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \sin \omega_m t + \theta_0\right)$$

Ahol θ_0 az integrációból adódó konstans, amit akár nullának is választhatunk az egyszerűség kedvéért:

$$y(t) = \cos\left(\omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \sin \omega_m t\right)$$

A $\Delta\omega/\omega_m$ együtttható, amelyet ezután m -el jelölünk, a frekvencia moduláció modulációs indexének nevezzük.

Az FM rendszerek tulajdonságai különbözőek lehetnek attól függően, hogy m értéke nagy vagy kicsi. Azt az esetet ahol m értéke kicsi keskenysávú FM-nek nevezzük.

Visszatérve egyenletünkhöz, tehát:

$$y(t) = \cos(\omega_c t + m \sin \omega_m t)$$

Ahol a trigonometrikus azonosságot alkalmazva kapjuk, hogy:

$$y(t) = \cos(\omega_c t) \cos(m \sin \omega_m t) - \sin(\omega_c t) \sin(m \sin \omega_m t)$$

Ha m elég kicsi, ($m \ll \pi/2$), akkor a következő becsléseket tehetjük meg:

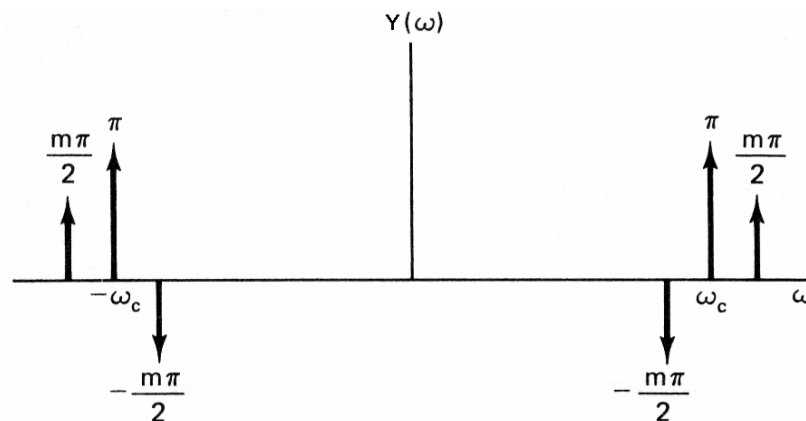
$$\cos(m \sin \omega_m t) \cong 1$$

$$\sin(m \sin \omega_m t) \cong m \sin \omega_m t$$

Így az egyenletünk alakja a következő féle képen alakul:

$$y(t) \cong \cos(\omega_c t) - m \sin(\sin \omega_m t) \sin(\omega_c t)$$

Ha most ennek a jelnek a spektrumát ábrázoljuk:



252. ábra A keskenysávú FM eredményének becslése

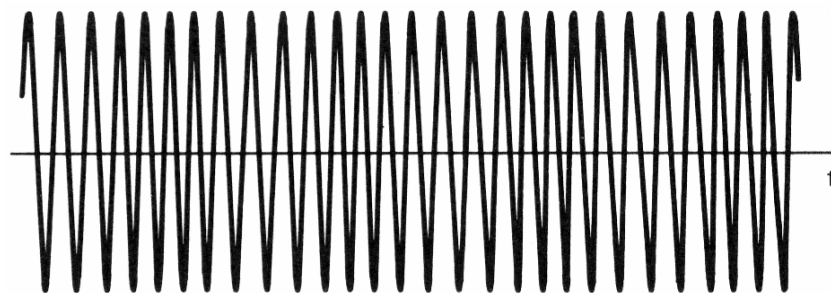
Ami igen hasonló az előzőekben tárgyalt AM-DSB/WC, azaz a vivő jeles dupla oldalsávós amplitúdó moduláció spektrumával, ahol a vivő jel frekvenciája körül láthattuk megjelenni a modulált jel frekvencia spektrumát. Azonban a

AM-DSB/WC esetében a spektrum két oldalsávja azonos fázisú volt, addig a keskenysávú FM modulációnál a két oldalsáv pontosan $\pi/2$ fázis különbségű. A két modulált jel hullámformája is igen különböző. Tekintsük csak az alábbi példát ahol:

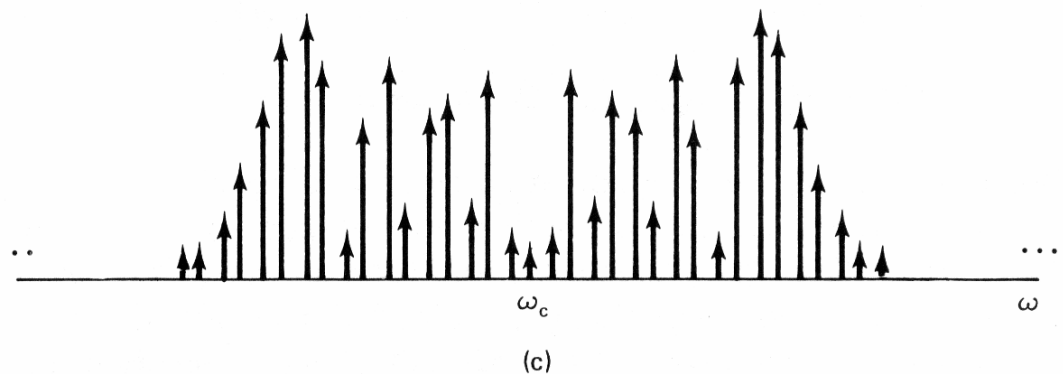
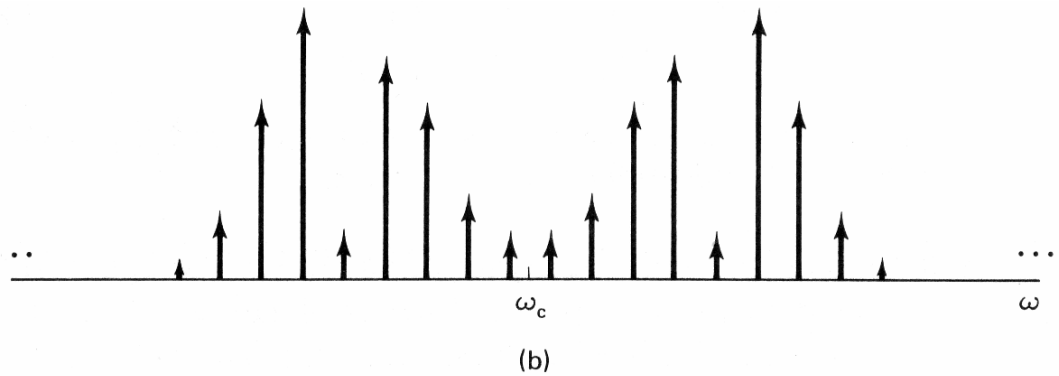
$$y_1(t) = \cos(\omega_c t) - m \sin(\sin \omega_m t) \sin(\omega_c t), \quad \text{FM modulált jelet és a}$$

$$y_2(t) = \cos(\omega_c t) + m \cos(\sin \omega_m t) \cos(\omega_c t), \quad \text{AM-DSB/WC modulált jelet}$$

hasonlítottuk össze:



(a)



254. ábra Szélessávú FM, (a) $\cos(\omega_c t) \cos(m \sin \omega_m t)$ spektruma; (b) $\sin(\omega_c t) \sin(m \sin \omega_m t)$ spektruma; (c) a két jel kombinált spektruma

Tehát az $y(t)$ jel spektruma impulzusokból épül fel amik a $\pm \omega_c + n\omega_m$ frekvenciákon ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) találhatóak. Jól látszik, hogy a spektruma a modulált jelnek nem igazán sávhatárolt, azonban általánosságában véve elmondható, hogy a $\cos(m \sin \omega_m t)$ és a $\sin(m \sin \omega_m t)$ jelek n -edik harmonikusa, amelyre $|n| > m$, már olyan kicsi, hogy szinte elhanyagolható, és így a két oldalsávnak amely a $+\omega_c$ és a $-\omega_c$ frekvenciák körül található az effektív sáv szélessége nem nagyobb mint $2m\omega_m$. Azaz ha B a sáv szélessége a jelnek, akkor:

$$B \cong 2m\omega_m$$

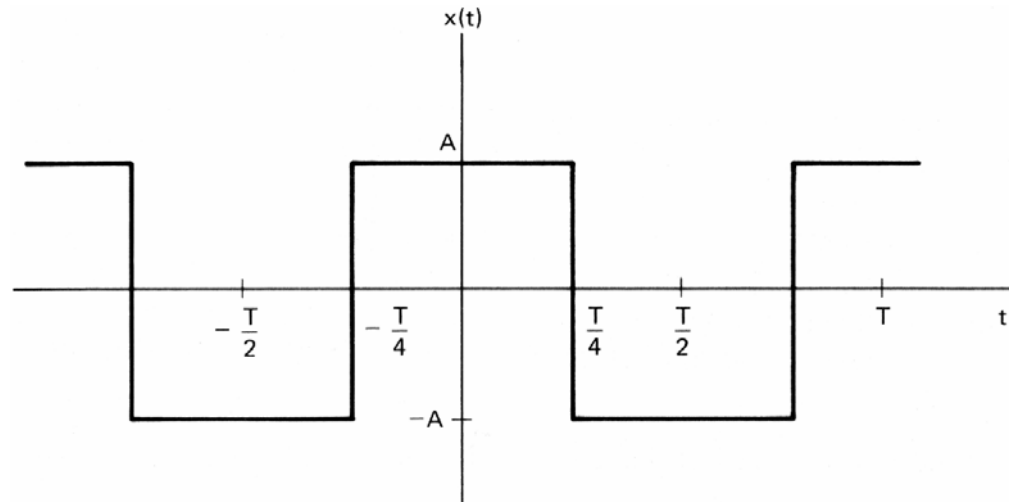
Vagy k_f alapján kifejezve, mivel $m = k_f A / \omega_m = \Delta\omega / \omega_m$:

$$B \cong 2k_f A = 2\Delta\omega$$

Így az előzőekre alapozva kijelenthetjük, hogy a modulált jel effektív sáv szélességének nagysága a pillanatnyi frekvencia maximálisan lehetséges eltérése a vívő frekvenciától. Ezért mivel a szélessávú FM modulációval kapcsolatban azt feltételeztük, hogy m nagy értéke, ezért a modulált jel sáv szélessége sokkal nagyobb mint az eredeti jelé volt ellentétben a keskenysávú FM-el.

6.6.3. Periodikus négyzögjel modulációja (Periodic-Square-Wave as a Modulating Signal)

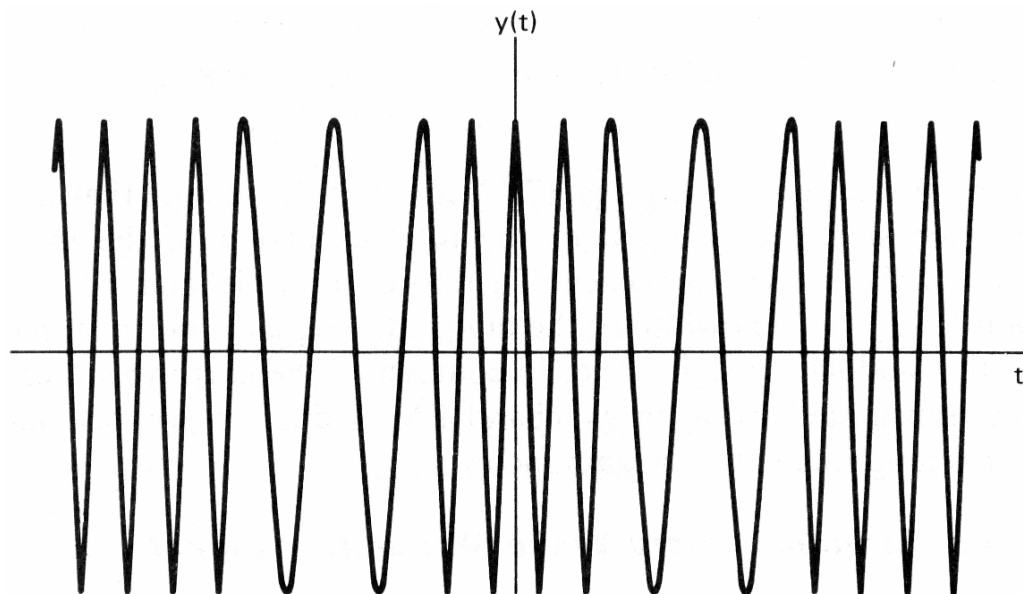
Egy másik fontos példa kapcsán talán még jobban betekintheünk a frekvencia moduláció rejtelseibe, ahol a modulációhoz felhasznált jel a periodikus négyzögjel.



255. ábra Szimmetrikus periodikus négyzögjel

A fenti jelnek megfelelően, természetesen csupán az egyszerűség kedvéért $k_f = 1$, amiből következik, hogy $\Delta\omega = A$.

Ekkor a következő modulált $y(t)$ jelet kapjuk:

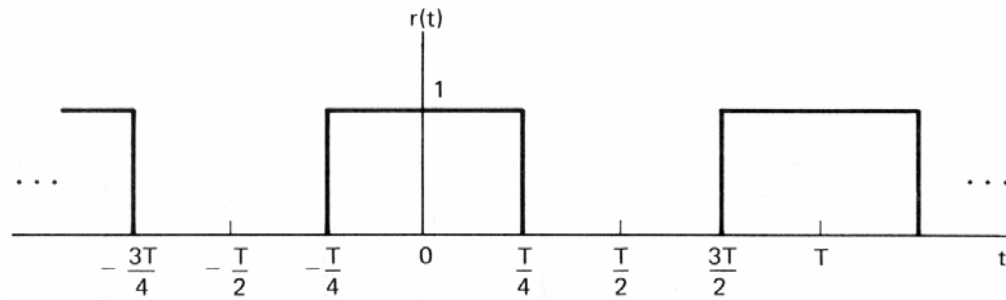


256. ábra Szimmetrikus periodikus négyzögjel frekvencia moduláltja

A pillanatnyi frekvencia pontosan $\omega_c + \Delta\omega$ amikor az $x(t)$ jel pozitív és $\omega_c - \Delta\omega$ amikor negatív. Ezért $y(t)$ felírható a következő formában:

$$y(t) = r(t) \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t] + r\left(t - \frac{T}{2}\right) \cos[(\omega_c - \Delta\omega)t]$$

ahol az $r(t)$ jel a következő szimmetrikus négyzögjellel egyenlő:

257. ábra Az $r(t)$ jel alakja

Ezért a problémát, az $r(t)$ jelnek, mint vivő jelnek a felhasználásával szétbonthatjuk, két külön álló rész spektrumának a vizsgálatára, mintha AM modulációt hajtottunk volna végre, amelyekből majd felépíthető a teljes $y(t)$ jel spektruma.

Pontosabban:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2} [R(\omega + \omega_c + \Delta\omega) + R(\omega - \omega_c - \Delta\omega)] + \frac{1}{2} [R_T(\omega + \omega_c - \Delta\omega) + R_T(\omega - \omega_c + \Delta\omega)]$$

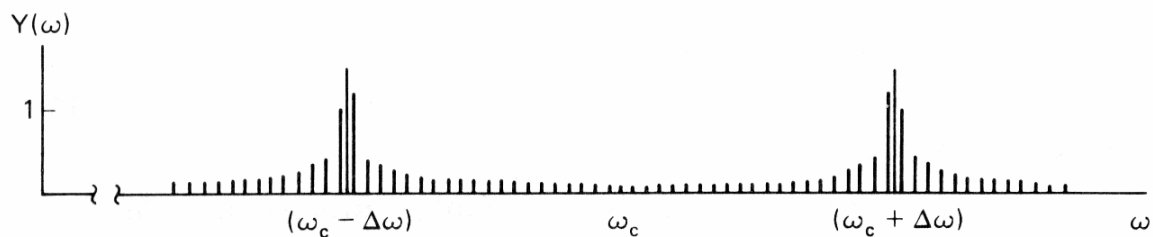
Ahol $R(\omega)$ a Fourier transzformáltja a periodikus $r(t)$ négyszögjelnek, és $R_T(\omega)$ pedig az $r(t - T/2)$ Fourier transzformáltja. Így:

$$R(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{2k+1} (-1)^k \delta\left[\omega - \frac{2\pi(2k+1)}{T}\right] + \pi\delta(\omega)$$

és

$$R_T(\omega) = R(\omega) e^{-j\omega T/2}$$

A fenti egyenletek behelyettesítése helyett inkább $Y(\omega)$ spektrumát ábrázoltuk:



258. ábra A moduláció eredményeként kapott spektrum

Ahogy az a szélessávú FM modulációnál láhattuk a két oldalsáv az $\omega_c \pm \Delta\omega$ frekvenciák köré csoportosul, s az amplitúdók már elhanyagolhatóan kicsik ha $\omega > (\omega_c + \Delta\omega)$ vagy kisebb mint $\omega < (\omega_c - \Delta\omega)$.

Az ilyen FM rendszerek által előállított jelek demodulálása két féle képen történhet: az egyik ilyen eljárás az FM jelet egyszerű differenciálással AM jellé konvertálja, a másik pedig a fázis vagy a frekvencia változását követi nyomon.

7. Mintavételezés (Sampling)

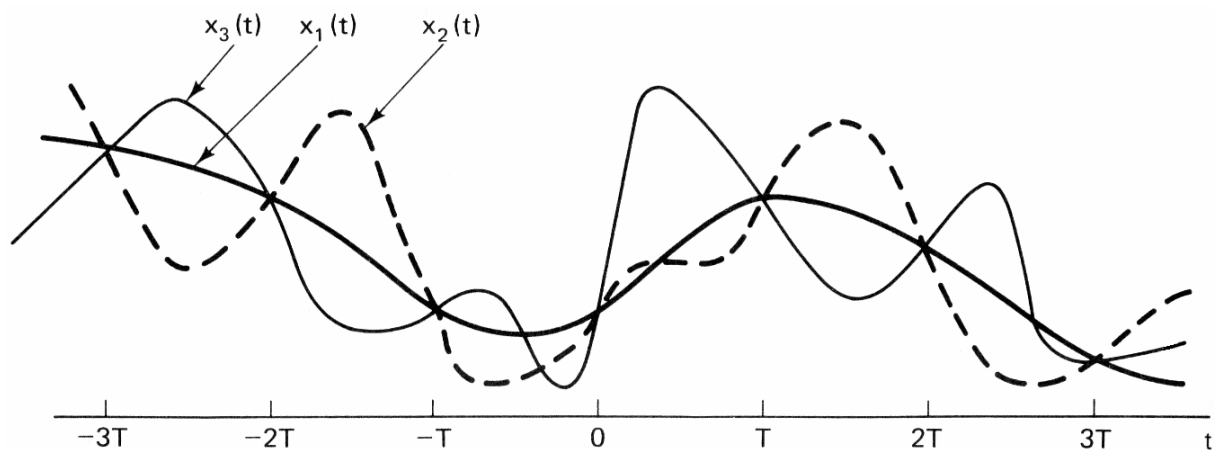
Bizonyos körülmények fennállása esetén a folytonos jeleket teljes mértékben reprezentálni tudjuk az ekvidisztáns, azaz egyenlő időközönként a jelből vett minták segítségével. A reprezentáció egyben azt is jelenti, hogy a jelek teljes mértékben vissza is állíthatók ezen minták felhasználásával. Ez az igen meglepő tény egy alapvető tétel következménye, amit a jelfeldolgozás mintavételezési tételként (Sampling Theorem) ismer. Ez a tétel rendkívüli fontosságú, és alkalmazását megfigyelhetjük a mozgó képeknél is. Már maga a szó is azt jelenti, hogy csupán álló képeket vetítünk, rajzolunk fel a képernyőre olyan gyorsasággal, hogy azt az egyszeri szemlélő mozgó képként, életszerű változásként érzékeli. Így a forgatásnál a valóságból megfelelő gyakorisággal vett minták előállítják az ott a kamera szemszögéből vett valóságot, azaz a jelet, amit reprezentálni akartunk. De ugyanilyen példa lehet egy monitor képe is, ahol nagyon apró pontok sokaságából épül fel a kép, amely távolról nézve egybefüggő, azonban a nagyító üvege alatt már elkülönülő pontok halmaza.

Maga a mintavételezési tétel lényegében egy kapcsolatot teremt a folytonos és a diszkrét jelek között, s majd ahogy látni fogjuk bizonyos körülmények teljesülése esetén a folytonos jel igen jó reprezentációját fogja adni, annak egyenlő időközönként vett mintáiból felépülő diszkrét jel, s ezen reprezentációból majd az itt megismerésre kerülő interpoláció segítségével a folytonos jel újra előállítható lesz. Erre azért van nagy szüksége jelen korunk alkalmazásainak, mivel a tudomány mai állása szerint a diszkrét jelek feldolgozása lényegesen könnyebb, gazdaságosabb, és dinamikusabb mint a folytonos jeleké, és ráadásul a digitális eszközök fejlődése olyan gyors, hogy azzal az analóg jelfeldolgozás már régen ne tud lépést tartani. Talán emiatt is terjedtek el e diszkrét jelfeldolgozásra alapuló digitális eszközök és emiatt terjeszkednek még napjainkban is egyre több mechanikus vagy analóg eszközt váltva fel, gondoljunk csak a folyadékos és a digitális hőmérők kapcsolatára, vagy a kvarc és a régi mechanikus órákéra.

7.1. Folytonos jelek mintavételezése és a mintavételezési tétel (Sampling of Continuous-Time Signals and the Sampling Theorem)

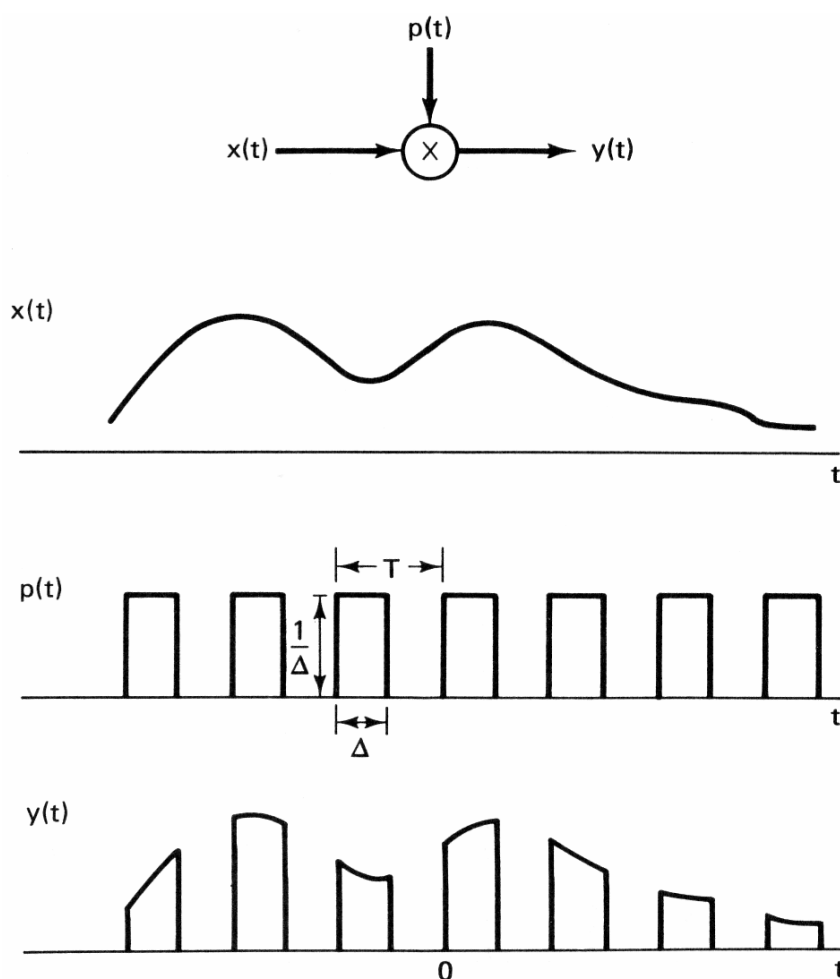
Általánosságában véve talán nem várnánk, hogy folytonos idejű jel egyértelműen meghatározott legyen az ekvidisztáns időközönként vett mintái által, bármiféle még a rendelkezésünkre álló információ nélkül. Ha csak egy egyszerű példát veszünk, mint ahogy az az alábbi ábrán látszik, három teljesen különböző folytonos jelre teljesül, hogy:

$$x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT)$$



259. ábra Folytonos jelek melyek azonos értéket vesznek fel T egész számú többszöröseire

Adott mintavételezett pontok esetén végtelen sok olyan jel definiálható, amely ezeken a pontokon átmegy és nem dönthető el, közel sem egyértelműen, hogy melyik jelhez tartoznak az adott minták, hisz a végtelen sok jel bármelyikének ilyen T időközökkel végzett mintavételezése ugyanazt az eredményt adná. Azonban, ahogy majd látni fogjuk, ha a jelre teljesül, hogy sávkorlátozott, és a mintákat megfelelően kicsi időközökkel vettük, a jel legnagyobb frekvencia komponensére való tekintettel, akkor a minták teljesen egyértelműen meghatározzák a mintavételezett jelet, és azokból a jel maradéktalanul helyreállítható. Ezt az alapvető ismeretet már az előző fejezetben az impulzus moduláció kapcsán megemlítettük. Tehát, ha egy adott $x(t)$ jelet amplitúdó moduláljuk egy impulzus vonat segítségével, ami megfelel az egyenlő időközönként és ideig tartó mintavételezésnek, akkor a jel visszaállítható a mintákból egy alul áteresztő szűrő segítségével, hogyha a moduláló impulzus vonat alaphfrekvenciája a modulálni kívánt jel maximális frekvenciájának legalább a kétszerese. Továbbá az $x(t)$ jel rekonstruálhatósága nincs összefüggésben a mintavétel hosszával, azaz a jelből vett szegmens nagyságával. Ezért, ahogy az az alábbi ábrán is látszik, a minták időtartalmának egyre kisebbre választásának hatására, az amplitúdó moduláció tart az $x(t)$ jel pillanatnyi mintavételezéséhez.

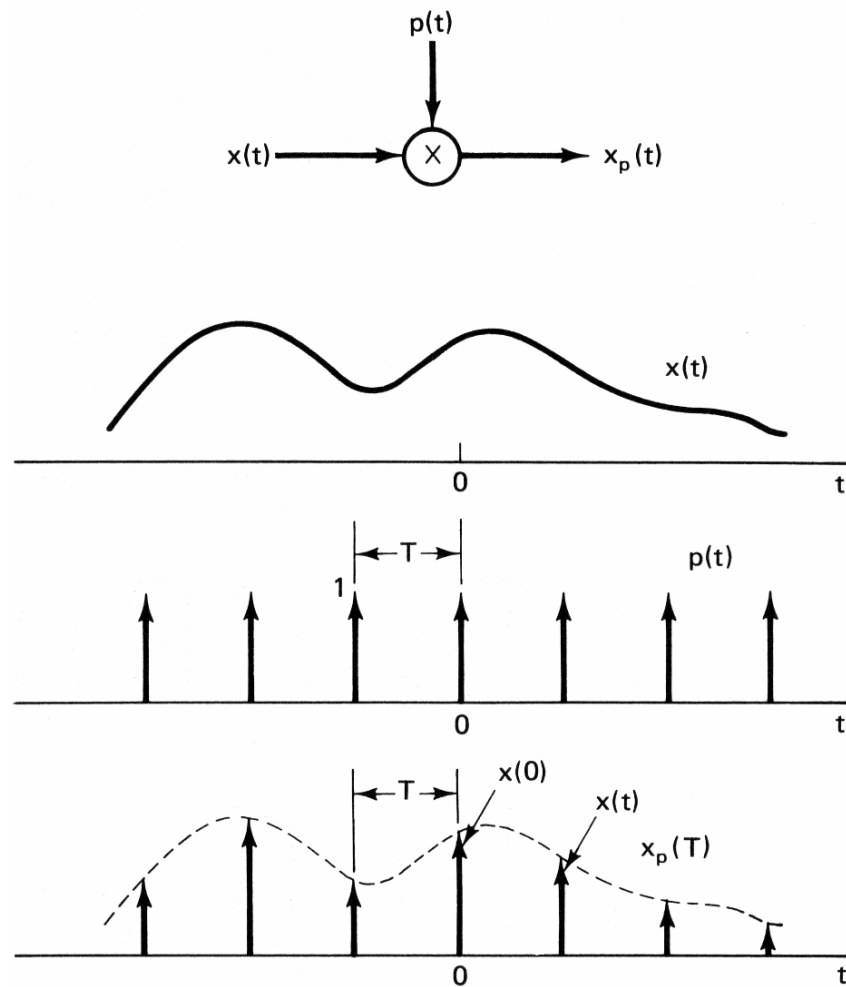


260. ábra Impulzus amplitúdó moduláció, ahogy $\Delta \rightarrow 0$, $p(t)$ egyre inkább impulzus vonattá válik

A fenti ábrán az amplitúdó modulációs rendszer kimenetén kapott $y(t)$ jel impulzus vonatának amplitúdói, fordítottan arányosak a mintavételezésre használt impulzusvonat impulzusainak szélességével. Azaz ha Δ tart a nullához, akkor az impulzus vonat egyenlő időközönként jelentkező Dirac delták sorozatába megy át, és a mintavételezett jel is ilyen Dirac delták sorozata lesz ahol az impulzusok amplitúdója lesz egyenesen arányos a mintavételezett jel amplitúdójával, ami a Dirac delta időpontjában, egyetlen pillanatra vett fel a jel.

7.1.1. Mintavételezés Impulzus vonattal (Impulse-Train Sampling)

Ahogy azt az impulzus amplitúdó modulációnál tettük, most is induljunk ki egy specifikus esetből, hogy aztán az általános esetre vonatkozólag vonjunk le következtetéseket. Nézzük az alábbi impulzus vonattal történő mintavételezést:



261. ábra Impulzus amplitúdó moduláció

Az ábrán $p(t)$ -vel jelölt jel a mintavételezéshez felhasznált impulzus vonat, melyet mintavételezési függvénynek (sampling function) nevezünk. Ennek a jelnek az alapperiódus ideje T , amit mintavételezési időnek, vagy szavatosabban időköznek (sampling period) nevezünk. A $p(t)$ jel alapfrekvenciáját, ami $\omega_s = 2\pi/T$, mintavételezési frekvenciának (sampling frequency) néven nevezünk. Nos, az időintervallumra nézve az alábbi egyenlettel írható fel a mintavételezés:

$$x_p(t) = x(t)p(t)$$

ahol

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Ekkor $x_p(t)$ egy olyan impulzus vonat lesz, ahol az impulzusok amplitúdója meg fog egyezni az $x(t)$ jel T intervallumonként vett értékével, azaz mintáival.

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

Ekkor a Fourier transzformált modulációs tulajdonsága alapján, igaz az, hogy:

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(\omega) * P(\omega)]$$

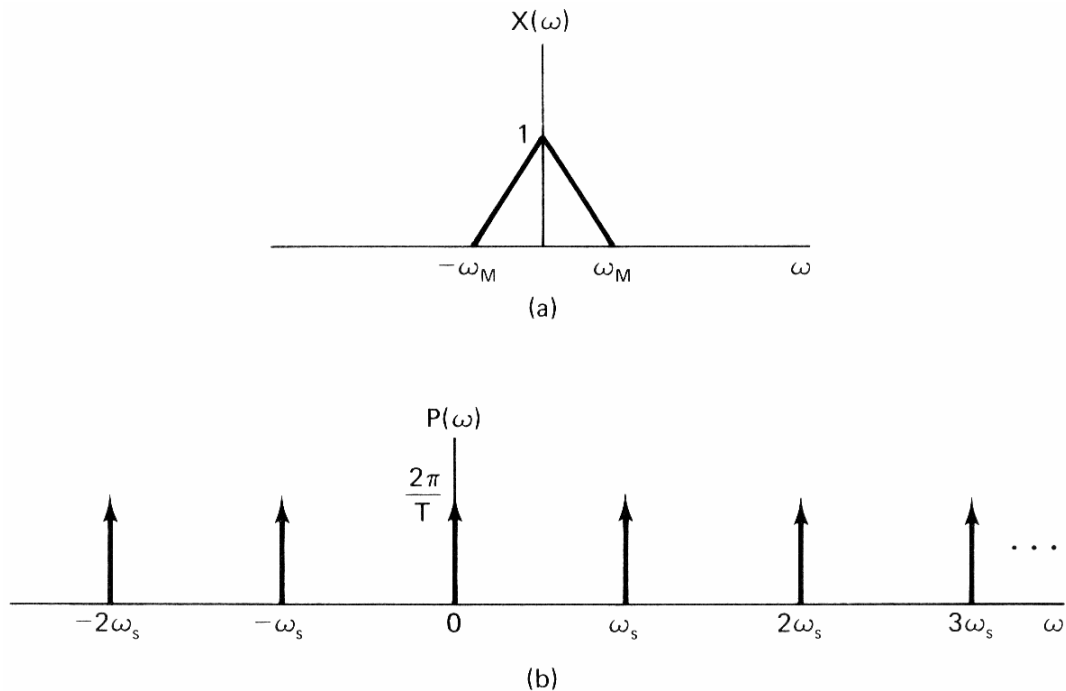
Azon tudjuk, hogy:

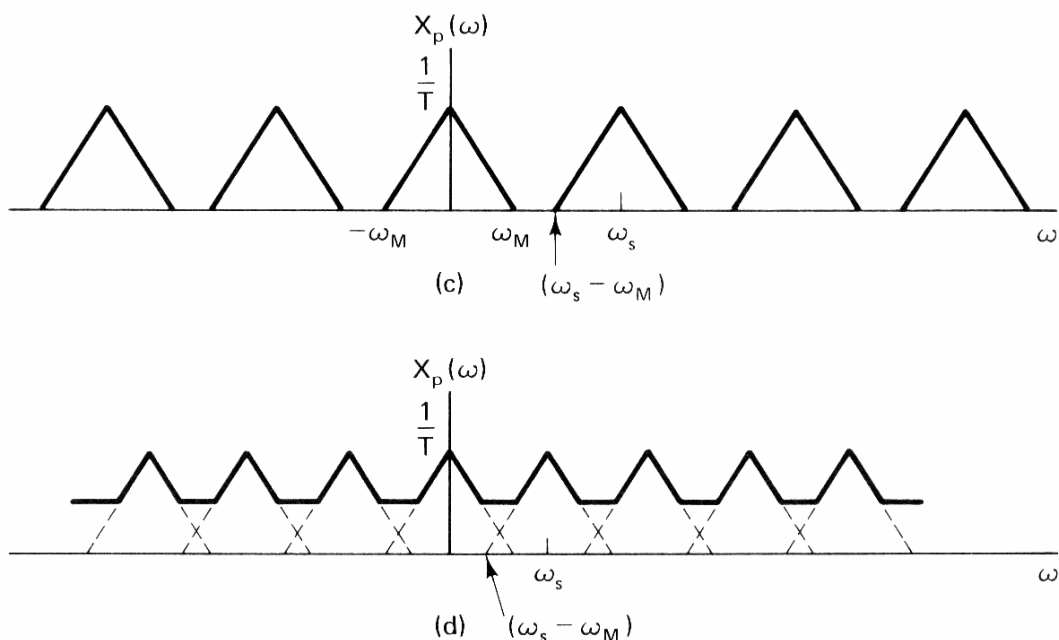
$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

azaz

$$X_p(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

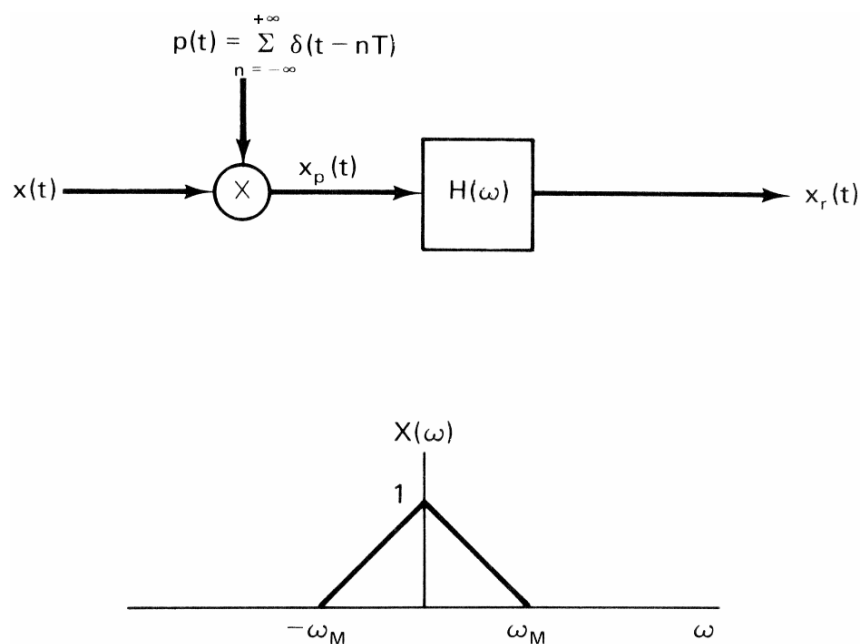
Ebből viszont az következik, hogy $X_p(\omega)$ egy periodikus függvény, amely az eredeti $X(\omega)$ spektrum eltoltságainak az összege, aminek ráadásul amplitúdóit $1/T$ -vel megszoroztuk. Az alábbi ábrán ezt láthatjuk:

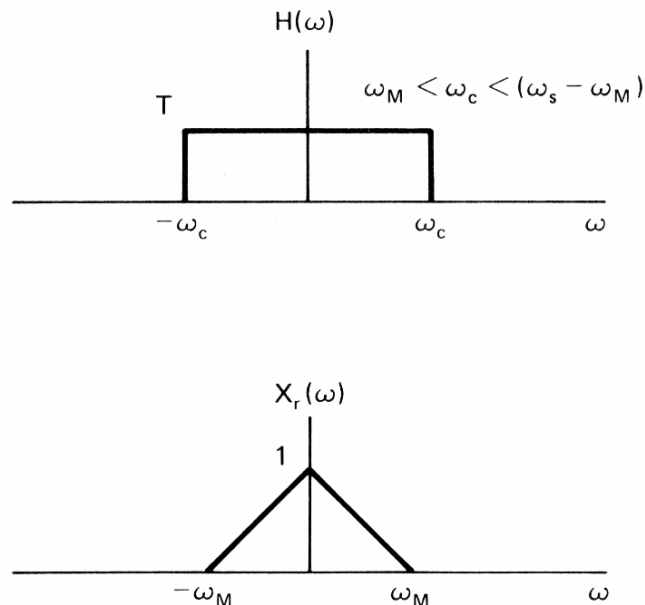




262. ábra A mintavételezés hatásai a frekvencia tartományon, (a) az eredeti jel spektruma;
 (b) a mintavételező jel spektruma; (c) a mintavételezés eredményének spektruma ha $\omega_M < (\omega_s - \omega_M)$;
 (d) a mintavételezés eredményének spektruma ha $\omega_s < 2\omega_M$

Ahol két esetet különböztethetünk meg, az elsőnél $\omega_M < (\omega_s - \omega_M)$, azaz $\omega_s > 2\omega_M$, esetében nincs egymásra lapolódás az eredeti jel eltolt spektrumai között, míg a második esetben $\omega_s < 2\omega_M$ már van átlapolódás. Az első esetben az eredeti $X(\omega)$ spektrum a mintavételezési frekvencia többszöröseinek értékeinél hibátlanul előáll, és így egy alul áteresztő szűrő segítségével, aminek erősítése T , és vágási frekvenciájára igaz, hogy $\omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$, az eredeti jel újra előállítható. Ezt szemlélteti az alábbi ábra:





263. ábra A folytonos idejű jel teljes mértékű visszanyerése mintáiból ideális alul áteresztő szűrő segítségével

Viszont a másik esetben ez nem történhet meg, mivel az eltolt spektrumok összegződése miatt nem tudjuk kinyerni az eredeti jel spektrumát.

Ezeket az ismereteket együtt nevezzük a mintavételezési tételnek.

7.1 Tétel:

Legyen az $x(t)$ folytonos jel sávhatárolt, azaz $X(\omega) = 0$ bármely $|\omega| > \omega_M$. Ekkor $x(t)$ egyértelműen meghatározott az $X(nT)$ mintái által ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), hogy ha a mintavételezési frekvencia legalább a kétszerese a jel maximális frekvenciáját jelentő sávhatárnak, azaz:

$$\omega_s > 2\omega_M$$

ahol

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

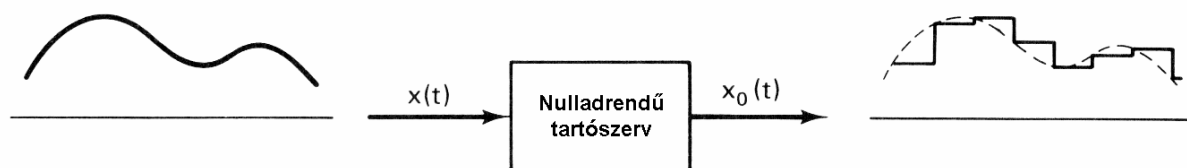
Ha ezen minták adottak, akkor fentiek teljesülése esetén az $x(t)$ jel maradéktalanul előállítható a minták impulzus vonattal való reprezentációjával és az így kapott jel ideális alul áteresztő szűrővel történő szűrésével, ahol a szűrő erősítése T és vágási frekvenciája $\omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$.

A vágási frekvenciát ez esetben sokszor Nyquist frekvenciának is nevezik, és a $2\omega_M$ elméleti határt pedig Nyquist küszöbnek (Nyquist Rate).

7.1.2. Mintavételezés nulladrendű tartószervvel (Sampling with a Zero-Order Hold)

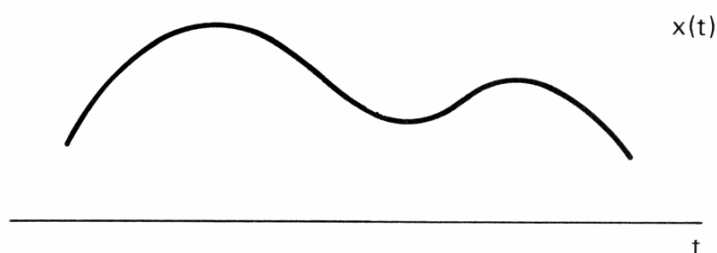
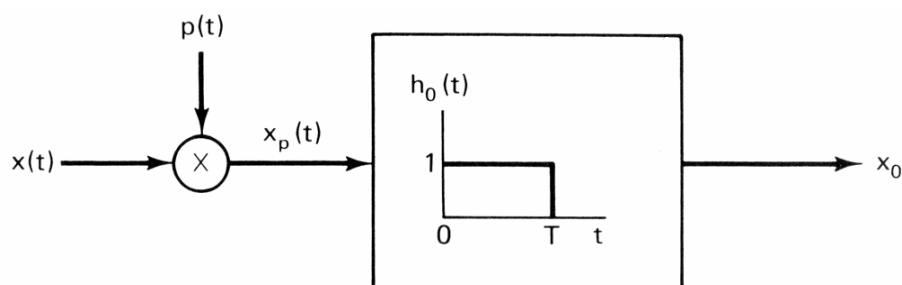
A mintavételezési tétel kapcsán láthattuk, hogy a sávhatárolt jelek egyértelműen reprezentálhatók a mintáik által. Magát a tételt az impulzus-vonattal történő mintavételezésre láttuk be. Sajnos, a gyakorlatban az ilyen nagyon rövid idejű és nagy amplitúdójú impulzusokat igen nehéz és rendkívül költséges előállítani, ezenkívül, továbbításuk és terjedésük is komoly gyakorlati akadályokba ütközik.

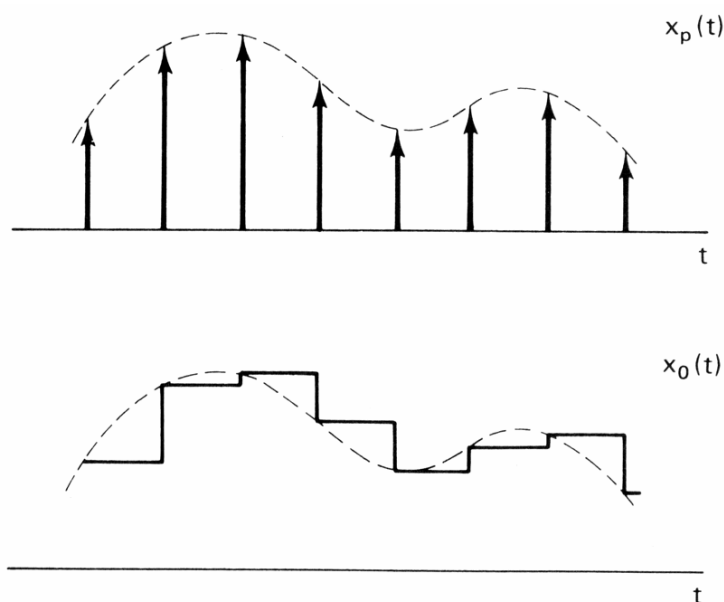
Emiatt, a mintavételezés alternatív módját használják, amit sokkal kényelmesebb és olcsóbb, mint a túl impulzusok használata. Ezt a mintavételezési módszert nulladrendű tartószervvel történő mintavételezésnek nevezzük. Egy ilyen rendszert mutat be működés közben az alábbi ábra:



264. ábra Mintavételezés nulladrendű tartószervvel

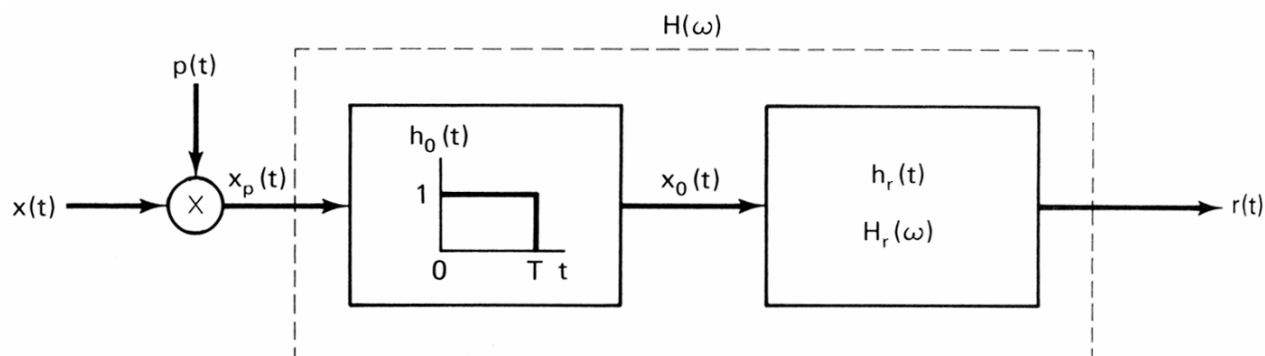
Ahol az $x(t)$ jel értékeit egy adott pillanatban veszi a tartószerv, majd azt a T mintavételezési ideig tartja kimenetén. Az új mintavételezési szakasz kezdetén ismét veszi a szakasz első pillanatában az $x(t)$ által felvett értéket és ezt adja kimenetén egészen a következő szakasz kezdetéig. Ebből az ugrásokkal teli jelből az eredeti $x(t)$ jel visszaállítható a alul áteresztő szűrő alkalmazásával. Azonban ebben az esetben a szűrő erősítése nem konstans értékű az áteresztési tartományban. Hogy a megfelelő ismeretekhez eljussunk először is vizsgáljuk meg az $x_0(t)$ kimeneti jelet. Bár elsőre nem nyilvánvaló, de az $x_0(t)$ jel előállítható az eredeti $x(t)$ jel impulzus vonattal történő mintavételezéséből kapott jellel ha azt egy olyan LTI rendszeren vezetjük át amelynek impulzus válasz függvénye egy téglalap alakú jel. Ezt valósítja meg a következő elrendezés:





265. ábra A nulladrendű tartószerv megvalósítása impulzus vonattal történő mintavételezés és egy négyzet alakú impulzus válasz függvényű rendszer sorba kapcsolásával

Hogy az $x(t)$ jelet rekonstruáljuk $x_0(t)$ -ből, olyan LTI rendszert kell konstruálnunk amelynek $h_r(t)$ impulzus válasz függvénye és $H_r(\omega)$ frekvencia válasz függvénye valamiféle képen az inverz műveletét adja a fenti elrendezésnek. Így ha a két rendszert egymással sorba kapcsoljuk a következőt kell kapnunk:



266. ábra Nulladrendű tartószerv és a rekonstruálá szűrő soros kapcsolata

Ahol úgy szeretnénk $H_r(\omega)$ megválasztani, hogy $r(t) = x(t)$ legyen. Ehhez viszont a jelölt $H(\omega) = H_0(\omega) \cdot H_r(\omega)$ -nek pont a mintavételezési tételben szereplő alul áteresztő szűrőnek kell lennie.

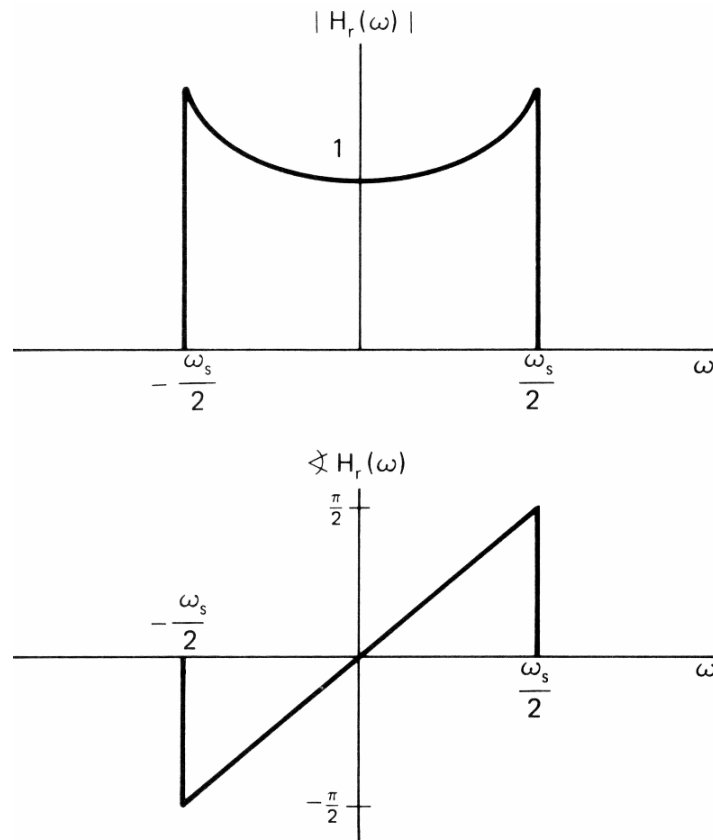
Így mivel tudjuk, hogy:

$$H_0(\omega) = e^{-j\omega T/2} \left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]$$

A fentiek értelmében $H_r(\omega)$ nem lehet más mint:

$$H_r(\omega) = \frac{e^{-j\omega T/2} H(\omega)}{\left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]}$$

Például ha a $H(\omega)$ spektrumú szűrő vágási frekvenciája $\omega_s/2$ akkor az ideális $H_r(\omega)$ amplitúdó és fázis diagramja a következő féle képen alakul:



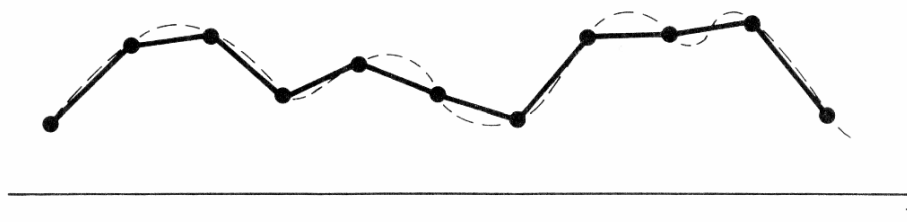
267. ábra Amplitúdó és fázis spektruma a rekonstrukciós szűrőnek

Lényegében ez is egy szűrőt definiál, csak elég speciálisat. Azonban ezen szűrő segítségével a nulladrendű tartószervvel végzett mintavételezésből kapott jel visszaalakítható az eredeti $x(t)$ jellé, mindenfajta veszteség nélkül. Sőt azt is kijelenthetjük, hogy a nulladrendű tartószervvel végzett mintavételezés az eredeti jel egyfajta közelítését adja meg, és a belőle végzett rekonstrukció, azaz a speciális alul áteresztő szűrő által végzett művelet, csupán a következőkben tárgyalt interpolációs eljárás nagyon egyszerű formája.

7.2. Interpolációs jelrekonstrukció minták alapján

(*Reconstruction of a Signal from Its Samples Using Interpolation*)

Az interpoláció művelete igen gyakran használt eljárás a függvények közelítő függvényekből, vagy mintákból való rekonstrukciójára. Ennek legegyszerűbb formájára példa az elsőrendű tartószervvel való mintavételezés kapcsán megbeszélte speciális aluláteresztő szűrő. Egy másik formája ennek a lényegében numerikus matematikai műveletnek, a lineáris interpoláció (linear interpolation), ahol a minta pontjait egyenes vonallal kötjük össze, így próbálva meg a mintavételezett jel közelítését adni.



268. ábra Lineáris interpoláció

Lényegében a mintavételezett jel változásának átlagos értékével közelítjük azt, így a lineáris interpoláció csak lineáris jelek esetén állítja vissza 100%-osan a mintavételezett jelet.

Természetesen, ha nem érjük be ezzel a durva közelítéssel, magasabb rendű interpolációt is végezhetünk, egyre nagyobb fokú polinomokat keresve, amik összekötik a mintavételezett pontokat. Sőt, a polinomiálisokkal történő interpoláción túl akár exponenciális, trigonometriális, vagy más matematikai függvényeket is felhasználhatunk az eredeti függvény jobb közelítése végett.

Ahogy az előzőekben láthattuk, a sávhatárolt jelek esetén, ha a mintavételezési időpontok megfelelően közel vannak egymáshoz akkor a áteresztő szűrő segítségével pontosan az eredeti jel visszaállítható, azaz pontos interpoláció végezhető. Ha az alul áteresztő szűrő kimenetét vizsgáljuk az idő tartományban, akkor beláthatjuk, hogy az $x(t)$ jel rekonstrukciója alul áteresztő szűrővel reprezentálható a matematikai interpolációs művelet által. Hogy ezt világosabban lássuk írjuk fel a kimenetét a szűrőnek a bemenet függvényeként:

$$x_r(t) = x_p(t) * h(t)$$

Ahol $x_p(t)$ behelyettesítve, mint impulzus vonattal történt mintavételezést, kapjuk hogy:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)h(t - nT)$$

A fenti egyenlet egy interpolációs formulát valósít meg, mivel azt definiálja, hogy hogyan illesszünk egy folytonos görbét az interpolációs pontokon át, azaz a minta pontokon keresztül. Ha most egy ideális alul áteresztő szűrővel számolunk tovább amelyre igaz, hogy:

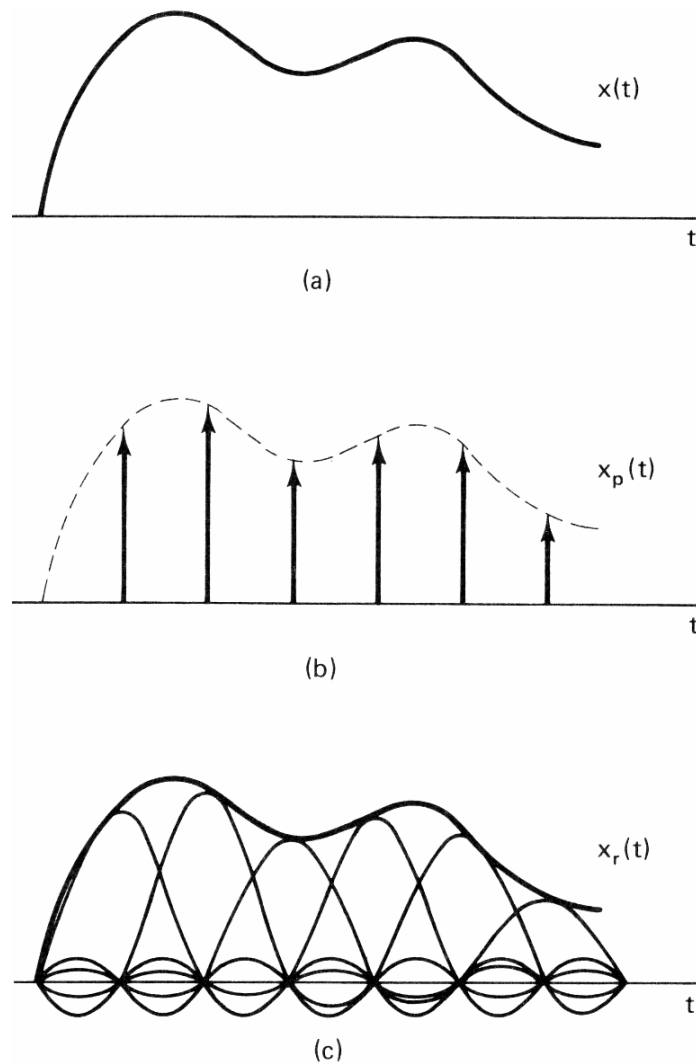
$$h(t) = T \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$

Akkor:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)T \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c(t - nT)}{\pi}\right)$$

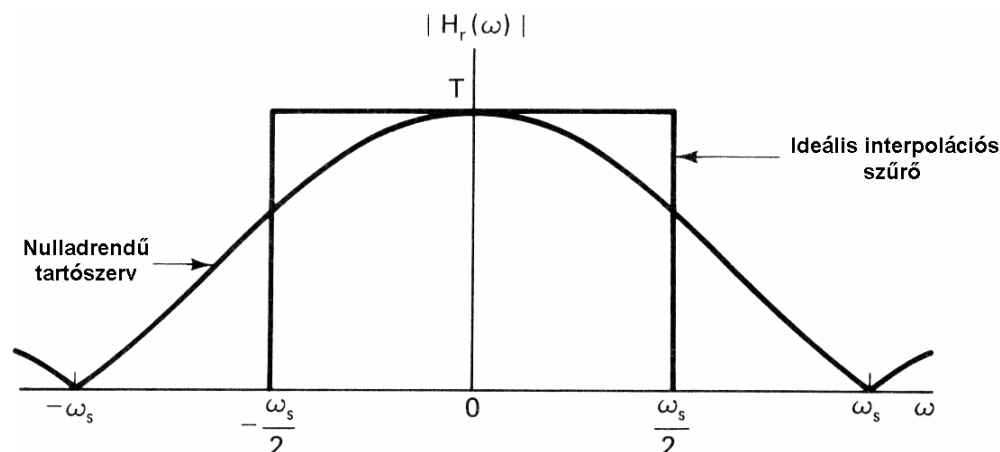
Jól látszik, hogy lényegében olyan sinc függvényt keresünk amely megvalósítja két pont összeköttetését azaz sinc függvénnyel interpoláljuk a minta pontokat.

Ha ezt az interpolációt elvégezzük $\omega_c = \omega_s / 2$ esetén akkor a következőt kapjuk:



269. ábra Ideális sávhatárolt interpoláció a sinc függvénnyel

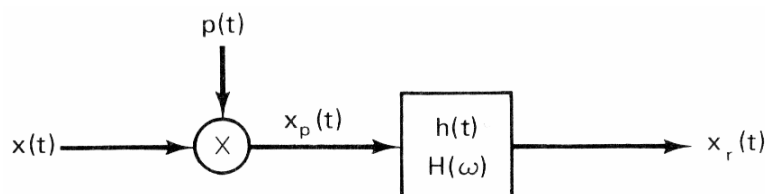
Gyakran a sinc függvénnyel végzett interpolációt sávhatárolt interpolációnak (bandlimited interpolation) nevezik, mivel csupán akkor adja az eredeti $x(t)$ jel rekonstrukcióját, ha az valóban sávhatárolt volt, és a mintavételezés frekvenciája legalább kétszer akkora volt, mint a sávhatár. Mivel az ideális alul áteresztő szűrők karakterisztikájának jó közelítését nagyon nehéz megvalósítani, ezért felmerül az igény más, kevésbé bonyolultabb, és persze kevésbé is pontosabb szűrési eljárás alkalmazására, azaz az interpoláció kevésbé bonyolultabb függvénnyel való elvégzésére. Jó példa erre az előzőekben már kivesézett nulladrendű tartószervvel történő mintavételezés, és a hozzá kapcsolódó jelrekonstrukciós eljárás. A nulladrendű tartószerv kimenetén megjelenő $x_0(t)$ jel nemcsak az $x(t)$ jel mintáit tartalmazza, hanem azok interpolációját is a $h_0(t)$ téglalap forma impulzus válasz függvény által. Ebben az értelemben, ahogy $x_0(t)$ lényegében a becslését valósítja meg az eredeti $x(t)$ jelenek, úgy $h_0(t)$ annak az ideális alul áteresztő szűrőnek a becslését adja meg, ami a pontos interpolációhoz szükséges lenne. A következő ábrán láthatjuk a nulladrendű tartószerv spektrumának amplitúdó diagramját összevetve a pontos interpolációhoz szükséges ideális alul áteresztő szűrő spektrumával.

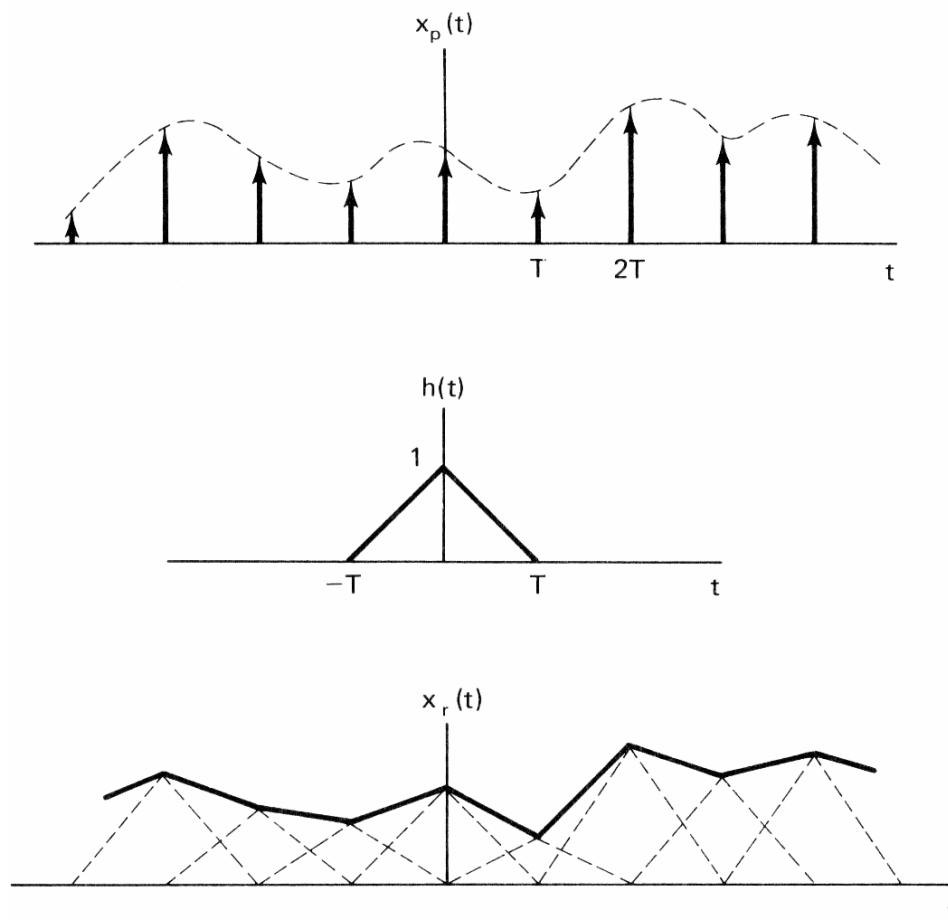


270. ábra A nulladrendű tartószerv és az ideális interpolációs szűrő frekvencia válasz függvénye

Ebből már világosan látszik, hogy a nulladrendű tartószerv elég durva közelítést adja a valóságos jelnek, bár néhány esetben ez a durva közelítés is elég. Például ha rendszerünkben közvetlenül a tartószerv után alul áteresztő szűrőt használunk, akkor az interpoláció helyességét nagy mértékben megnövelhetjük. Például, ha egy képen alkalmazzuk a nulladrendű tartószervvel történő mintavételezést, akkor egy mozaikokból álló képet kapunk, de ha ezt távolról nézzük akkor, mivel az emberi szem alul áteresztő szűrőként viselkedik, a kép pontjai összemosódnak és nagyjából előáll az eredeti kép, azaz a szemünk javított a képen az interpoláció segítségével. Emiatt tudjuk képeinket a monitor maszk rácsán átszűrődő elektronok által keltett fénypor felvillanásokból előállítani, mivel szemünk ezeket folytonos képpé mossa össze. Ezen interpoláció, no meg egyéb technikai okok miatt, alkalmaznak a gyártók az új készülékekben pontok helyét aperatúra rácsos maszkolási technikát, hisz így a különböző frekvenciájú, így más-más színű fényporokat lumináló elektron hullámok élei keverednek és így egy aperatúrán belül már interpolálják a képet.

Bár a lineáris interpoláció még mindig durva közelítése lehet az eredeti jelnek, de mégis sok alkalmazásban használatos. A lineáris interpoláció eredménye mindig folytonos függvény, bár ennek a függvények a deriváltjáról már ez nem mondható el. A lineáris interpolációt alkalmazását gyakran elsőrendű tartószervként (first-order hold) nevezik mivel a nulladrendű esettel ellentétben itt már a jelenlegi és a következő pont között kapcsolatot teremt a jel és nem pedig csak ugrás szerűen változik. Egy ilyen elsőrendű tartószervet valósít meg a következő elrendezés:

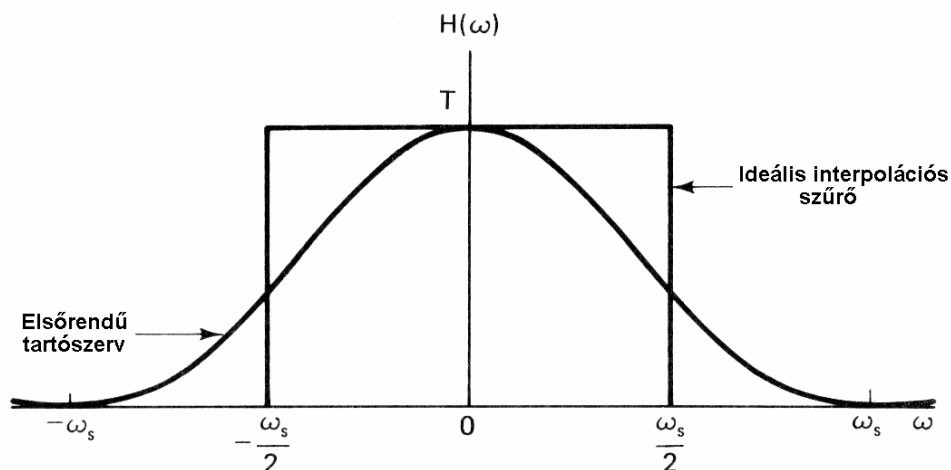




271. ábra Elsőrendű tartószervvel történő interpoláció

Jól látható hogy $h(t)$ háromszög alakú, ellentétben a nulladrendű eset téglalap alakú súlyfüggvényével. Ezért ha az interpolációt mint konvolúciót értelmezzük az idő tartományban, mint ahogy azt nulladrendű esetben tettük, akkor azt kapjuk, hogy az elsőrendű eset spektruma már sokkal jobban hasonlít a perfekt interpolációt megvalósító ideális alul áteresztő szűrő spektrumára, mivel:

$$H(\omega) = \frac{1}{T} \left[\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2} \right]^2$$



272. ábra Az elsőrendű tartószerv és az ideális interpolációs szűrő spektruma

Emiatt az elsőrendű interpolációval kapott kép jobb közelítése az eredetinek mint a nulladrendűvel kapott eredmény.

7.3. A túl ritka mintavételezés hatása: Aliasing (The Effect of Undersampling: Aliasing)

Az előző részekben csupán azzal az esettel foglalkoztunk amikor a mintavételezési frekvencia elég magas volt ahhoz, hogy a spektrumok ne lapolódjanak egymásra és így ne mosódjanak össze, ami meggátolná a fent említett technikák alkalmazását a jel rekonstrukció érdekében. Azonban mi történik akkor amikor $\omega_s > 2\omega_M$ nem teljesül, azaz túl ritkán veszünk mintákat, és az $x(t)$ jel spektrumának replikánsai egymásba lapolódnak. Ezt a jelenséget nevezzük „aliasing”-nak, ami hasonulást jelent magyarul, de igazán megfelelője nincs a szakzsargonban. Ezt a jelenséget és hatásait fogjuk a továbbiakban vizsgálni.

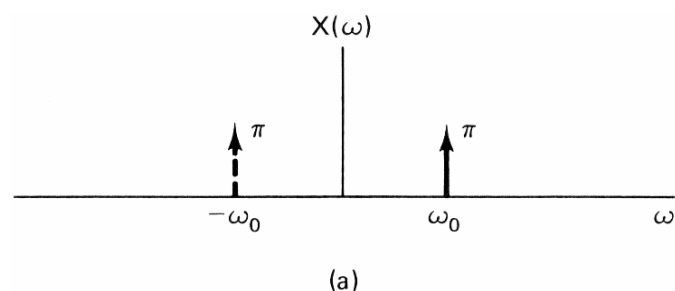
Hogyha csak a 263-es ábra rendszerét tekintjük $\omega_s < 2\omega_M$ mintavételezési frekvenciával, akkor az eredményül kapott $x_r(t)$ jel közel sem lesz egyenlő az eredeti $x(t)$ -vel. Habár ezt a sávhatárolt interpolációt használva az $x_r(t)$ jel a mintavételezési időpontokban egyenlő lesz az eredetivel:

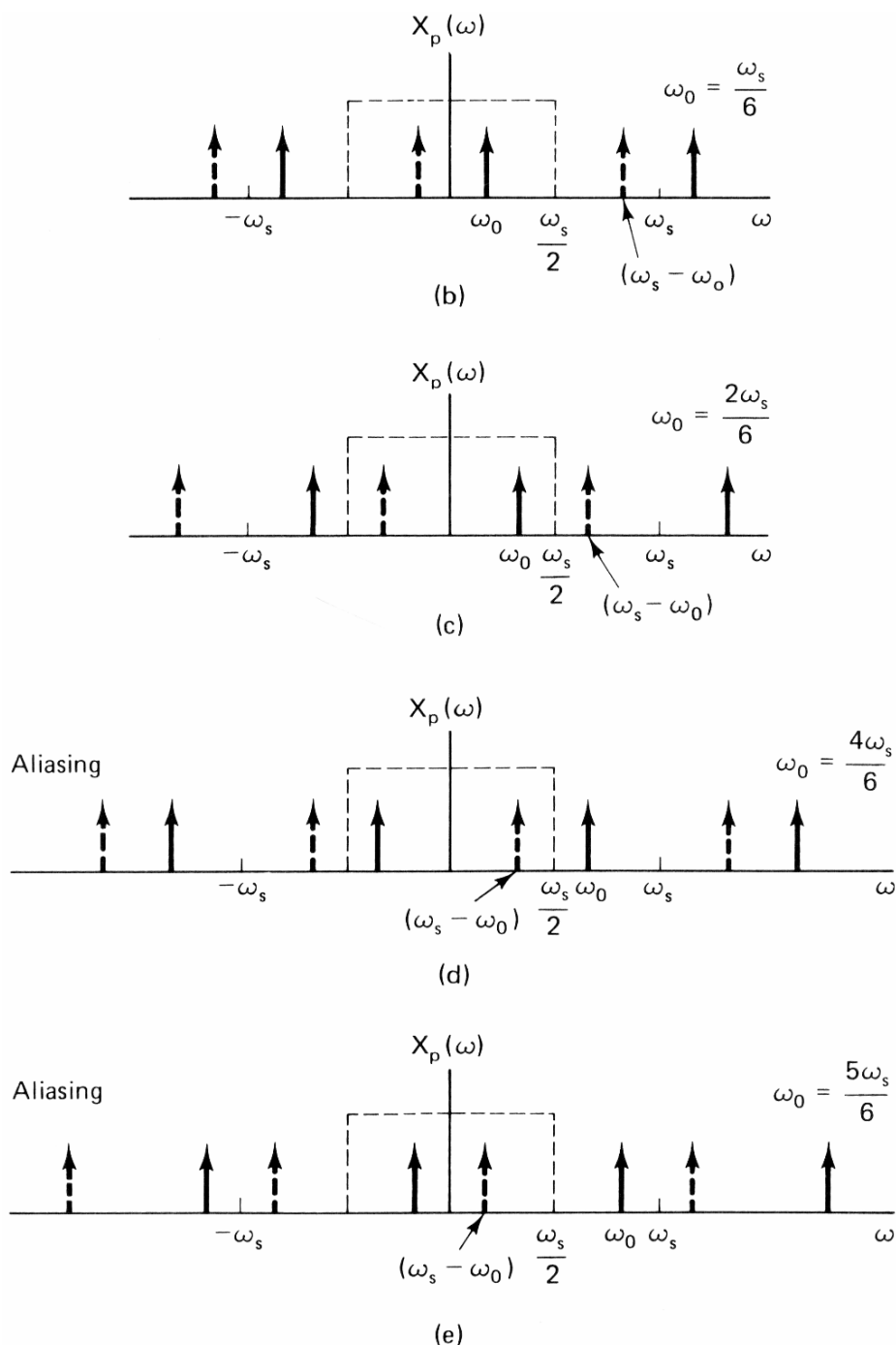
$$x_r(nT) = x(nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Hogy mélyebb bepillantást nyerhessünk $x(t)$ és $x_r(t)$ kapcsolatába a $\omega_s < 2\omega_M$ esetben, tekintsük a következő példát. Legyen a vizsgált $x(t)$ jel az alábbi:

$$x(t) = \cos \omega_0 t$$

A jel Fourier transzformáltja jól ismert és a következő ábra „a” pontjában ábrázoltuk is. A levezetés szemléletessége miatt a két impulzust másként jelöltük, hogy a duplikációk eredetét jobban tudjuk azonosítani. Nézzük most a mintavételezett $x(t)$ jel spektrumát és jelöljük: $X_p(\omega)$ -vel. Legyen most a mintavételezési frekvencia ω_s rögzített, és nézzük mi történik ha a jel alaphfrekvenciáját, ω_0 -t, és így ezen jel esetében a maximális frekvenciáját, változtatjuk:





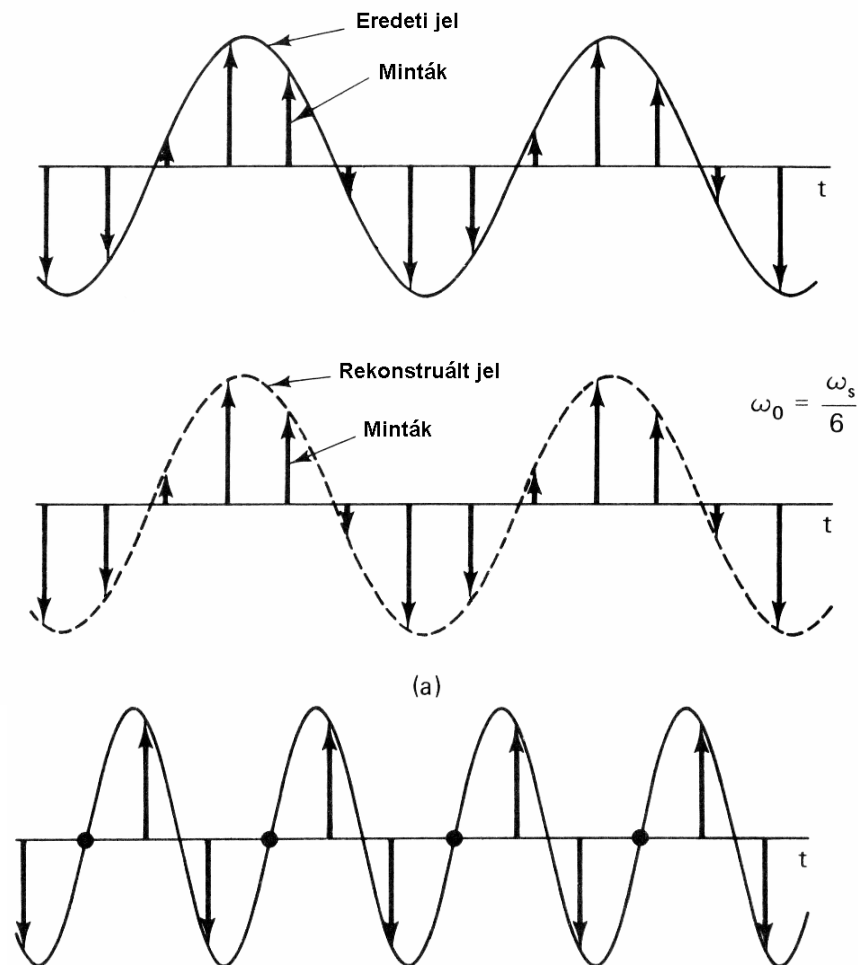
273. ábra A túl ritka mintavételezés hatása

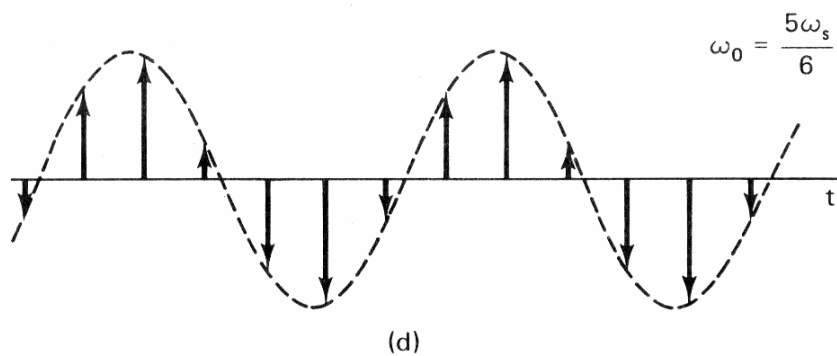
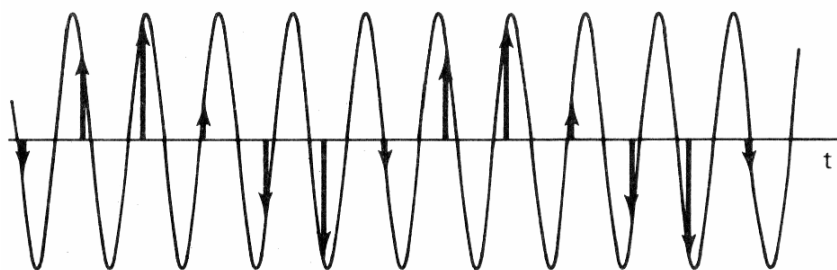
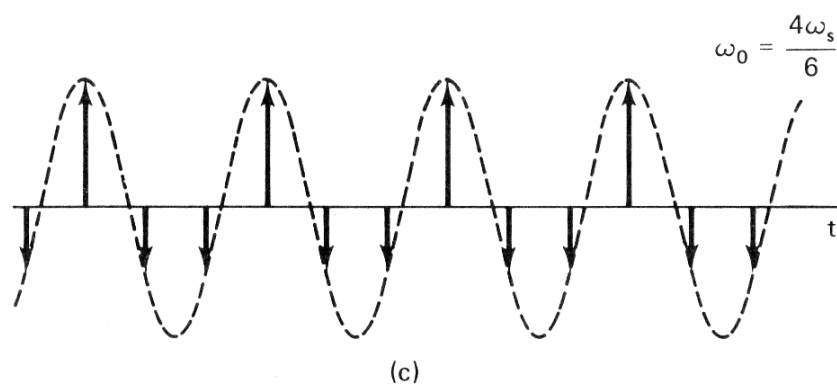
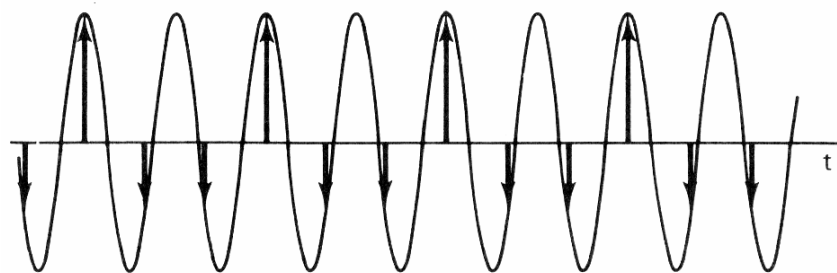
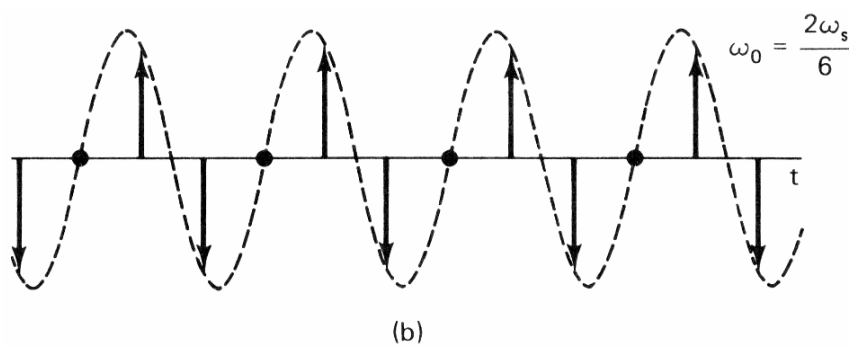
A fenti ábrán az alappfrekvencia négy különböző értékére kapott mintavételezett jel spektrumát ábrázoltuk. A szaggatott vonallal a rekonstrukcióhoz alkalmazott ideális alul áteresztő szűrő spektrumát rajzoltuk be, amelyre $\omega_c = \omega_s / 2$. A „b” és a „c” esetben $\omega_s > 2\omega_0$, a „d” és az „e” esetben $\omega_s < 2\omega_0$ teljesült. Jól látható, hogy a „b” és a „c” esetben nem következett be az aliasing jelenség mivel $\omega_s > 2\omega_0$ teljesült. Mind a négy esetre vonatkozólag az alul áteresztő szűrő után kapott $x_r(t)$ jelet kiszámoltuk és a következőt kaptuk:

- a) $\omega_0 = \frac{\omega_s}{6}$; $x_r(t) = \cos \omega_0 t = x(t)$
- b) $\omega_0 = \frac{2\omega_s}{6}$; $x_r(t) = \cos \omega_0 t = x(t)$
- c) $\omega_0 = \frac{4\omega_s}{6}$; $x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t \neq x(t)$
- d) $\omega_0 = \frac{5\omega_s}{6}$; $x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t \neq x(t)$

Amikor az aliasing jelenség létrejön akkor az eredeti ω_0 frekvencia átmegy az öneki megfelelő alacsony frekvenciába, azaz hasonul a $(\omega_s - \omega_0)$ frekvenciához. Ahogy a $\omega_s/2 < \omega_0 < \omega_s$ tartományon ω_0 relatív aránya növekszik ω_s -hez képest a kimenet frekvenciája, $(\omega_s - \omega_0)$ egyre csökken. Ha például $\omega_s = \omega_0$ akkor a visszaállított jel konstans értéket vesz fel. Ez teljesen megfelel annak a problémának amikor egy periódus alatt mindig ugyanarról a helyről vesszük a mintát így, a kapott minták ugyanolyan értékűek és megfelelnek egy konstans jel mintáinak amire $\omega_0 = 0$.

A következő ábrákon ezen esetek mindegyikét ábrázoltuk az eredeti $x(t)$ jelet, mintavételezési pontjait, és az ezek alapján rekonstruált $x_r(t)$ jel szerint:

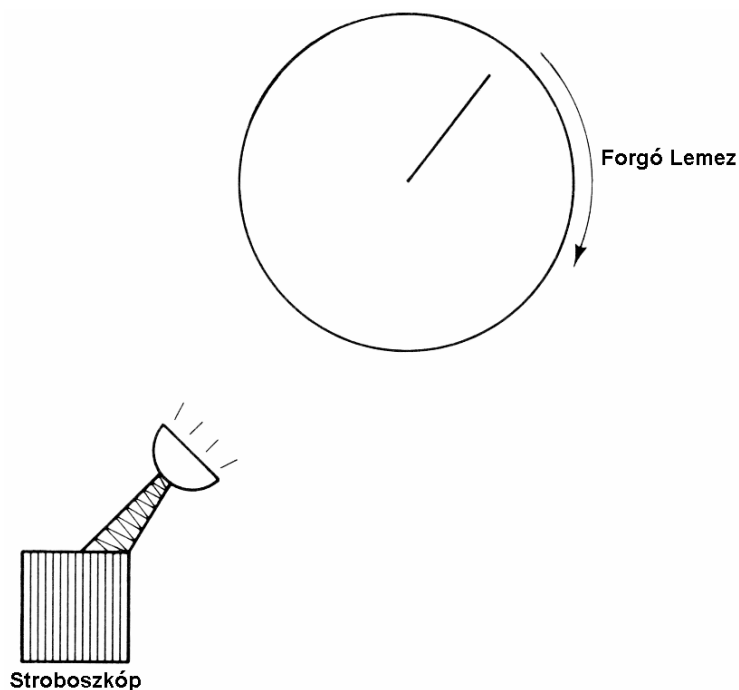




274. ábra Az aliasing hatása szinuszosidális függvény mintáiból visszaállított jelre nézve, (c) és (d) esetben van csupán aliasing

Ezekről az ábráról jól látszik, hogy az alul áteresztő szűrő miképp interpolálja a mintavételezett pontokat. Lényegében véve mindig előáll a szinuszosidális jel csak a túl ritka mintavételezés esetén egyre kisebb frekvenciával.

A túl ritka mintavételezés hatására tehát a magas frekvenciájú komponensekből alacsony frekvenciájú komponensek lesznek azaz a jel frekvencia komponensei felcserélődnek. Ez a jelenség alapja a stroboszkóp hatásnak is. Nézzük a következő esetet amit az alábbi ábrán ábrázoltunk:



275. ábra Stroboszkóp hatás

Van egy kör alakú lemezünk ami konstans sebességgel forog, és ezen a lemezen, egy, a lemez egyik sugarán áthaladó vonal található. A stroboszkóp villódzó fénye lényegében egy mintavételező rendszerként fogható fel mivel nagyon rövid ideig és kis időközönként periodikusan világítja meg a lemezt. Ha a stroboszkóp felvillanásainak frekvenciája sokkal nagyobb, mint a lemez forgási sebességéből adódó körfrekvencia, akkor a lemezt a forgási irányával megegyező irányban látjuk forogni. Azonban amikor a lemez forgási frekvenciájának kétszeresénél kisebb frekvencián üzemeltetjük a stroboszkópot, akkor a lemez forgási frekvenciája kisebbnek fog bizonyulni mint a tényleges, és úgy látjuk mintha lassabban forogna és ráadásul az ellenkező irányban. Ezt tapasztaljuk a légszavaros repülőgépeknél is, amikor a légszavar olyan sebességgel forog, hogy a szemlélő számára úgy látszik, mintha lassan visszafelé forogna. Ha pont egy felvillanás esik minden körbefordulásra, azaz $\omega_s = \omega_0$, akkor a lemez állni látszik pedig valójában forog.

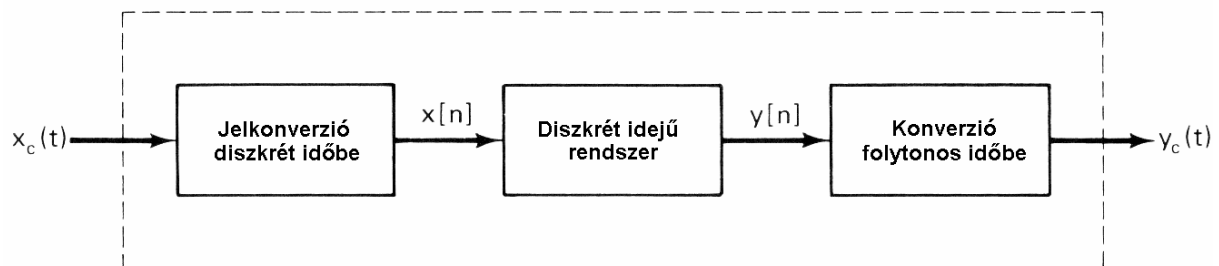
Bár magáról az „aliasing”-ról azt hinnénk, hogy csupán egy káros és emiatt kerülendő jelenség a jelfeldolgozás területén, azonban vannak alkalmazások ahol pont ezt furcsa tréfáját használják ki a matematikának. Például a mintavételező oszcilloszkóp (sampling oscilloscope), olyan mérőeszköz, amely a nagy frekvenciás jelek hullámformáját úgy jeleníti meg, hogy a túl ritka mintavételezés hatására fellépő aliasing miatt a nagy frekvenciás

komponenseket az alacsony frekvencia tartományban konvertálja, mivel innen mind a mérés mind a megjelenítés is könnyebben elvégezhető.

7.4. A folytonos jelek diszkrét idejű feldolgozása (*Discrete-Time Processing of Continuous-Time Signals*)

Sok alkalmazásban óriási mértékű előnyt jelent a folytonos jelek diszkrét jelekké való konvertálásából származó diszkrét jelfeldolgozás lehetősége. Ezen a módon a külső analóg világ jeleit diszkrét jelekké alakítva, azokat feldolgozva majd újra folytonos idejű jelekké konvertálva felhasználhatóak a digitális technika vívmányai és az analóg jelfeldolgozásnál jelentkező, gyakran megoldhatatlan problémákkal többé nem kell törődnünk. Sőt a diszkrét jelek processzálására számítógépek is felhasználhatóak amelyek széleskörű programozási lehetőségei, hálózati funkciói rendkívül összetett jelfeldolgozó, szabályzó vagy irányítási rendszer megvalósítását teszik lehetővé.

Nagy általánosságban véve a folytonos idejű jelfeldolgozás ilyen megközelítése felfogható az alábbi három műveletet végző rendszer soros kapcsolataként:



276. ábra Folytonos jelek diszkrét idejű feldolgozása

Ahol $x_c(t)$ és $y_c(t)$ folytonos jelek és $x[n]$, $y[n]$ pedig az őket reprezentáló diszkrét jelek. Persze a fenti rendszer valójában folytonos idejű rendszernek tekinthető, mivel mind a bemenet, mind pedig a kimenet folytonos jel és emiatt folytonos időben megismert eszközeinkkel vizsgálható.

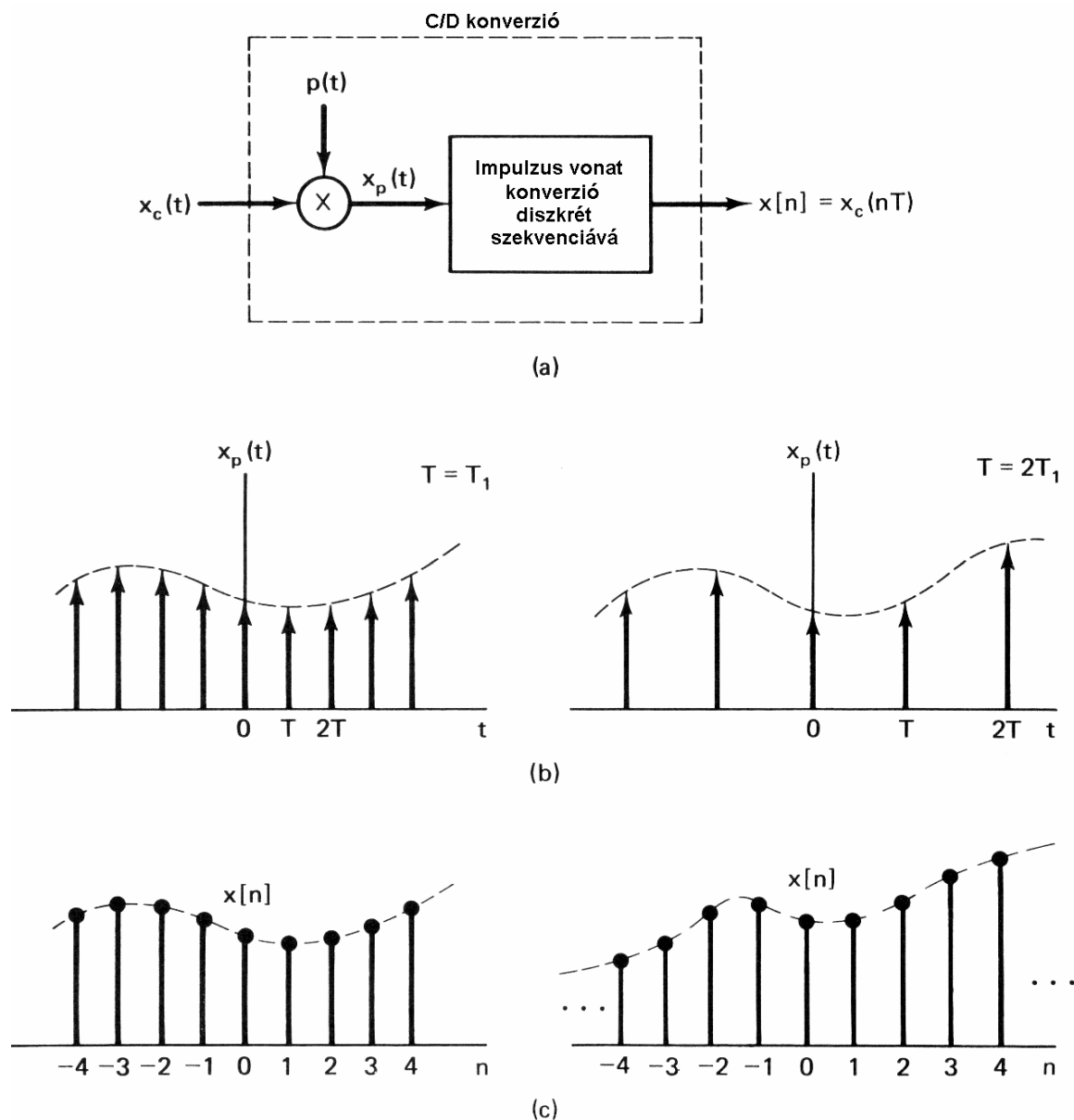
Maga a jel átalakítás és visszaalakítás miatt az egész rendszer a mintavételezési tétel elméleti alapjain nyugszik, és helyes működését az ott megismert kritériumok betartása teszi lehetővé. Ezért ha a mintavételezési frekvencia megfelelő akkor a $x_c(t)$ jel, a belőle vett pillanatnyi minták, azaz a $x_c(nT)$ értékek által teljes mértékben reprezentált. Mivel $x[n]$ -et szeretnénk felhasználni mint a $x_c(t)$ diszkrét idejű megfelelőjét, ezért:

$$x[n] = x_c(nT)$$

A $x_c(t)$ folytonos jel $x[n]$ diszkrét jellé való átalakítását a fenti rendszer első rész rendszere végzi. Ezt a műveletet folytonosról diszkrét időbe való átalakításnak (C/D) (continuous-to-discrete-time conversion) nevezzük, és az ezt végző rendszert pedig C/D jelátalakítónak. Ennek a műveletnek az inverzét végzi a harmadik részrendszer amit D/C, azaz diszkrét/folytonos jelátalakítónak hívunk. A számítógépes rendszereknél és digitális eszközöknél, a C/D konverziót A/D (analog-to-digital) átalakításnak, a D/C konverziót pedig D/A átalakításnak nevezik, és az ezeknek megfelelő konvertereket is hasonlóan jelölik.

Hogy jobban rá tudjunk világítani az $x_c(t)$ és az $x[n]$ jel kapcsolatára célszerű ha a folytonos/diszkrét konverziót egy kétlépéses műveletként képzeljük el,

melynek első lépésében a folytonos jelet mintavételezzük majd az így előálló impulzus vonatot diszkrét szekvenciává alakítjuk. Ezt a két lépést illusztrálja a következő ábra:



277. ábra Adott jel impulzus vonattal történő mintavételezése és diszkrét időtartományra valókonverziója

Az első lépésben, ami a mintavételezési eljárást valósítja meg, az $x_p(t)$ jel egy impulzus vonatnak felel meg, amelynek egymástól azonosan T mintavételezési időnek megfelelő távolságra lévő impulzusainak amplitúdója a folytonos jelet mintavételezési helyein felvett értékeivel állnak összhangban. A második lépés során, ahol a még folytonos idejű impulzus vonatot alakítjuk diszkrét idejű szekvenciává, lényegében olyan jelet állítunk elő, amely egységnyi távolságokra tartalmazza a T távolságokra elhelyezkedő minták értékeit, az új független „ n ” változó függvényében. Így a mintákat tartalmazó impulzus vonat diszkrét idejű jellé való átalakítása felfogható egyfajta időnormalizálásnak is. Ezt a konverziót két különböző T -re ábrázoltuk a fenti ábrán.

A frekvencia tartományban tudjuk, hogy $x_p(t)$ és $x_c(t)$ között a következő kapcsolat áll fent:

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(\omega - k\omega_s)$$

Viszont a mintavételezett jel spektrumát felírhatjuk a minták alapján is, mégpedig mivel

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

így

$$X_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)e^{-j\omega nT}$$

Ha most a diszkrét idejű $x[n]$ jel Fourier transzformáltját nézzük akkor:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

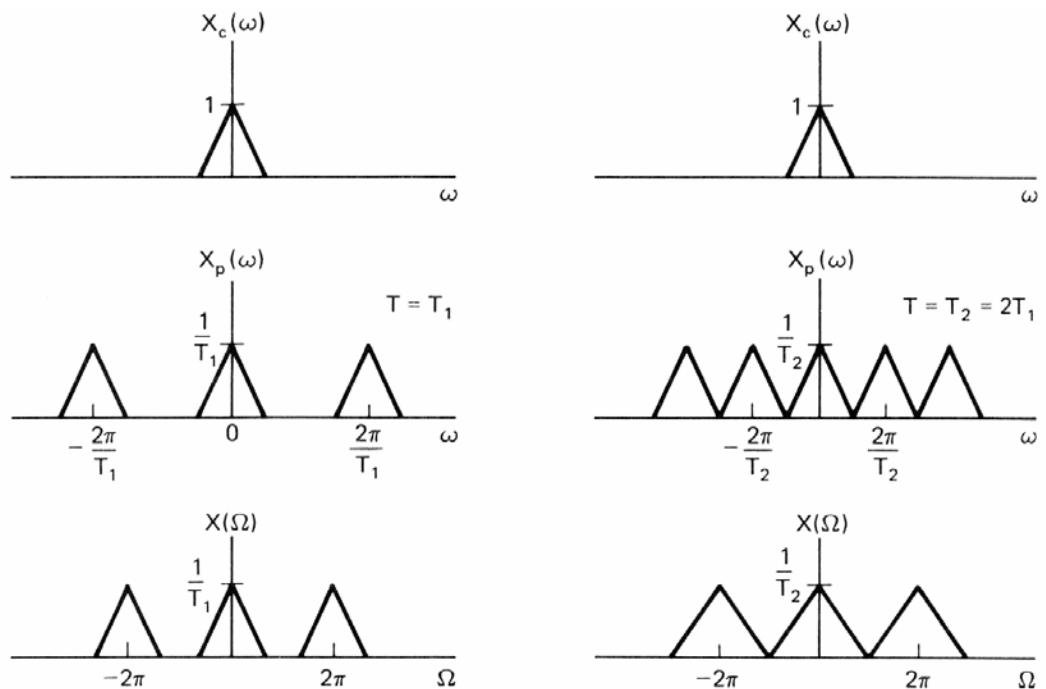
Mivel $x[n]$ az eredeti jel mintáiból épül fel, így:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega n}$$

Ha most a két Fourier transzformáltat összehasonlítjuk akkor a következő megállapításra jutunk:

$$X(\Omega) = X_p\left(\frac{\Omega}{T}\right)$$

A $X_c(\omega)$, $X_p(\omega)$, $X(\Omega)$ transzformáltak közötti kapcsolatot a következő ábra szemlélteti két különböző mintavételezési időre vonatkozólag:



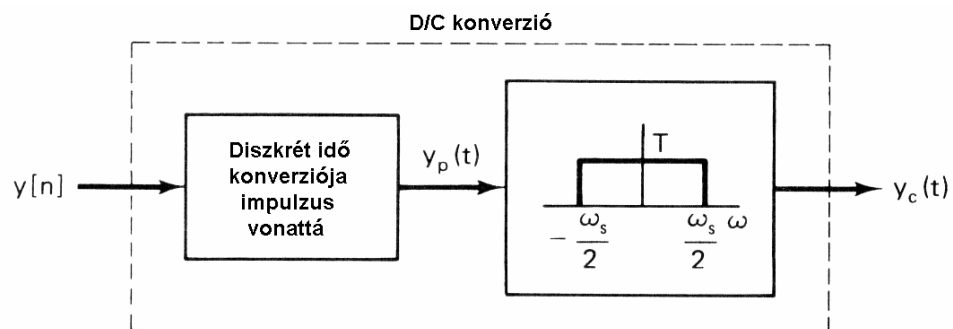
278. ábra Összefüggés a folytonos mintavételezett jel spektruma és annak diszkrét megfelelője között

Jól látható, hogy $X(\Omega)$ nem más mint a frekvenciájában skálázott mása az $X_p(\omega)$ spektrumnak, és periodikus mégpedig 2π -vel a mintavételezési időtől függetlenül. Persze ez a periodikusság minden diszkrét idejű Fourier transzformált sajátja. Ha most az eredeti folytonos jel spektrumával hasonlítjuk össze a $X(\Omega)$ spektrumot, akkor észrevehető, hogy annak másolatait tartalmazza adott, a jeltől független frekvenciákon, amik nevezetesen 2π többszöröseivel egyenlők. Az eredeti spektrum replikásainak megjelenése az impulzus vonattal történő mintavételezés hatására következik be, emiatt a C/D konverzió első lépésében, a mintavételezés során történik meg. A frekvencia skálázás viszont az impulzus vonat diszkrét jellé való átalakítása miatt jön létre, ezért a konverzió második lépésének, azaz az idő normalizációnak tudható be. Mivel Fourier transzformáció hasonlósági tulajdonságának megfelelően az időbeli független változó skálázása, azaz szorzása $1/T$ -vel, a frekvencia tengely T -vel való skálázásának felel meg, így mivel a C/D konverzió során a $x_p(t)$ jel $x[n]$ diszkrét jellé való átalakításánál, azaz az idő normalizációnál ugyanez a jelenség játszódik le, így az időnormalizáció felfogható az idő tengely $1/T$ -vel való skálázásának.

Ha most a D/C konverziót nézzük, amely már a teljes diszkrét jelfeldolgozó rendszerünk harmadik, egyben utolsó szakasza, akkor pont az ellenkező műveleteit kell végrehajtanunk a C/D konverzió lépésének.

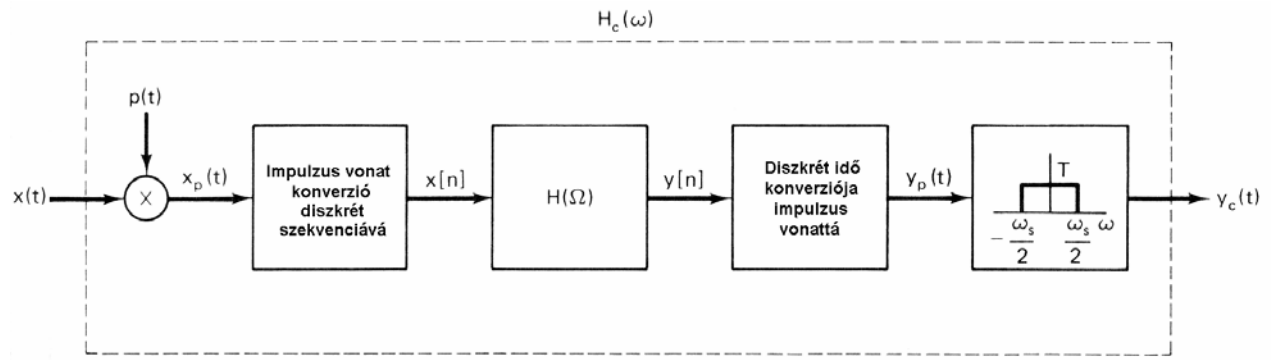
Tehát egy $y[n]$ diszkrét jelből folytonos idejű impulzus vonatot kell készítenünk, melyet $y_p(t)$ -vel jelölünk, majd ebből a vonatból a folytonos mintavételezésnél tárgyaltak alapján a mintáknak megfelelő folytonos $y_c(t)$ jelet kell készítenünk.

Ezt az eljárást az alábbi ábrán láthatjuk:



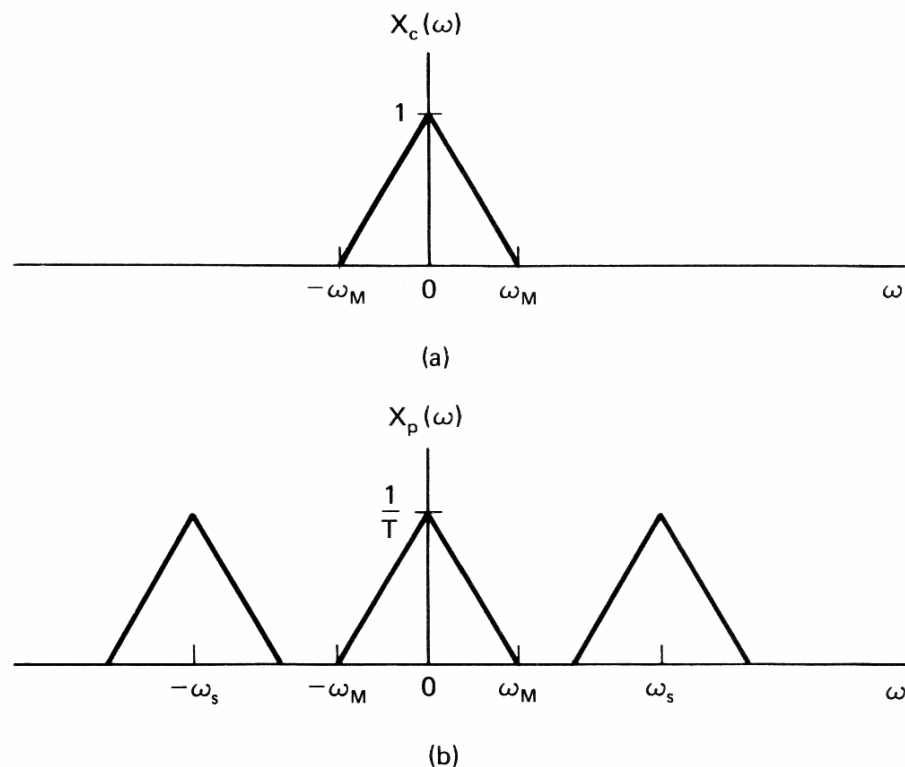
279. ábra Diszkrét idejű szekvencia konverziója folytonos jellé

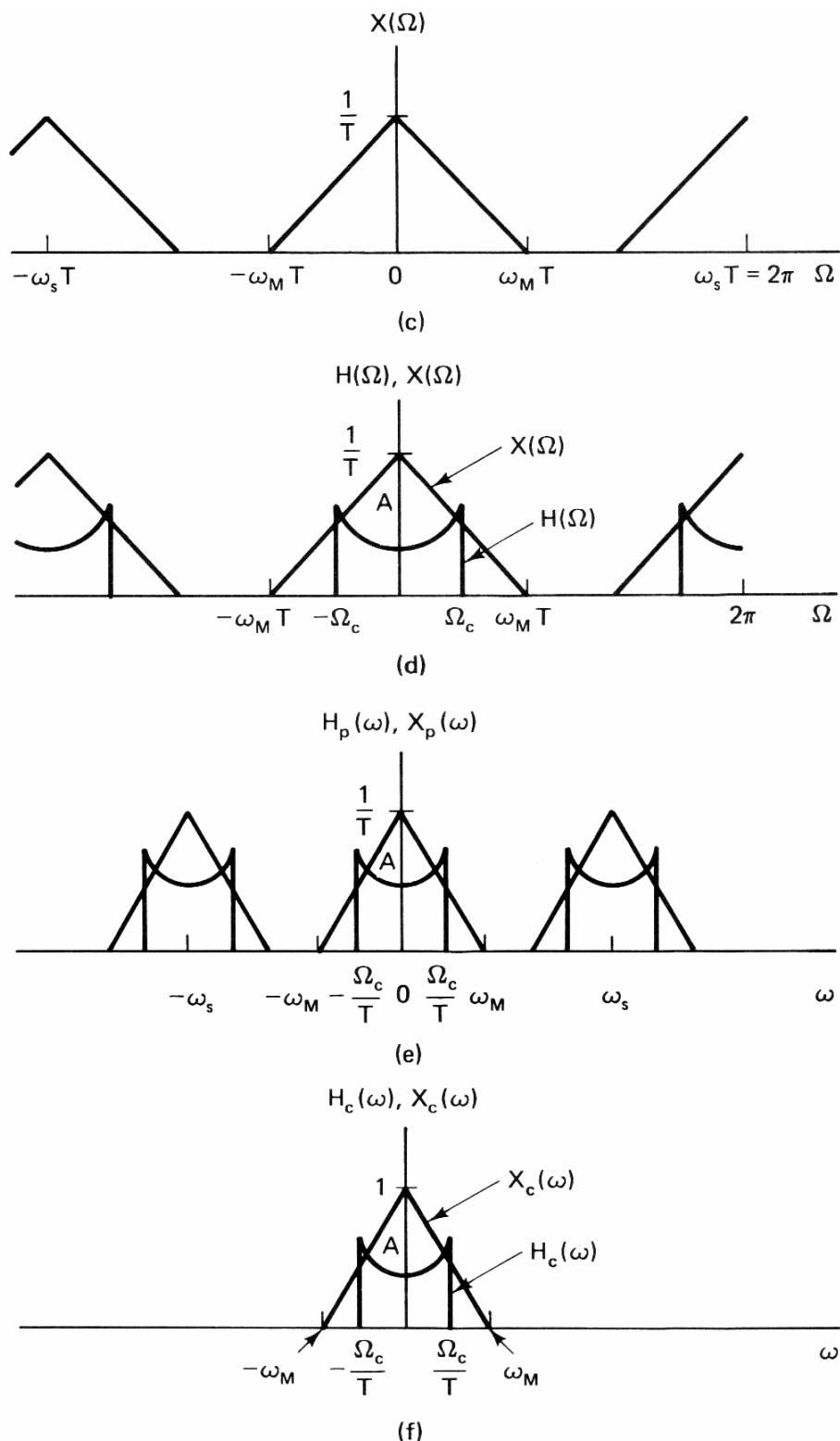
Ha most az egész jelfeldolgozó rendszert ábrázoljuk eddigi ismereteink alapján, akkor a következő elrendezéshez jutunk:



280. ábra Diszkrét idejű folytonos jelet feldolgozó rendszer

Világosan látszik, hogyha a diszkrét alrendszer identikus, azaz $x[n] = y[n]$ akkor a teljes folytonos jelfeldolgozó rendszerünk is az. Nos, hogyha sokkal általánosabb diszkrét rendszer esetén vizsgáljuk a problémát, azaz ha $H(\Omega)$ lényegesen bonyolultabb, akkor az egész folytonos idejű rendszer frekvencia válasz függvényének a meghatározása az alrendszerek által képviselt frekvencia válasz függvények szorzata lesz, ám ezeket mivel diszkrét transzformáltak folytonos transzformáltakká kell konvertálni. Hogy könnyebben megértsük ezt, tekintsük az alábbi példa jel spektrumait a feldolgozás különböző fázisaiban:





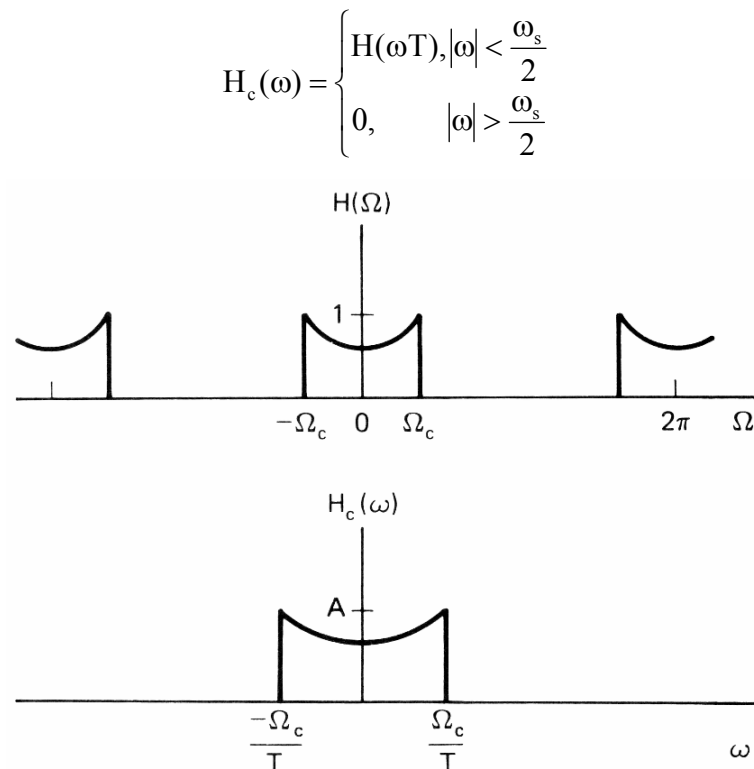
281. ábra A diszkrét jelfeldolgozó rendszer jeleinek spektrumai

Az első három jel a folytonos bemenet átalakulásának spektrumbéli változásait, míg az utolsó három ábra a kimenet létrejöttének lépéseit írja le. Jól látszik, hogy a legvégül kapott kimenet spektruma az $X(\Omega)$ és $H(\Omega)$ szorzatának $1/T$ -vel skálázott és alul áteresztő szűrővel vágott eredménye, azaz a bement diszkrét jel reprezentációjának és a műveletvégző diszkrét jelfeldolgozó egység impulzus válasz függvényének a konvolúciója, amit időben vissza normalizáltak folytonos

impulzus vonattá és alul áteresztő szűrő segítségével folytonos kimeneti jellé alakítottak. Ha az első és az utolsó jel alakot megnézzük, világos az a tény, hogy a teljes rendszerre vonatkozólag igaz az alábbi:

$$Y_c(\omega) = X_c(\omega)H(\omega T)$$

Ennek eredményeként a teljes rendszer leírható egyetlen folytonos LTI rendszerrel aminek frekvencia válasz függvénye $H_c(\omega)$ a következő féle képen függ a diszkrét feldolgozó rendszer frekvencia válasz függvényétől, $H(\Omega)$ -tól:



282. ábra Diszkrét rendszer frekvencia válasz függvénye és az ennek megfelelő folytonos rendszer válasz

Azaz a fenti ábrának megfelelő diszkrét alul áteresztő szűrő transzformáltjának egy $1/T$ -vel skálázott periódusa a neki megfelelő folytonos idejű szűrő spektruma.

Igazából, az egész jelfeldolgozó rendszer leírhatósága egy folytonos idejű LTI rendszerrel igen meglepő következmény, mivel a rendszerben részt vevő impulzus vonat modulátor nem idő invariáns. Azonban a mintavételezési tétel alkalmazása, azaz a sávhatárolt jelek mintavételezése közben az aliasing jelenség elkerülése, lehetővé teszi ennek, az általánosságában véve nem lineáris összetett rendszernek, egyetlen LTI rendszerrel való leírását.

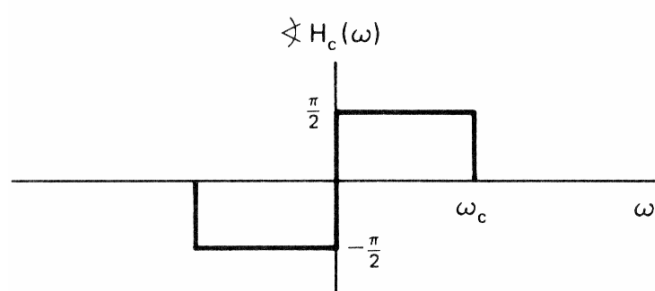
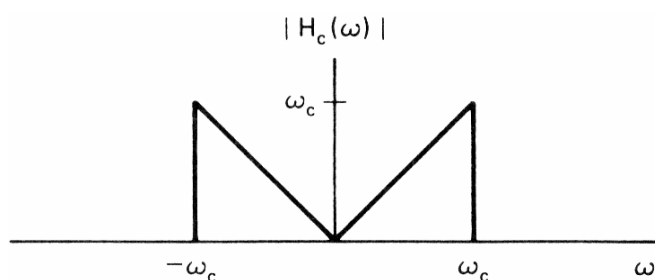
7.4.1. Digitális differenciátor (Digital Differentiator)

Egy folytonos idejű differenciáló sávhatárolt szűrőt szeretnénk megvalósítani a fenti diszkrét rendszer által. Ahogy azt a folytonos idejű szűrők kapcsán megemlítettük a differenciáló szűrő frekvencia válasza a következő:

$$H_c(\omega) = j\omega$$

és a sávhatárolt, ω_c vágási frekvenciájú, differenciáló szűrőnek pedig:

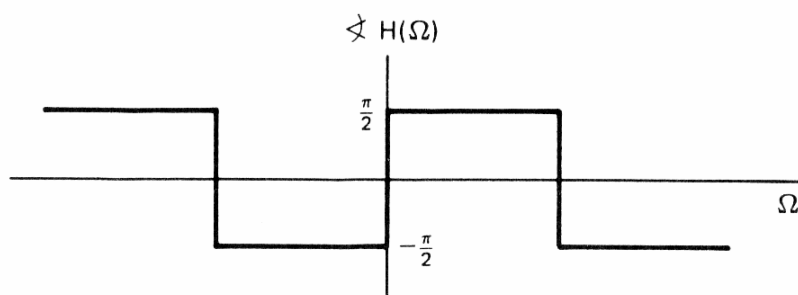
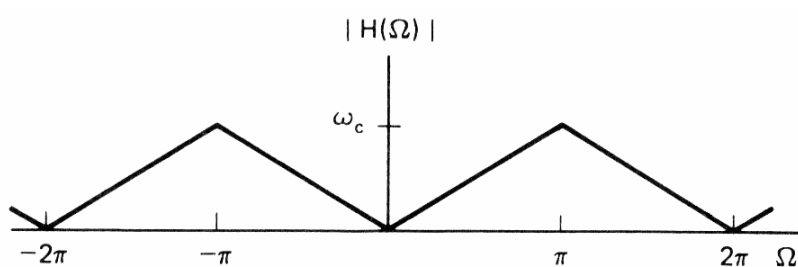
$$H_c(\omega) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



283. ábra Frekvencia válasz függvénye az ideális sávhatárolt differenciáló szűrőnek

$\omega_s = 2\omega_c$ mintavételezési frekvenciát használva a folytonosnak megfelelő diszkrét idejű differenciáló szűrő frekvencia válasz függvénye a következő lesz:

$$H(\Omega) = j\left(\frac{\Omega}{T}\right), \quad |\Omega| < \pi$$



284. ábra A folytonos differenciátor szűrőt megvalósító diszkrét rendszer spektruma

Ezt a diszkrét megoldást használva az $y_c(t)$ jel az $x_c(t)$ jel differenciáltja lesz, addig amíg a mintavételezésnél nem lép fel az aliasing jelenség.

7.4.2. Fél-mintás késleltetés (Half-Sample Delay)

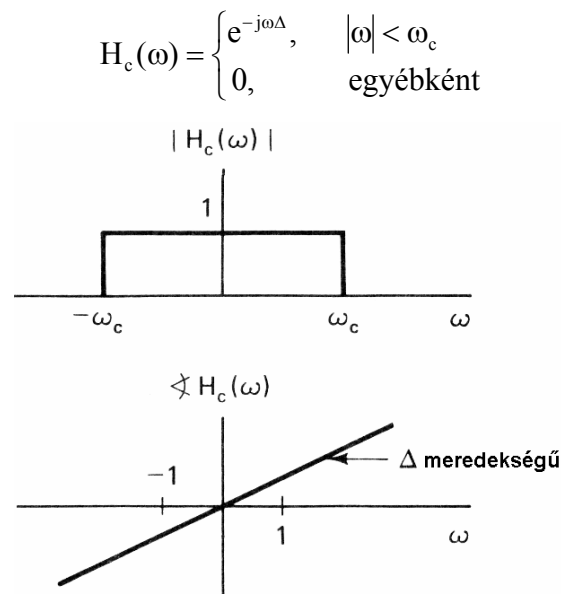
Most próbáljuk meg a folytonos idejű időtolás műveletet megvalósítani diszkrét jelfeldolgozó rendszerünkkel. Ehhez a következő kapcsolatnak kell fennállnia a rendszer kimenete és bemenete között:

$$y_c(t) = x_c(t - \Delta)$$

ahol Δ az időeltolás mértékét jelöli. Ekkor alkalmazva a Fourier transzformált idevágó tulajdonságát:

$$Y_c(\omega) = e^{-j\omega\Delta} X_c(\omega)$$

Mivel az $x_c(t)$ jel sávhatárolt (ellenkező esetben nem használhatóak eddigi eredményeink) és mivel a jelfeldolgozó rendszernek megfelelő folytonos rendszer frekvencia átviteli függvényének is sávhatároltnak kell lennie, ezért válasszuk a következő karakterisztikát:

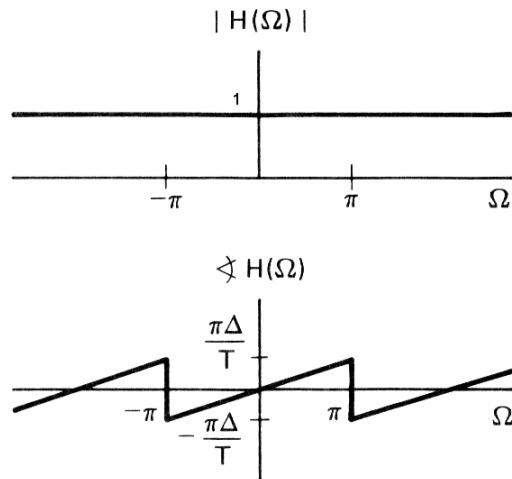


285. ábra A folytonos idejű késleltetést megvalósító rendszer spektruma

ahol ω_c a vágási frekvenciája a folytonos idejű szűrőnek.

Ha $\omega_s = 2\omega_c$ -re választjuk akkor az ennek megfelelő diszkrét frekvencia válasz függvény nem más mint:

$$H(\Omega) = e^{-j\Omega\Delta/T}, \quad |\Omega| < \pi$$

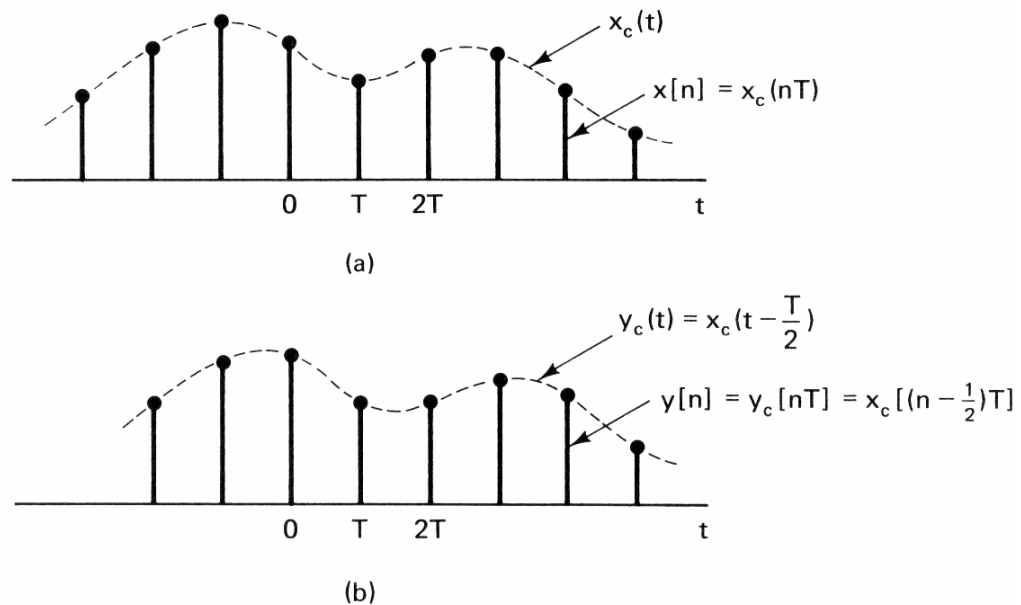


286. ábra A folytonos idejű késleltetést megvalósító diszkrét idejű rendszer spektruma

Sávhatárolt jelekre nézve egy ilyen diszkrét rendszer kimenete a bemenet időbeli eltoltja. Ha igaz, hogy Δ/T egész szám akkor:

$$y[n] = x\left[n - \frac{\Delta}{T}\right]$$

Ha viszont Δ/T nem egész szám akkor a fenti egyenletnek nincs semmi jelentése, mivel csak egész indexre definiált a jel. Azonban még ebben az esetben is kapcsolatot tudunk találni $x[n]$ és $y[n]$ között azzal a kikötéssel, hogy $x[n]$ sávhatárolt. Mivel lényegében az $x_c(t)$ jel mintavételezése az $x[n]$ jel és fordítva pedig az $x[n]$ jel sávhatárolt interpolációja a $x_c(t)$, és ugyanez igaz $y_c(t)$ és $y[n]$ kapcsolatára, így az $y[n]$ lényegében az $x[n]$ jel sávhatárolt interpolációjának mintavételezése ebben az esetben. Így ha $\Delta/T = 1/2$, amit gyakran fél mintás késleltetésnek hívnak a következő féle képen alakul a rendszer válasza egy példa jelre:



287. ábra Egy folytonos jel mintavételezése
(a) normál esetben; (b) félmintás késleltetéssel

7.5. Mintavételezés a frekvencia tartományban (Sampling in the Frequency Domain)

Az előzőekben az időtartománybeli mintavételezését vizsgáltuk a sávhatárolt jeleknek, s a mintavételezési tételben foglaltuk össze legfőbb ismereteinket. Azonban, ahogy azt már a Fourier transzformáltak kapcsán is láthattuk, a folytonos jelek idő és frekvencia tartománya között egyfajta dualitás érvényesül. Így a folytonos időre megalkotott mintavételezésünknek is létezik duális a frekvencia tartományban. A következőkben az időhatárolt, azaz véges hosszú jelek frekvencia mintákból való rekonstrukciójának lehetőségeit fogjuk vizsgálni. Levezetésünkhöz tekintsük a folytonos idejű mintavételezés duálisát, azaz a jel frekvencia mintavételezéséhez használjuk most nem az időben hanem a frekvencia tartományban egy impulzus vonatot és ezzel szorozzuk be a jel spektrumát, azaz:

$$\tilde{X}(\omega) = X(\omega)P(\omega)$$

Ugyanez az időben konvolúcióként jelentkezik:

$$\tilde{x}(t) = x(t) * p(t)$$

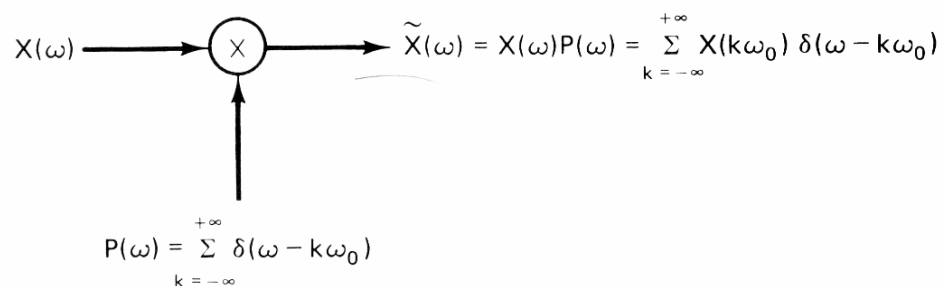
ahol

$$p(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0} k\right)$$

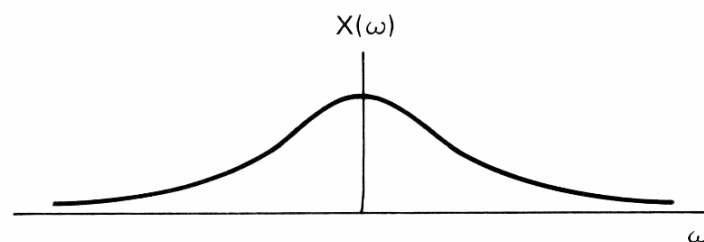
ezért

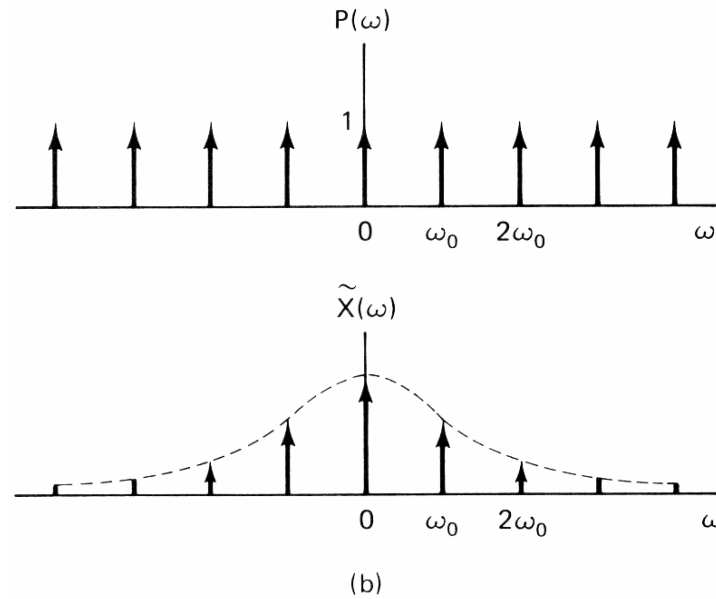
$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0} k\right)$$

Jól láthatóan ez az egyenlet duális a folytonos időben megismert mintavételezési egyenletnek. Egy ilyen rendszerre példa az alábbi elrendezés és a benne szereplő jelek spektrumbéli változásai.



(a)





288. ábra Mintavételezés a frekvencia tartományban

Ha $x(t)$ időhatárolt, azaz

$$x(t) = 0, \quad |t| > T_M$$

akkor a

$$\frac{2\pi}{\omega_0} > 2T_M$$

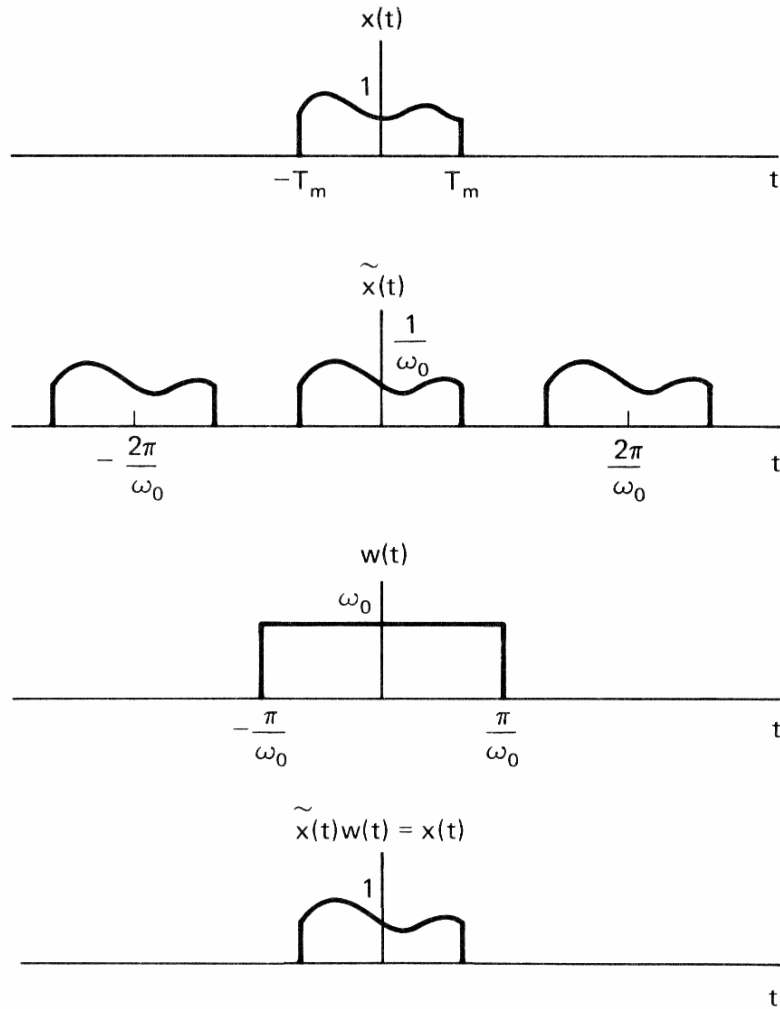
teljesülése esetén az $\tilde{x}(t)$ jel a nem átlapolódó replikánsait fogja tartalmazni az $x(t)$ jelnek a $T_0 = 2\pi/\omega_0$ egész számú többszöröseivel leírható időpontokban. Ebben az esetben az eredeti $x(t)$ jel és persze így az $X(\omega)$ transzformált rekonstruálható az $\tilde{x}(t)$ jel nulla körüli értékeinek kiablakozásával, amit angolul „low-time windowing”-nak hívnak. Azaz lényegében egy szűrőt valósítunk meg az időtartományban amelyre:

$$x(t) = \tilde{x}(t)w(t)$$

ahol

$$w(t) = \begin{cases} \omega_0, & |t| \leq \frac{\pi}{\omega_0} \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{\omega_0} \end{cases}$$

Ezt illusztrálja a következő példajel frekvencia mintavételezése és visszaállítása:



289. ábra Frekvencia mintavételezés hatása az idő tartományba, és a jel visszaállításának lehetősége

Ha a

$$\frac{2\pi}{\omega_0} > 2T_M$$

egyenlőtlenség nem teljesül akkor $x(t)$ replikánsai egymásra lapolódnak és többé az eredeti $x(t)$ jel nem lesz visszaállítható a frekvencia mintákból.

Az interpolációnál említettek alapján, az alul áteresztő ablakozása az $\tilde{x}(t)$ jelenek, hogy visszanyerjük $x(t)$ -t, lényegében úgy is értelmezhető mintha a $\tilde{x}(t)$ által képviselt frekvencia mintákat interpolálnánk a frekvencia tartományban. Azaz:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \tilde{X}(\omega) * W(\omega)$$

ahol

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0)$$

és $W(\omega)$ a $w(t)$ Fourier transzformáltja:

$$W(\omega) = 2\pi \sin_c \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

Így az előzőek alapján:

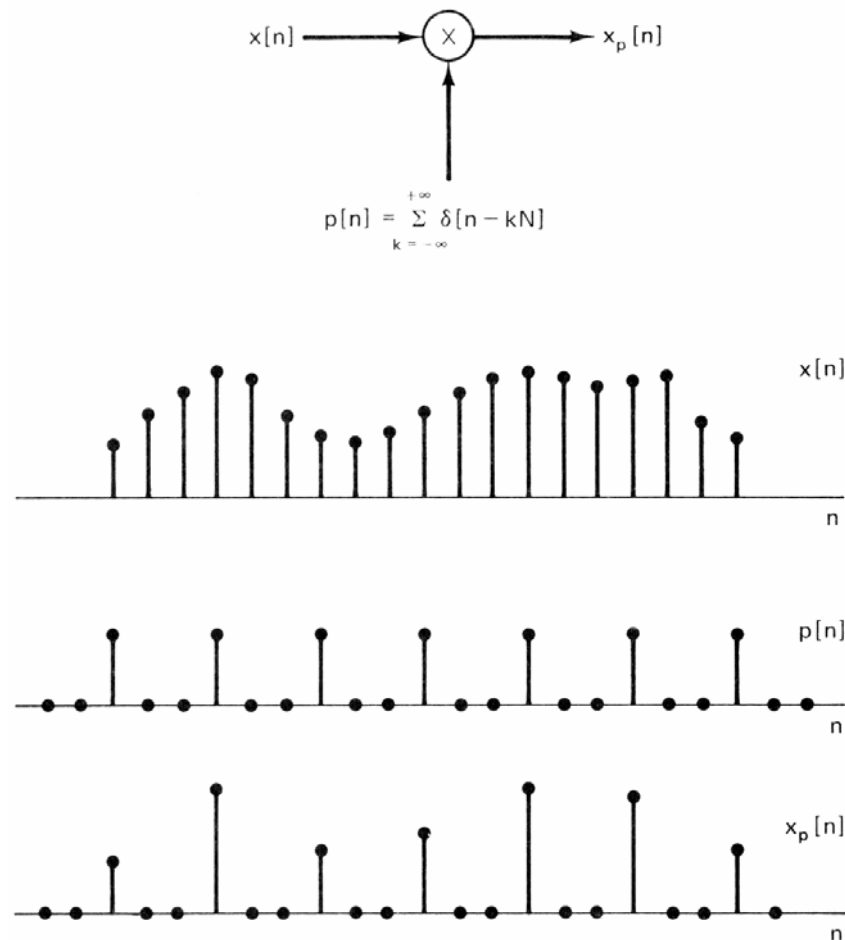
$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) \sin_c \left[\frac{\omega - k\omega_0}{\omega_0} \right]$$

Tehát a $\sin_c$ függvény segítségével az interpoláció pontosan elvégezhető a frekvencia tartományban egymástól egyenlő távolságra lévő frekvencia mintákra vonatkozólag, ugyanúgy, ahogy arra lehetőség nyílt az időtartományban mintavételezett jelek esetén az időtartományban szereplő minta sorozatra.

7.6. Diszkrét jelek mintavételezése (Sampling of Discrete-Time Signals)

Az eddigiek során csupán a folytonos idejű jelek mintavételezésével foglalkoztunk és hogy annak elméleti alapjait jobban megértsük számos alkalmazást és példát említettünk meg. Ahogyan majd látni fogjuk nagyon sok hasonló eredményt és összefüggést tudunk levezetni a diszkrét jelek mintavételezése esetén is.

A folytonos esettel párhuzamosan a diszkrét jelek mintavételezése is a következő működési elven alapszik:



290. ábra Diszkrét idejű mintavételezés

A fenti példajel hatására a rendszer kimenetén kapott $x_p[n]$ jelre igaz, hogy az N mintavételezési idő egész számú többszöröseire nézve egyenlő az eredeti jellel a többi időegységre pedig zérus. Így:

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & \text{ha } n = kN \text{ ahol } k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ha most a modulációs tulajdonság segítségével a spektrum béli változást tekintjük amit a diszkrét idejű mintavételezés okozott, akkor mivel

$$x_p[n] = x[n]p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN]\delta[n - kN]$$

ezért a spektrum a következő módon alakul:

$$X_p(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} P(\theta) X(\Omega - \theta) d\theta$$

Azonban ahogy már ezt folytonos időben levezettük:

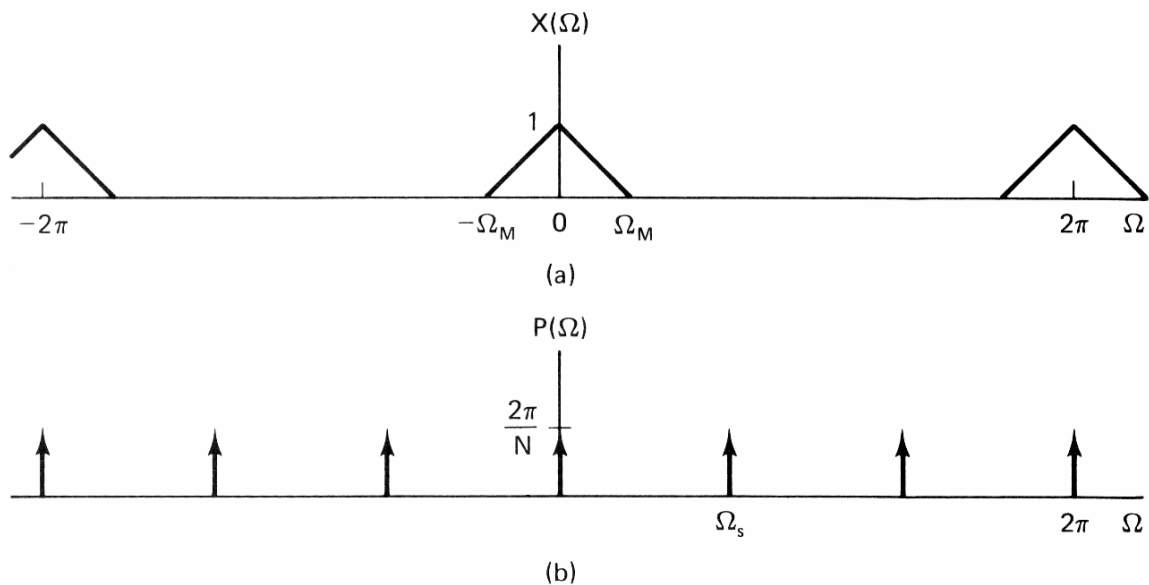
$$P(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

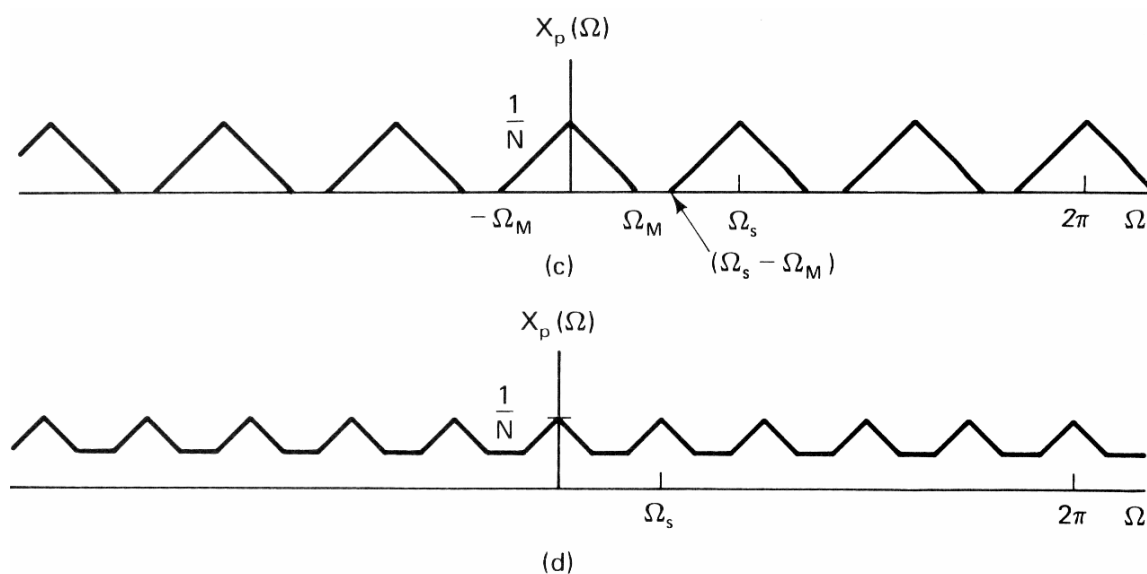
ahol $\Omega_s = 2\pi/N$ a mintavételezési frekvencia. Ezt behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$X_p(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\Omega - k\Omega_s)$$

A fenti egyenlet ugyancsak megfeleltethető a folytonos esetben a mintavételezett jel spektrumát leíró egyenletnek.

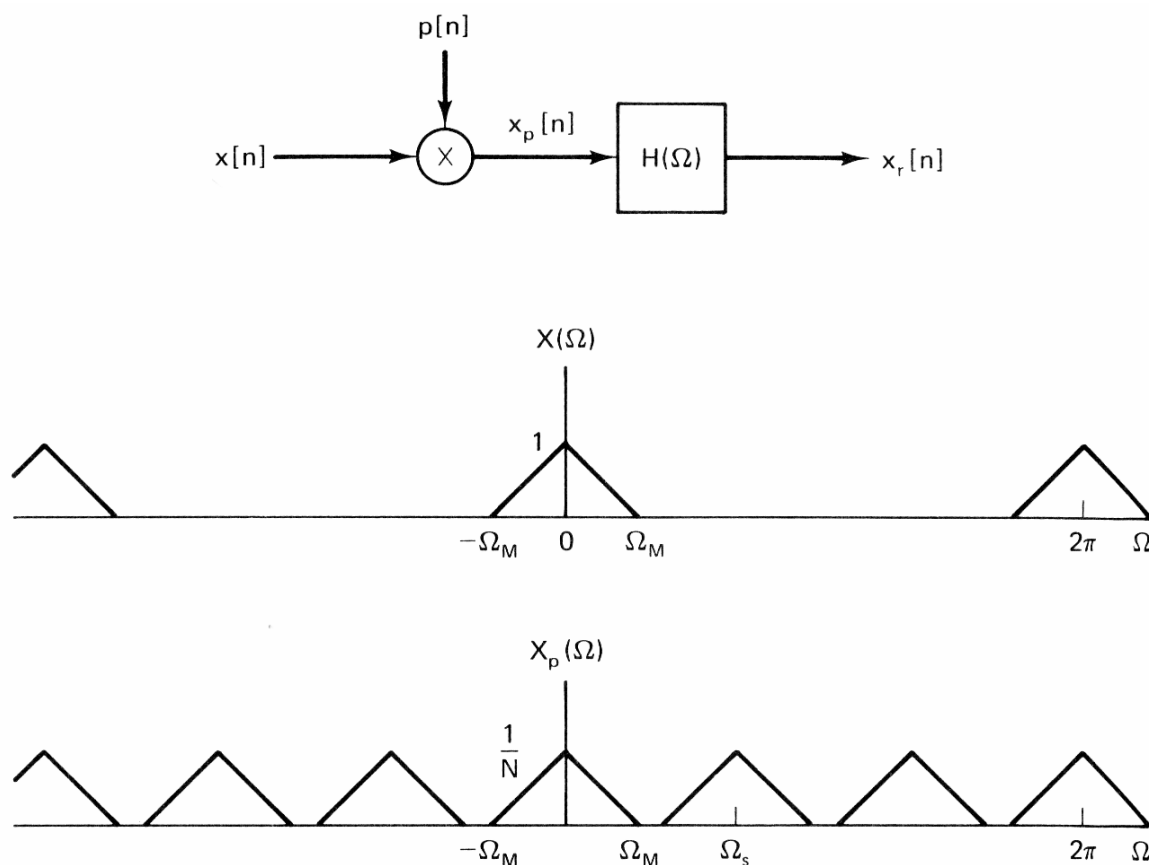
A diszkrét idejű mintavételezés hatását mutatja be az alábbi ábra egy sávhatárolt példajel spektrumára:

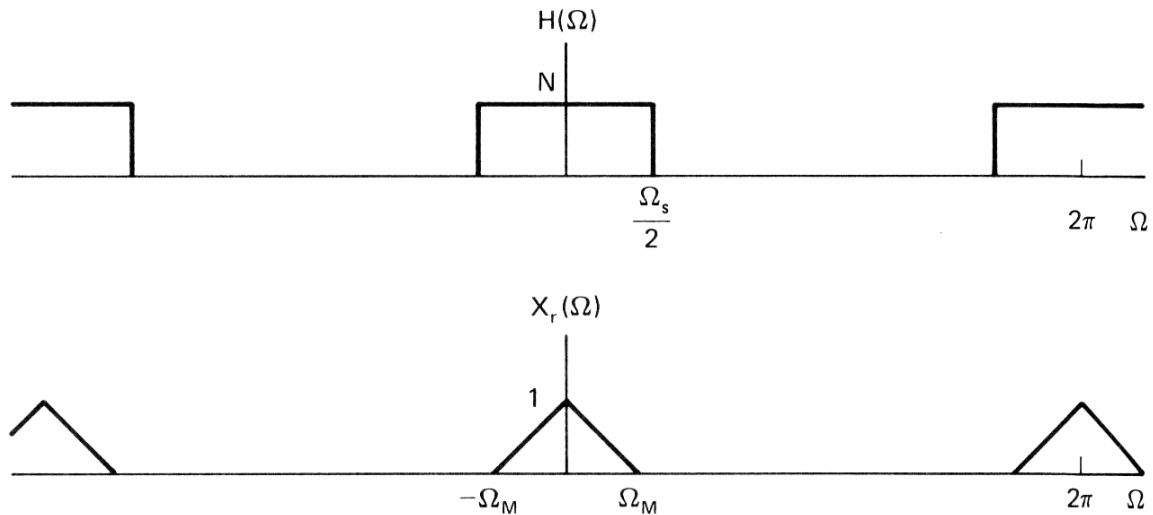




291. ábra Diskrét jel impulzus mintavételezésének hatásai a spektrumra nézve

Jól látszik, hogy ha $(\Omega_s - \Omega_M) > \Omega_M$, vagy másképp $\Omega_s > 2\Omega_M$, akkor nincs aliasing, mivel az eredeti jel spektrumának másolatai nem lapolódnak egymásra, viszont ha a fenti kritérium nem teljesül az átlapolódás létrejön. Ha nincs átlapolódás akkor egy alul áteresztő szűrő segítségével, melynek erősítése N és a vágási frekvenciájára igaz, hogy $\Omega_M < \Omega_c < (\Omega_s - \Omega_M)$, az eredeti $x[n]$ jel spektruma és így a jel maga is visszaállítható. A példa kedvéért egy ilyen visszaállítást ábrázoltunk, ahol a szűrő vágási frekvenciája $\Omega_s/2$ volt:





292. ábra A diszkrét jel rekonstrukciója a mintáiból alul áteresztő szűrő segítségével

Ha viszont a $\Omega_s > 2\Omega_M$ nem teljesül akkor $x_r[n] \neq x[n]$, de ahogy azt folytonos esetben láthattuk, továbbra is igaz marad, hogy:

$$x_r[kN] = x[kN], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

attól függetlenül, hogy az aliasing jelenség létrejön-e vagy sem.

Az $x[n]$ jel alul áteresztő szűrővel való rekonstrukciója megfelel az $x_p[n]$ által meghatározott minta pontok diszkrét idejű interpolációjának. A szűrő impulzus válasz függvényét vizsgálva a következőt kapjuk:

$$h[n] = \frac{N\Omega_c}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{\Omega_c n}{\pi}\right)$$

A rekonstruált jel pedig lényegében egy konvolúció eredménye:

$$x_r[n] = x_p[n] * h[n]$$

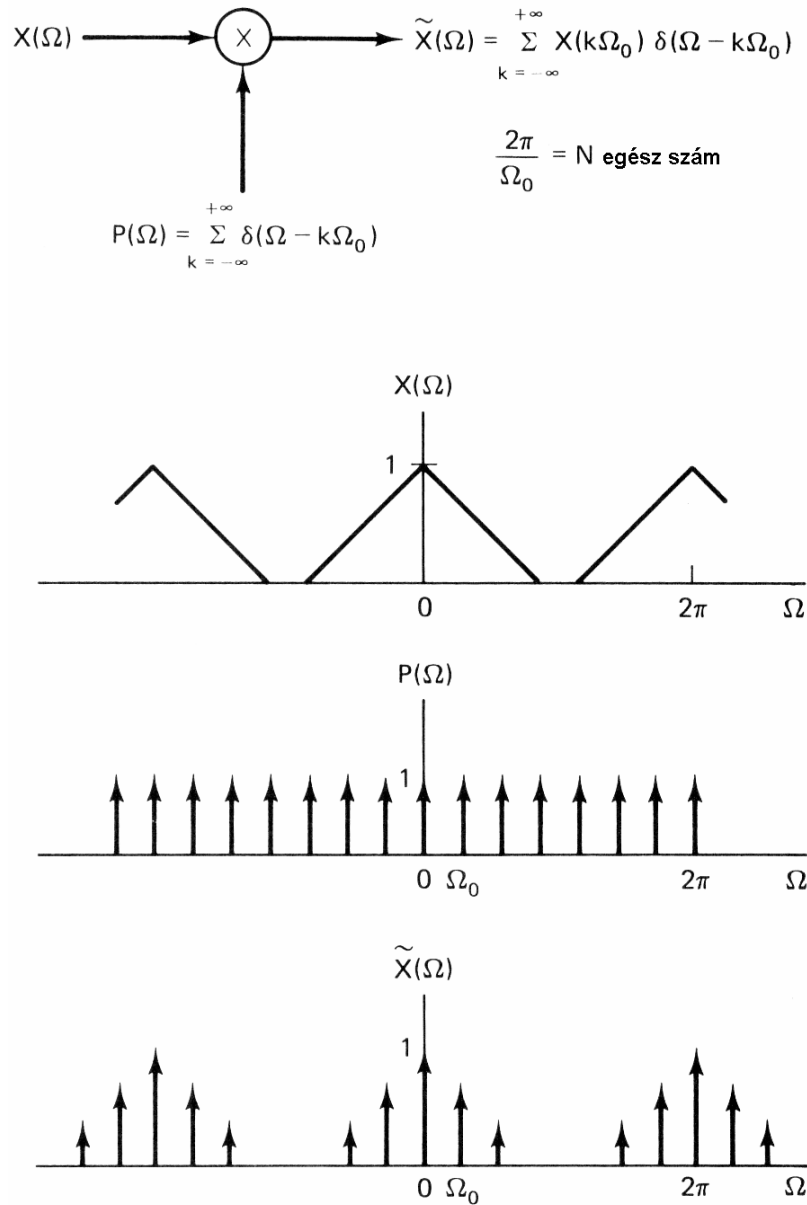
vagy behelyettesítve:

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] \frac{N\Omega_c}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{\Omega_c}{\pi}(n - kN)\right)$$

A fenti egyenlet egy ideális sávhatárolt interpolációt ír le aminek elvégzéséhez egy ideális alul áteresztő szűrő szükségeltetik. Azonban az alkalmazásokban csupán ennek megfelelő pontosságú közelítése használható. Ezért egyenletünk az alábbi alakra módosul:

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] h_r[n - kN]$$

ahol $h_r[n]$ az ideális szűrőt közelítő szűrési eljárás impulzus válasz függvénye. Az előző részben a folytonos idejű mintavételezés duálisát vizsgáltuk, és mivel a dualitás a diszkrét tartományra is él, vizsgáljuk meg a diszkrét tartományra vonatkozó frekvencia mintavételezést. Ahogy az előbb tettük, szorozzuk meg a mintázni kívánt időhatárolt jel spektrumát a $P(\Omega)$ mintavételező impulzus vonat spektrummal.



293. ábra Impulzus vonattal történő mintavételezés a frekvencia tartományon

Látható, hogy az eredmény teljesen ugyan az mint folytonos esetben, csupán azzal az apró, de el nem hanyagolható különbséggel, hogy itt a Ω_0 frekvencia közre, ami elválaszt két impulzust, teljesülnie kell, hogy $N = 2\pi/\Omega_0$ egész szám, mivel máskülönben $P(\Omega)$ és $\tilde{X}(\Omega)$ nem lenne periodikus 2π -vel. A frekvencia mintavételezés az időtartományban ismét konvolúcióként jelentkezik:

$$\tilde{x}[n] = x[n] * p[n]$$

és mivel:

$$p[n] = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left[n - k \frac{2\pi}{\Omega_0}\right]$$

ezért:

$$\tilde{x}[n] = \frac{N}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n - kN]$$

Ha feltesszük, hogy az $x[n]$ jel időhatárolt, azaz:

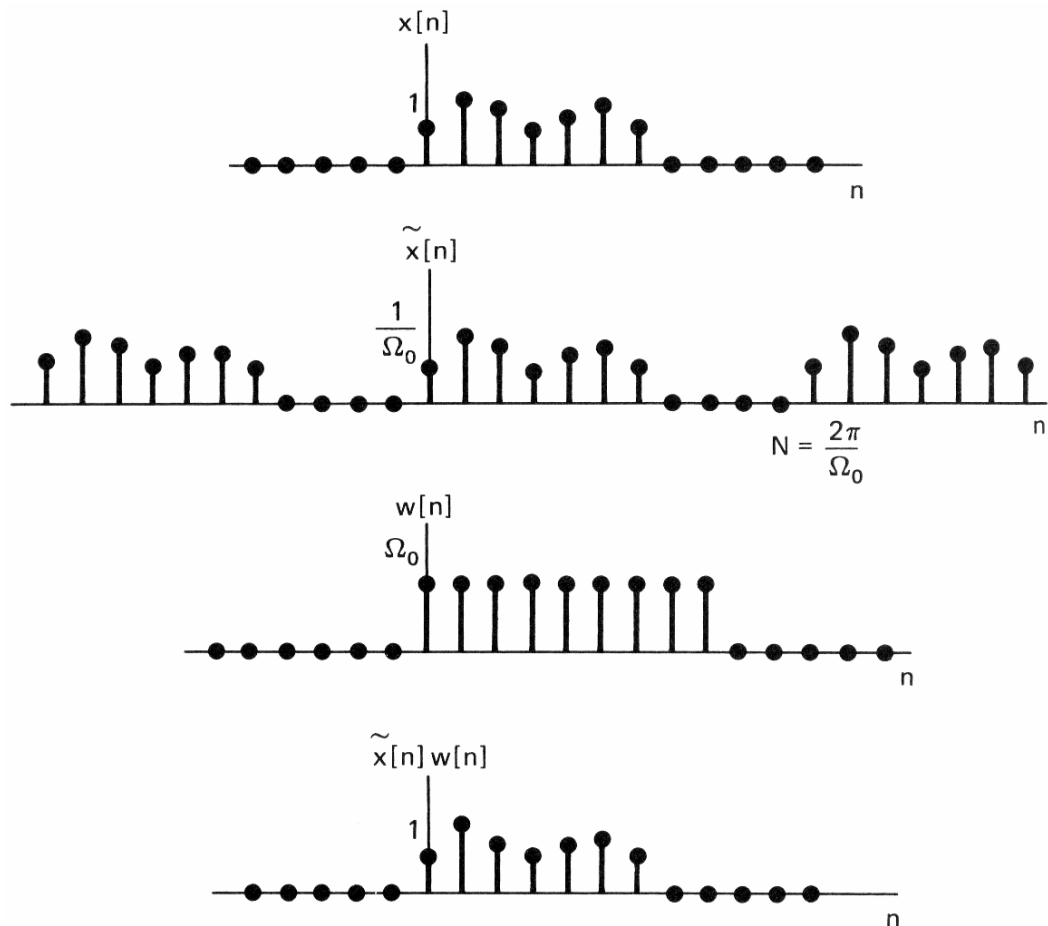
$$x[n] = 0, \quad n < 0 \text{ vagy } n > N - 1$$

akkor, ahogy az az alábbi példajelen is látszik, az $\tilde{x}[n]$ jel egymásra nem átlapolódó másolatait fogja tartalmazni az eredeti $x[n]$ jelnek az N értékének többszöröseivel egyenlő időegységeknél. Ezért az eredeti $x[n]$ jel alul áteresztő ablakolással visszanyerhető, azaz:

$$x[n] = \tilde{x}[n]w[n]$$

ahol

$$w[n] = \begin{cases} \Omega_0, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$



294. ábra A frekvencia tartománybéli mintavétel hatása a diszkrét idő tartományra

Ha viszont a jelre nem teljesül a fenti időhatároltság, akkor a jel replikánsai átlapolódnak és bekövetkezik az aliasing jelenség.

Fontos még azt is megjegyezni, hogy a jel N pontos DFT-je arányos a jel spektrumának $2\pi/N$ frekvencia közönként történő mintavételezésével, ami

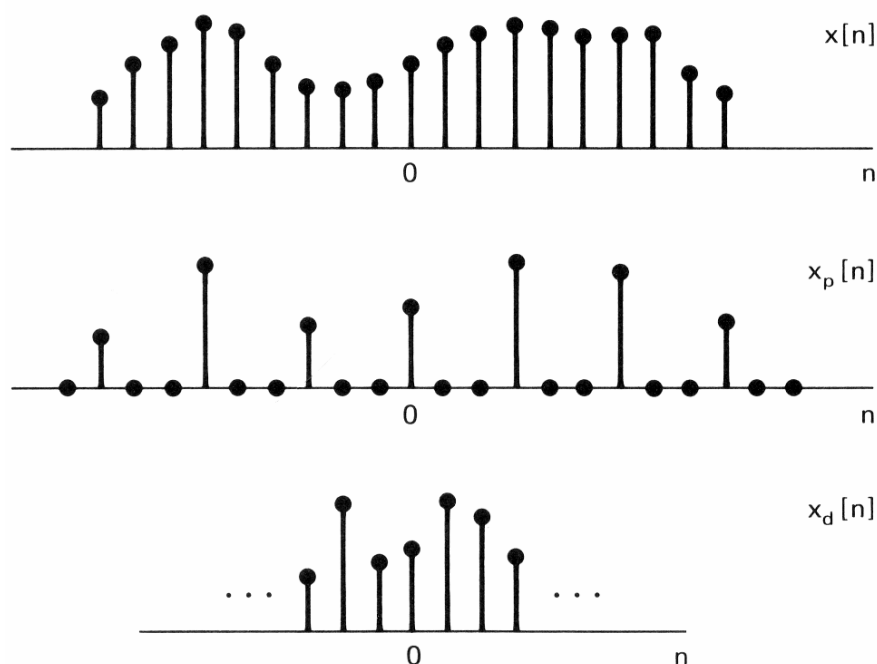
következménye annak, hogy a frekvencia mintavételezett jel nulla és N között egyenlő az eredeti jellel.

7.7. Diszkrét idejű tizedelés és interpoláció (Discrete-Time Decimation and Interpolation)

A gyakorlatban igen sok alkalmazás használja a diszkrét mintavételezési technikát, főleg a jel multiplexálás és a szűrő tervezés területén. Ezen alkalmazások számára általában nem gazdaságos az $x_p[n]$ mintavételezett jel továbbítása mivel annak meghatározott részei zérus értékűek, így mivel úgyis tudott, hogy csak a mintavételezési helyeken vesz fel értéket a jel, ezért csupán ezeket az értékeket továbbítják. Ebből kifolyólag a mintavételezett jelet egy $x_d[n]$ szekvenciával reprezentálják, ami csupán az $x_p[n]$ jel minden N -dik, azaz $x[n]$ minden N -dik értékét tartalmazza ha a mintavételezés N időközzel történt, vagyis

$$x_d[n] = x[nN] = x_p[nN]$$

Azt a műveletet, amely során csupán minden N -edik értéket emeljük ki a jelből, mint mintát, tizedelésnek (decimation) nevezzük. Az $x[n]$, $x_p[n]$, és $x_d[n]$ jelek közti összefüggést egy példa jelre az alábbi ábra szemlélteti:



295. ábra A tizedelés és a mintavételezés kapcsolata

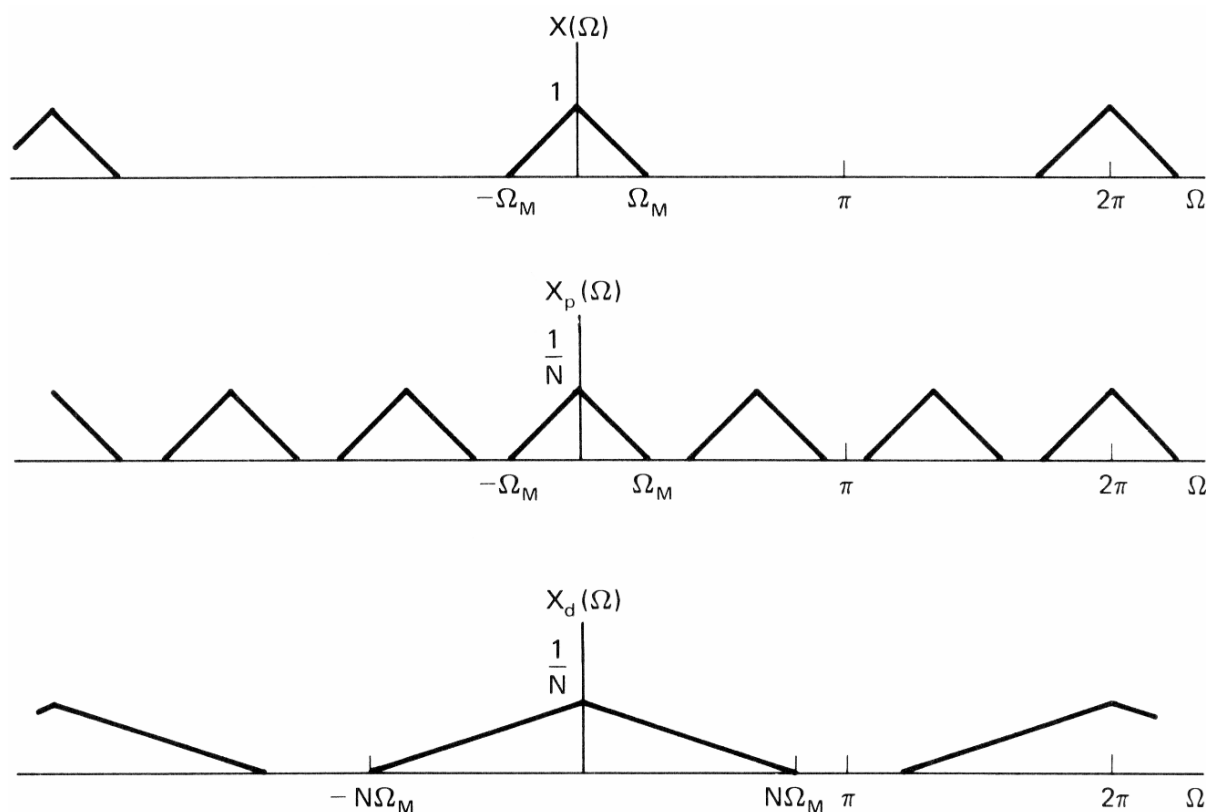
Hogy a frekvencia tartománybeli hatásait is megvizsgálhassuk a tizedelésnek, induljunk el visszafelé, azaz írjuk fel a $x_d[n]$ jel spektrumát.

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[nN] e^{-j\Omega n}$$

Mivel $x_p[n]$ zérus kivéve N egész számú többszöröseit, ezért átírhatjuk a fenti egyenletet:

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{-j\Omega n/N} = X_p\left(\frac{\Omega}{N}\right)$$

A mintavételezett jel spektruma tehát megnyúlik, skálázódik a tizedelés hatására. Azaz egyfajta frekvencia normalizáció következik be. Ezt érzékelteti a következő példajel spektrumának változása is a tizedelés hatására.



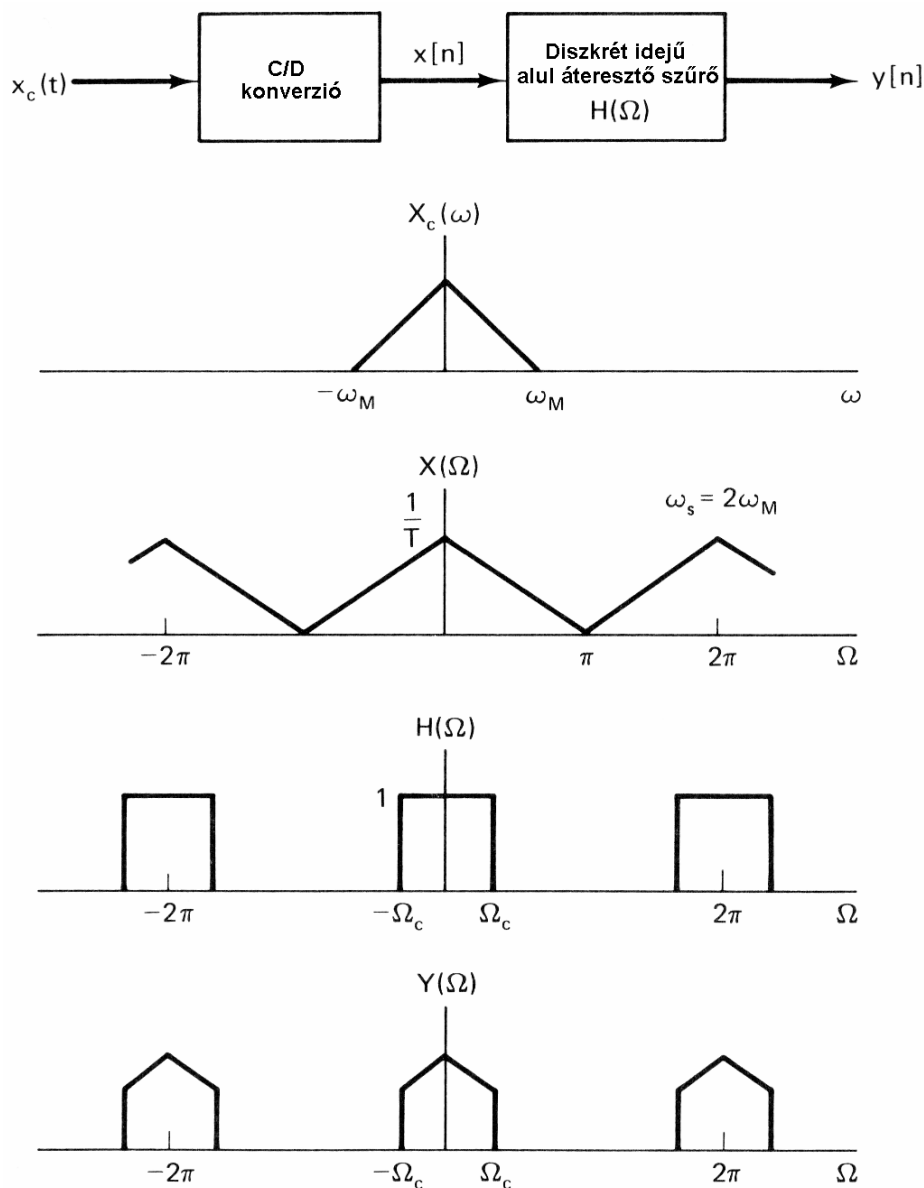
296. ábra A tizedelés hatás a spektrumra nézve

Ha az eredeti jel spektruma megfelelően sávhatárolt volt, azaz az $x_p[n]$ jel spektrumában nem jött létre átlapolódás, akkor $x_d[n]$ spektruma ugyanúgy tartalmazni fogja $X(\Omega)$ replikánsait, sőt a másolatok N szer akkora frekvenciákon fognak jelentkezni mint az $X_p(\Omega)$ spektrumban.

Ha az $x[n]$ jelet egy $x(t)$ folytonos jel mintavételezéseként nyertük, akkor a tizedelés művelete felfogható úgy mintha N -ed részére növeltük volna a mintavételezési időközt. Hogy elkerüljük emiatt a tizedelés közben esetleg jelentkező aliasing jelenséget, az $X(\Omega)$ spektrum nem foglalhatja el a teljes, egyébként a helyes mintavételezésnél lehetséges, maximális sáv szélességet. Ez viszont úgy interpretálható, hogy a mintavételezési eljárás nem volt hatékony, és túl sok mintavétel történt, így a mintavételezési időköz csökkenthető. Emiatt a folytonos jel mintavételezéséből előálló $x[n]$ szekvencia tizedelését, gyakran minta ritkításnak (down sampling) nevezzük.

Néhány alkalmazásban, a folytonos bemeneti jel mintavételezése pont annyira kis felbontású amit még a jel sáv szélessége megenged, azonban a jelfeldolgozás

során a jel sávszélessége csökkenhet, és ebből kifolyólag gazdaságtalan lesz a felbontás ilyen mértékű finomságának a használata. Erre ad példát a következő rendszer:

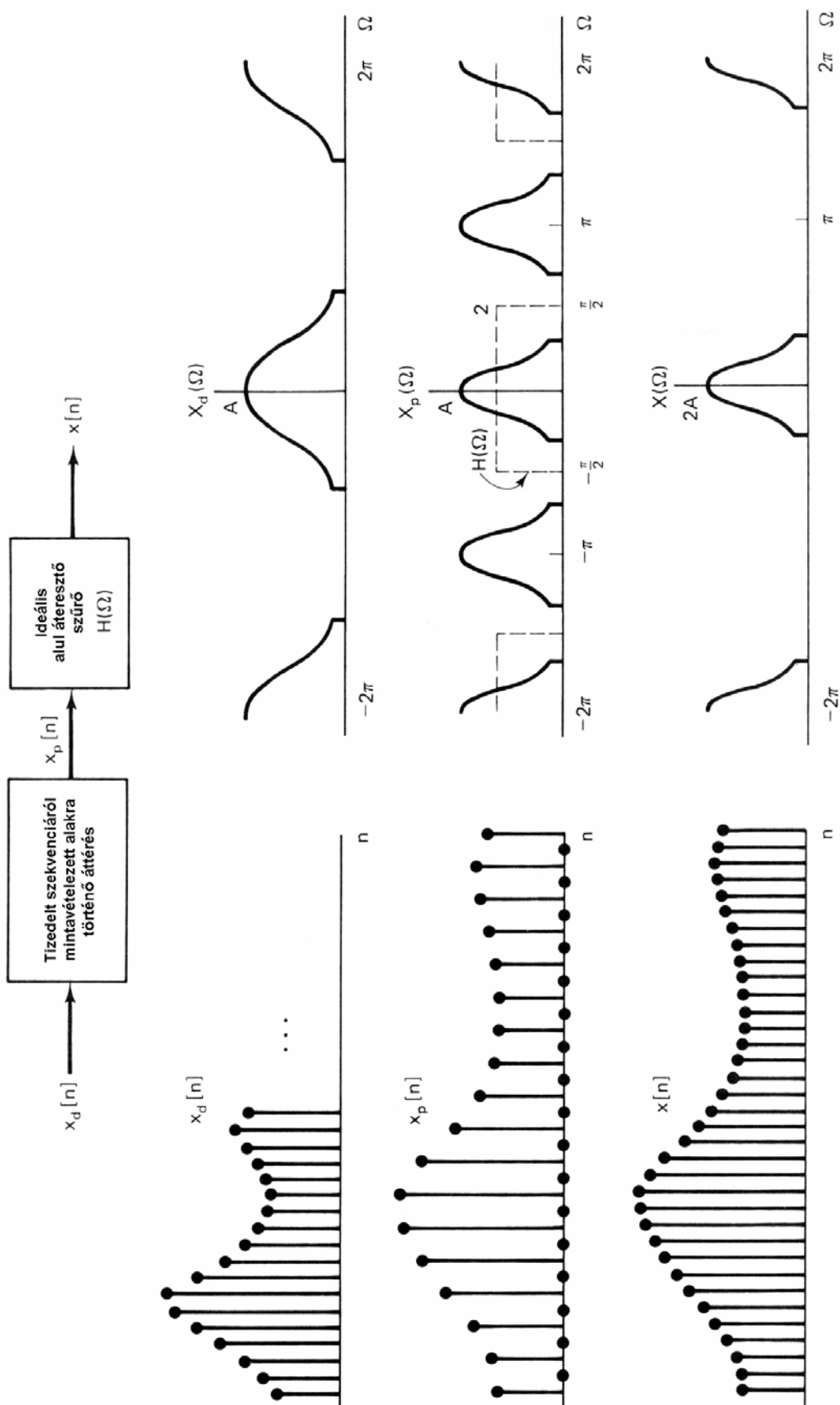


297. ábra Folytonos idejű jel amelyet eredetileg a Nyquist határon mintavételeztünk, majd diszkrét idejű szűrés után minta ritkításnak vetettük alá

Mivel a gazdaságosság a fő szempontunk, ha az nem megy a pontosság rovására, ezért a jel felbontása csökkenthető megfelelő mértékű tizedelés használatával, úgy hogy információ veszteség nem következik be.

Bár vannak alkalmazások ahol a minta ritkítás előnyös lehet, más problémáknál éppen a magasabb mintavételezési frekvenciára való konvertálása előnyösebb a jelnek. Ezt az eljárást minta dúsításnak (upsampling) vagy köztes interpolációnak nevezik. A minta dúsítás éppen a fordított eljárása a tizedelésnek. Itt éppen az $x_d[n]$ jelből indulunk ki amiből $x[n]$ -et szeretnénk meghatározni. Ezt úgy érjük el, hogy az $x_d[n]$ jelből elkészítjük a $x_p[n]$ jelet úgy, hogy $x_d[n]$ minden egyes értéke után $N-1$ nulla értéket szúrunk be a szekvenciába. Ezután az

$x_p[n]$ jelet interpoláljuk egy alul áteresztő szűrő segítségével és így előáll a dúsított $x[n]$ jel. Ezt az eljárást mutatja be a következő ábra:



298. ábra Minta dúsítás

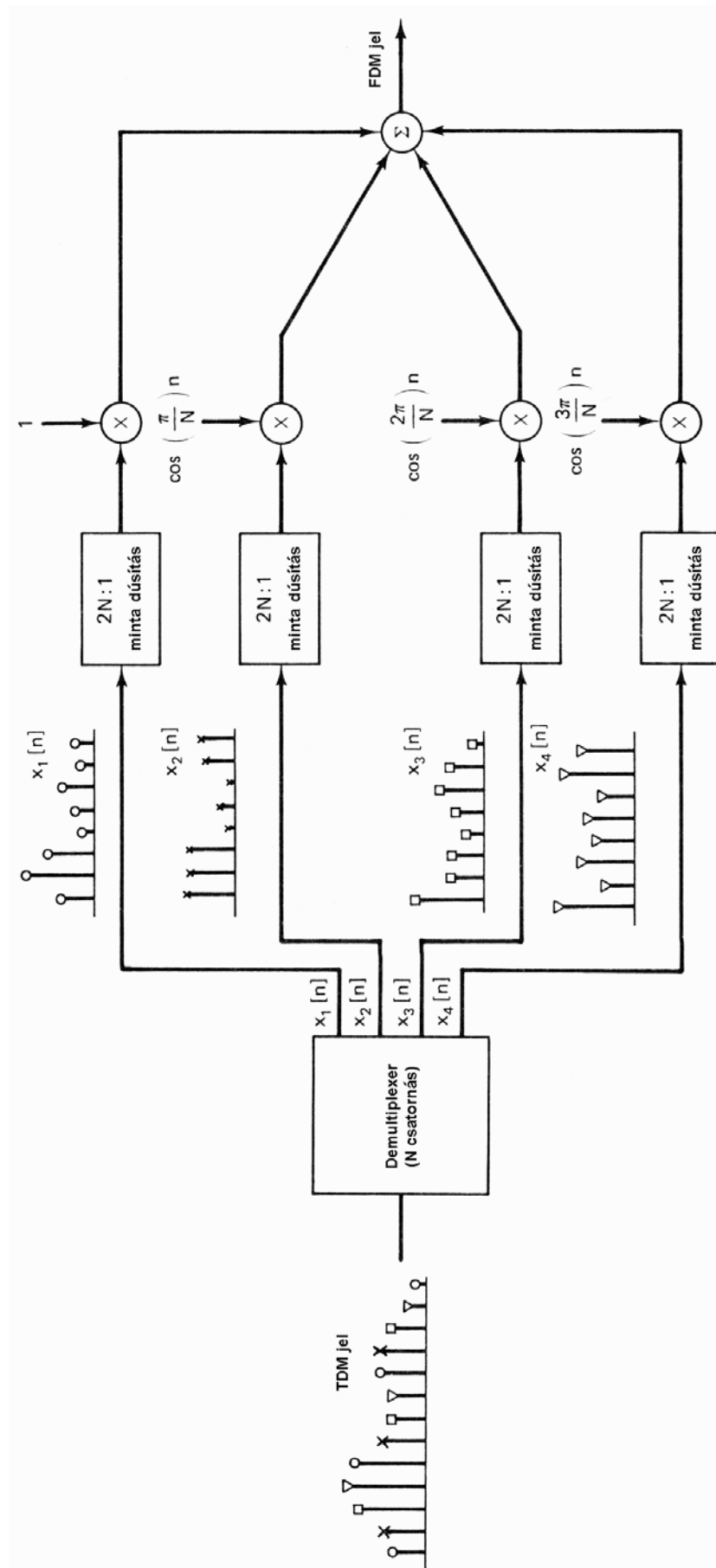
Az egyik olyan eljárás ami igényli a minta dúsítást, nem más mint a különböző szekvenciák frekvencia osztásos multiplexálása. Ha M csatornát tételezünk fel akkor szükséges, hogy mindegyik $x_i[n]$ bemeneti jel sávhatárolt legyen és, hogy:

$$X_i(\Omega) = 0, \quad \frac{\pi}{M} < |\Omega| < \pi$$

teljesüljön. Ha viszont a bementi jelek nem férnek el a számukra kijelölt sáv szélességben, akkor magasabb mintázási frekvenciára kell őket konvertálni, azaz dúsítani kell őket a multiplexálás művelete előtt.

7.7.1. Diszkrét idejű transzmoduláció (Discrete-Time Transmodulation)

A mai rendszerekben a diszkrét jelek csatornán való átvitele közben a jelek TDM (idő osztásos multiplexált) vagy FDM (frekvencia osztásos multiplexált) jelek formájában haladnak. Ezeket a jeleket aztán digitálissá alakítják, hogy a későbbi felhasználás végett tárolni lehessen őket. Azonban a feldolgozás során sokszor szükségessé válik a különböző formában multiplexált jelek felhasználása, a velük való műveletek elvégzése, amihez elengedhetetlen, hogy mindegyik jel azonos elv szerint legyen multiplexálva. Emiatt TDM-ből FDM-be, vagy vissza kell alakítani a jeleket, lehetőleg minél gazdaságosabban és gyorsabban. . Ehhez viszont kikerülhetetlen a jel demultiplexálása majd demodulációja aztán újra modulációja és multiplexálása. Ezt az eljárást hívják transzmodulációnak, vagy transzmultiplexálásnak attól függően, hogy a művelet mely lépését kívánják hangsúlyozni. Viszont digitális kommunikációs rendszerekre nézve a művelet végrehajtásához vissza kell térni folytonos időbe majd ott elvégezni a transzmodulációt és onnan diszkrétizálva az új reprezentációt kiszámolni. De ha úgyis visszatérünk a diszkrét időtartományba, miért nem végezzük el az egész transzmodulációs műveletet diszkrét időben. Erre a TDM→FDM konverzióra ad példát a következő rendszer:



299. ábra TDM-ről FDM-re transmultiplexert megvalósító rendszer

Meg kell jegyezni azonban, hogy a TDM jel demultiplexálása után mindegyik csatornát mint a dúsításnak kell alávetni hogy előkészítsük a frekvencia osztásos multiplexálást.