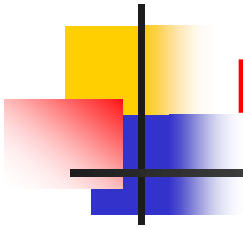


Statisztika - bevezetés

Gerzson Miklós

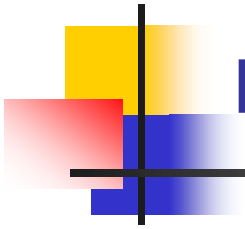
Pannon Egyetem, Villamosmérnöki és Információs
Rendszerek Tanszék

2019/2020 II. félév



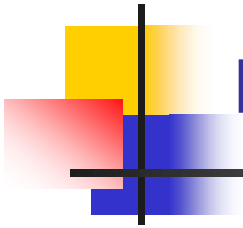
Bevezetés

- Véletlen jelenség fogalma
  - jelenséget okok bizonyos rendszere hozza létre
  - ha mindegyik figyelembe vehető → egyértelmű leírás
  - általában ez
    - lehetetlen vagy nehezen megoldható
    - célszerűtlen



Bevezetés

- Sokaság
  - a valamennyi elemet tartalmazó halmaz
  - tulajdonságait akarjuk meghatározni
  - típusai
    - véges sokaság
    - megszámlálhatóan végtelen sokaság
    - végtelen sokaság



Bevezetés

- Minta
  - a teljes sokaság még véges esetben is nehezen kezelhető
  - helyette mintát veszünk
    - véges sokaság: selejtek száma adott számú termékből
    - megszámlálhatóan végtelen sokaság: adott számú műszakban a leállások száma
    - végtelen sokaság: adott számú mérés elvégzése
  - minta tulajdonságai alapján következtetünk a teljes sokaságra

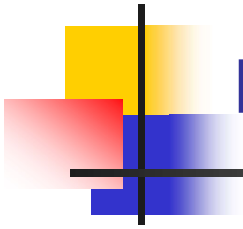
Mintavétel szabályai

- a „jó” minta sajátosságai
  - véletlenszerű
  - reprezentatív
  - megfelelően nagy
  - külső változók által ellenőrzött

Mintavétel szabályai

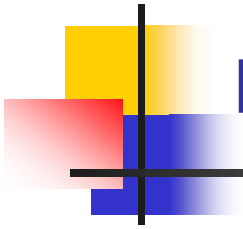
- véletlenszerű:
  - a sokaság bármely eleme minta lehet
  - $\neq$ vaktában történő mintavétel
  - tévhit: jelenségek előfordulási sorrendje véletlenszerű

- reprezentatív
  - nehezen teljesíthető
  - véletlenszerűség fontosabb



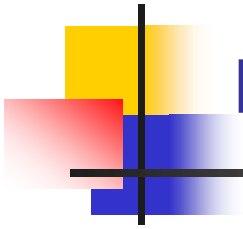
Mintavétel szabályai

- elegendően nagy
  - cél: általánosítás
  - de nem „ész nélkül”!
  - befolyásoló tényezők
    - eltérés nagysága
    - a vizsgált változó dinamikája
    - alkalmazott statisztikai módszer
    - mérésnél lehetséges hibák
    - költség



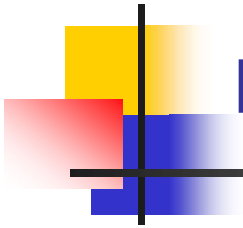
Mintavétel szabályai

- független változó által ellenőrzött
  - hasonló egyedek csoportja
    - „fehér egerek”
    - előzetes vizsgálatok
  - kontrol csoport
    - csoportok homogenitása
  - matematikai kompenzáció más tényezők figyelembe vételére
    - kovariancia analízis
  - egyforma méretű minták



Bevezetés

- Valószínűségi változó
  - olyan mennyiségek leírására, amelyek értéke nem állandó, de meghatározható, hogy mekkora valószínűséggel esnek adott határok közé
  - diszkrét valószínűségi változó
    - értékét véges vagy megszámlálhatóan végtelen elemű készletből veszi fel
  - folytonos valószínűségi változó
    - értékét valós számok folytonos sokaságából veszi fel



Bevezetés

- Diszkrét valószínűségi változók jellemzése
  - egyszerűbb eset – két lehetséges kimenetel
  - bonyolultabb eset – több lehetséges kimenetel
    - események számának megjelenítése osztályokba sorolással
    - egyértelmű és összehasonlítható besorolás
    - egy adott osztályba tartozó elemek száma arányos az adott intervallumba esés valószínűségével → *relatív gyakorisági index*

Bevezetés

- relatív gyakorisági index megadása:

$$\text{relatív gyakoriság}_i = \frac{\text{elemszám az } i\text{–dik osztályban}}{\text{a minta teljes elemszáma}}$$

azaz annak valószínűsége, hogy az eredmény vagy tetszőleges kiválasztott mintaelem melyik osztályba esik:

$$p(x_i) = P\left(x_{i_{min}} < x_i < x_{i_{max}}\right)$$

ahol $p(x)$ lesz a (diszkrét) sűrűségfüggvény.

Bevezetés

- A $p(x)$ sűrűségfüggvény tulajdonságai:
  - $p(x_i) \geq 0 \quad \forall x_i$-re
  - $\Sigma\, p(x_i) = 1.$

- Kumulált/összegzett valószínűségek értelmezése:

$$F(k) = P(x \leq k) = \sum_{x_i \leq k} p(x_i)$$

ez lesz a (diszkrét) eloszlásfüggvény.

Folytonos valószínűségi változók

- Folytonos valószínűségi változók
  - diszkrét v.v. esetében több mérést végzünk / több mintát veszünk, akkor az osztályba sorolás finomítható az osztályszélesség csökkentésével
  - határátmenetben $\Delta x \to 0$
  - azaz a diszkrét valószínűségi változó a valós számok közül tetszőleges értéket vehet fel, azaz folytonos valószínűségi változóként értelmezhető

Folytonos valószínűségi változók

- folytonos valószínűségi változó
  - értelmezése:

$$P(a < x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

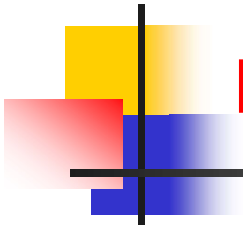
ahol $f(x)$ a (folytonos) sűrűségfüggvény.

  - tulajdonságai:
    - $P(x=x_0) = 0$ ahol x_0 tetszőleges érték, továbbá az egyezés nem lehetetlen esemény
    - $f(x) \geq 0 \quad -\infty < x < \infty$
    - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Folytonos valószínűségi változók

- Folytonos eloszlásfüggvény
  - a diszkrétről a folytonos esetre történő áttérés elve hasonló a sűrűségfüggvényhez
  - $\Delta x \to 0$ határátmenetnél a folytonos eloszlás függvény értelmezése:

$$F(x_k) = P(x \leq x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} f(x)dx$$



Paraméterek és statisztikák

- Sokaság leírása a sűrűség- és eloszlás- függvényekkel
- Sokaság ismerete: a sűrűség- és az eloszlás- függvény alakjának és paramétereinek ismerete
- Sűrűség- és eloszlásfüggvények jellemzése paraméterekkel (konstansok, momentumok)
- Sokaság jellemzése mintavételezéssel
- Minta jellemzése statisztikával / jellemzőkkel
- Paraméterek jellemzése statisztikával

Paraméterek és statisztikák

- Várható érték (paraméter)
  - folytonos v.v. $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu$
  - diszkrét v.v. $E(x) = \sum_{i} x_i p(x_i)$
  - statisztikája (mintabeli megfelelője) $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$

Paraméterek és statisztikák

- várható érték tulajdonságai
  - $E\left(\phi(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx$
  - $E(cx) = cE(x)$
  - $E(c) = c$
  - $E(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = E(x_1) + E(x_2) + \ldots + E(x_n)$

Paraméterek és statisztikák

- számtani átlag tulajdonságai
  - várható érték

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}[E(x_1) + \cdots + E(x_n)] = \frac{1}{n}[nE(x)] = \mu$$

  - variancia

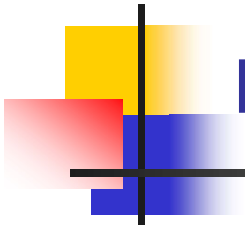
$$Var(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}[Var(x_1) + \cdots + Var(x_n)] = \frac{1}{n^2}[nVar(x)] = \frac{Var(x)}{n}$$

Paraméterek és statisztikák

- Medián - μ_e
  - azaz az érték, amelynél nagyobbat és kisebbet egyforma valószínűséggel vesz fel a valószínűségi változó, azaz

$$F(\mu_e) = 0{,}5$$

  - tapasztalati medián a nagyság szerint sorba rendezett elemek közül a középső (páratlan számú elemnél) vagy a középső kettő átlaga (páros számú elemnél)



Paraméterek és statisztikák

- Módusz
  - a valószínűségi változó legnagyobb valószínűségű értéke – a sűrűségfüggvény maximum helye (több módusz is lehet)
  - tapasztalati módusz: a legnagyobb gyakoriságú osztály (a legtöbb elemet tartalmazó osztály) osztályindexe

Paraméterek és statisztikák

- Variancia (paraméter) – elméleti szórásnégyzet
  - az adatok „térbeli” elhelyezkedésének jellemzésére
  - megadása:
    - folytonos v.v.

$$Var(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(x)]^2 f(x) dx = E[(x-\mu)^2] = \sigma^2 = D^2(x)$$

    - diszkrét v.v.

$$Var(x) = \sum_i [x_i - E(x)]^2 p(x_i) = E[(x-\mu)^2]$$

Paraméterek és statisztikák

- korrigált tapasztalati szórásnégyzet (statisztika)

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- variancia tulajdonságai
  - $Var(cx) = c^2 Var(x)$
  - $Var(x_1+x_2+\ldots+x_n) = Var(x_1)+ Var(x_2)+\ldots+ Var(x_n)$ független $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valószínűségi változók esetén

Diszkrét eloszlások

- Binomiális eloszlás
  - akkor alkalmazzuk, ha a bekövetkező esemény kétféle lehet (pl. bináris döntések)
  - sűrűség függvény

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

    - n – a teljes elemszám
    - x – a kérdéses esemény
    - p – a bekövetkezés valószínűsége

Diszkrét eloszlások

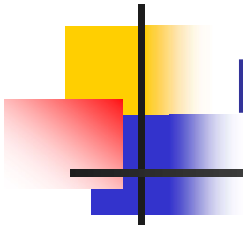
- várható értéke

$$E(x) = np$$

- varianciája

$$Var(x) = np(1\text{-}p)$$

- a mintavétel visszatevéssel történik
- gyakorlati alkalmazások bizonyos eseteinél nincs visszatevés, ilyenkor közelítésként megfelelő, ha $n << N$, azaz a vizsgált mintaszám sokkal kisebb, mint a teljes sokaság elemszáma



Diszkrét eloszlások

- Poisson-eloszlás
  - ritka események modellezésére
  - alkalmazási feltételei
    - bármely egységben előforduló esemény független legyen a többi egységbelitől
    - az esemény bekövetkezésének valószínűsége bármely egységben azonos és arányos az egység méretével
    - annak valószínűsége, hogy két vagy több előfordulás következik be, az egység méretének csökkenésével nullához tart

Diszkrét eloszlások

- ha a binomiális eloszlásnál a p bekövetkezési valószínűség igen kicsi, az n elemszám igen nagy, de $np=\lambda$ konstans értékkel, akkor Poisson- eloszlást kapunk
- sűrűségfüggvénye:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

- várható értéke, varianciája:

$$E(x) = Var(x) = \lambda$$

Folytonos eloszlások – normális eloszlás

- Normális eloszlás
  - ha sok, egymástól független, egyenként kis hatású tényező összeadódik (pl. véletlen mérési hiba)
  - sűrűségfüggvény

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

  - eloszlásfüggvény

$$F(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Normális eloszlás

- várható érték

$$E(x) = \mu$$

- variancia

$$Var(x) = \sigma^2$$

- szokásos jelölés

$$N(\mu, \sigma^2)$$

Normális eloszlás

- Normalizált (standardizált) normális eloszlás – u-eloszlás
  - legyen u a következő valószínűségi változó

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

  - u paraméterei

$$E(u) = E\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{E(x) - \mu}{\sigma} = 0$$

$$Var(u) = Var\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} Var(x) = 1$$

Normális eloszlás

- ennek alapján u sűrűségfüggvénye

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}}$$

- azaz nem szerepelnek a paraméterek a sűrűség-függvényben, így az értékek megadhatók táblázatosan
- u-eloszlás táblázata

Normális eloszlás

- a normalizált normális eloszlás segítségével annak valószínűsége, hogy a $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású x valószínűségi változó nem halad meg egy adott a értéket:

$$P(x \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{u_a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} dx = F(u_a)$$

ahol $$u_a = \frac{a - \mu}{\sigma}$$

- példa

Normális eloszlás

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169

Paraméterek és statisztikák

- számtani átlag tulajdonságai
  - várható érték

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}[E(x_1) + \cdots + E(x_n)] = \frac{1}{n}[nE(x)] = \mu$$

  - variancia

$$Var(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}[Var(x_1) + \cdots + Var(x_n)] = \frac{1}{n^2}[nVar(x)] = \frac{Var(x)}{n}$$

  - példa

Centrális határeloszlás tétele

- Centrális határeloszlás tétele
  - bármilyen eloszlású sokaságból vett minták számtani középértéke közelítőleg normális eloszlást követ az eredeti eloszlás várható értéke körül, varianciája pedig σ^2/n;
  - az $\overline{x}$ $N(\mu, \sigma^2/n)$ eloszlású v.v., akkor az

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

    $N(0, 1)$ eloszlású.
  - ha az eredeti eloszlás szimmetrikus, akkor már 4 elemű mintára is jó a közelítés

χ^2 - eloszlás

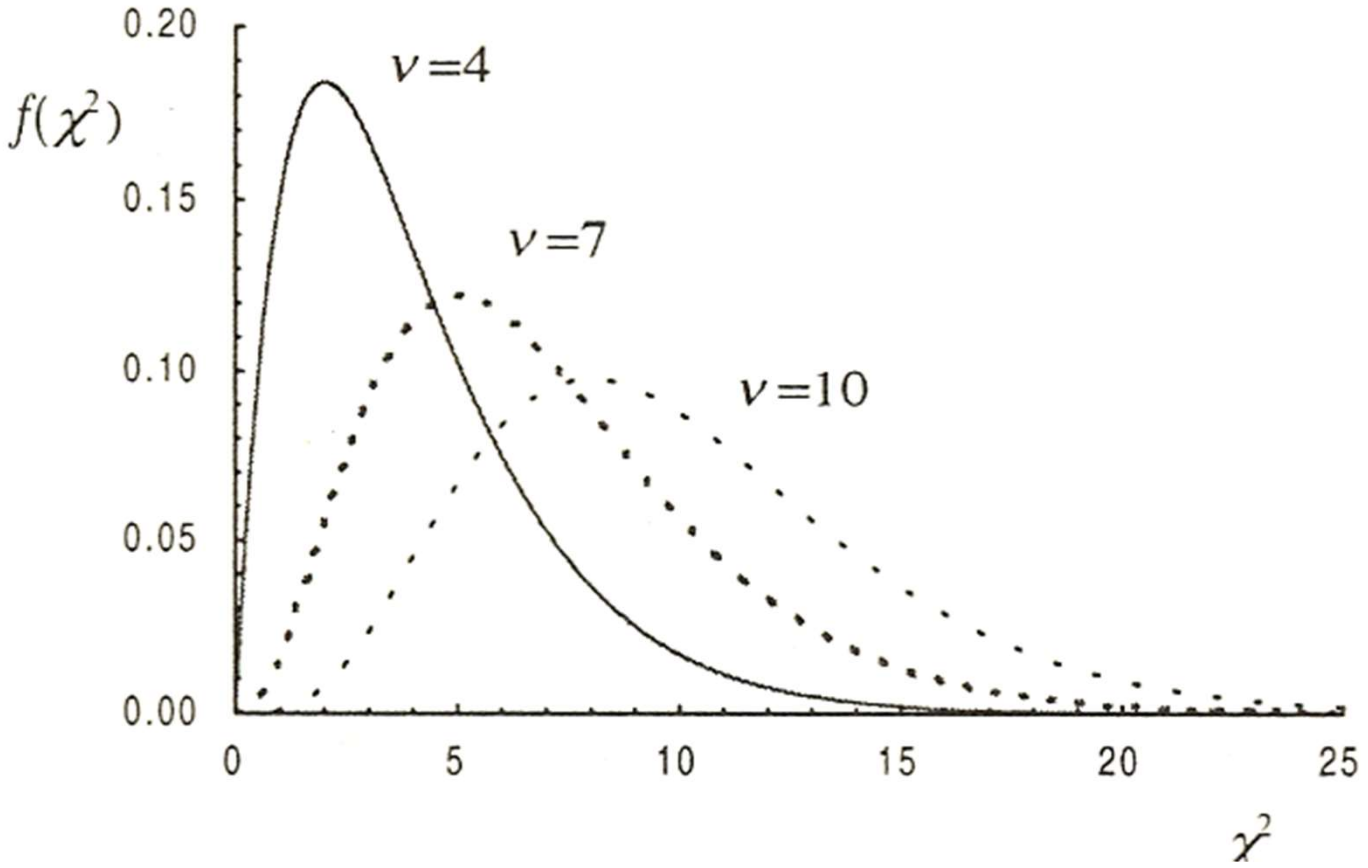
- bevezetése
  - legyen adott egy $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású sokaság
  - vegyünk ebből n db mintát: $x_1, \ldots, x_n$
  - ezek mindegyikét normalizáljuk: $u_i = \dfrac{x_i - \mu}{\sigma}$
  - ezek négyzetösszegét véve χ^2-eloszlású v.v.-t kapunk:

$$\chi^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

  - az eloszlás szabadsági foka: ν
    a függetlenség miatt $\nu = n$

χ^2 - eloszlás

- sűrűségfüggvénye



χ^2 - eloszlás

- várható értéke

$$E(\chi^2) = E\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E(u_i^2) = \sum_{i=1}^{n} E[(u_i - 0)^2] = \sum_{i=1}^{n} Var(u_i) = \nu$$

- varianciája

$$Var(\chi^2) = 2\nu$$

Tapasztalati szórásnégyzet eloszlása

- normális eloszlású sokaságból vett mintákra
- megadása

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- belátható (Fisher-Cohran tétel), hogy a $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ $\chi^2\sigma^2$ eloszlású, $\nu = n$-1 szabadsági fokkal

- e kifejezés várható értéke

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right) = \sigma^2 E(\chi^2) = \sigma^2(n-1)$$

Tapasztalati szórásnégyzet eloszlása

- ennek alapján a tapasztalati szórás várható értéke

$$E(s^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right) = \frac{\sigma^2}{n-1}E(\chi^2) = \sigma^2$$

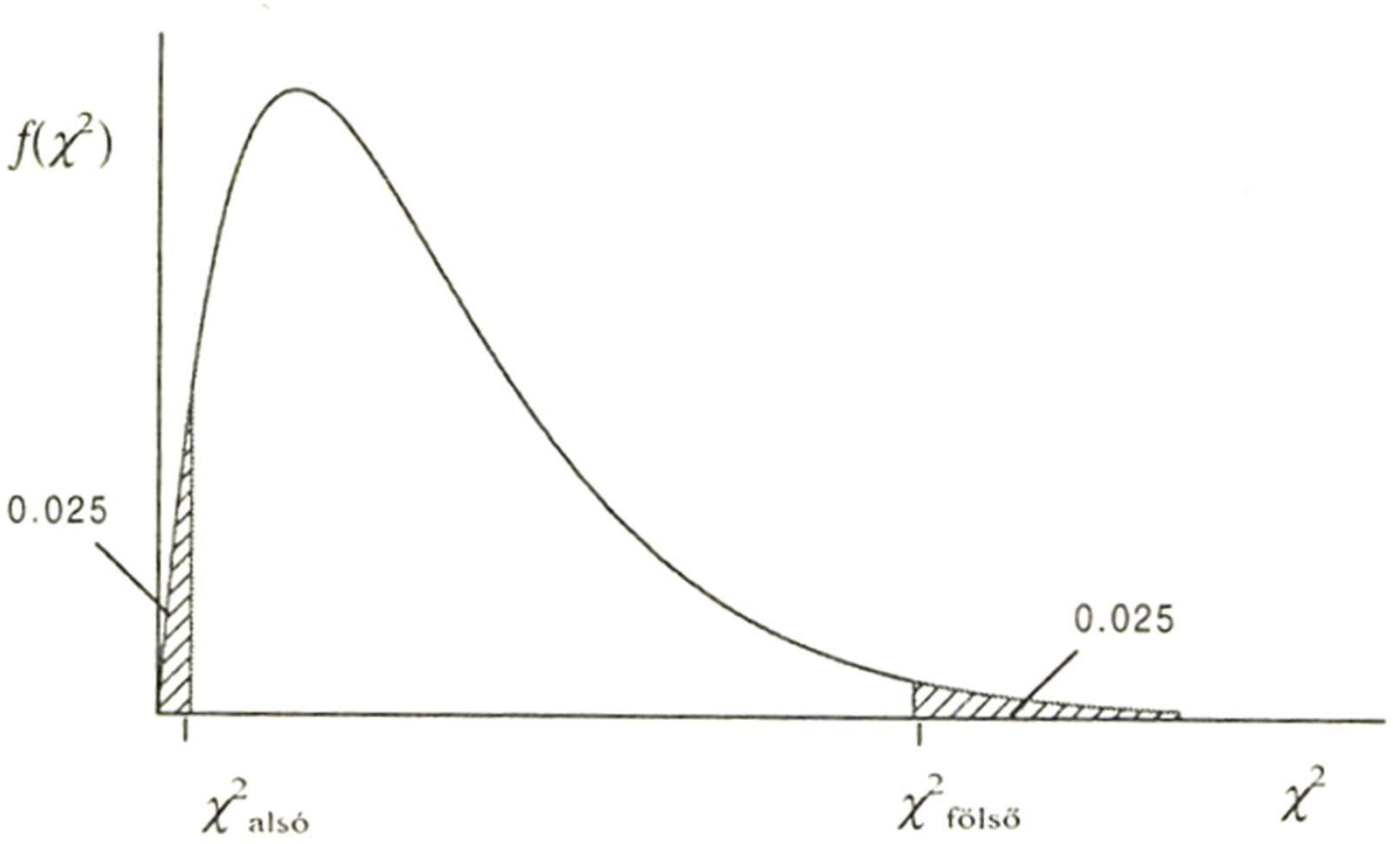
- így $s^2 \rightarrow \frac{\chi^2\sigma^2}{\nu}$ eloszlású
- vagy $\frac{s^2\nu}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2$ eloszlású, $\nu = n\text{-}1$ szabadsági fokkal
- χ^2-eloszlás táblázat
- példa

Tapasztalati szórásnégyzet eloszlása

ν	α									
	0.999	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.706	3.841	5.024	6.635	10.827
2	0.0020	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.605	5.991	7.378	9.210	13.815
3	0.0243	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.251	7.815	9.348	11.345	16.266
4	0.0908	0.2971	0.4844	0.7107	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	18.466
5	0.2102	0.5543	0.8312	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.086	20.515
6	0.3810	0.8721	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	22.457
7	0.5985	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	24.321
8	0.8571	1.647	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	26.124
9	1.152	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	27.877
10	1.479	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	29.588

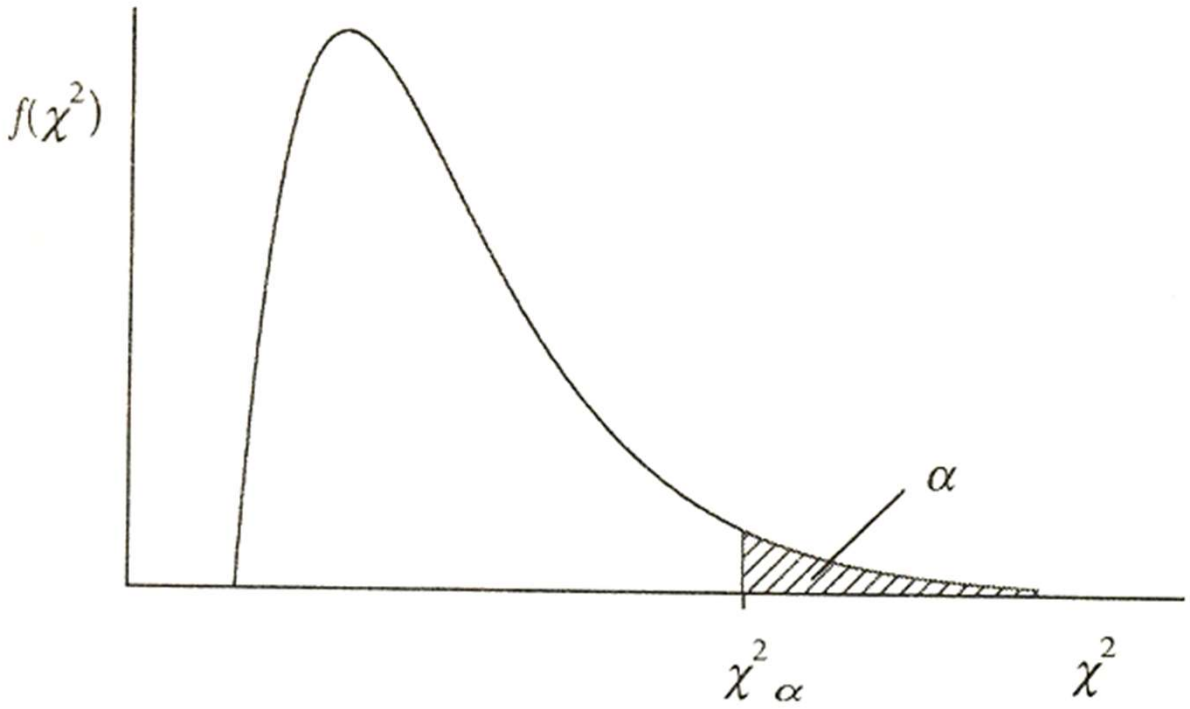
χ^2 - eloszlás

- χ^2-eloszlás kritikus értékei



χ^2 - eloszlás

- χ^2-eloszlás α valószínűséghez tartozó felső kritikus értéke



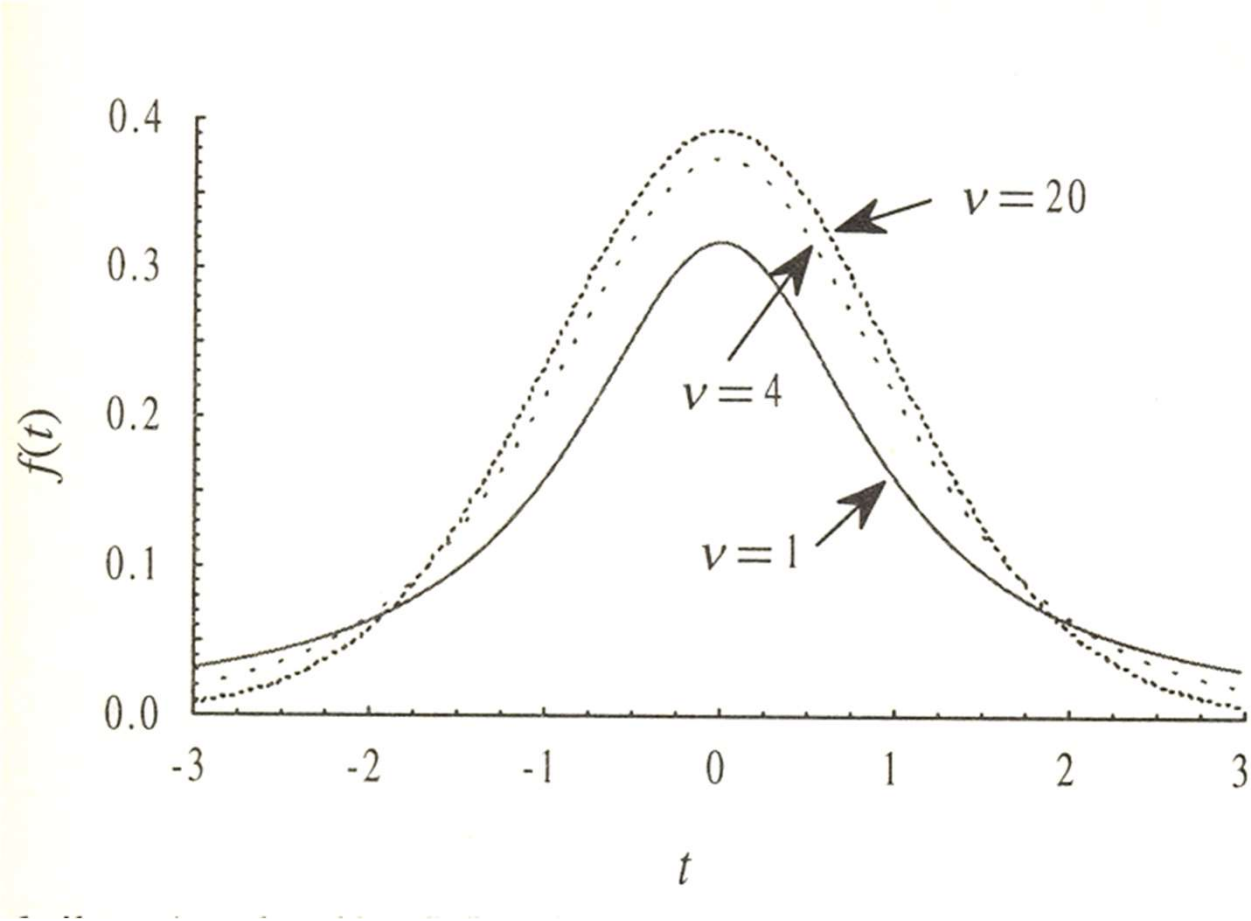
Student- vagy t-eloszlás

- értelmezése
  - az u eloszlás nem használható, ha a minta elemszáma kicsi, nincs elegendő minta σ^2 becsléséhez
  - ilyenkor alkalmazzuk a t - eloszlást
  - legyen ξ normális eloszlású v.v., ekkor ξ-ből a következő kifejezéssel kapunk Student-féle t-eloszlású v.v.-t:

$$t = \frac{u}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n}}} = \frac{\xi - E(\xi)}{\sqrt{\frac{\chi^2 \sigma_\xi^2}{\nu}}} = \frac{\xi - E(\xi)}{s_\xi}$$

Student- vagy t-eloszlás

- sűrűségfüggvénye



Student- vagy t-eloszlás

- egyetlen paramétere van, mely a nevezőben szereplő szórásnégyzetnek a szabadsági foka
- várható értéke $E(t) = 0$
- ha $\nu \to \infty$, akkor a t-eloszlás közeledik normális eloszláshoz ($\nu > 30$ esetén már helyettesíthető)
- a szabadsági fok alapján táblázatból kikereshetők adott α valószínűséghez és ν szabadsági fokhoz tartozó $t_{\alpha/2}$ kritikus értékek

Student- vagy t-eloszlás

- legyen t v.v. az n elemű minta középértéke alapján:

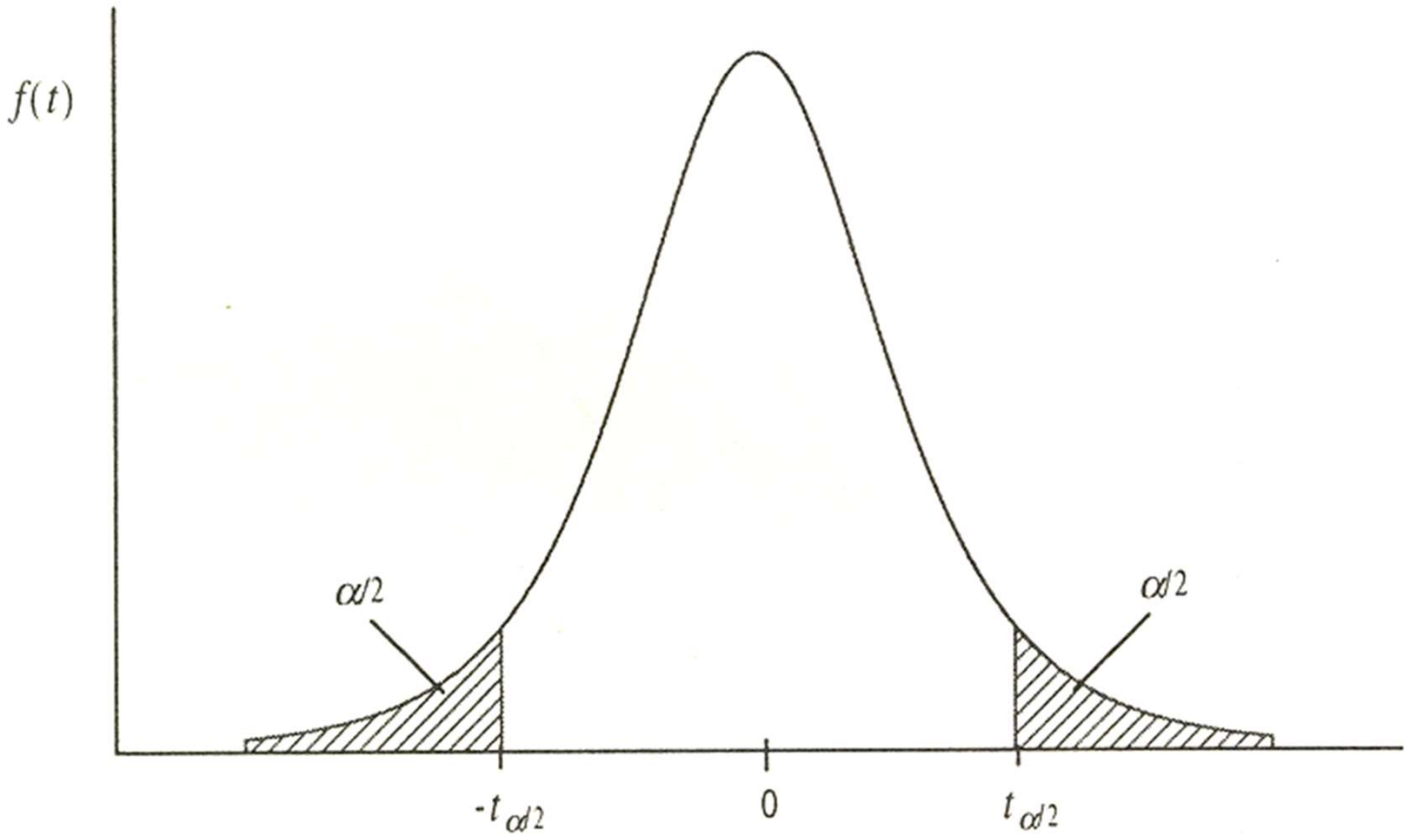
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

- ekkor megadható, hogy t v.v. α valószínűséggel veszi fel a $(-t_{\alpha/2}, t_{\alpha/2})$ intervallumon kívül eső értékeket

- t-eloszlás táblázata

Student- vagy t-eloszlás

- t-eloszlás kritikus értékei



Student- vagy t-eloszlás

szabadsági fok

ν	α						
	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	3.078	6.314	12.706	25.452	63.656	127.321	636.578
2	1.886	2.920	4.303	6.205	9.925	14.089	31.600
3	1.638	2.353	3.182	4.177	5.841	7.453	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.495	4.604	5.598	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.163	4.032	4.773	6.869
6	1.440	1.943	2.447	2.969	3.707	4.317	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.841	3.499	4.029	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.752	3.355	3.833	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.685	3.250	3.690	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.634	3.169	3.581	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.593	3.106	3.497	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.560	3.055	3.428	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.533	3.012	3.372	4.221

F-eloszlás

- értelmezése
  - legyen χ_1^2 és χ_2^2 két egymástól független χ^2 eloszlású v.v. ν_1 és ν_2 szabadsági fokkal
  - a következő kifejezés F-eloszlású

$$F = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2}$$

ahol a számláló szabadsági foka ν_1

a nevezőé pedig ν_2

F-eloszlás

- a tapasztalati szórásnégyzetnél levezetettek alapján:

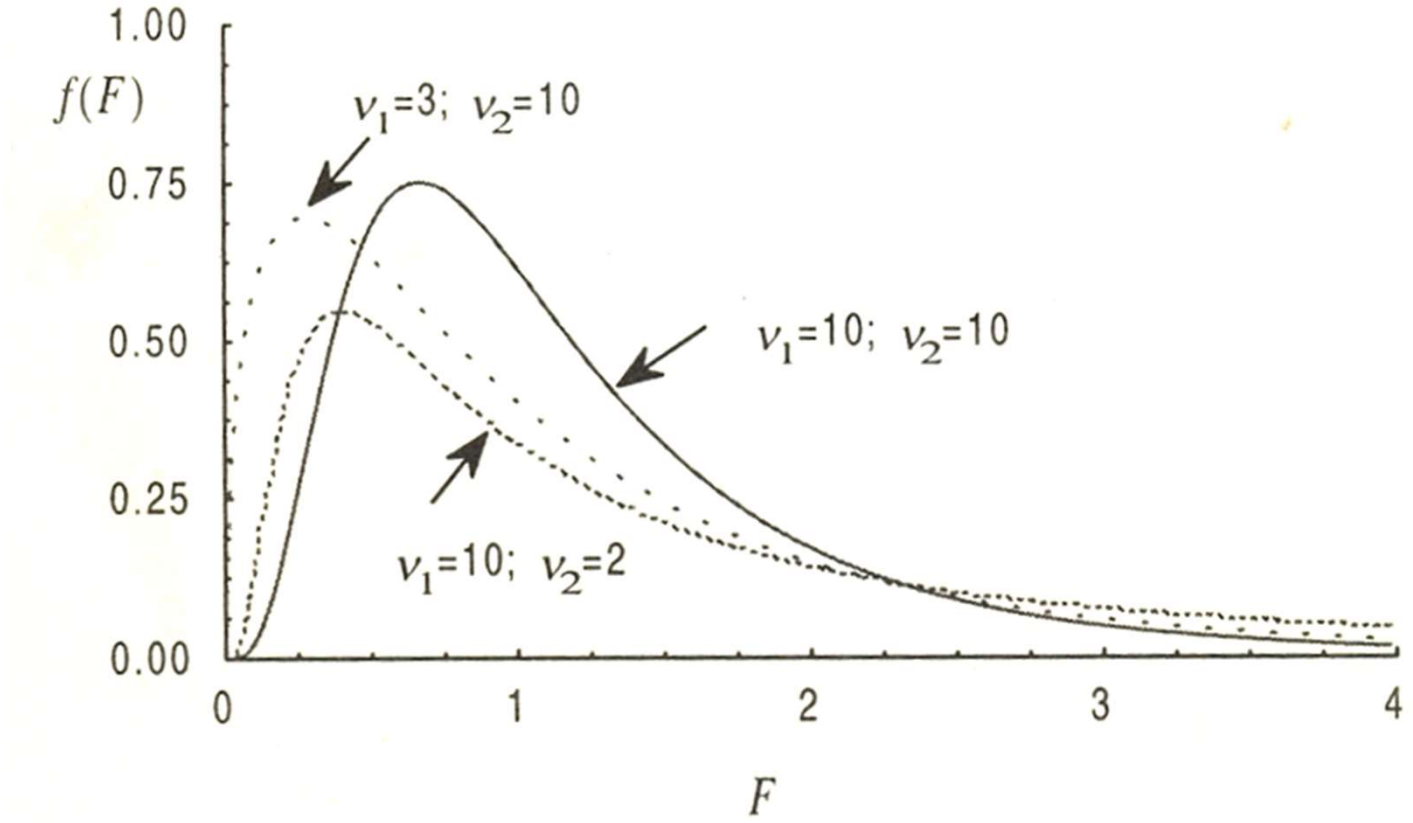
$$\frac{s^2}{\sigma^2}\nu = \chi^2 \Rightarrow \frac{s^2}{\sigma^2} = \frac{\chi^2}{\nu}$$

  - ebből $F = \dfrac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$
  - ha $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

    akkor $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$

F-eloszlás

- sűrűségfüggvénye



F-eloszlás

- táblázatbeli megadás a ν_1 és ν_2 szabadsági fokok alapján történik

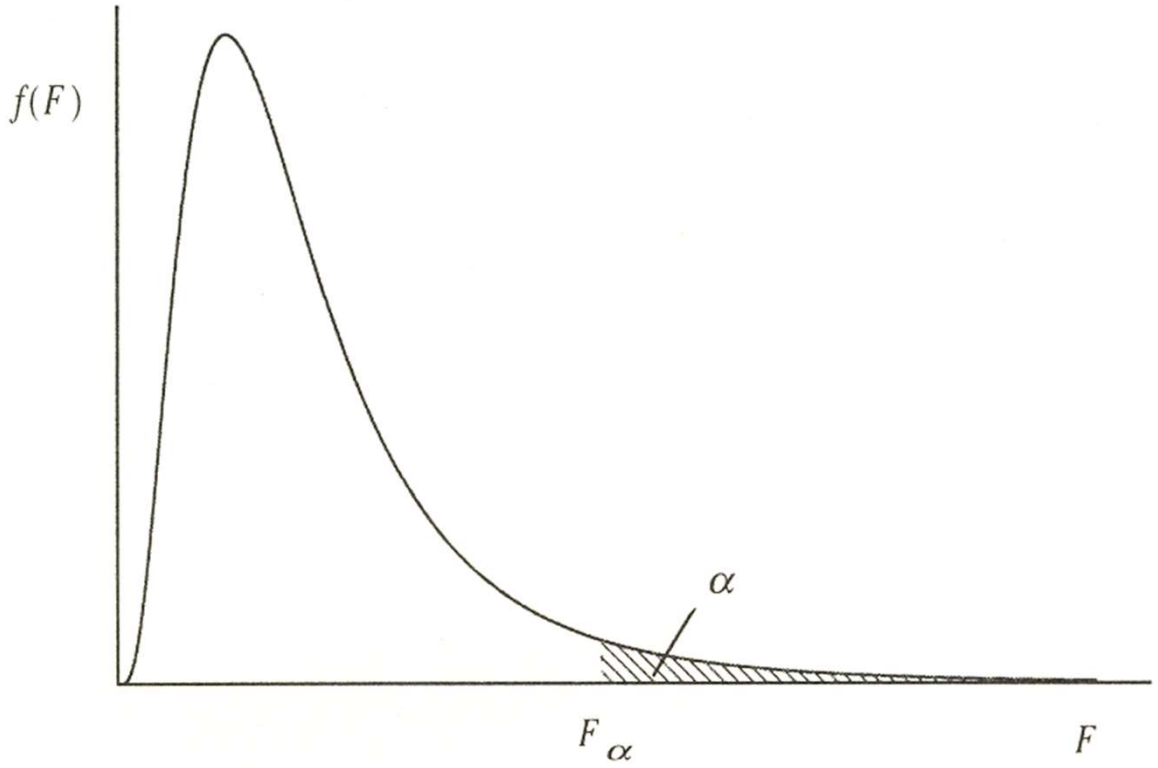
- legyen $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ a ν_1 és ν_2 szabadsági fokokkal jellemzett F-eloszlású v.v.-nak az a kritikus értéke, amelyet csak α valószínűséggel halad meg. Ekkor

$$F_\alpha(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)}$$

azaz a kritikus intervallum határai közül a felsőt a táblázatból, az alsót számolással kapjuk meg.

F-eloszlás

- F-eloszlás kritikus értéke



- F-táblázat

F-eloszlás

IV. táblázat. Az F-eloszlás F_α kritikus értékei $\alpha = 0.05$

számláló szabadsági foka ν_1	nevező szabadsági foka ν_2									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.45	18.51	10.13	7.71	6.61	5.99	5.59	5.32	5.12	4.96
2	199.50	19.00	9.55	6.94	5.79	5.14	4.74	4.46	4.26	4.10
3	215.71	19.16	9.28	6.59	5.41	4.76	4.35	4.07	3.86	3.71
4	224.58	19.25	9.12	6.39	5.19	4.53	4.12	3.84	3.63	3.48
5	230.16	19.30	9.01	6.26	5.05	4.39	3.97	3.69	3.48	3.33
6	233.99	19.33	8.94	6.16	4.95	4.28	3.87	3.58	3.37	3.22
7	236.77	19.35	8.89	6.09	4.88	4.21	3.79	3.50	3.29	3.14
8	238.88	19.37	8.85	6.04	4.82	4.15	3.73	3.44	3.23	3.07
9	240.54	19.38	8.81	6.00	4.77	4.10	3.68	3.39	3.18	3.02
10	241.88	19.40	8.79	5.96	4.74	4.06	3.64	3.35	3.14	2.98