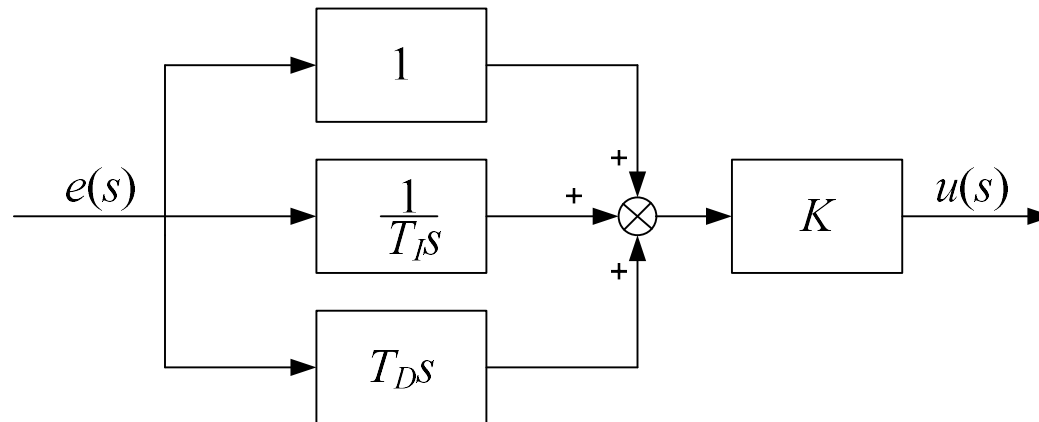


Mintavételes rendszerek szabályozása

Diszkrét PID algoritmus

- folytonos PID algoritmus
 - Arányos, integráló és deriváló tagok párhuzamos kapcsolása



- ahol

K – a közös erősítés

T_I – az integrálási időállandó

T_D – a deriválási időállandó

Diszkrét PID algoritmus

- I/O modell:

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

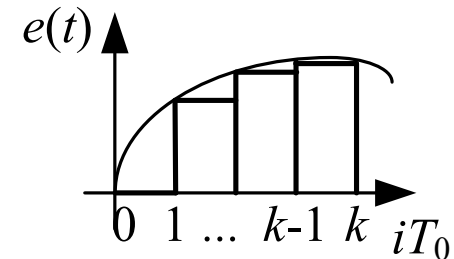
- átviteli függvény

$$G(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

Diszkrét PID algoritmus

- a folytonos algoritmus diszkretizálása
 - tagonként az időtartománybeli modell alapján
 - az átviteli függvényből táblázattal
- arányos tag: $e(t) \rightarrow e(kT_0)$, azaz a hibajel értéke az adott mintavételezési időpontban
- integráló tag:

$$\frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \rightarrow \frac{T_0}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(i)$$



azaz az integrálást a téglány szabály alapján szummázással közelítjük

Diszkrét PID algoritmus

- deriváló tag

$$T_D \frac{de(t)}{dt} \rightarrow T_D \frac{e(kT_0) - e((k-1)T_0)}{T_0}$$

azaz a deriválást két pontos különbségképzéssel közelítjük

- léteznek más, pontosabb, de bonyolultabb megoldások az integráló illetve a deriváló tagok közelítésére

Diszkrét PID algoritmus

- a diszkrét PID algoritmus I/O modellje:

$$u(kT_0) = K \left(e(kT_0) + \frac{T_0}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(iT_0) + T_D \frac{e(kT_0) - e((k-1)T_0)}{T_0} \right)$$

- ez az ún. pozíció algoritmus, mely megadja, hogy hova álljon be a végrehajtószer (pl. hány %-ra nyisson).
- z-transzformálva

$$U(z) = K \left(E(z) + \frac{T_0}{T_I} \frac{z}{z-1} E(z) + \frac{T_D}{T_0} (1 - z^{-1}) E(z) \right)$$

Diszkrét PID algoritmus

- az impulzus átviteli függvény

$$G_{DPID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K \left(1 + \frac{T_0}{T_I} \frac{z}{z-1} + \frac{T_D}{T_0} \frac{z-1}{z} \right)$$

Diszkrét PID algoritmus

- Vannak olyan beavatkozó szervek, amelyek bemenetére a pillanatnyi helyzethez képesti megváltozást kell bemenő adatként megadni. Ezt szolgáltatja a sebesség algoritmus.
- Levezetéshez írjuk fel a pozíció algoritmust a k -dik és $k-1$ -dik mintavételezési időpontra:

$$u(k) = K \left(e(k) + \frac{T_0}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + T_D \frac{e(k) - e(k-1)}{T_0} \right)$$

$$u(k-1) = K \left(e(k-1) + \frac{T_0}{T_I} \sum_{i=0}^{k-2} e(i) + T_D \frac{e(k-1) - e(k-2)}{T_0} \right)$$

Diszkrét PID algoritmus

- kivonva egymásból a két egyenletet

$$u(k) - u(k-1) = K \left(e(k) - e(k-1) + \frac{T_0}{T_I} e(k-1) + \frac{T_D}{T_0} (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) \right)$$

- ezt az egyenletet a következő alakban szokás megadni:

$$u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$$

- ahol

$$q_0 = K \left(1 + \frac{T_D}{T_0} \right) \quad q_1 = -K \left(1 - \frac{T_0}{T_I} + 2 \frac{T_D}{T_0} \right) \quad q_2 = K \frac{T_D}{T_0}$$

Diszkrét PID algoritmus

- impulzus átviteli függvény

$$(1 - z^{-1})U(z) = q_0 E(z) + q_1 z^{-1} E(z) + q_2 z^{-2} E(z)$$

$$G_{DPID}^s(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

Diszkrét PID algoritmus

- Diszkrét PID algoritmus beállítása Takahashi szerint
 - paraméterek
 - T_0 mintavételezési idő
 - T a szabályzott szakasz időállandója
 - T_h a szabályzott szakasz holtideje
 - K a szabályzó erősítése
 - T_I integrálási időállandó
 - T_D deriválási időállandó
 - legyen $\frac{T_h}{T_0} \geq 1$

Diszkrét PID algoritmus

- beállítandó paraméterek

- erősítés

$$K = \frac{1.2T}{T_h + T_0} - \frac{0.3T \cdot T_0}{(T_h + T_0 / 2)^2}$$

- integrálási időállandó

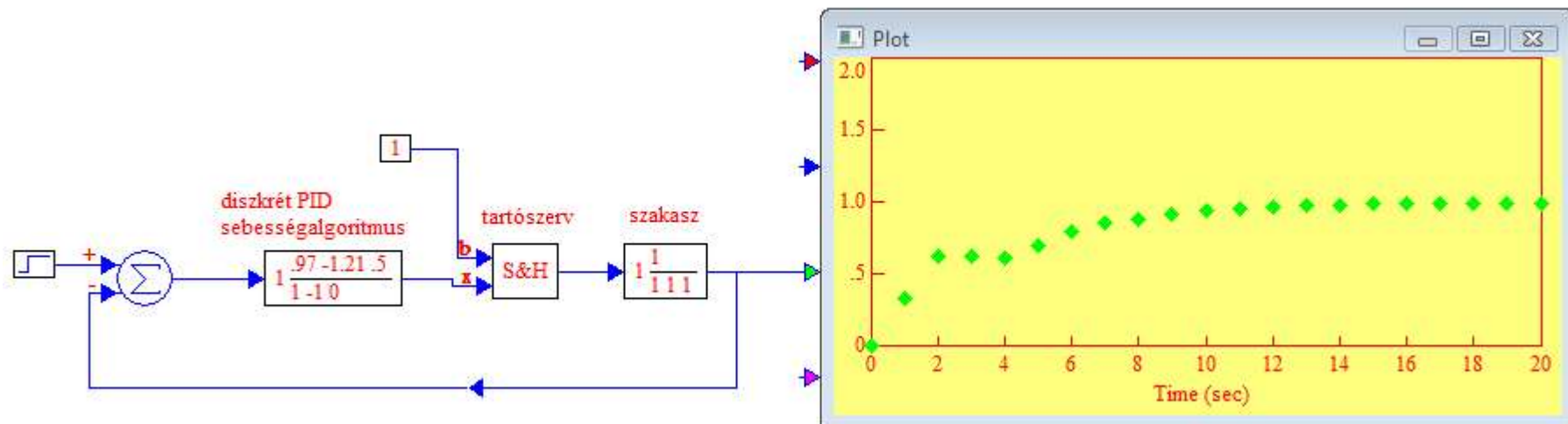
$$\frac{T_0}{T_I} = \frac{0.6T \cdot T_0}{K(T_h + T_0 / 2)^2}$$

- deriválási időállandó

$$\frac{T_D}{T_0} = \frac{0.5T}{KT_0}$$

Diszkrét PID algoritmus

- a példa szimulációja

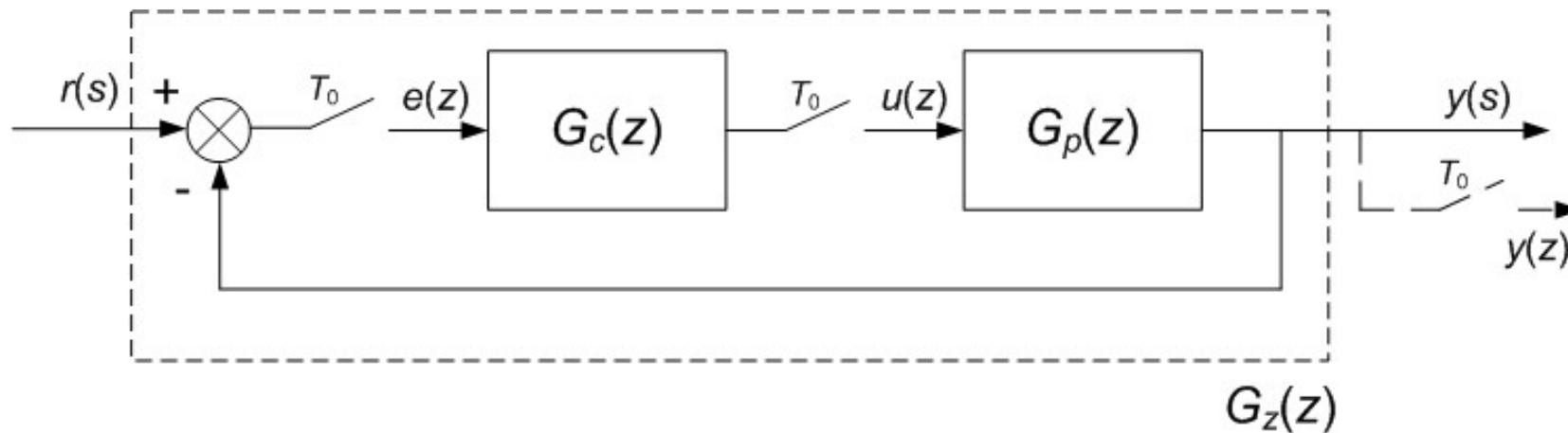


Deadbeat algoritmus

- Véges beállású szabályozási algoritmus
- Cél: a szabályozott jellemző véges, előre meghatározott számú mintavételezési periódus után érje el az állandósult állapotot adott, előírt változású alapjel vagy zavaró jel esetén
az alsó szintű kör a felső szint utasításait minimális idő alatt teljesítse

Deadbeat algoritmus

- A mintavételezett, zárt szabályozási kör:



- az eredő impulzus átviteli függvény:

$$G_z(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{G_c(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_p(z)}$$

Deadbeat algoritmus

- a szabályozó impulzus átviteli függvénye:

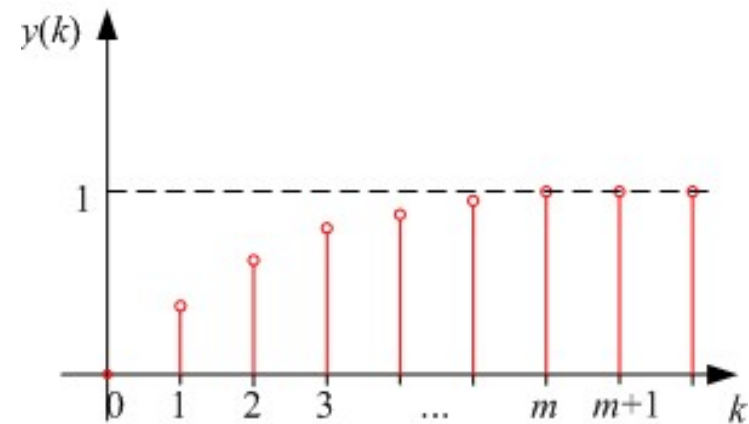
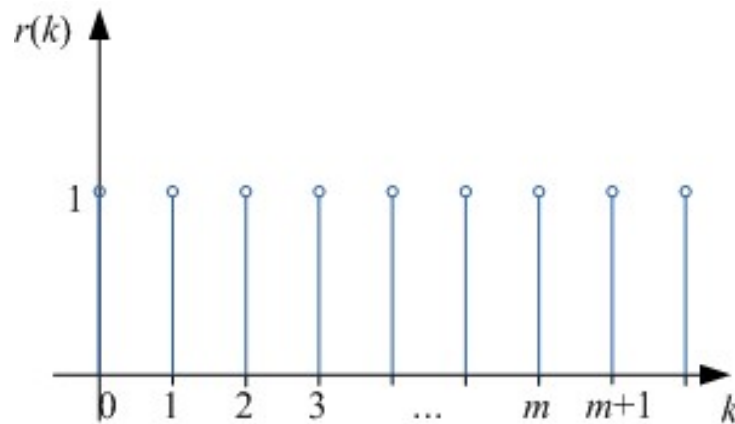
$$G_c(z) = \frac{1}{G_p(z)} \cdot \frac{G_z(z)}{1 - G_z(z)}$$

Deadbeat algoritmus

- legyen az alapjel: $r(t) = 1(t) \quad r(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

- a kimenet:

$$y(z) = y(0)z^0 + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + 1(z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots)$$



Deadbeat algoritmus

- A megfelelő $y(k)$ kimenő jel sorozatot csak olyan $u(k)$ beavatkozó jel sorozat hozhatja létre, amely m mintavételezési ciklusidő alatt szintén stacionárius értékre áll be:

$$u(z) = u(0)z^0 + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \dots + u(m)(z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots)$$

Deadbeat algoritmus

- A zárt körre vonatkozó összefüggés:

$$\begin{aligned}\frac{y(z)}{r(z)} &= (1 - z^{-1})(y(0)z^0 + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots) = \\ &= y(1)z^{-1} + (y(2) - y(1))z^{-2} + \dots + (1 - y(m-1))z^{-m} + (1 - 1)z^{-(m+1)} + \dots = \\ &= P(z) = p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots + p_mz^{-m}\end{aligned}$$

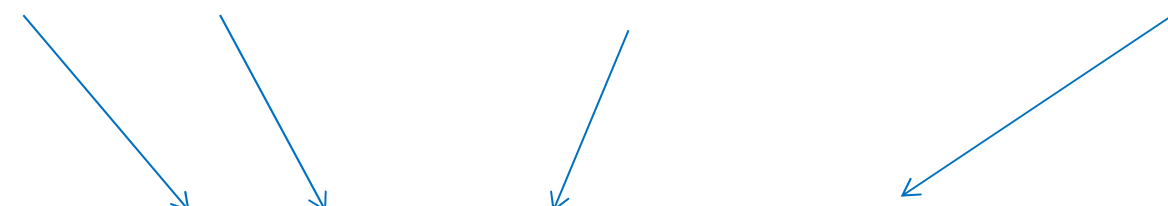
Diagram illustrating the derivation of the polynomial $P(z)$ from the closed-loop transfer function. Blue arrows indicate the mapping of terms:

- $y(1)z^{-1}$ maps to p_1z^{-1}
- $(y(2) - y(1))z^{-2}$ maps to p_2z^{-2}
- $(1 - y(m-1))z^{-m}$ maps to p_mz^{-m}
- $(1 - 1)z^{-(m+1)}$ maps to 0

Labels $y(m)$ and $y(m+1)$ are placed near the terms $(1 - y(m-1))z^{-m}$ and $(1 - 1)z^{-(m+1)}$ respectively, with arrows pointing to the y terms.

Deadbeat algoritmus

- Hasonló módon írjuk fel a következő összefüggést:

$$\begin{aligned}\frac{u(z)}{r(z)} &= (1 - z^{-1}) \left(u(0)z^0 + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \dots + u(m) \left(z^{-m} + z^{-(m+1)} + \dots \right) \right) = \\ &= u(0) + (u(1) - u(0))z^{-1} + (u(2) - u(1))z^{-2} + \dots + (u(m) - u(m-1))z^{-m} = \\ &= Q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}\end{aligned}$$


Deadbeat algoritmus

- Belátható, hogy

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1 = y(1) + y(2) - y(1) + y(3) - y(2) + \dots + y(m) - y(m-1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m q_i &= u(m) = u(0) + u(1) - u(0) + u(2) - y(1) + \dots + u(m) - u(m-1) = \\ &= \frac{1}{K} = \frac{\sum a_i}{\sum b_i} \quad \left(K = \frac{y_\infty}{u_\infty} \right) \end{aligned}$$

Deadbeat algoritmus

- Belátható, hogy

$$G_z(z) = P(z) \quad G_p(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{y(z)/r(z)}{u(z)/r(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

- így a szabályozó impulzus átviteli függvénye:

$$G_c(z) = \frac{1}{G_p(z)} \frac{G_z(z)}{1 - G_z(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} \frac{P(z)}{1 - P(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}$$

Deadbeat algoritmus

- polinom alakban

$$G_c(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - \dots - p_m z^{-m}}$$

ahol az együtthatók $q_0 = \frac{1}{\sum b_i} = u(0)$

$$q_1 = a_1 q_0$$

$$p_1 = b_1 q_0$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$q_m = a_m q_0$$

$$p_m = b_m q_0$$

azaz

$$G_c(z) = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1})}$$

Deadbeat algoritmus

- Probléma: $u_0 = \frac{1}{\sum b_i}$

azaz az első beavatkozó jel nem realizálható.

- Megoldás: korlátozzuk ennek értékét, de ekkor a beállási idő egy periódussal nő.
- Gyakorlati szabályok:

$$u(0) \approx u(1) \quad u(0) \text{ ne legyen kisebb, mint } u(1)$$

$$T_0 \geq 0,18T_{95} \quad \text{ha nincs korlát } u(0)\text{-ra}$$

$$T_0 \geq 0,11T_{95} \quad \text{ha van korlát } u(0)\text{-ra}$$

T_{95} 95%-os beállási idő

Holt idős rendszerek

- technológiából származó holt idő
 - fizikai folyamatok véges sebessége (anyagok szállítása, áramlása)
- információ átadásból származó holt idő
 - műszerek, érzékelők védelme
- el kell dönteni, hogy lényeges-e a figyelembe vétele

Holt idősz rendszerek

- Holt idősz rendszerek leírása

$$G_h(s) = G(s)e^{-T_h s}$$

ahol T_h a szakasz holtideje

- Frekvenciatartományban

- amplitúdó:

$$|e^{-j\omega T_h}| = |\cos \omega T_h - j \sin \omega T_h| = 1$$

- fázis

$$\angle e^{-j\omega T_h} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\sin \omega T_h}{\cos \omega T_h} \right) = -\omega T_h$$

azaz a holtidősz tagnak nincs hatása az amplitúdóra, de a frekvenciával arányos fáziskésést okoz.

Holt idős rendszerek

- holt idő hatása a Nyquist és Bode diagramon
 - holtidős tag Nyquist diagramja: egység sugarú kör, egyszeri körüljárás $2\pi/T_h$ frekvencia növekedésnek felel meg
 - holtidős tag Bode diagramja: egységnyi amplitúdó miatt az amplitúdó görbe a frekvencia tengelyen fut, míg a fázis görbe az egyenes arányosságnak és a logaritmikus léptékű ábrázolásnak megfelelően alakul
 - holtidős szakasz esetében a holtidő mentes görbét az egység vektorral kell szorozni és ωT_h fáziskésést hozzáadni

Holt idős rendszerek

- Időtartományban az analitikus elemzés nem egyszerű, általában az alábbi sorbafejtéseket alkalmazhatjuk:

$$e^{-Ts} = 1 - Ts + \frac{(Ts)^2}{2!} - \frac{(Ts)^3}{3!} + \dots$$

vagy

$$e^{-Ts} = \frac{1}{e^{Ts}} = \frac{1}{1 + Ts + \frac{(Ts)^2}{2!} + \frac{(Ts)^3}{3!} + \dots}$$

így az operátor tartománybeli közelítő alak:

$$G_h(s) = 1 - T_h s \quad \text{vagy} \quad G_h(s) = \frac{1}{1 + T_h s}$$

Holt idős rendszerek

- Holtidős tag gyökhelygörbe vizsgálata
 - az elméleti alak a végtelen sok pólus miatt nehezen értelmezhető
 - konkrét holtidős szakasz esetében:

$$G(s)G_h(s) = \frac{K e^{-T_h s}}{(s+1)(s+2)}$$

a szögfeltétel kielégítése:

$$\angle(s+1) + \angle(s+2) - \angle e^{-T_h s} = l\pi \quad l = 1, 3, \dots$$

$$\angle e^{-T_h s} = \angle e^{-\sigma s} - \angle e^{-j\omega T_h} =$$

$$= 0^\circ + \angle(\cos \omega T_h - j \sin \omega T_h) = -\omega T_h$$

Dahlin algoritmus

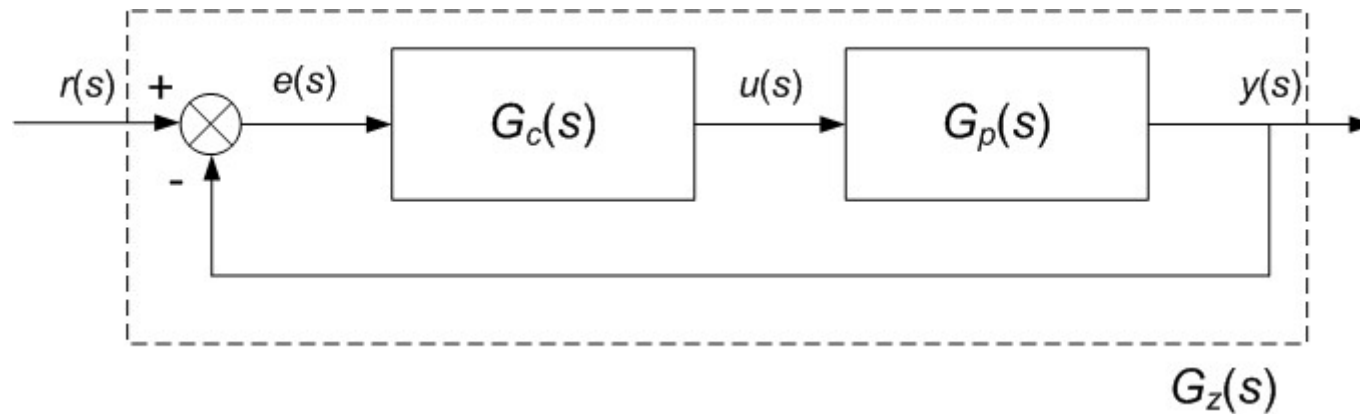
- Cél: adott átviteli függvénnyel rendelkező, holt idős szakaszt tartalmazó, mintavételes zárt szabályozási körhöz szabályozó illesztése
- A szabályozási rendszer alsó szintjén legyen a szabályzó kör eredő átviteli függvénye:

$$G_z(s) = \frac{e^{-sT_h}}{\tau s + 1}$$

ahol τ a zárt kör időállandója, T_h a szakasz holtideje

Dahlin algoritmus

- A folyamatos működésű szabályozó kör

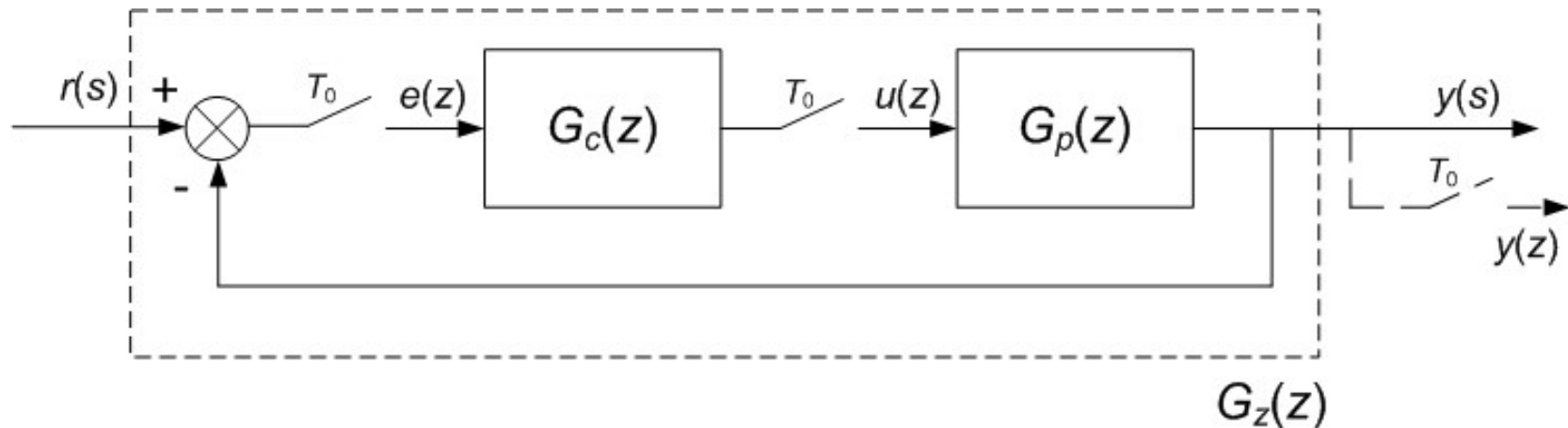


$$G_z(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} e^{-sT_h} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} s + 1} e^{-sT_h}$$

ahol $\lambda = 1/\tau$ – hangolási tényező

Dahlin algoritmus

- A mintavételezéses szabályozási kör



$$G_z(z) = \frac{G_c(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_p(z)}$$

ahol T_0 – mintavételezési időállandó

Dahlin algoritmus

- **Feladat:** határozzuk meg a szabályozó impulzus átviteli függvényét ($G_c(z)$) adott zárt kör impulzus átviteli függvényhez ($G_z(z)$), ha ismerjük a szakasz impulzus átviteli függvényét ($G_p(z)$).

$$G_c(z) = \frac{1}{G_p(z)} \cdot \frac{G_z(z)}{1 - G_z(z)}$$

Dahlin algoritmus

- Az zárt kör átviteli függvényének közelítése:

$$G_z(s) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}s + 1} e^{-sT_h} \qquad G_z(z) = \frac{(1 - e^{-\lambda T_0}) \cdot z^{-1}}{1 - e^{-\lambda T_0} z^{-1}} z^{-N}$$

$$N = \frac{T_h}{T_0}$$

Dahlin algoritmus

- Legyen a szakasz átviteli illetve impulzus átviteli függvénye:

$$G_p(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} e^{-s T_h}$$

$$G_p(z) = \frac{K \left(1 - e^{-\frac{T_0}{T_1}} \right) z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T_0}{T_1}} z^{-1}} z^{-N} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} z^{-N}$$

$$\text{ahol} \quad a_1 = -e^{-\frac{T_0}{T_1}}, \quad b_1 = K \left(1 - e^{-\frac{T_0}{T_1}} \right) \quad N = \frac{T_h}{T_0}$$

Dahlin algoritmus

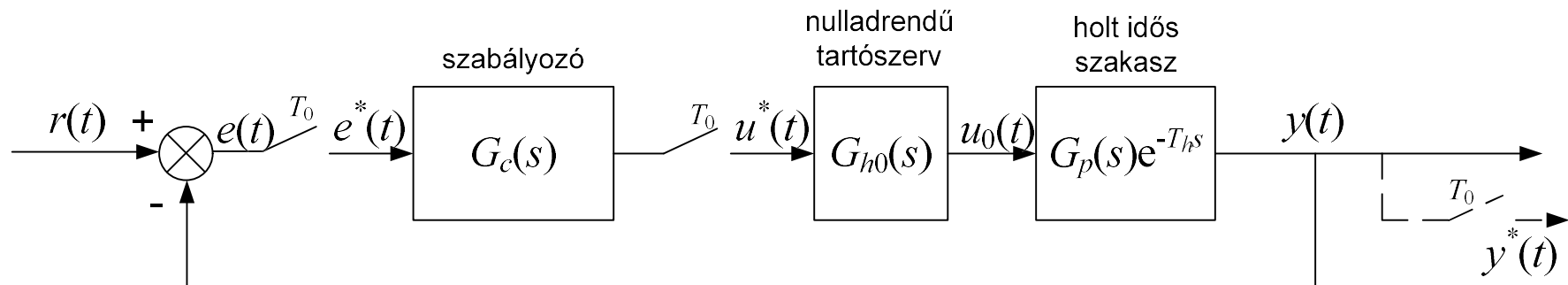
- Behelyettesítve a $G_z(z)$ és $G_p(z)$ impulzus átviteli függvényeket a szabályozóra kapott összefüggésbe:

$$\begin{aligned} G_c(z) &= \frac{1}{G_p(z)} \cdot \frac{G_z(z)}{1 - G_z(z)} = \frac{1 - e^{-\frac{T_0}{T_1}} z^{-1}}{K \left(1 - e^{-\frac{T_0}{T_1}} \right) z^{-1} z^{-N}} \cdot \frac{\frac{(1 - e^{-\lambda T_0}) z^{-1} z^{-N}}{1 - e^{-\lambda T_0} z^{-1}}}{1 - \frac{(1 - e^{-\lambda T_0}) z^{-1} z^{-N}}{1 - e^{-\lambda T_0} z^{-1}}} = \\ &= \frac{(1 + a_1 z^{-1})(1 - e^{-\lambda T_0})}{b_1 (1 - e^{-\lambda T_0} z^{-1} - (1 - e^{-\lambda T_0}) z^{-N-1})} \end{aligned}$$

$$\text{ahol } a_1 = -e^{-\frac{T_0}{T_1}}, \quad b_1 = K \left(1 - e^{-\frac{T_0}{T_1}} \right) \quad N = \frac{T_h}{T_0} \quad \lambda = \frac{1}{\tau}$$

Szabályozás Smith-prediktorral

- Holtidős szakaszok szabályozására alkalmazható módszer
- Tekintsük az alábbi szabályozó kört:

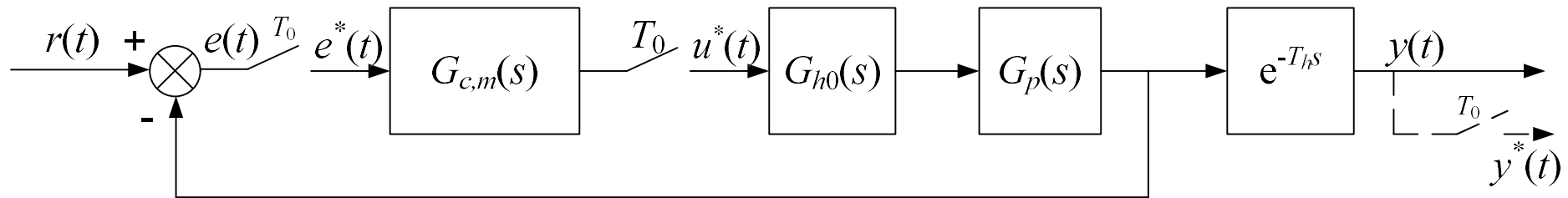


- az eredő impulzusátviteli függvény

$$G_e(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{z^{-N} G_c(z) G_{h0} G_p(z)}{1 + z^{-N} G_c(z) G_{h0} G_p(z)} \quad N = \frac{T_h}{T_0}$$

Szabályozás Smith-prediktorral

- a szabályozó megfelelő módosításával alakítsuk át a kört a következő módon:



- ekkor a módosított rendszer impulzusátviteli függvénye:

$$G_{e,m}(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{G_{c,m}(z)G_{h0}G_p(z)}{1 + G_{c,m}(z)G_{h0}G_p(z)} z^{-N}$$

Szabályozás Smith-prediktorral

- Az eredeti illetve az átalakított rendszer kimenetének meg kell egyeznie, így

$$\frac{G_c(z)}{1 + z^{-N} G_c(z) G_{h0} G_p(z)} = \frac{G_{c,m}(z)}{1 + G_{c,m}(z) G_{h0} G_p(z)}$$

ebből

$$G_c(z) = \frac{G_{c,m}(z)}{1 + (1 - z^{-N}) G_{c,m}(z) G_{h0} G_p(z)}$$

Szabályozás Smith-prediktorral

- A módosított szabályozó kör felépítése:

