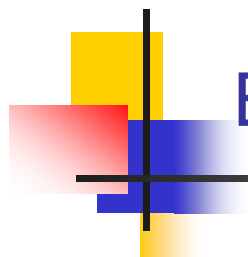


Tipikus dinamikus tagok

Gerzson Miklós

Pannon Egyetem, Villamosmérnöki és Információs
Rendszerek Tanszék

2019/2020 II. félév



Bemenet/kimenet modellek

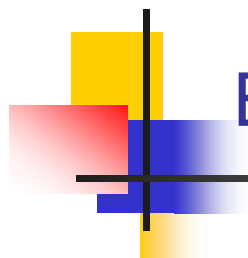
- Lineáris, időinvariáns, folytonos idejű bemenet/kimenet (I/O) modell:

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t) \end{aligned}$$

ahol u – a bemenő jel

y – a kimenő jel

$a_n, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0$ – paraméterek

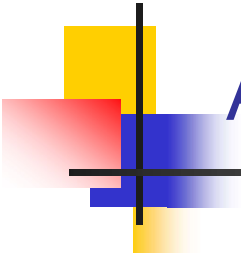


Bemenet/kimenet modellek

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u$$

I/O modell jelzői:

- lineáris
- időinvariáns
- folytonos idejű
 - $y(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)$ – kezdeti feltételek
- inhomogén
- n -ed rendű
 - $n \geq m$ – oksági szabály
- SISO

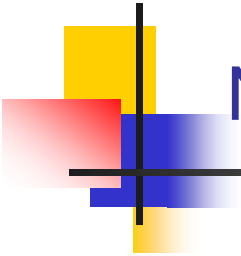


Átviteli függvény

- Az átviteli függvény:

$$G(s) = \left. \frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(u(t))} \right|_{z.k.f.} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

- célja: a rendszer modelljének megadása a kimenetek és bemenetek alapján racionális törtfüggvény formájában



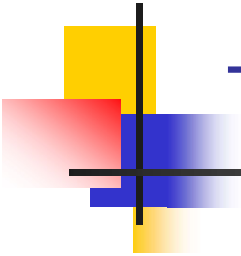
Nevezetes válaszfüggvények

- Súlyfüggvény:
 - Dirac impulzus bemenő jelre adott válaszfüggvény
 - jele: $h(t)$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

- Átmeneti függvény:
 - Egységugrás bemenő jelre adott válaszfüggvény
 - jele: $w_s(t)$

$$w_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\frac{1}{s}\right\}$$

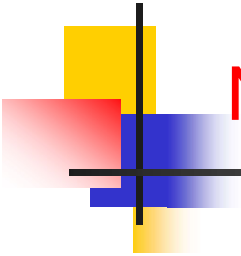


Tipikus dinamikus tagok

- a tagok osztályozása
 - az I/O egyenlet kimeneti oldalának deriválási fokszáma alapján, ami megfelel az átviteli függvény nevezőjében lévő polinom fokszámanak (n)
 - az I/O egyenletben a bemenet esetében nem deriválunk, így az átviteli függvényben a számláló fokszáma általában 0, (konstans számláló)

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_0 u$$

$$G(s) = \frac{b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$



Nulladrendű tag

- $n = 0$ és $m = 0$,

- **I/O modell:**

$$a_0 y = b_0 u$$

- tegyük fel, hogy $a_0 \neq 0$ és $b_0 \neq 0$,

átrendezve

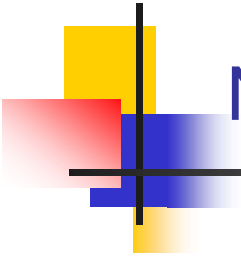
$$y = \frac{b_0}{a_0} u$$

- Laplace transzformálva:

$$a_0 Y(s) = b_0 U(s)$$

- **átviteli függvény:**

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0}$$



Nulladrendű tag

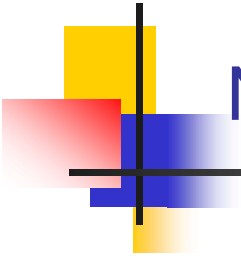
- **átmeneti függvény:** $u(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0} \cdot 1(t) = K \cdot 1(t)$$

ahol K megadja, hogy a rendszer működésének hatására kimenőjel hányszorosa vagy hányadrésze lesz a bemenő jelnek

K elnevezése: **erősítés** vagy átviteli tényező

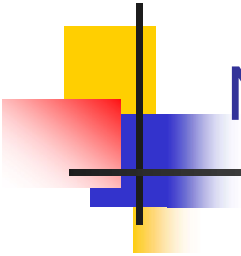


Nulladrendű tag

- **súlyfüggvény:** $u(t) = \delta(t)$

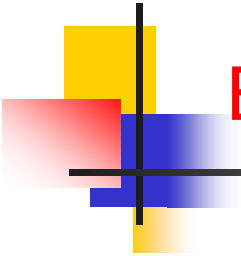
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_0}{a_0} \cdot 1$$

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \delta(t) = K\delta(t)$$



Nulladrendű tag

- összefoglalva:
 - 0-ad rendű tag (zero order system, arányos tag, P-tag)
 - átviteli függvény: $G_0(s) = K$
 - jellemző paraméter K – erősítés (gain)
 - példa:
 - potenciométer
 - fogaskerék, szíj-, lánchajtás
 - karáttétel

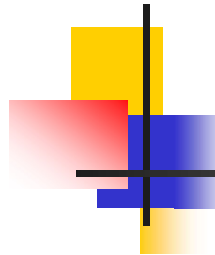


Elsőrendű tag

- $n = 1$ és $m = 0$,
- **I/O modell:** $a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_0 u \quad y(0) = 0$
- tegyük fel, hogy $a_1 \neq 0$, $a_0 \neq 0$ és $b_0 \neq 0$,

átrendezve: $\frac{a_1}{a_0} y^{(1)} + y = \frac{b_0}{a_0} u \quad \frac{a_1}{a_0} = \tau \quad \frac{b_0}{a_0} = K$

- Laplace transzformálva: $\tau s Y(s) + Y(s) = K U(s)$
- **átviteli függvény:** $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$



Elsőrendű tag

- **átmeneti függvény:** $u(t) = 1(t)$

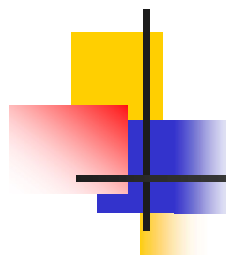
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s} = K \left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} \right) = K \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right)$$

$$y(t) = K \left(1(t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

K elnevezése: **erősítés** vagy átviteli tényező

τ elnevezése: **időállandó**

azaz K kimenőjel végértékét befolyásolja,
 τ pedig az átmenet gyorsaságát



Elsőrendű tag

- paraméterek hatása:

$$y(t) = K \left(1(t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$t \rightarrow \infty \quad e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0 \quad (\tau > 0) \quad \Rightarrow \quad y(t) \rightarrow K \cdot 1(t) = K$$

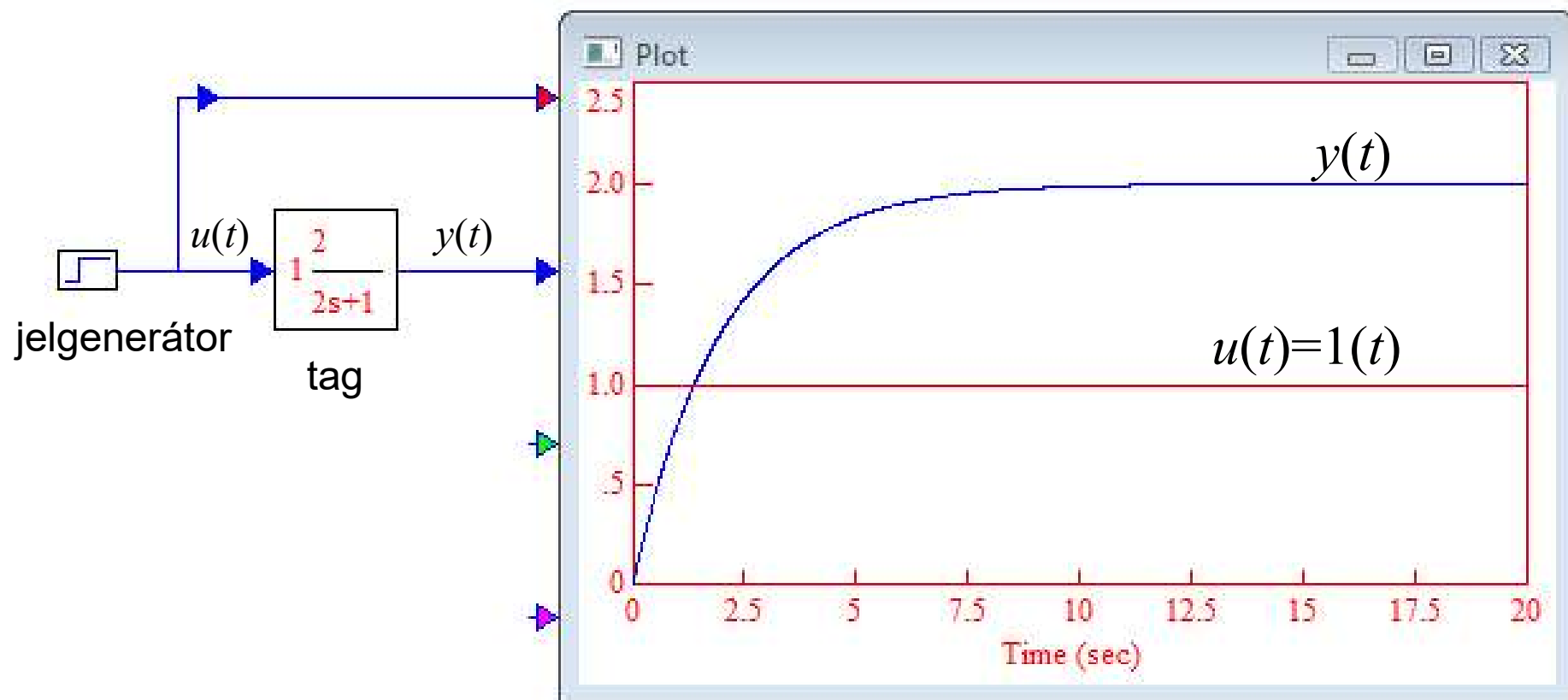
$$t = 0 \quad e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 \quad (\tau > 0) \quad \Rightarrow \quad y(t) = K(1(t) - 1) = 0$$

ha τ kicsi, akkor az $e^{-t/\tau}$ gyorsabban tart nullához, a kimenet gyorsabban tart az erősítés által meghatározott végértékhez

ha τ nagy, akkor az $e^{-t/\tau}$ lassabban tart nullához, kimenet lassabban áll be

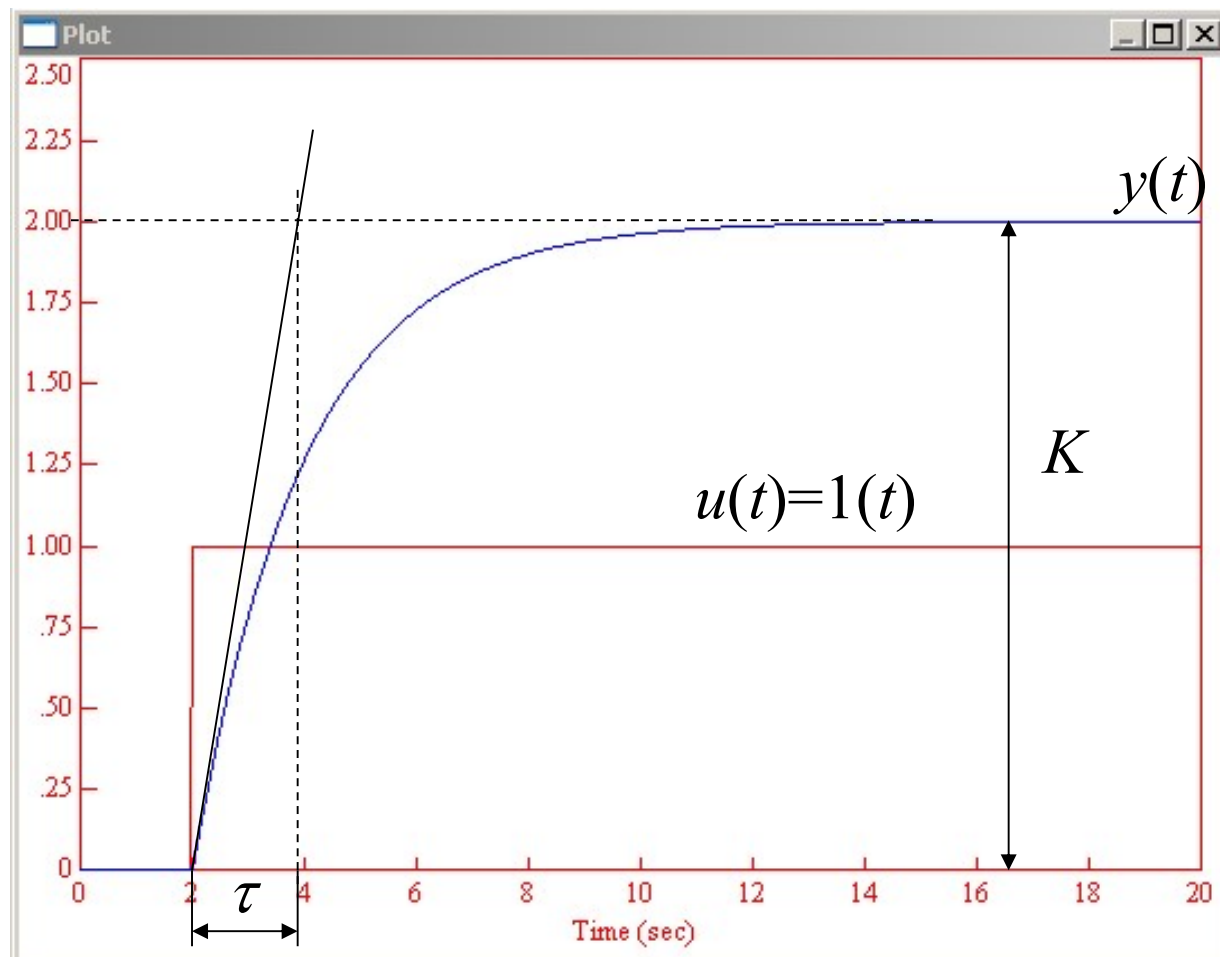
Elsőrendű tag

- Átmeneti függvény felvétele elsőrendű rendszerre



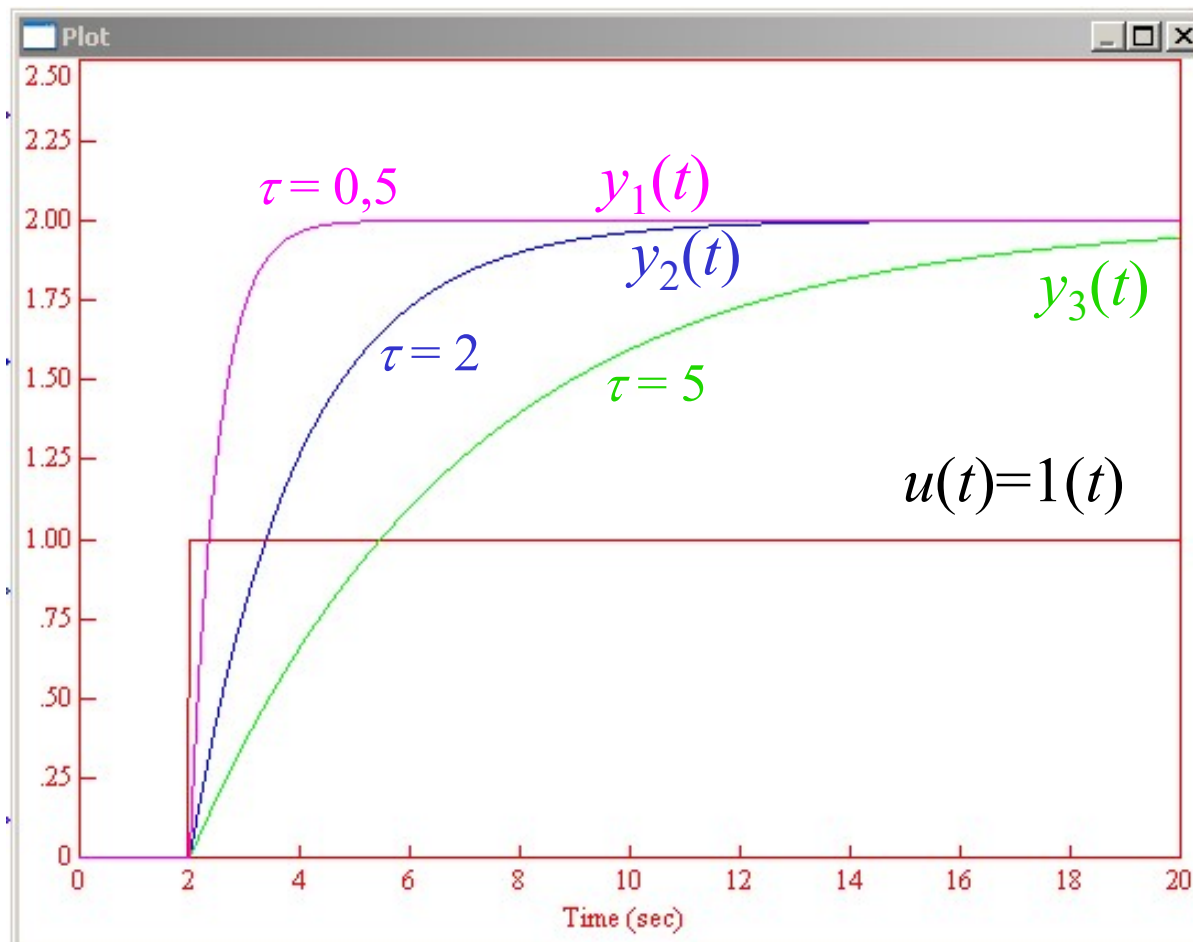
Elsőrendű tag

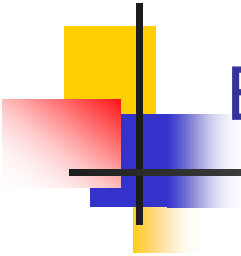
- paraméterek meghatározása grafikus úton



Elsőrendű tag

- Az időállandó hatásának szemléltetése





Elsőrendű tag

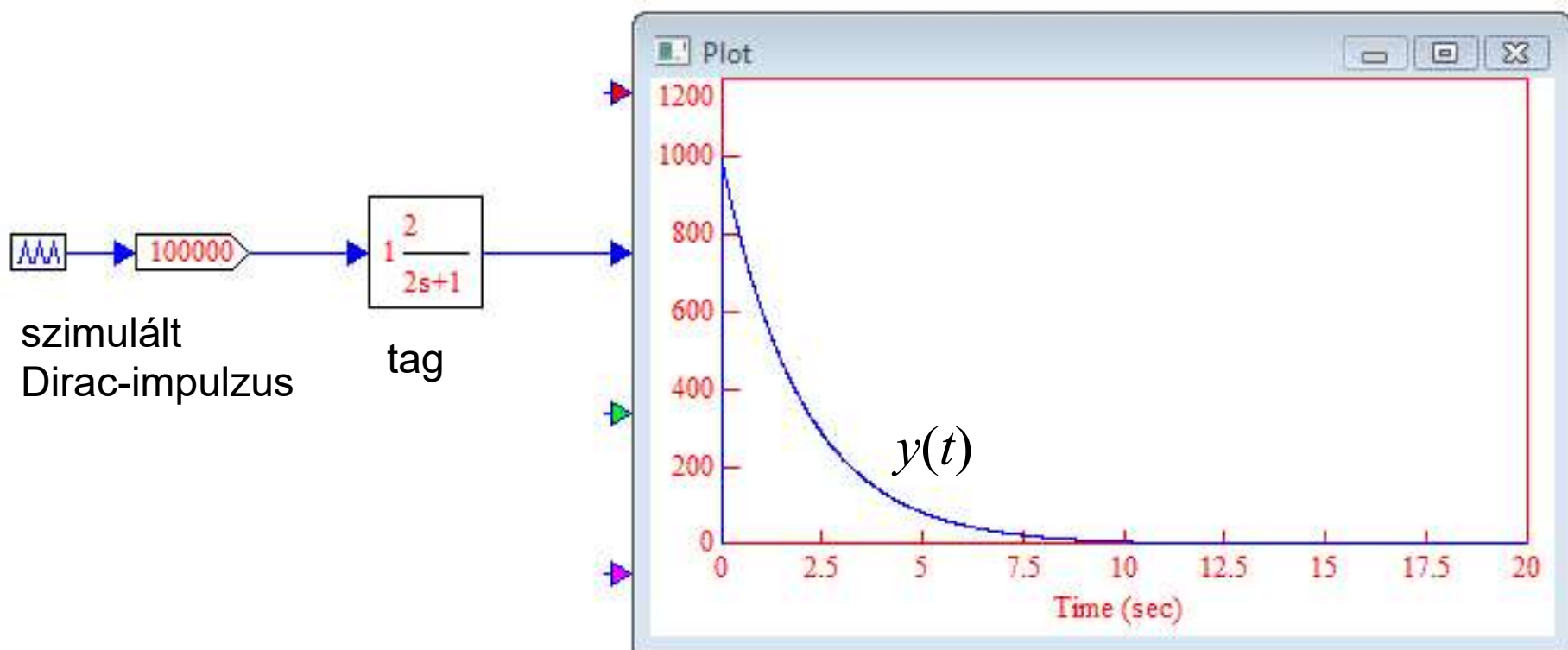
- **súlyfüggvény:** $u(t) = \delta(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot 1$$

$$y(t) = K \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

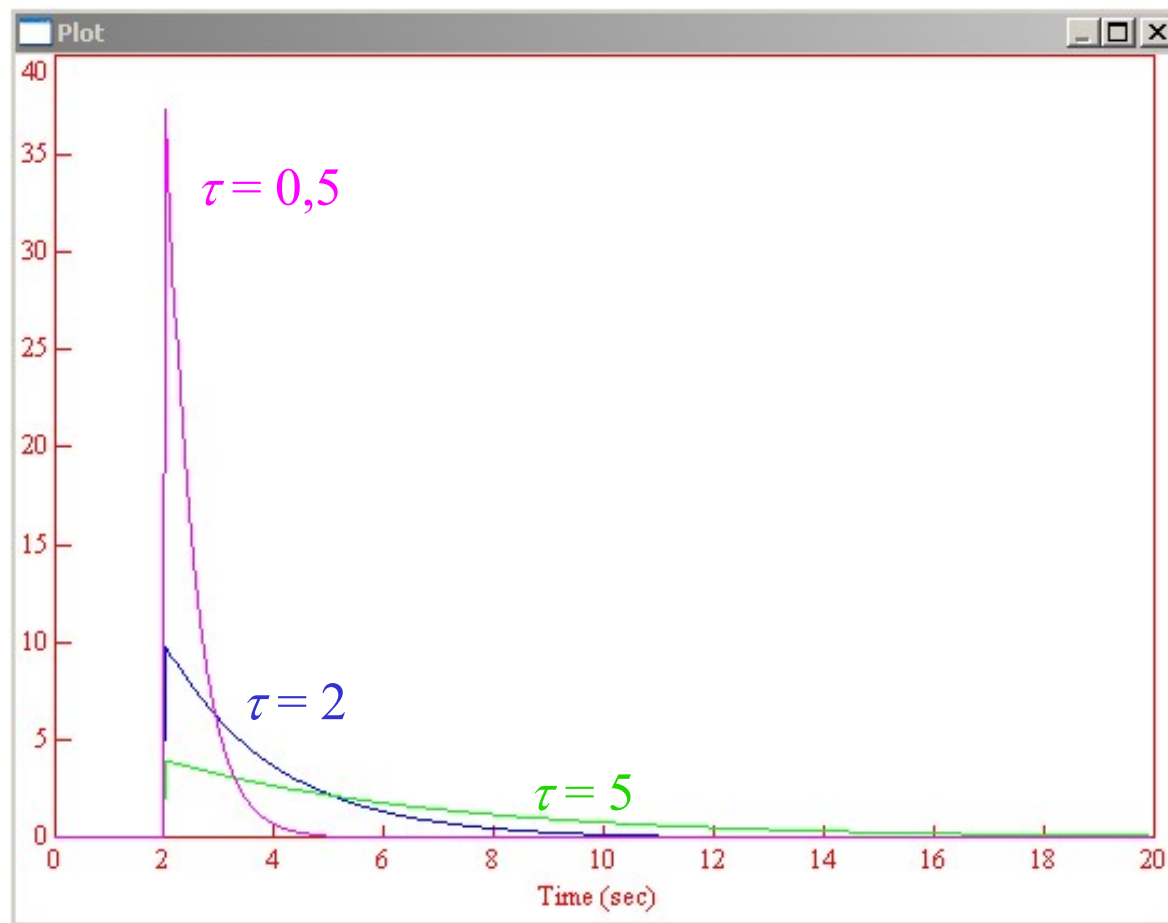
Elsőrendű tag

- Súlyfüggvény felvétele elsőrendű rendszerre

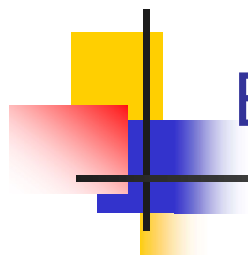


Elsőrendű tag

- súlyfüggvény különböző időállandók mellett



$$y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Elsőrendű tag

- **válasz sebességugrásra:** $u(t) = v(t)$

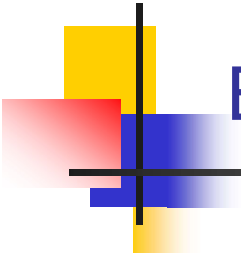
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = K \left(\frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau^2}{\tau s + 1} \right)$$

$$y(t) = K \left(t - \tau \cdot 1(t) + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

- paraméterek hatása:
legyen $K=1$

$$t = 0 \quad e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 \quad (\tau > 0) \quad \Rightarrow \quad y(t) = K(0 - \tau + \tau) = 0$$

$$t \rightarrow \infty \quad e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0 \quad (\tau > 0) \quad \Rightarrow \quad y(t) \rightarrow K(\infty - \tau + 0) \rightarrow \infty$$



Elsőrendű tag

- legyen

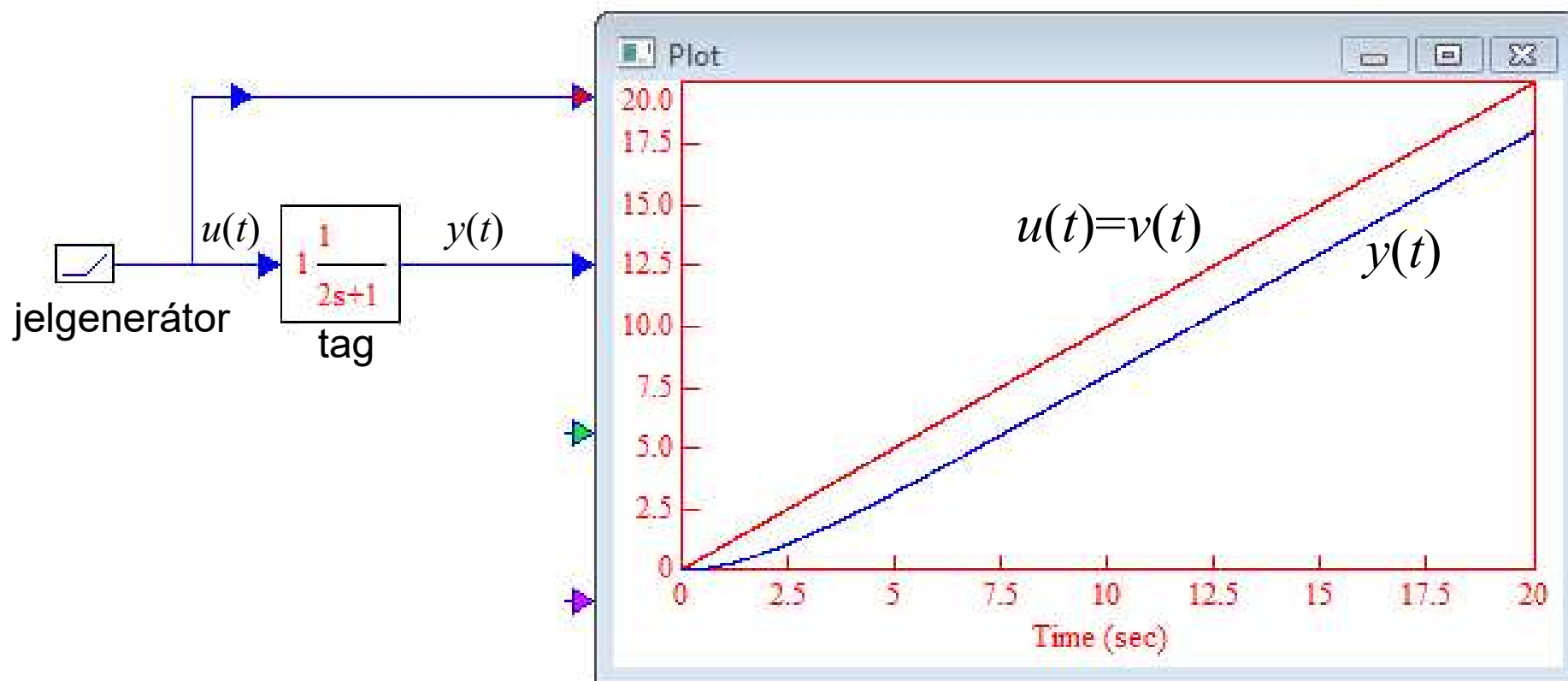
$$e(t) = u(t) - y(t) = t - \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$t = 0 \Rightarrow e(t) = 0$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow e(t) \rightarrow \tau$$

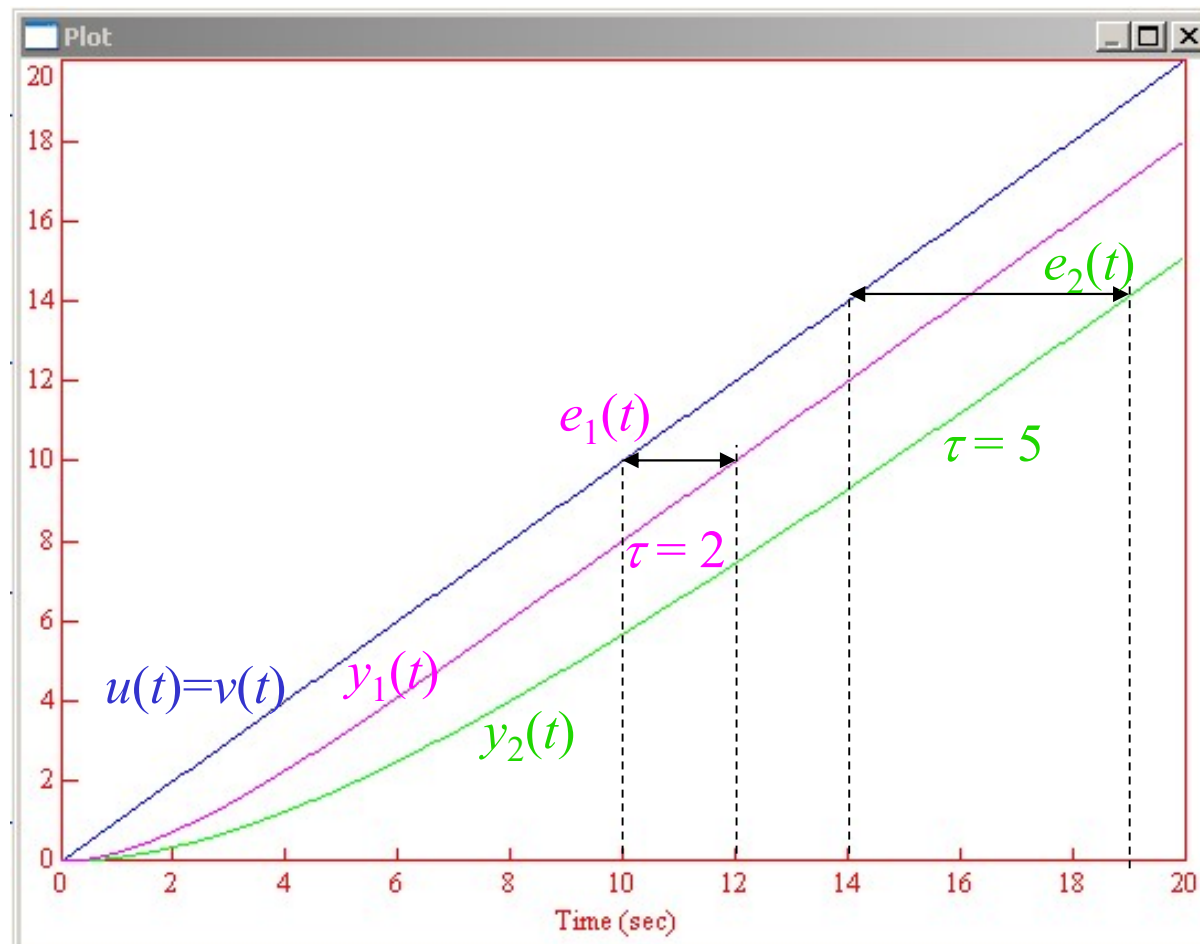
Elsőrendű tag

- Sebességugrás válaszfüggvény felvétele elsőrendű rendszerre



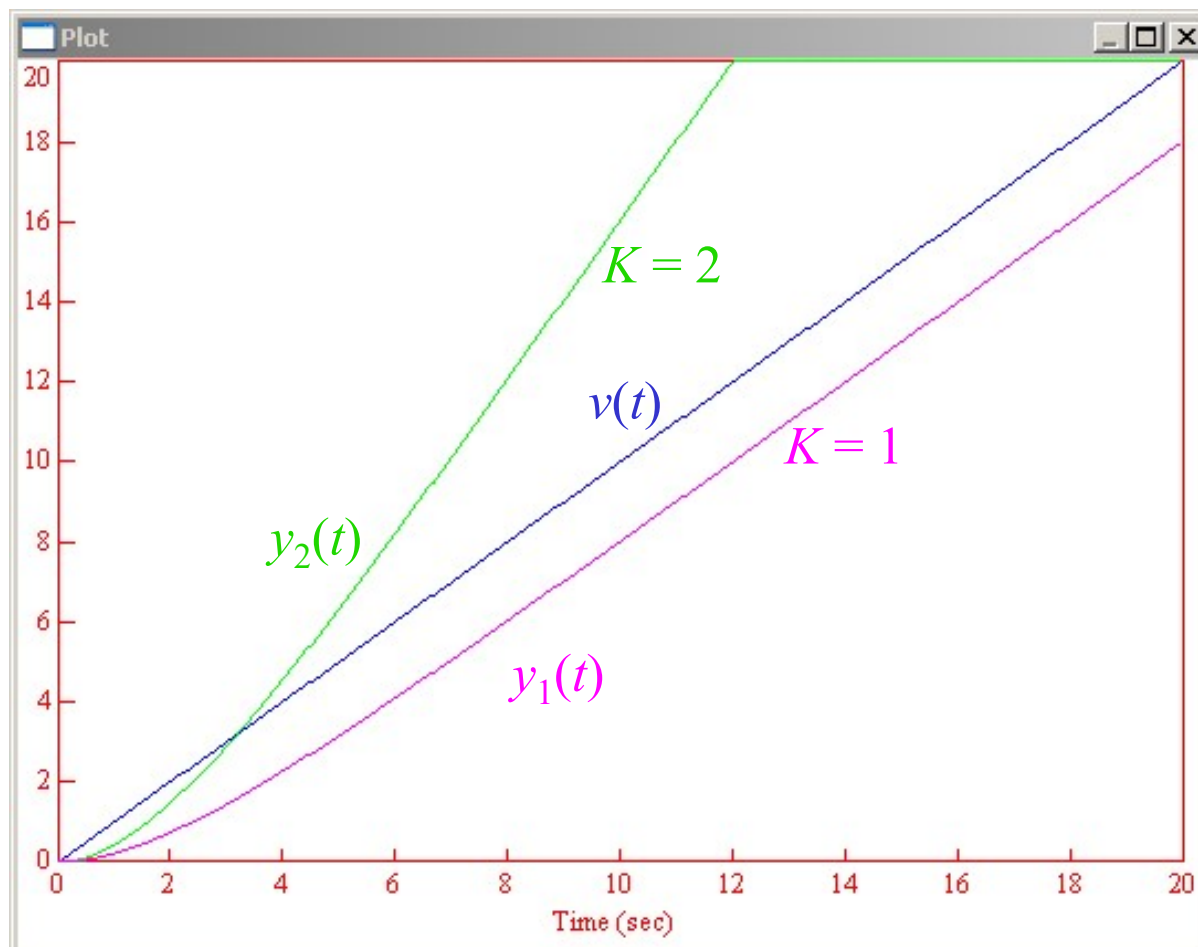
Elsőrendű tag

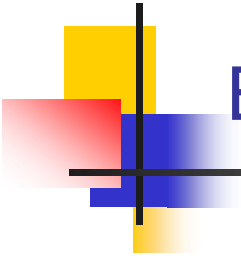
- időállandó hatása a sebességválasz függvényre ($K = 1$)



Elsőrendű tag

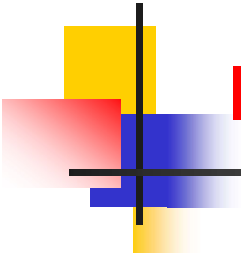
- Az erősítés hatása a sebességválasz függvényre ($\tau = 2s$)





Elsőrendű tag

- összefoglalva:
 - elsőrendű tag (first order system, arányos egy időállandós rendszer, egytárolós PT_1 tag)
 - átviteli függvény: $G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$
 - jellemző paraméterek: K – erősítés (gain)
 τ – időállandó (time constant)
 - példa:
 - RC-tag
 - hőközlés közvetlen hőátvitellel



Integráló tag

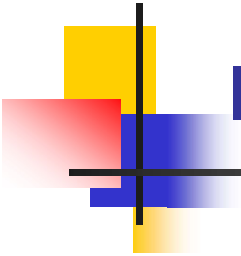
- $n=1$ és $m=0$,
- **I/O modell:** $a_1 y^{(1)} + \cancel{a_0 y} = b_0 u$ $y(0) = 0$
- tegyük fel, hogy $a_1 \neq 0$ és $b_0 \neq 0$ de $a_0 = 0$

$$a_1 y^{(1)} = b_0 u$$

- átrendezve

$$\frac{a_1}{b_0} y^{(1)} = u \quad \text{vagy} \quad y^{(1)} = \frac{b_0}{a_1} u$$

$$\frac{a_1}{b_0} = T_I \quad \text{vagy} \quad \frac{b_0}{a_1} = K_I$$



Integráló tag

- Laplace transzformálva:

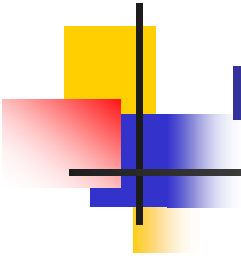
$$a_1 s Y(s) = b_0 U(s)$$

- átviteli függvény:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{T_I s} = \frac{K_I}{s}$$

T_I elnevezése: integrálási időállandó (ismétlési idő)

K_I elnevezése: integrálási erősítés

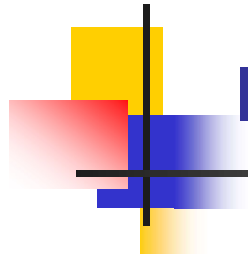


Integráló tag

- **átmeneti függvény:** $u(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{T_I s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{T_I} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$y(t) = \frac{1}{T_I} \cdot v(t)$$

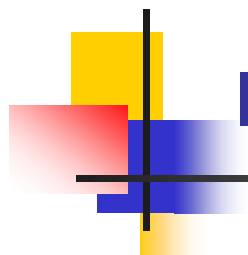


Integráló tag

- **súlyfüggvény:** $u(t) = \delta(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{T_I s} \cdot 1 = \frac{1}{T_I} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \frac{1}{T_I} \cdot 1(t) = K_I \cdot 1(t)$$



Integráló tag

- általánosítva

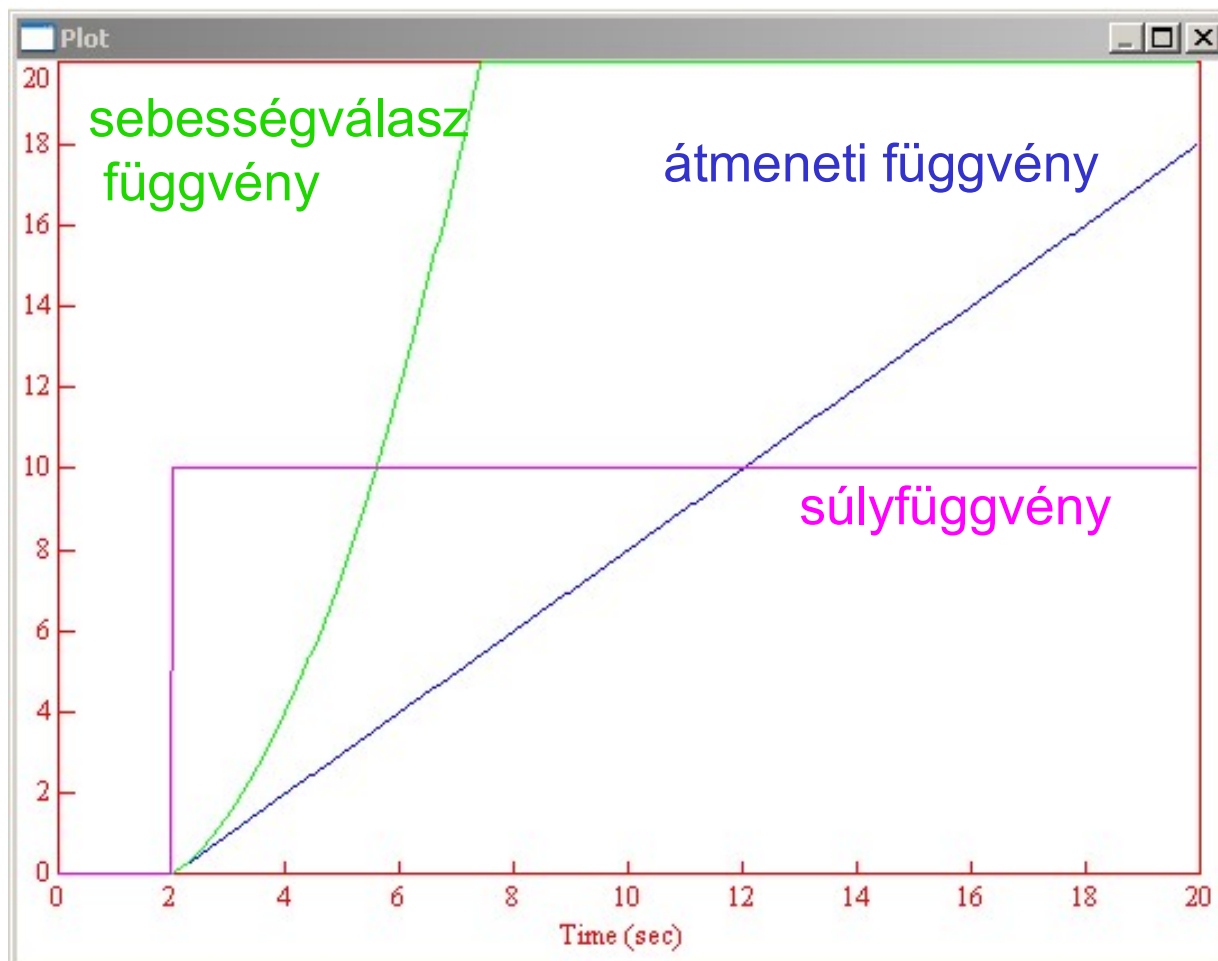
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{T_I s} U(s)$$

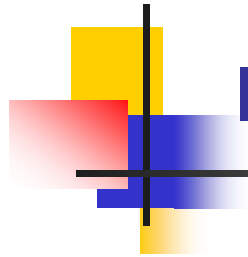
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{T_I s} U(s) \right\} = \frac{1}{T_I} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{U(s)}{s} \right\} = \frac{1}{T_I} \int_0^t u(\vartheta) d\vartheta$$

azaz a rendszer kimenetén a bemenő jel
integrálja jelenik meg

Integráló tag

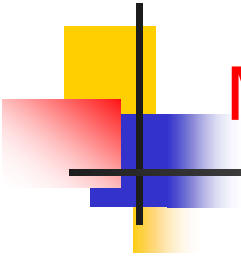
- az integráló tag jellemző válaszfüggvényei





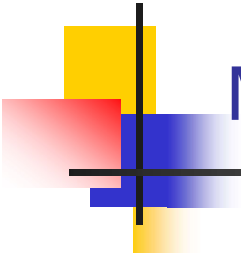
Integráló tag

- összefoglalva:
 - integráló tag (ideal integrator, I tag)
 - átviteli függvény: $G(s) = \frac{1}{T_I s} = \frac{K_I}{s}$
 - jellemző paraméter: T_I – integrálási időállandó
(integrator time constant)
 K_I – integrálási erősítés
 - példa:
 - folyadék tárolása tartályban
 - kondenzátor töltése



Másodrendű tag

- $n=2$ és $m=0$,
- **I/O modell:** $a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_0 u \quad y(0) = y^{(1)}(0) = 0$
- tegyük fel, hogy $a_2, a_1, a_0, b_0 \neq 0$,
- átrendezve
$$\frac{a_2}{a_0} y^{(2)} + \frac{a_1}{a_0} y^{(1)} + y = \frac{b_0}{a_0} u$$
$$\frac{a_2}{a_0} = T_2^2 \quad \frac{a_1}{a_0} = T_1 \quad \frac{b_0}{a_0} = K$$
$$T_2^2 y^{(2)} + T_1 y^{(1)} + y = Ku$$



Másodrendű tag

- gyakorlatban a két időállandó helyett a következő paramétereket használjuk:

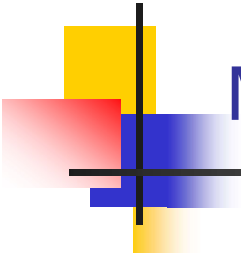
$$T = T_2 \quad \text{időállandó}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{T_1}{T_2} \quad \text{csillapítási tényező}$$

$$T^2 y^{(2)} + 2\xi T y^{(1)} + y = Ku$$

- Laplace transzformálva:

$$T^2 s^2 Y(s) + 2\xi T s Y(s) + Y(s) = KU(s)$$



Másodrendű tag

- átviteli függvény:

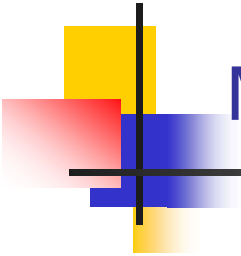
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

- bevezetve:

$$\omega_n = \frac{1}{T}$$

$$G(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

ahol ω_n a természetes frekvencia



Másodrendű tag

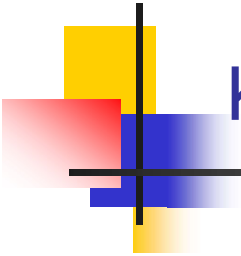
- **átmeneti függvény:** $u(t) = 1(t)$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} =$$

$$= K \left(\frac{1}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} \right)$$

ahol

- K konstans (erősítés)
- A_1 és A_2 konstansok
- p_1 és p_2 a karakterisztikus egyenlet gyökei



Karakterisztikus egyenlet

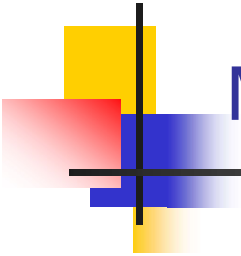
- átviteli függvény:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(u(t))} \Big|_{z.k.f.} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

- nevezője egyenlővé téve nullával lesz a karakterisztikus egyenlet:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

- a karakterisztikus egyenlet gyökei a tag pólusai



Másodrendű tag

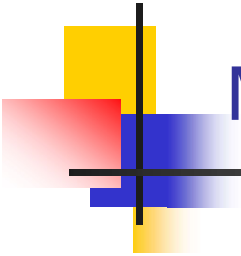
- p_1 és p_2 gyökök a karakterisztikus egyenlet alapján

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2}$$

- innen, mivel $\omega_n > 0$:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$



Másodrendű tag

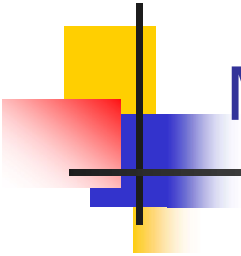
- az általános megoldás:

$$Y(s) = K \left(\frac{1}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} \right)$$

$$y(t) = K \cdot (1(t) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t})$$

ahol

$$A_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\xi}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad A_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (\xi \neq 1)$$



Másodrendű tag

- vizsgáljuk meg a paraméterek hatását

- ha $t \rightarrow \infty$ és a $\text{Re}\{p_i\} < 0$ akkor

$$y(t) \rightarrow K \cdot 1(t) = K$$

azaz K a tag erősítése

- mikor lesz $\text{Re}\{p_i\} < 0$?

$$p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

- $\omega_n > 0$ (hiszen $\omega_n = 1/T$)
 - ξ -ra nincs kikötés (elvileg)

Másodrendű tag

- legyen $\xi > 1$

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

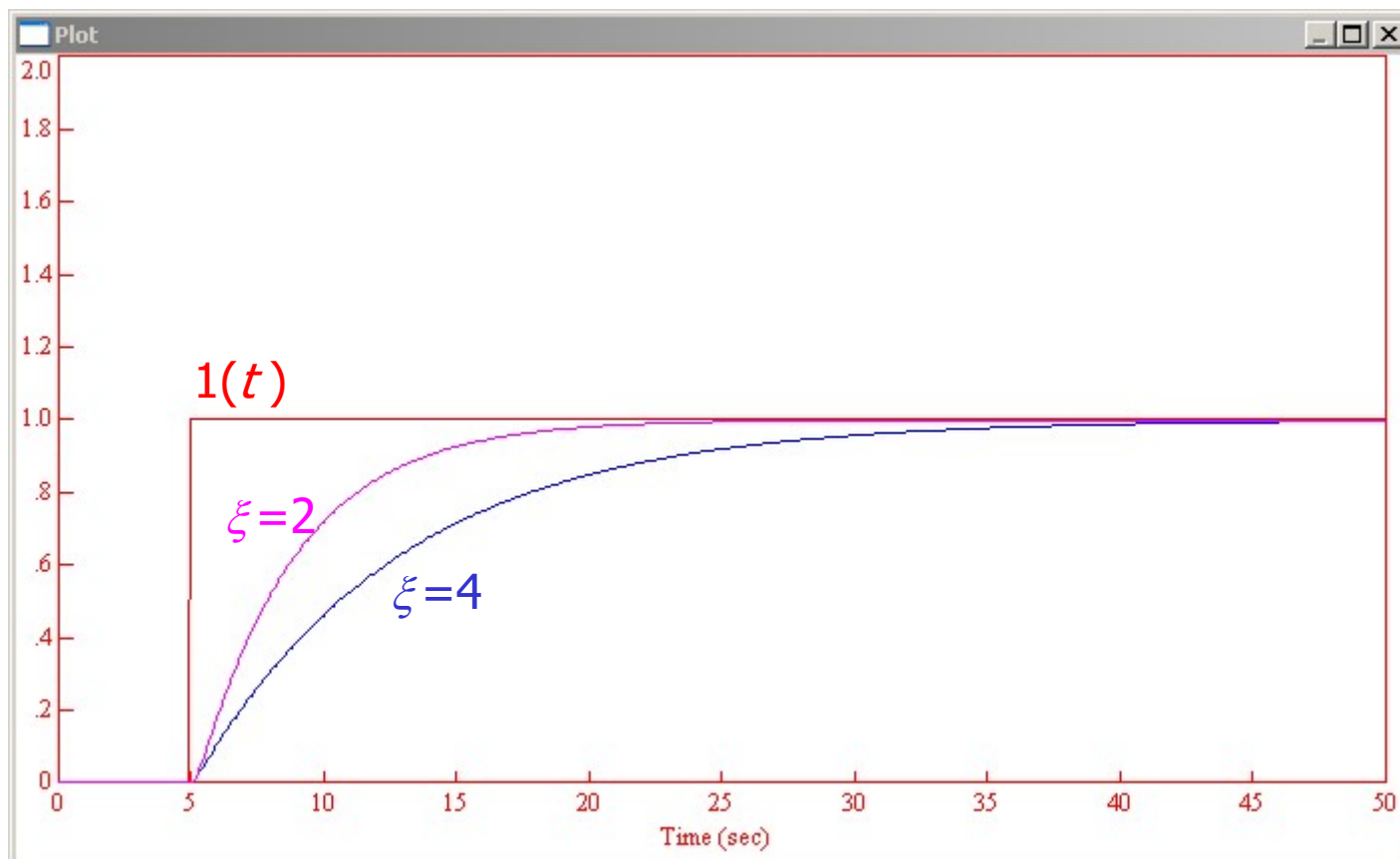
- ekkor a diszkrimináns pozitív,
de $\xi > \sqrt{\xi^2 - 1} \Rightarrow$ negatív valós pólusok
- ha $\xi \rightarrow \infty$, akkor $p_1 \rightarrow 0$, $p_2 \rightarrow -\infty$
- ha $\xi \rightarrow 1$, akkor $p_1 \approx p_2$
- visszaírva ezt az általános megoldásba

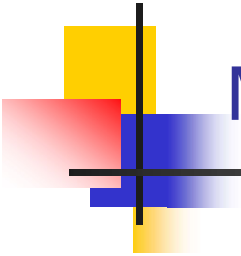
$$y(t) = K \cdot \left(1(t) + A_1 e^{-\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t} + A_2 e^{-\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} \right)$$

ha $t \rightarrow \infty$	$y(t) \rightarrow K$	$=1$	$=0$	$=0$
ha $t \rightarrow 0$	$y(t) \rightarrow 0$	$=1$	$=1$	$=1$, de $A_2 + A_1 = -1$
ha $\xi \rightarrow \infty$	$y(t) \rightarrow K$	$=1$	$=0$	$=1$, de $A_2 \rightarrow 0$

Másodrendű tag

- túlcsillapított tag (overdamped system) átmeneti függvényének képe:





Másodrendű tag

- legyen $\xi = 1$

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

- ekkor a diszkrimináns nulla, azaz

$$p_{1,2} = -\omega_n$$

- ekkor a megoldást a következő alakban keressük

$$Y(s) = K \left(\frac{1}{s} + \frac{T}{Ts + 1} + \frac{T}{(Ts + 1)^2} \right) \quad T = \frac{1}{\omega_n}$$

- elvégezve az inverz Laplace transzformációt:

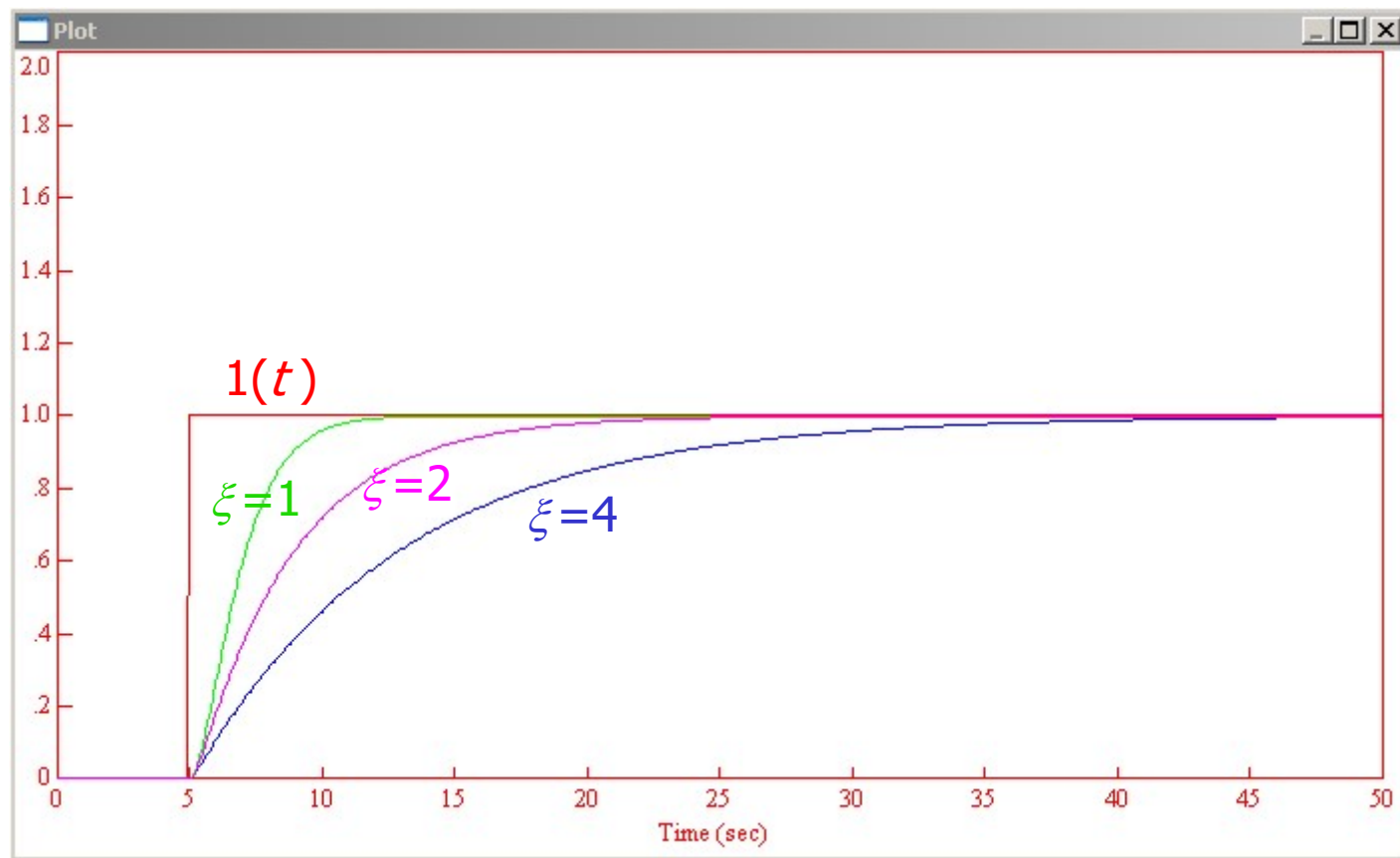
$$y(t) = K(1(t) - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t})$$

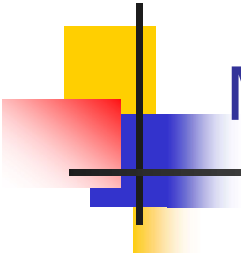
$$\text{ha } t \rightarrow \infty \quad y(t) \rightarrow K \quad = 1 \quad = 0 \quad = 0$$

$$\text{ha } t \rightarrow 0 \quad y(t) \rightarrow 0 \quad = 1 \quad = 1 \quad = 0$$

Másodrendű tag

- kritikus csillapítású tag átmeneti függvénye:





Másodrendű tag

- legyen $0 < \xi < 1$

$$p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

- ekkor a diszkrimináns negatív, így negatív valósrésztű konjugált komplex gyökpár pólusok:

$$p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

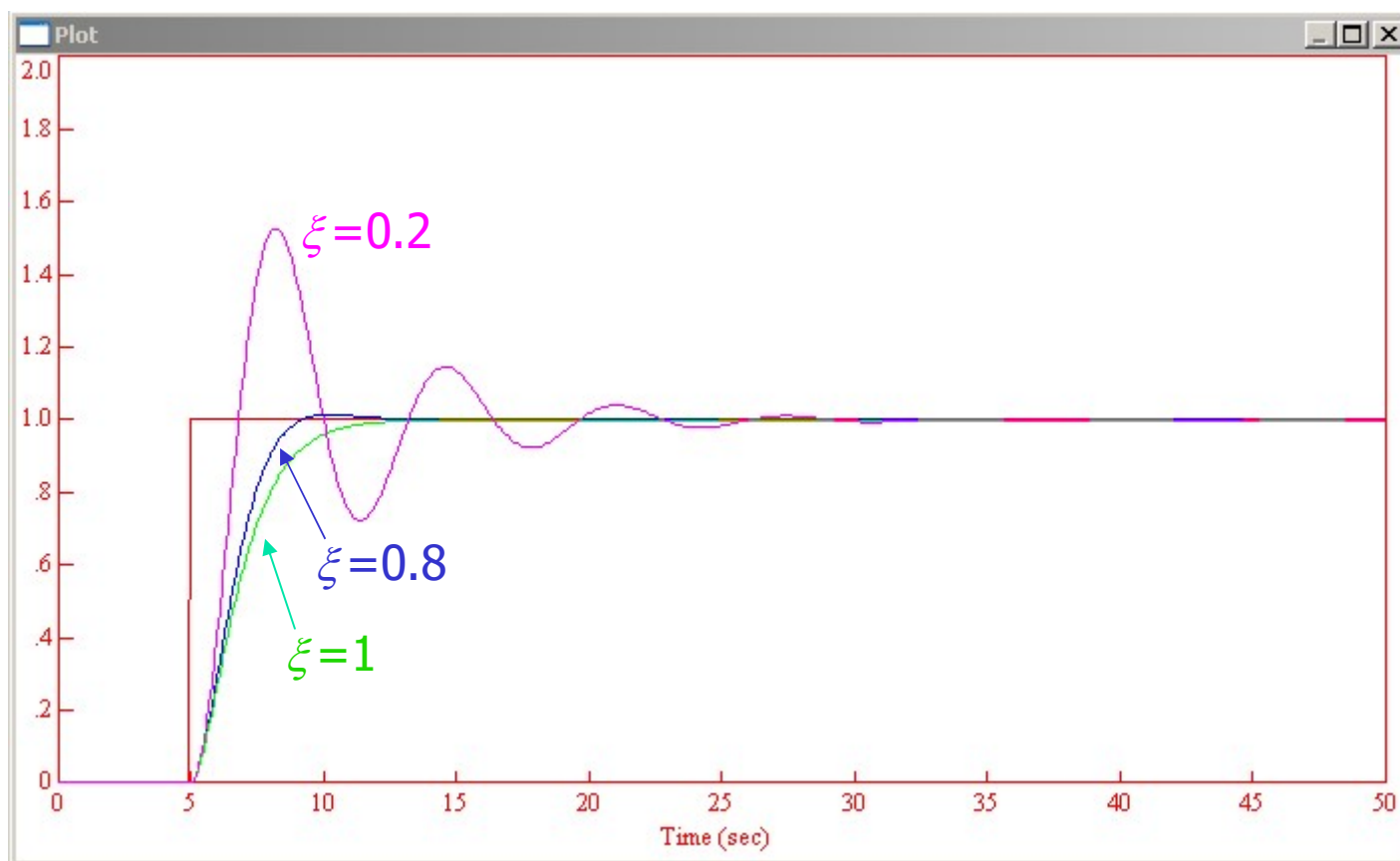
- A_1 és A_2 is komplex lesz
- az általános megoldás:

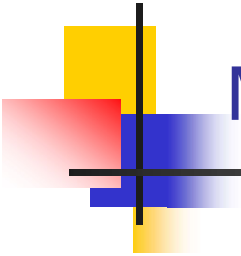
$$y(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi \right) \right)$$

ahol $\phi = \cos^{-1} \xi$

Másodrendű tag

- alulcsillapított tag (under damped system) átmeneti függvényének képe:





Másodrendű tag

- legyen $\xi = 0$

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

- ekkor a diszkrimináns -1, a valós rész 0, a pólusok

$$p_{1,2} = \pm j\omega_n$$

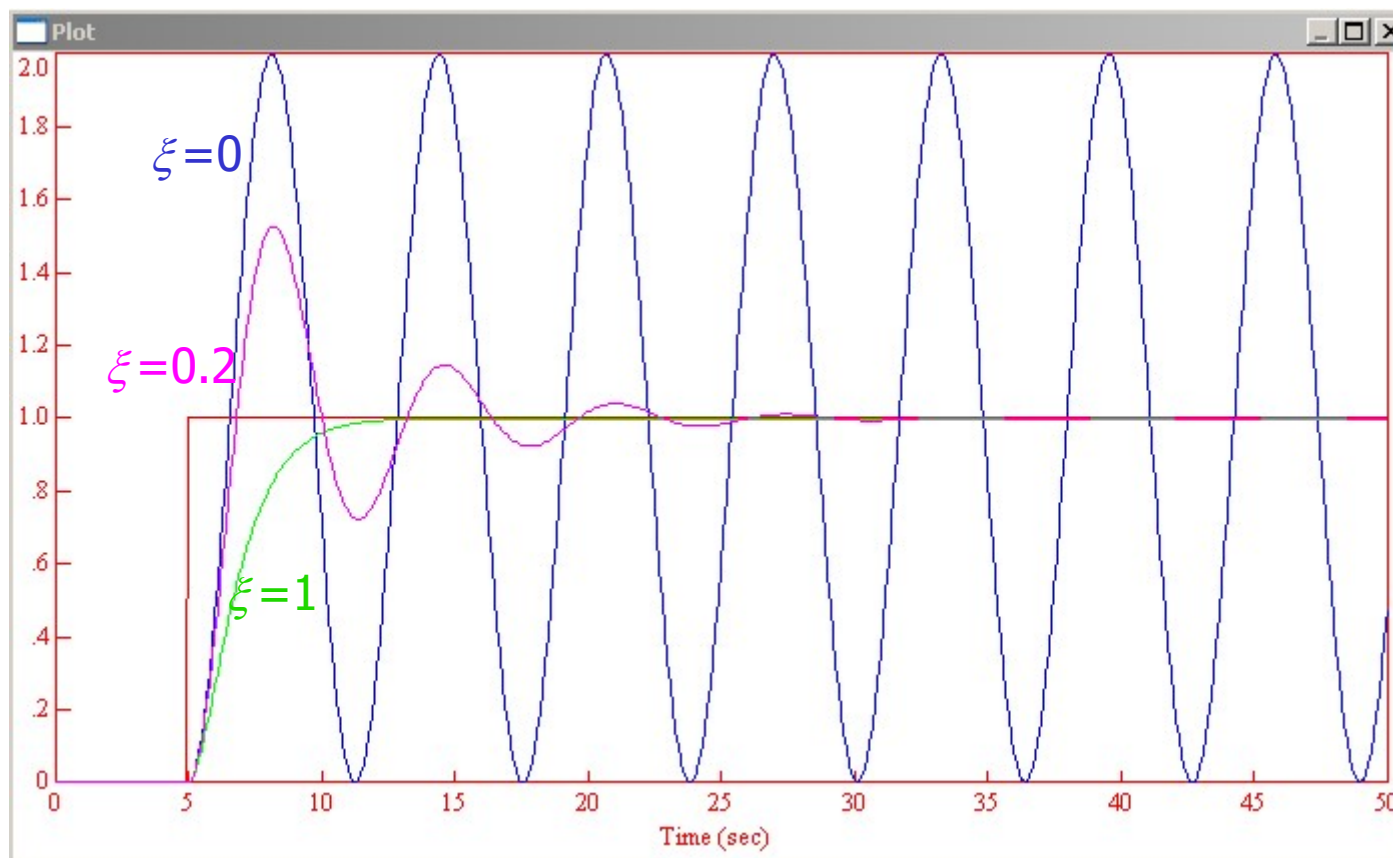
- visszaírva ezt az általános megoldásba

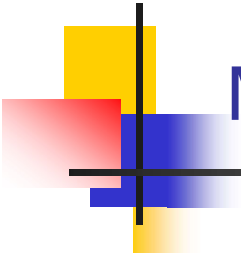
$$y(t) = K(1(t) - e^{-j\omega_n t}) = K(1 - \cos \omega_n t)$$

azaz a tag kimenetén ω_n frekvenciájú
csillapítatlan rezgés alakul ki

Másodrendű tag

- csillapítás határán lévő tag átmeneti függvénye:





Másodrendű tag

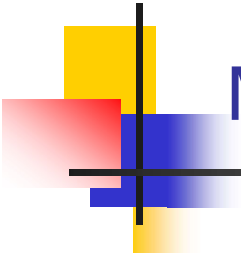
- legyen $-1 < \xi < 0$
$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$
 - ekkor a diszkrimináns negatív, de pozitív valósrésztű konjugált komplex gyökpár pólusok:

$$p_{1,2} = +\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

- az általános megoldásban

$$y(t) = K \cdot \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi \right) \right)$$

az exponenciális tag nem fog csillapodni, ha nem mindenhatáron túl növekvő szinuszos jellegű kimenetet kapunk

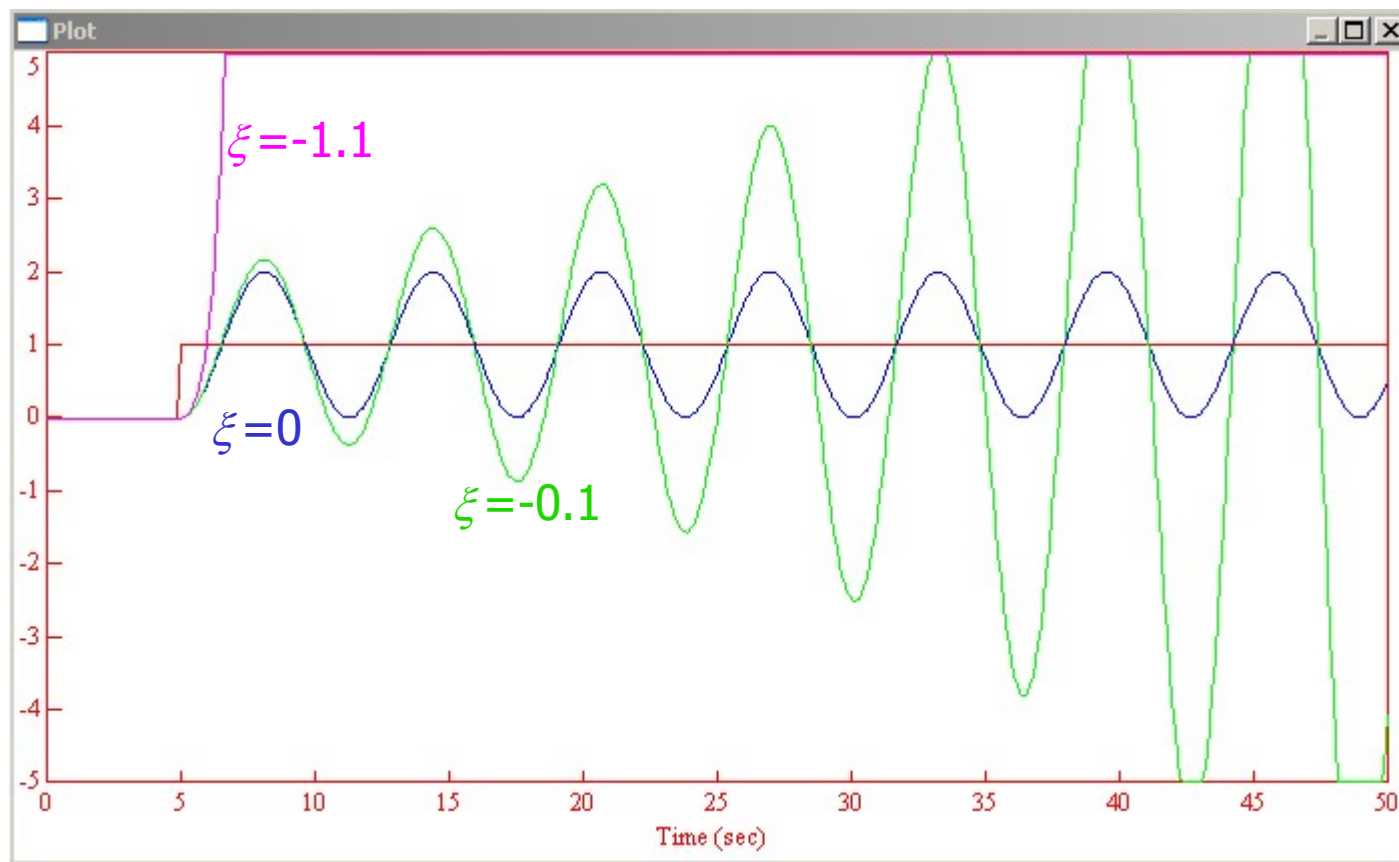


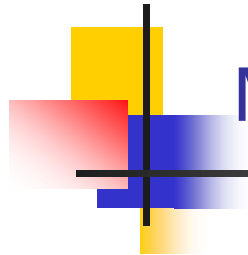
Másodrendű tag

- legyen $\xi \leq -1$
 - ekkor a diszkrimináns pozitív, valós rész is pozitív $\Rightarrow$ pozitív valós pólusok
 - visszaírva ezt az általános megoldásba $\Rightarrow$ az exponenciális tagok végtelenbe fognak tartani, így a kimenet is minden határon túl nő az idő haladtával

Másodrendű tag

- csillapítás nélküli tagok átmeneti függvénye:





Másodrendű tag

- **súlyfüggvény:** $u(t) = \delta(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot 1 = K \left(\frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} \right)$$

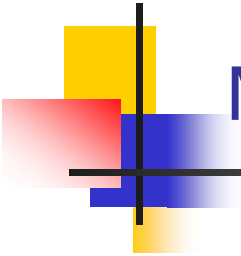
- az általános megoldás

$$y(t) = K \cdot (C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t})$$

ahol

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$C_1 = -C_2 = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (\xi \neq 1)$$



Másodrendű tag

- legyen $\xi > 1$
 - ekkor $D > 0$; $p_{1,2}$ negatív valós pólusok
 - az időtartománybeli válasz:

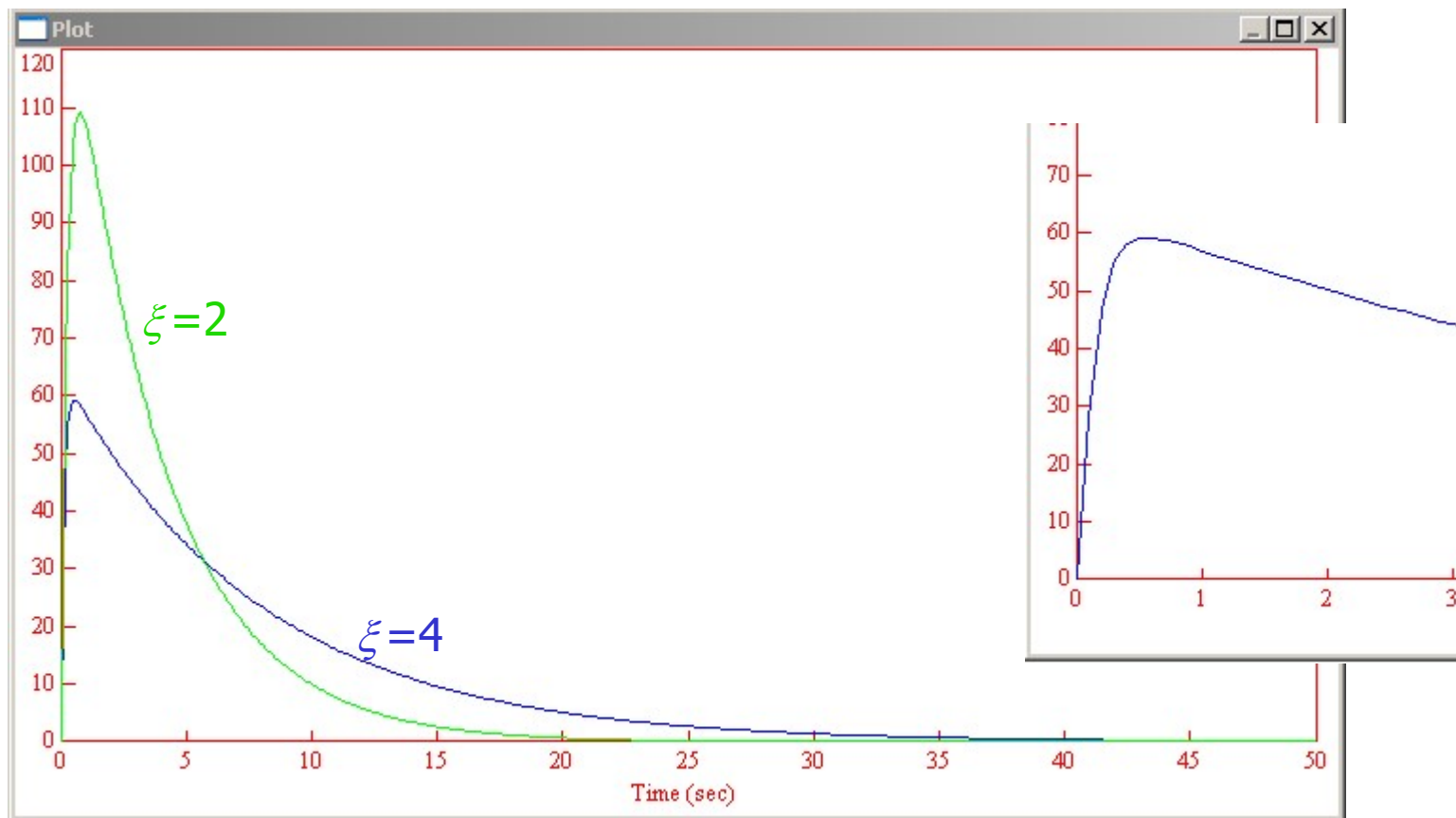
$$y(t) = K \left(C_1 e^{-\omega_n (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) t} + C_2 e^{-\omega_n (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) t} \right)$$

ha $t \rightarrow \infty$ $y(t) \rightarrow 0$ $e \rightarrow 0$ $e \rightarrow 0$

ha $t \rightarrow 0$ $y(t) \rightarrow 0$ $e \rightarrow 1$ $e \rightarrow 1$ de $C_1 = -C_2$

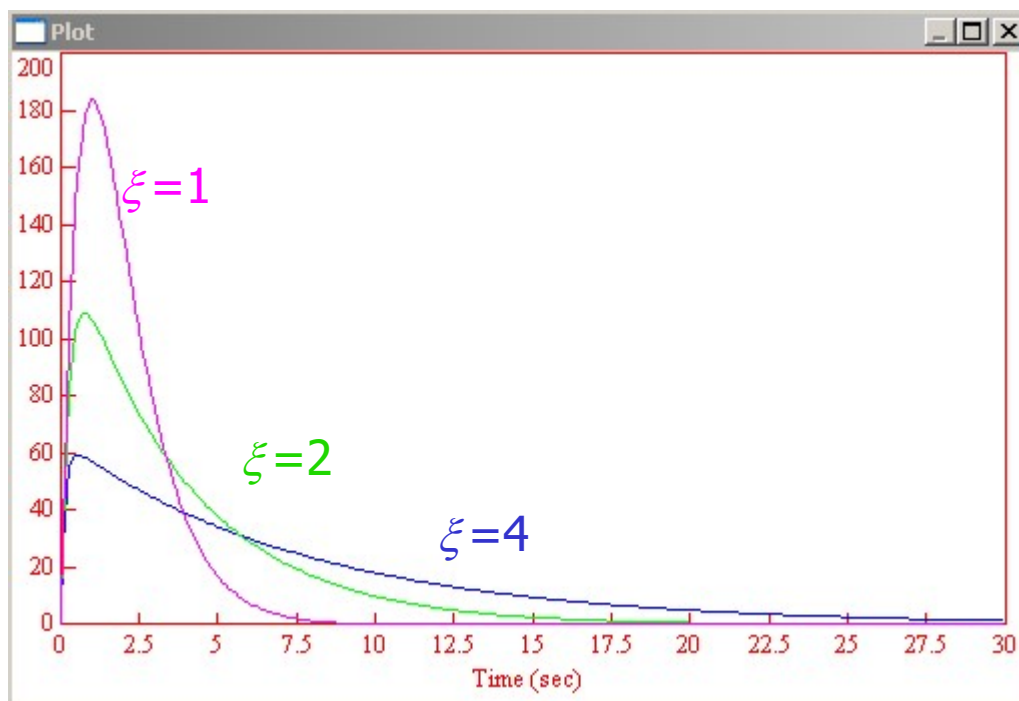
Másodrendű tag

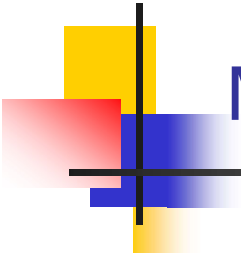
- a túlcsillapított tag súlyfüggvénye:



Másodrendű tag

- legyen $\xi = 1$
 - ekkor $D = 0$; $p_{1,2}$ kétszeres negatív valós pólus
 - az időtartománybeli válasz: $y(t) = K\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$





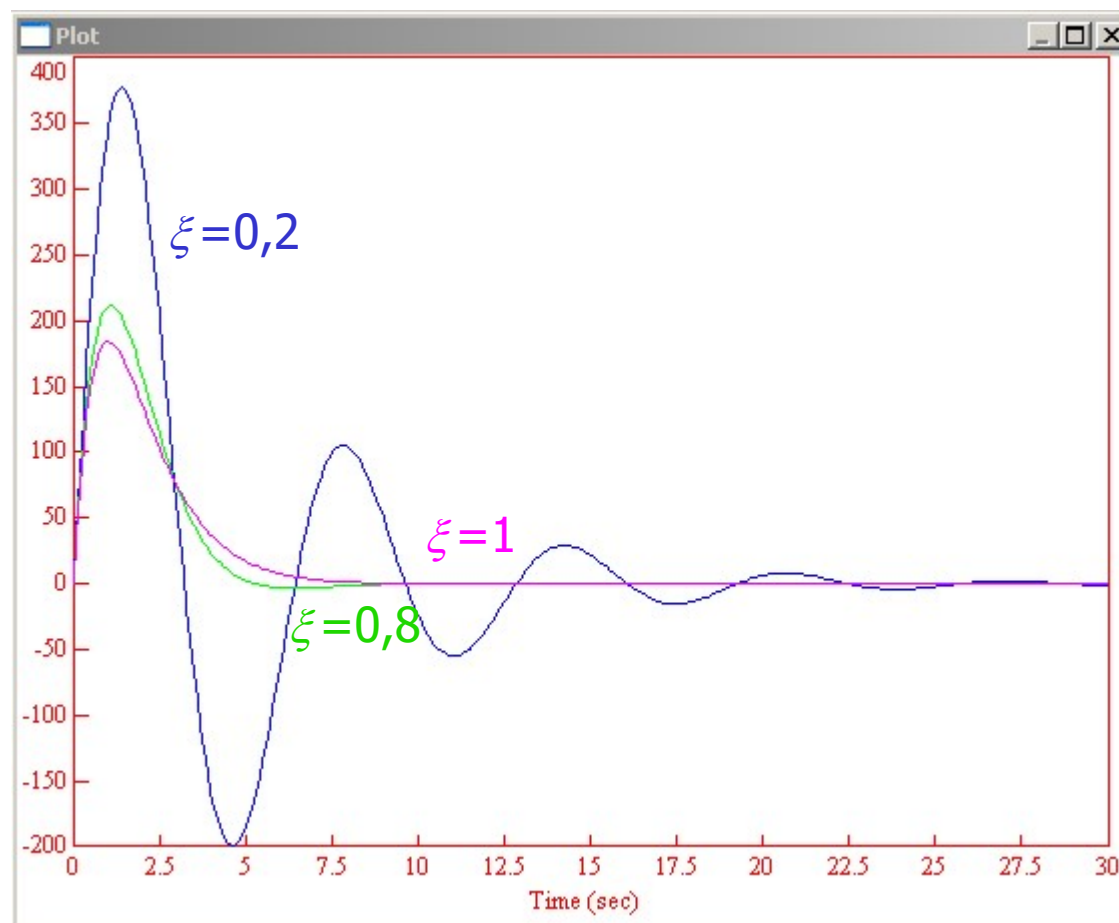
Másodrendű tag

- legyen $0 < \xi < 1$
 - ekkor $D < 0$; $p_{1,2}$ negatív valósrésztű komplex pólusok
 - az időtartománybeli válasz:

$$y(t) = K \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\omega_n \xi t} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right)$$

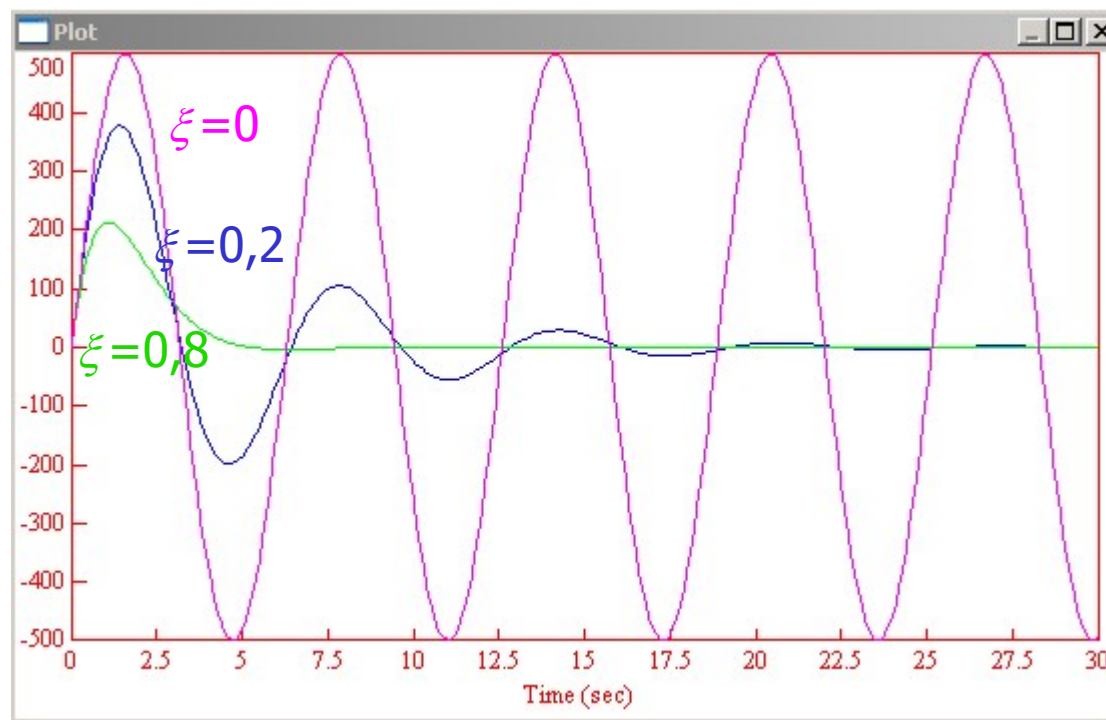
Másodrendű tag

- az alulcsillapított tag súlyfüggvénye:



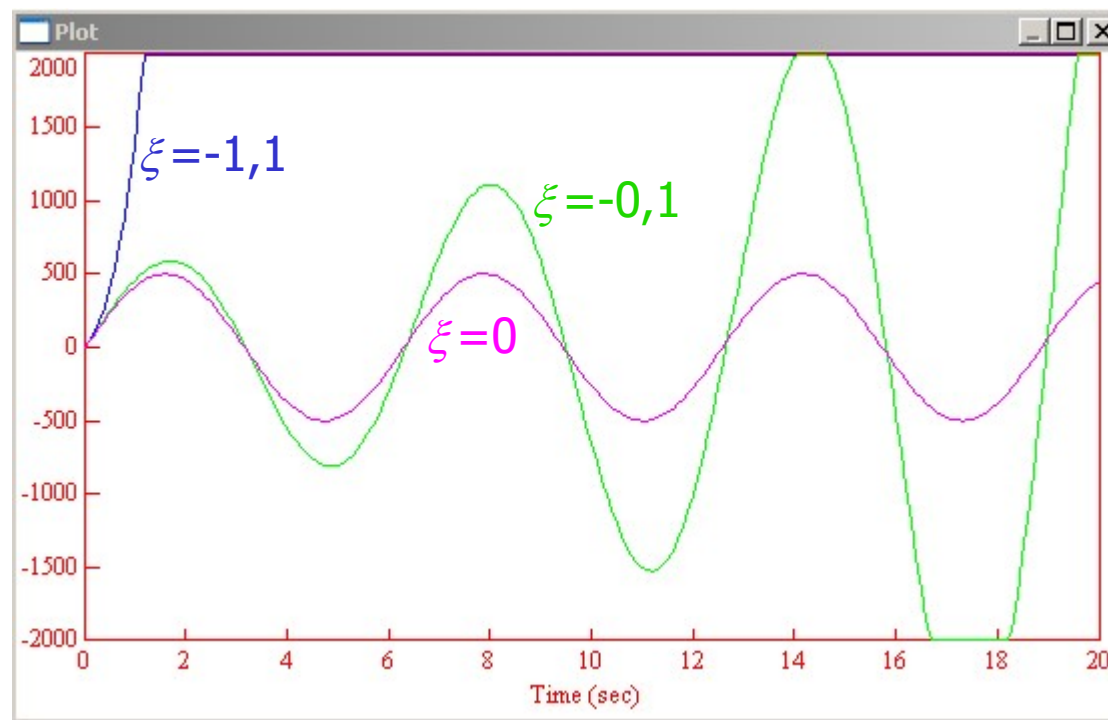
Másodrendű tag

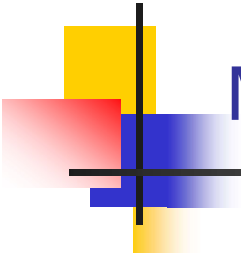
- legyen $\xi = 0$
 - ekkor $D < 0$; $p_{1,2}$ tiszta képzetes pólusok
 - az időtartománybeli válasz: $y(t) = K\omega_n \sin \omega_n t$



Másodrendű tag

- csillapítás nélküli tagok súlyfüggvénye:





Másodrendű tag

- egység-sebességugrásra adott válasz: $u(t) = v(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s^2}$$
$$= K \left(\frac{B_1}{s^2} + \frac{B_2}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} \right)$$

ahol

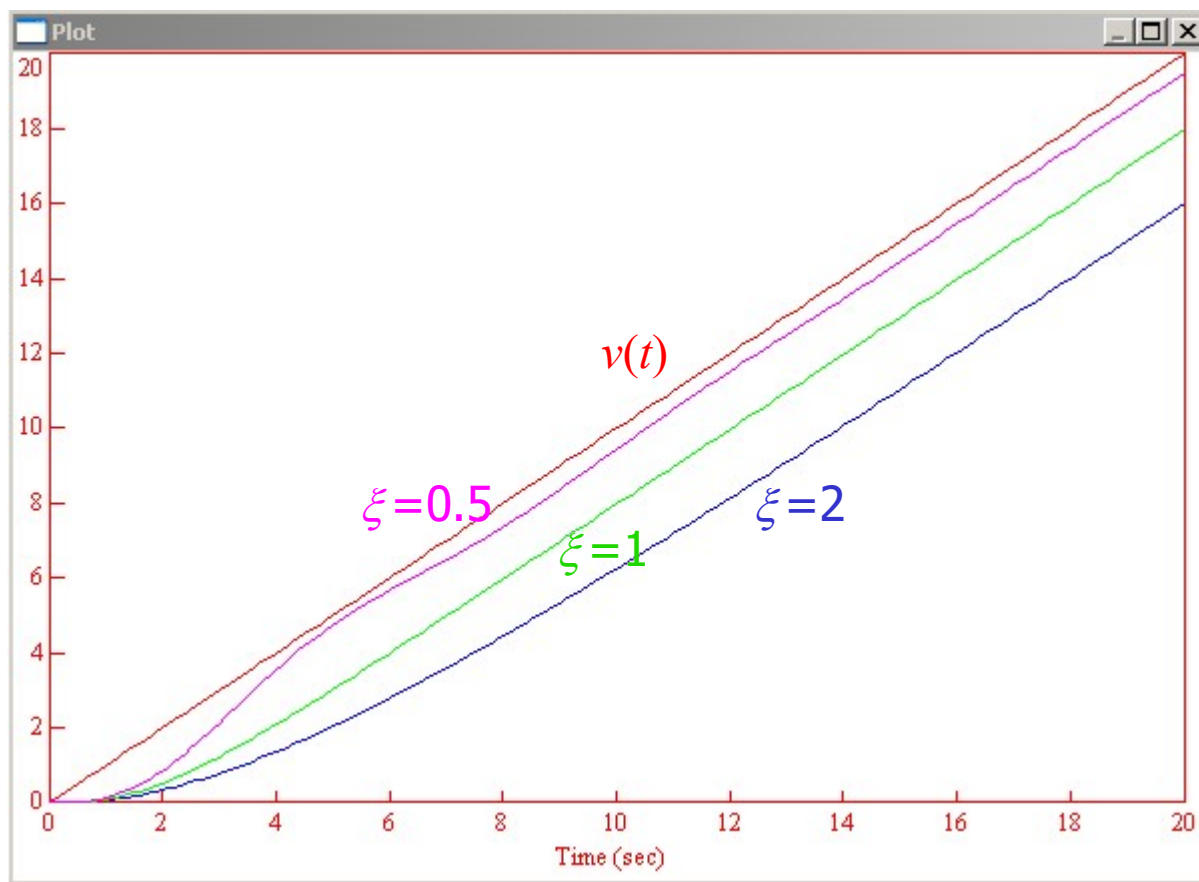
$$B_1 = 1 \quad B_2 = -\frac{2\xi}{\omega_n} \quad A_1, A_2 = \frac{\xi}{\omega_n} \pm \frac{2\xi^2 - 1}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

- az időtartománybeli válasz:

$$y(t) = K \cdot \left(t - \frac{2\xi}{\omega_n} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \right)$$

Másodrendű tag

- válaszfüggvények különböző $\xi > 0$ értékre ($K=1$):

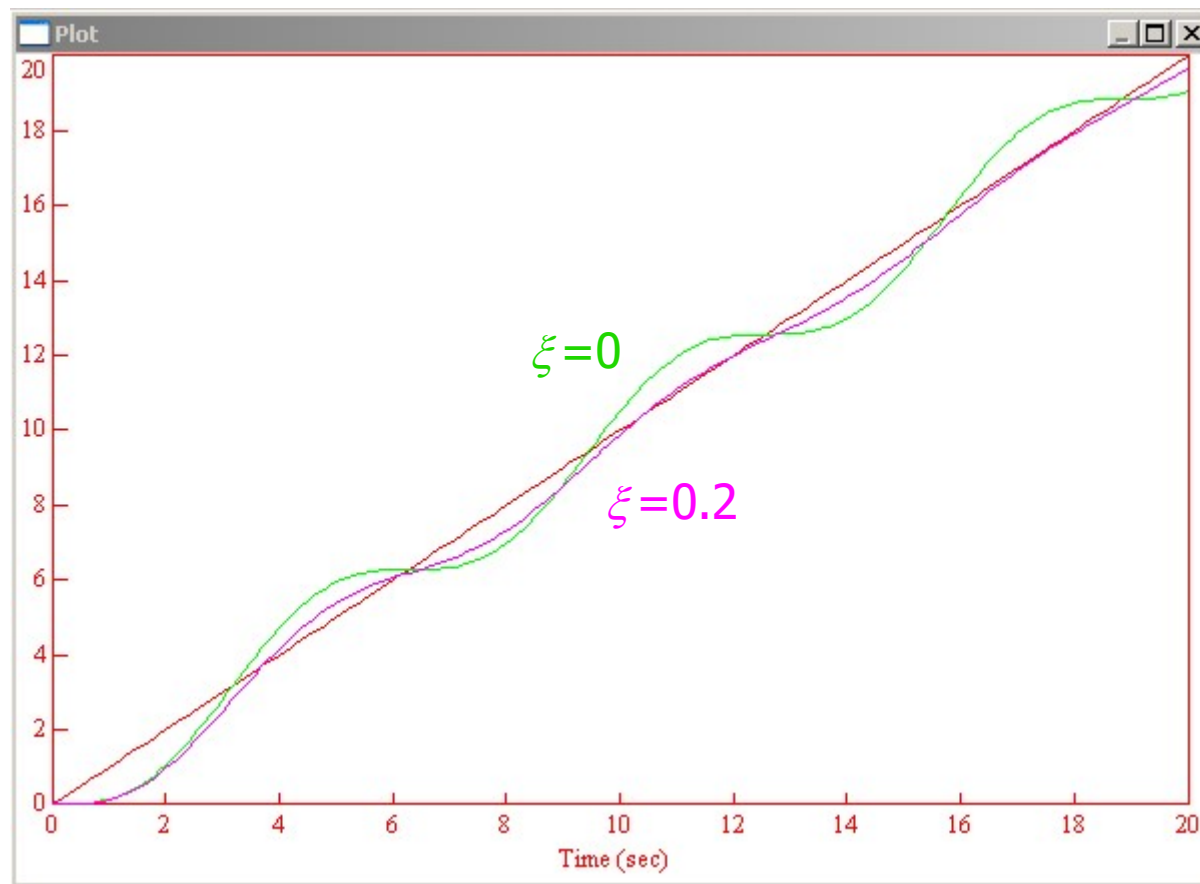


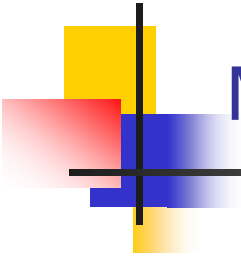
a kimenet
késése:

$$\left(-\frac{2\xi}{\omega_n} \right)$$

Másodrendű tag

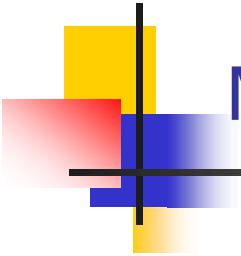
- csillapítás határán lévő tag





Másodrendű tag

- összefoglalva:
 - másodrendű tag (second order system, arányos két időállandós rendszer, kéttárolós PT₂ tag)
 - átviteli függvény:
$$G(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$
 - jellemző paraméterek:
 - K – erősítés (gain)
 - ξ – csillapítási tényező (damping ratio)
 - T – időállandó (time constant) vagy
 ω_n – természetes frekvencia (natural frequency)



Másodrendű tag

- a konkrét bemenettől függetlenül megállapítható, hogy a tranziens részt a

$$A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

kifejezés írja le, ahol

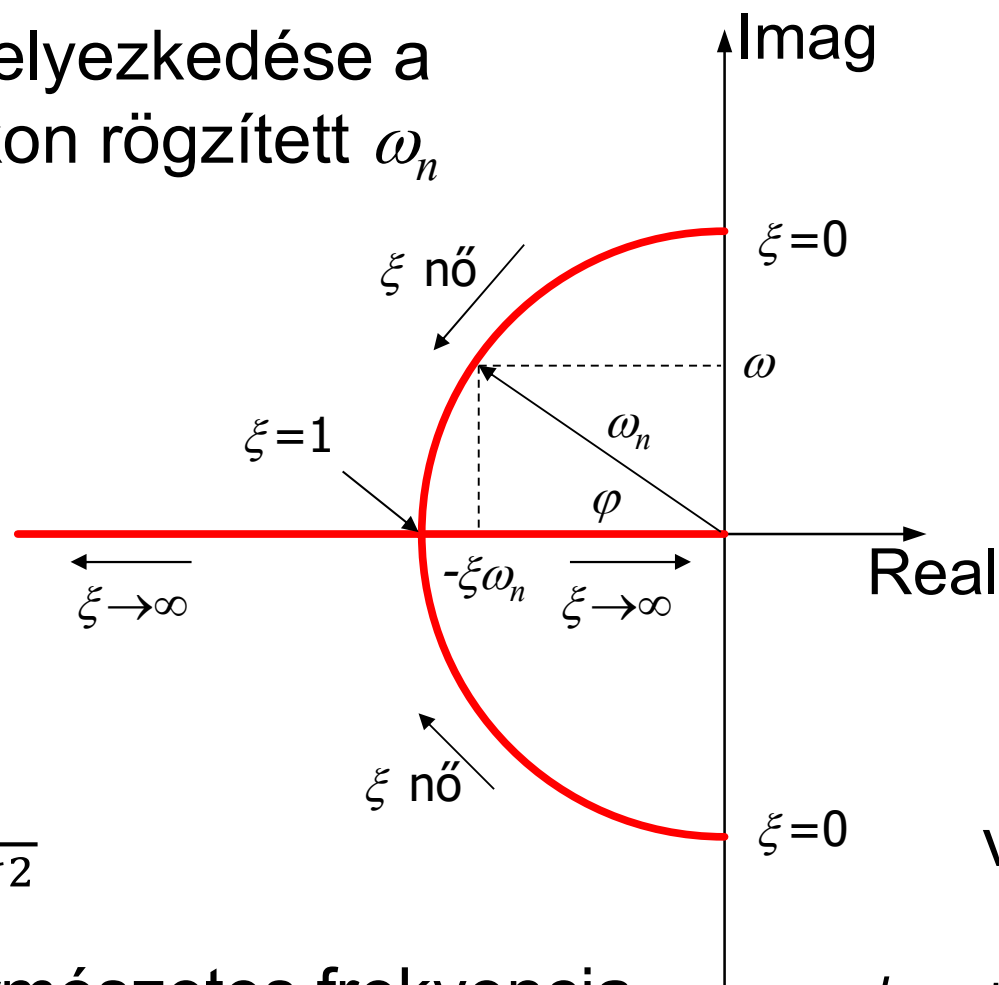
$$p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}, \quad \xi \geq 1$$

vagy

$$p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}, \quad 0 < \xi < 1$$

Másodrendű tag

pólusok elhelyezkedése a komplex síkon rögzített ω_n mellett



ahol

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

csillapított természetes frekvencia

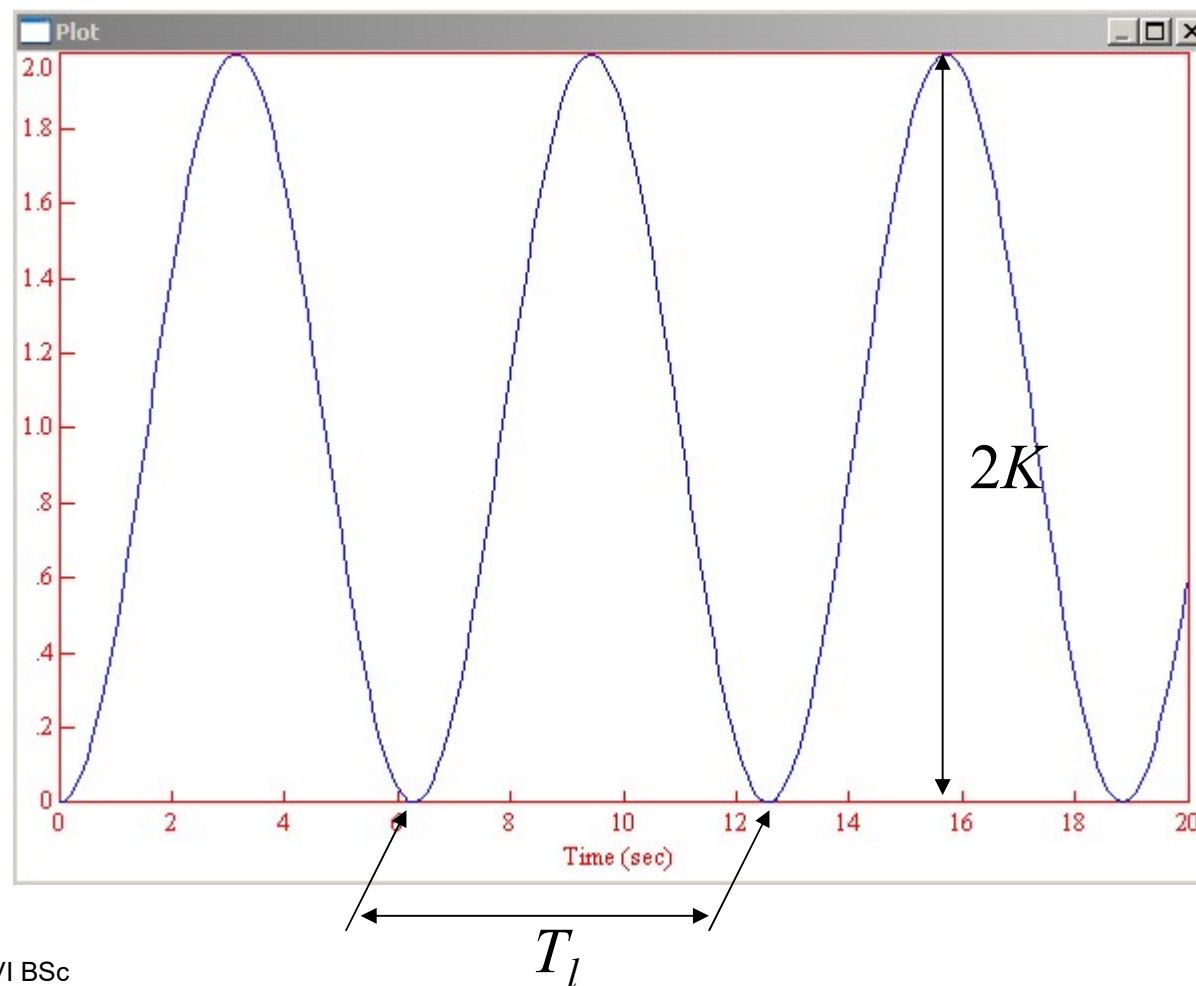
$$\phi = \cos^{-1} \xi$$

vagy

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$

Másodrendű tag

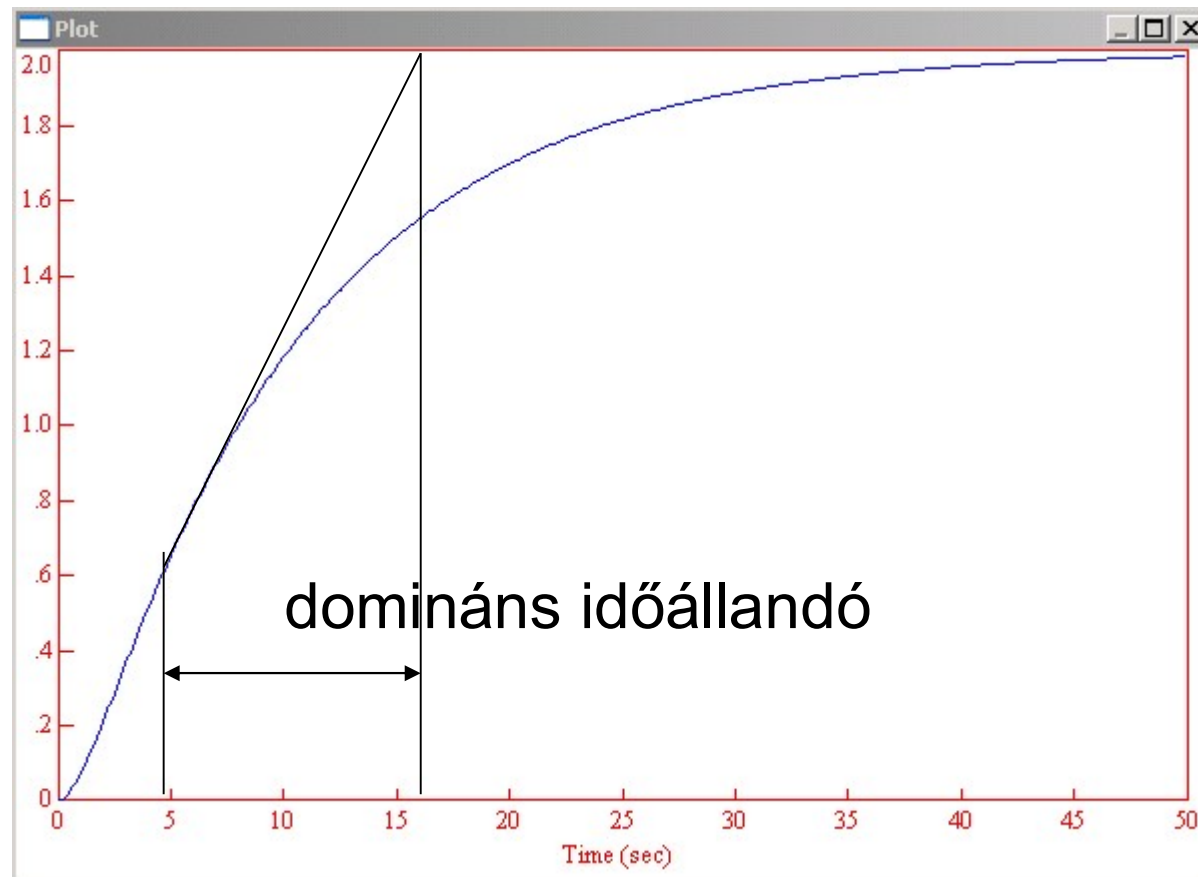
- paraméterek kísérleti meghatározása

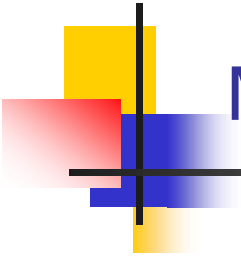


$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_l}$$

Másodrendű tag

- időállandó meghatározása

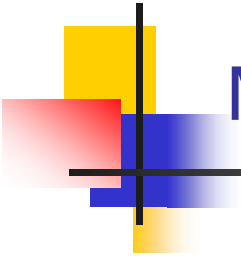




Másodrendű tag

- $n = 2$ és $m = 0$,
- I/O modell: $a_2 y^{(2)} + \cancel{a_1 y^{(1)}} + a_0 y = b_0 u$
- tegyük fel, hogy $a_2, a_0, b_0 \neq 0, a_1 = 0$,
- ekkor az átviteli függvény:

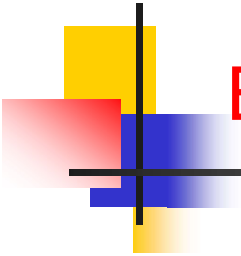
$$G(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_0} = \frac{K}{T^2 s^2 + 1} = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$



Másodrendű tag

$$G(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

- a kapott átviteli függvény alapján a másodrendű tag paramétereit közül a csillapítási tényező zérus, míg az erősítés és a természetes frekvencia az I/O modell alapján meghatározható érték
- a tag pólusainak a valós része is zérus
- a tag viselkedése megfelel a $\xi = 0$ csillapítatlan esetnek



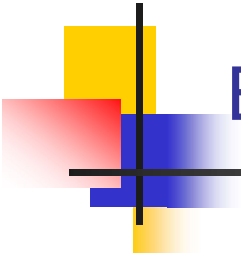
Egytárolós integráló tag

- $n = 2$ és $m = 0$,
- **I/O modell:** $a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + \cancel{a_0 y} = b_0 u$
- tegyük fel: $a_2, a_1, b_0 \neq 0, a_0 = 0$

- átrendezve
$$\frac{a_2}{b_0} y^{(2)} + \frac{a_1}{b_0} y^{(1)} = u$$

$$\frac{a_2}{b_0} = T_2^2 \quad \frac{a_1}{b_0} = T_1$$

$$T_2^2 y^{(2)} + T_1 y^{(1)} = u$$



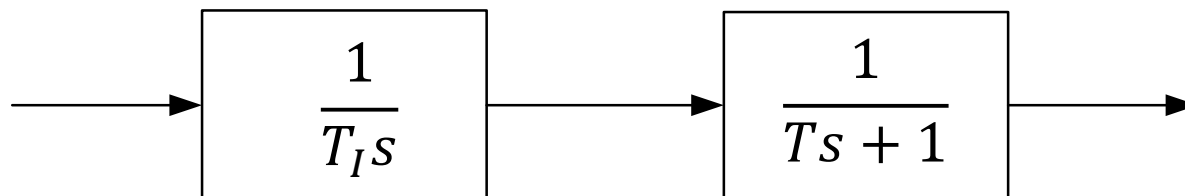
Egytárolós integráló tag

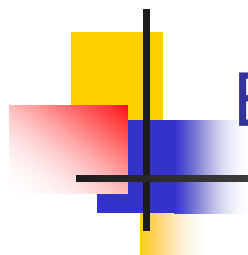
- ekkor az **átviteli függvény:**

$$T_2^2 s^2 Y(s) + T_1 s Y(s) = U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{T_2^2 s^2 + T_1 s} = \frac{1}{T_1 s} \cdot \frac{1}{\frac{T_2^2}{T_1} s + 1} = \frac{1}{T_I s} \cdot \frac{1}{Ts + 1}$$

$$T_I = T_1 \quad T = \frac{T_2^2}{T_1}$$





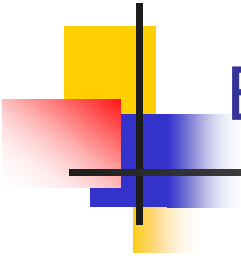
Egytárolós integráló tag

- az átviteli függvény alapján

$$G(s) = \frac{1}{T_I s} \cdot \frac{1}{Ts + 1}$$

a tagnak két pólusa van:

$$s_1 = 0, \quad s_2 = -\frac{1}{T}$$



Egytárolós integráló tag

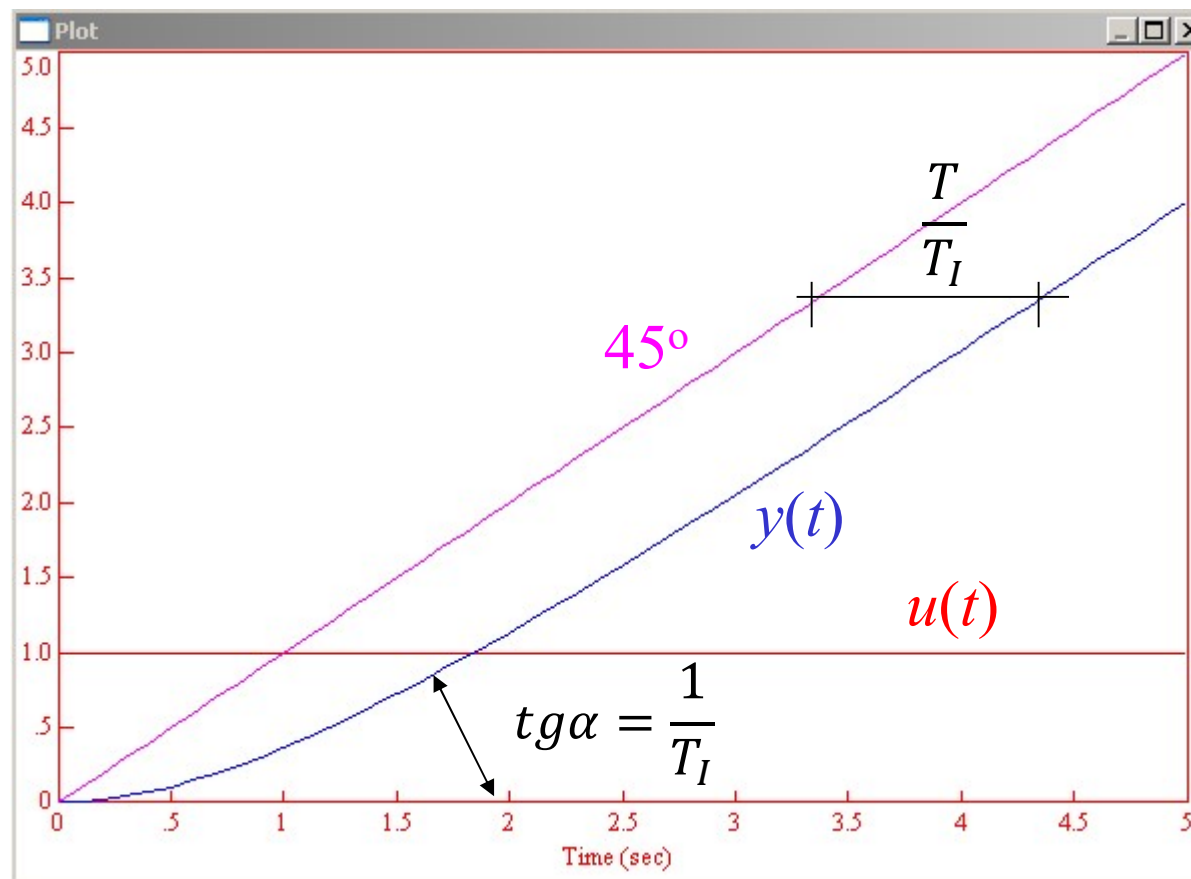
- átmeneti függvény

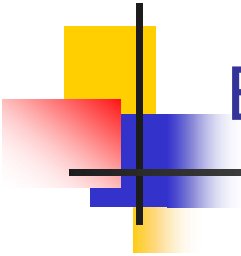
$$Y(s) = G(s)U(s) = \left(\frac{1}{T_I s} \cdot \frac{1}{Ts + 1} \right) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{T_I s^2} \cdot \frac{1}{Ts + 1}$$

$$y(t) = \frac{1}{T_I} \cdot \left(t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \right)$$

Egytárolós integráló tag

- átmeneti függvény





Egytárolós integráló tag

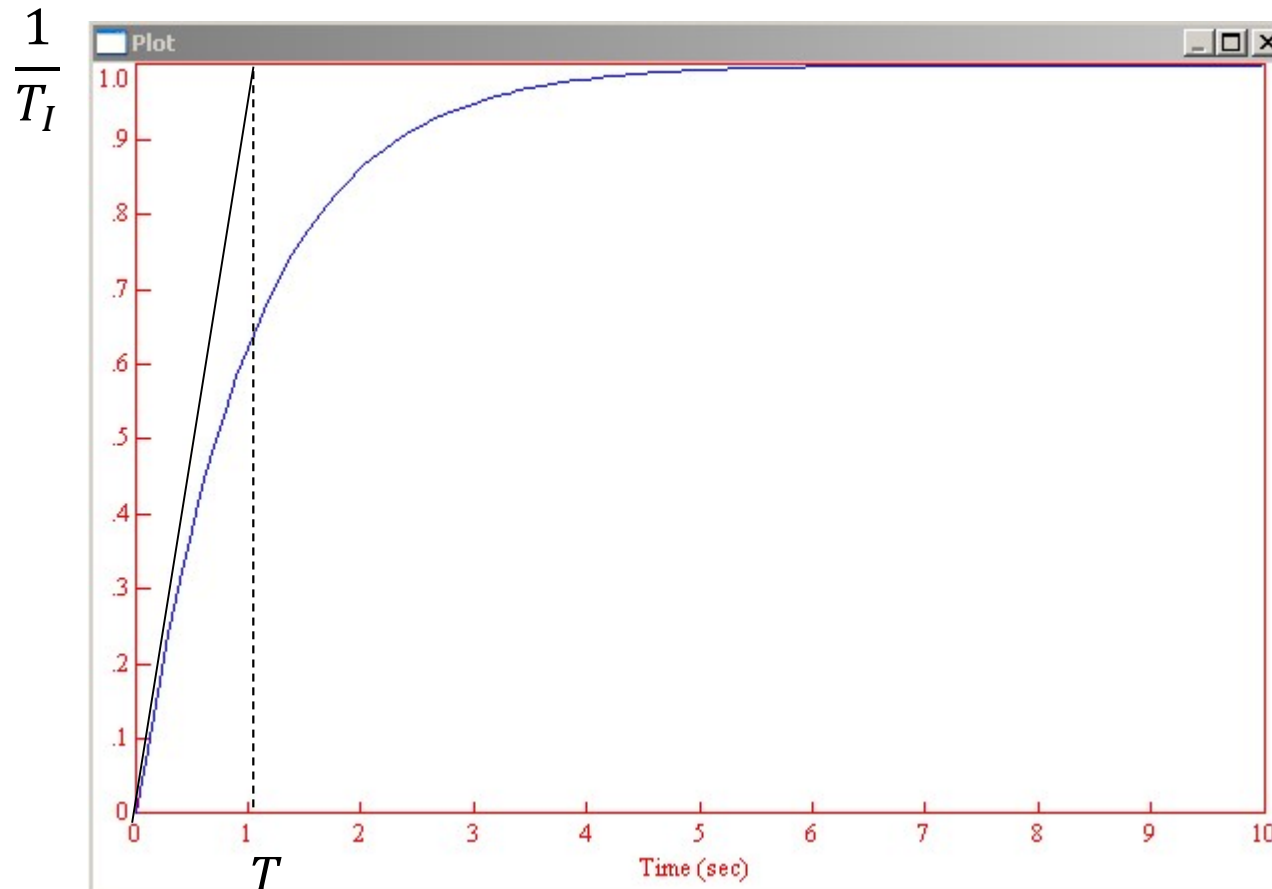
- súlyfüggvény

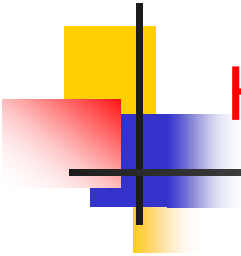
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{T_2^2 s^2 + T_1 s} \cdot 1 = \frac{1}{T_I s} \cdot \frac{1}{Ts + 1}$$

$$y(t) = \frac{1}{T_I} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Egytárolós integráló tag

- súlyfüggvény

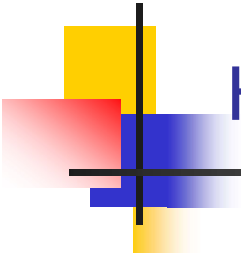




Harmad- és magasabb rendű tagok

- $n > 2$ és $m = 0$,
- **I/O modell:** $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_0 u$
- tegyük fel, hogy $a_0 \neq 0$ $y(0) = y^{(1)}(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$

$$\begin{array}{cccc} \frac{a_n}{a_0} y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{a_0} y^{(n-1)} + \dots + \frac{a_1}{a_0} y^{(1)} + y & = & \frac{b_0}{a_0} u \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ T_n^n & & T_{n-1}^{n-1} & & T_1 & & K \end{array}$$

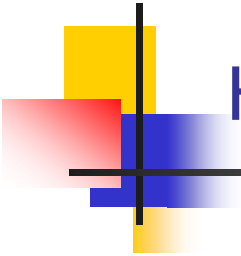


Harmad- és magasabb rendű tagok

- átviteli függvény:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} =$$
$$= \frac{K}{T_n^n s^n + T_{n-1}^{n-1} s^{n-1} + \dots + T_1 s + 1}$$

- a karakterisztikus egyenlet n -ed fokú polinom, így a pólusok száma is n : $p_1, p_2, \dots, p_n$



Harmad- és magasabb rendű tagok

- átmeneti függvény:

- $u(t) = 1(t)$

- válasz operátor tartományban:

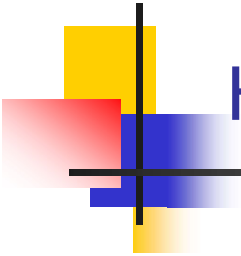
$$Y(s) = G(s)U(s) = K \left(\frac{1}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n} \right)$$

- válasz időtartományban:

$$y(t) = K \cdot (1(t) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}) =$$

$$= K \cdot \left(1(t) + \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} \right)$$

ahol $A_1, A_2, \dots, A_n$ konstansok



Harmad- és magasabb rendű tagok

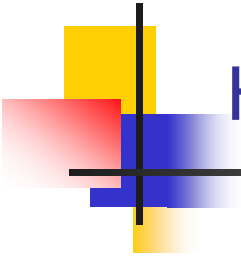
- tehát a válasz:

$$y(t) = K + K \cdot \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}$$

stationárius rész

transziens rész

- a transziens rész tagjainak hatása az együtthatók előjelétől és a pólusok helyétől függ



Harmad- és magasabb rendű tagok

- **súlyfüggvény:**

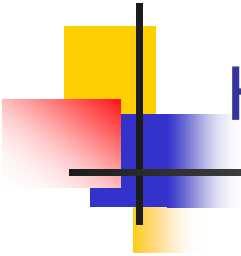
- $u(t) = \delta(t)$
- válasz operátor tartományban:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = K \left(\frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n} \right)$$

- válasz időtartományban:

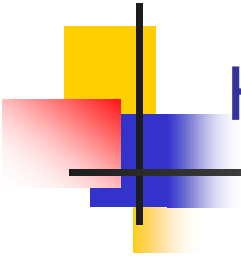
$$y(t) = K \cdot (C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}) = K \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}$$

- ahol $C_1, C_2, \dots, C_n$ konstansok



Harmad- és magasabb rendű tagok

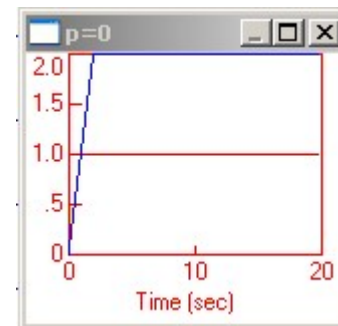
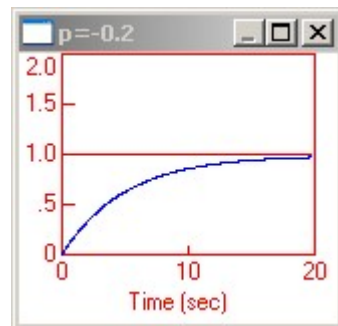
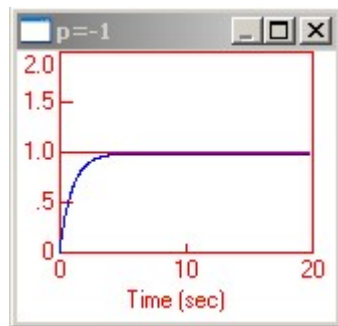
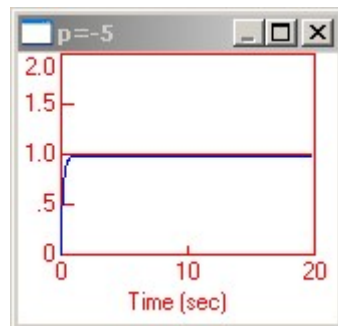
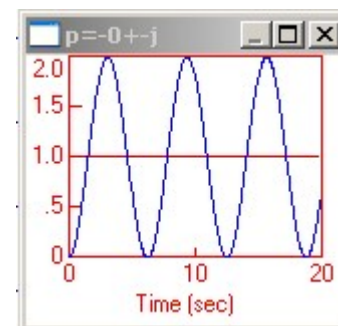
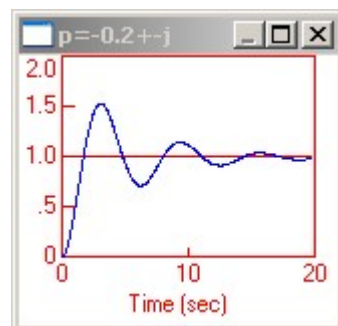
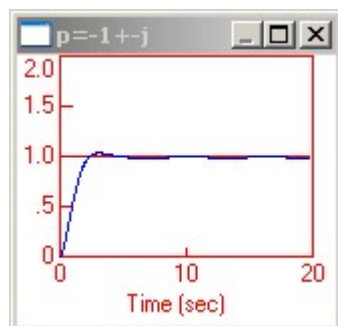
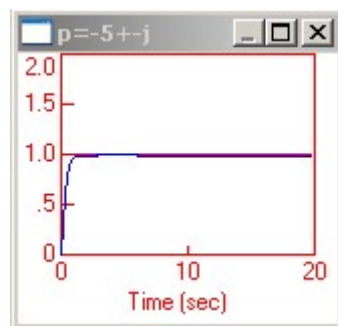
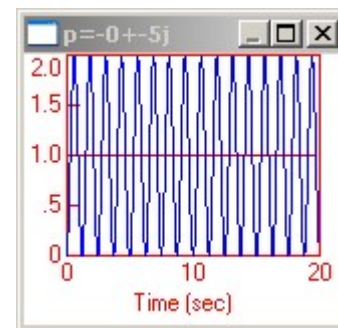
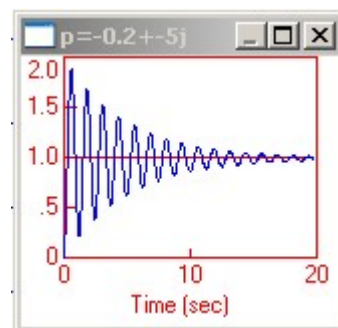
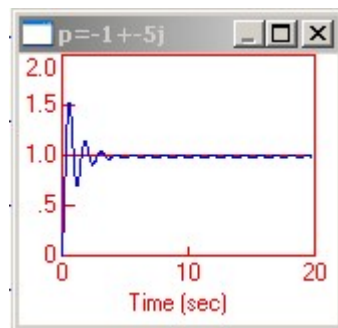
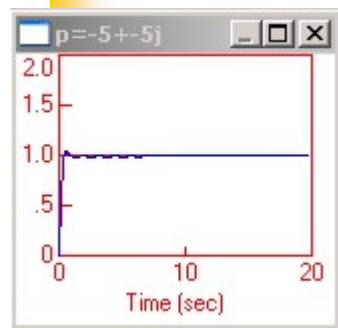
- **pólusok elhelyezkedésének hatása**
 - ha **valamennyi** pólus **negatív valós**, akkor a beállítás hasonló a másodrendű rendszerek $\xi \geq 1$, azaz túlcsillapított esetéhez;
 - ha a pólusok között van **egy** vagy **több komplex konjugált gyökpár**, de minden pólusra igaz, hogy vagy negatív valós vagy negatív valósrésztű, akkor a beállítás hasonló a másodrendű rendszerek $0 < \xi < 1$, azaz alulcsillapított esetéhez



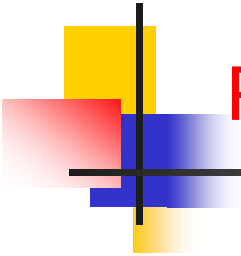
Harmad- és magasabb rendű tagok

- ha van **egy nulla valós részű gyökpár**, de minden más pólus valósrésze negatív, akkor a beállítás hasonló a másodrendű rendszerek $\xi = 0$, azaz csillapítás határa esetéhez;
- ha van egy **nulla gyök**, de minden más pólus valósrésze negatív, akkor a beállítás hasonló az egytárolós integráló tag viselkedéséhez;
- ha van egy **pozitív valós gyök** vagy **pozitív valós részű gyökpár**, akkor a beállítás hasonló a másodrendű rendszerek $\xi < 0$ esetéhez.

Pólusok elhelyezkedésének hatása

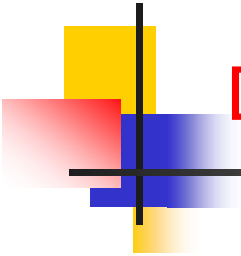


Re



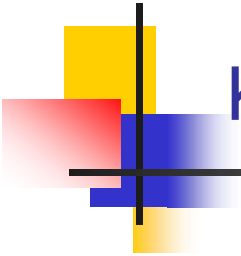
Pólusok elhelyezkedésének hatása

- **domináns pólus:**
ha egy tagnak/rendszernek csak negatív valós vagy negatív valós részű komplex pólusai vannak, akkor ezek közül a képzetes tengelyhez legközelebb elhelyezkedő pólust (a legkisebb abszolút értékű valós résszel rendelkező pólust) domináns pólusnak nevezzük
- **ököl szabály a pólusok figyelembe vételére:**
minden olyan pólus hatását el lehet hanyagolni, amely a képzetes tengelytől 5-6-szor távolabb van, mint a domináns pólus



Differenciáló tagok – Késleltetésmentes eset

- $n = 0$ és $m = 1$,
- **I/O modell:** $a_0 y = b_1 u^{(1)} + b_0 u$ $u(0) = 0$
- legyen $a_0, b_1 \neq 0$ és $b_0 = 0$, így $a_0 y = b_1 u^{(1)}$
- okozatiság miatt elvileg nem lehetséges eset, értelmezése: a kimenet a bemenet megváltozásától függ
- átrendezve
$$y = \frac{b_1}{a_0} u^{(1)} \quad T_D = \frac{b_1}{a_0}$$

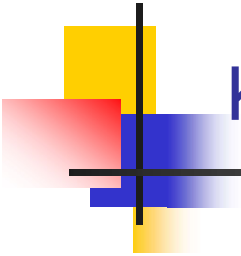


Késleltetésmentes differenciáló tag

- átviteli függvény:

$$Y(s) = T_D s U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = T_D s$$



Késleltetésmentes differenciáló tag

- átmeneti függvény

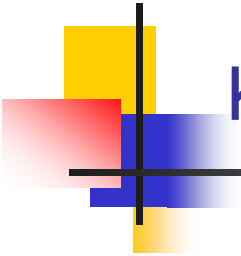
- $u(t) = 1(t)$

- válasz operátor tartományban:

$$Y(s) = G(s)U(s) = T_D s \frac{1}{s} = T_D$$

- válasz időtartományban:

$$y(t) = T_D \delta(t)$$



Késleltetésmentes differenciáló tag

- **súlyfüggvény**

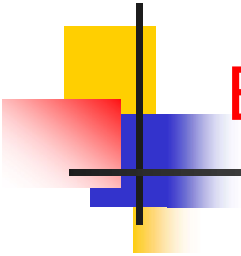
- $u(t) = \delta(t)$
- válasz operátor tartományban:

$$Y(s) = G(s)U(s) = T_D s \cdot 1 = T_D s$$

- válasz időtartományban:

$$y(t) = T_D \frac{d}{dt} \delta(t)$$

dublet (kettős impulzus)



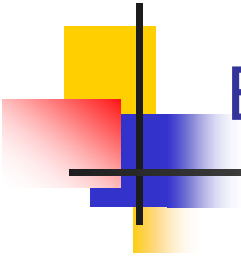
Egytárolós differenciáló tag

- $n = 1$ és $m = 1$,
- **I/O modell:** $a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_1 u^{(1)} + b_0 u$
- tegyük fel, hogy $a_1, a_0, b_1 \neq 0$, de $b_0 = 0$ ekkor

$$a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_1 u^{(1)}$$

$$\frac{a_1}{a_0} y^{(1)} + y = \frac{b_1}{a_0} u^{(1)}$$

$$\Downarrow$$
$$T_1$$
$$\Downarrow$$
$$T_D$$

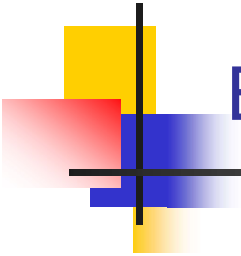


Egytárolós differenciáló tag

- átviteli függvény

$$T_1 s Y(s) + Y(s) = T_D s U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{T_D s}{T_1 s + 1}$$



Egytárolós differenciáló tag

- átmeneti függvény

- $u(t) = 1(t)$
- válasz operátor tartományban:

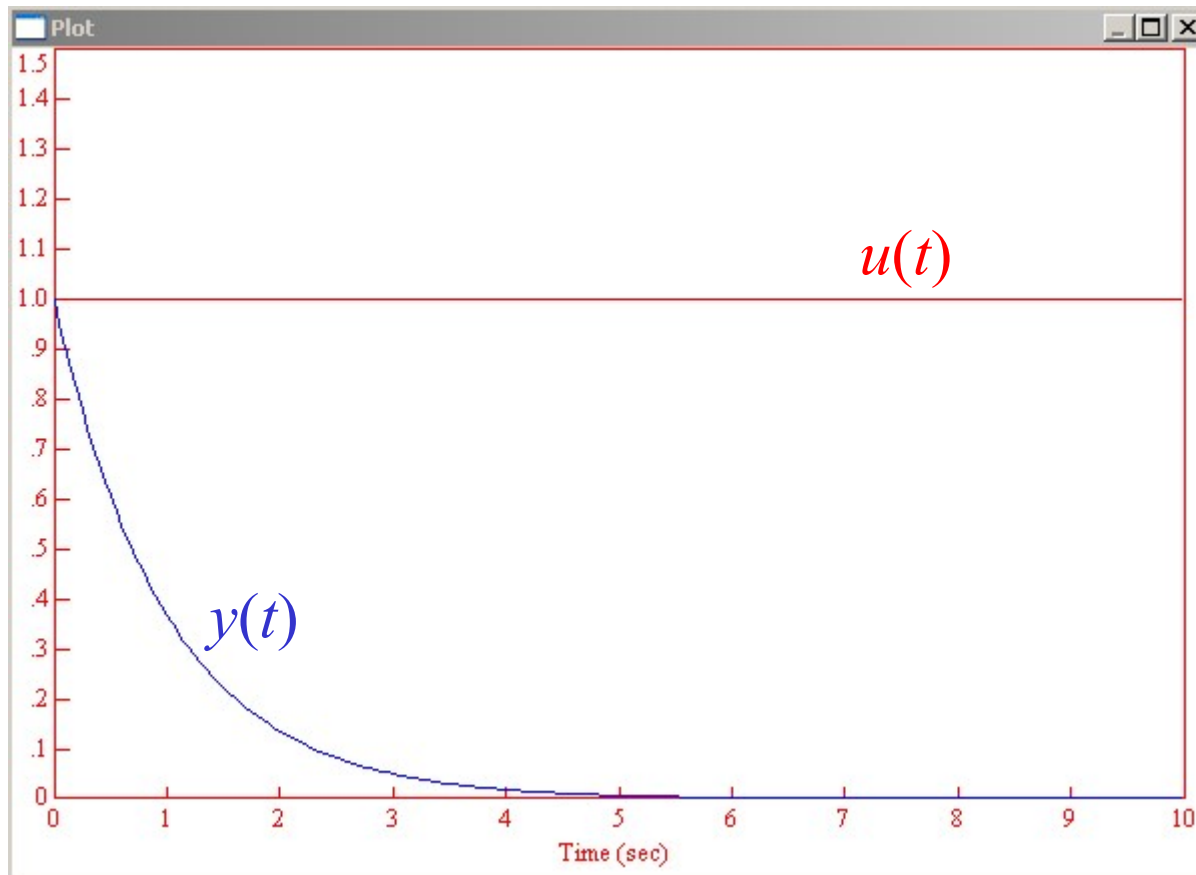
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{T_D s}{T_1 s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{T_D}{T_1 s + 1}$$

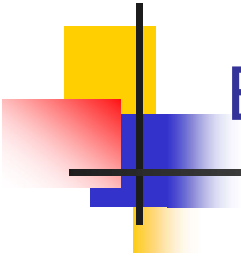
- válasz időtartományban:

$$y(t) = \frac{T_D}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Egytárolós differenciáló tag

- átmeneti függvény





Egytárolós differenciáló tag

- **súlyfüggvény**

- $u(t) = \delta(t)$
- válasz operátor tartományban:

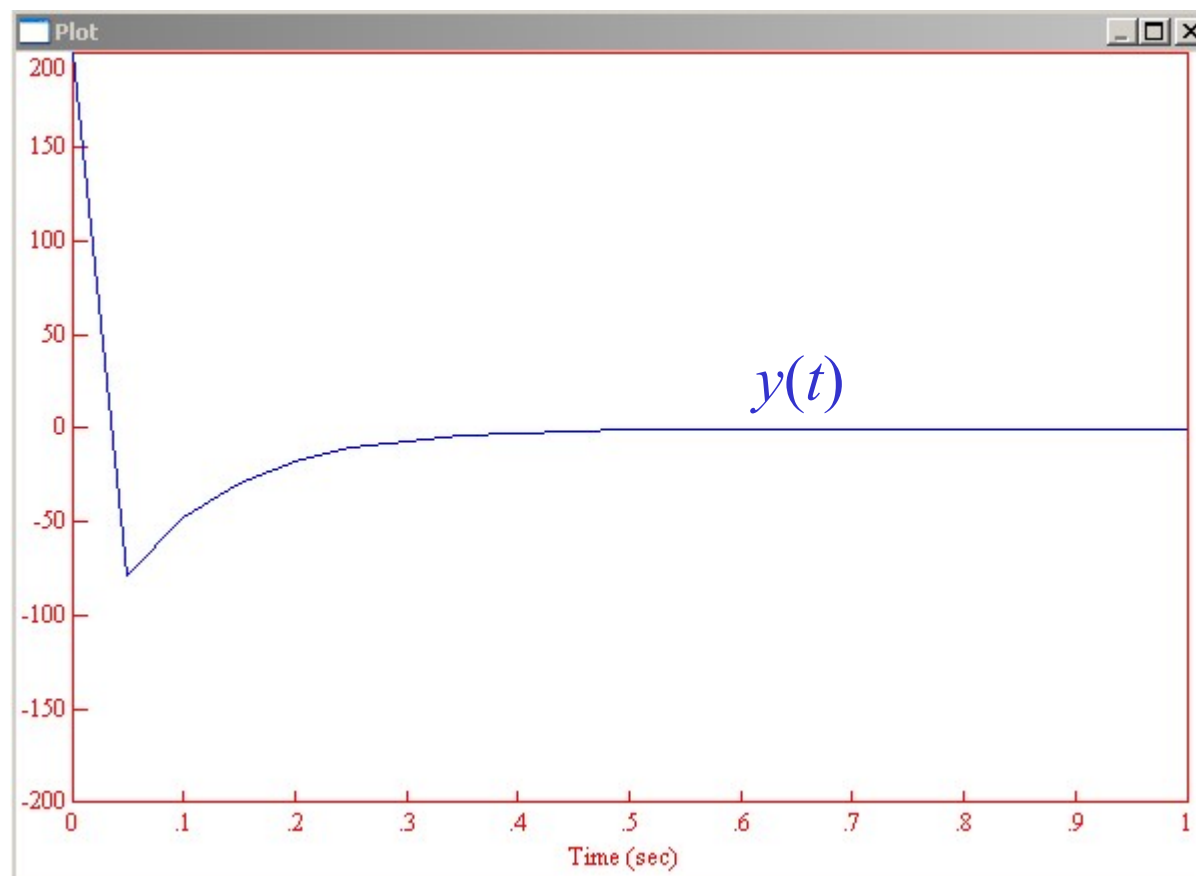
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{T_D s}{T_1 s + 1} \cdot 1 = \frac{T_D}{T_1} - \frac{T_D}{T_1} \frac{1}{T_1 s + 1}$$

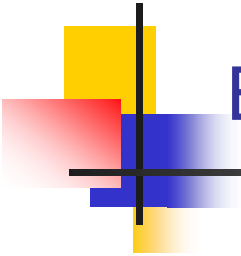
- válasz időtartományban:

$$y(t) = \frac{T_D}{T_1} \delta(t) - \frac{T_D}{T_1^2} e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Egytárolós differenciáló tag

- súlyfüggvény





Egytárolós differenciáló tag

- **válasz sebességugrás bemenetre**

- $u(t) = v(t)$

- válasz operátor tartományban:

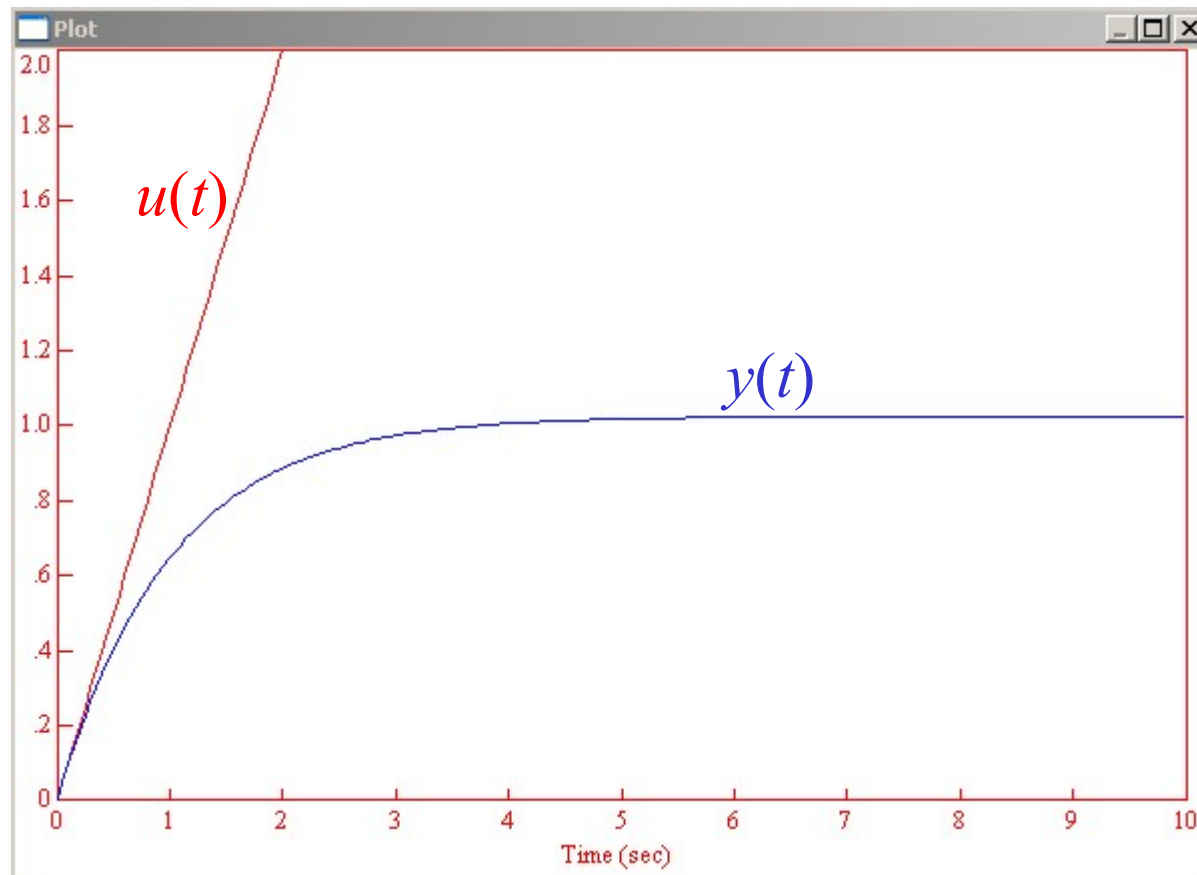
$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{T_D s}{T_1 s + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{T_D}{s(T_1 s + 1)}$$

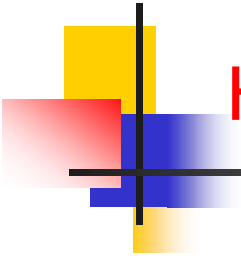
- válasz időtartományban:

$$y(t) = T_D \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$

Egytárolós differenciáló tag

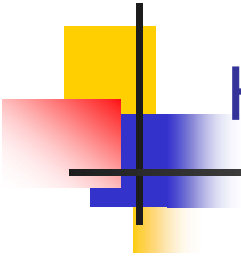
- sebességugrásra adott válasz





Holt idő tagok

- értelmezés:
 - a bemenő jel hatása csak bizonyos idő után jelentkezik a kimeneten
 - okai:
 - fizikai változások/hatások véges terjedési sebessége
 - technológia eszköz konstrukciójából származó okok (szállító szalag, csőreaktor)



Holt idő tagok

- Nulladrendű holtidős tag

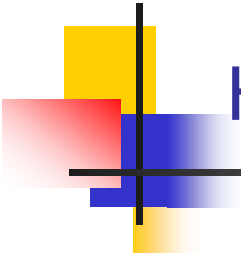
$$y(t) = Ku(t - T_H)$$

ahol T_H a holt idő értéke

- Átviteli függvény

$$Y(s) = K\mathcal{L}\{u(t - T_H)\} = Ke^{-sT_H}U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = Ke^{-sT_H}$$



Holt idő tagok

- átmeneti függvény:

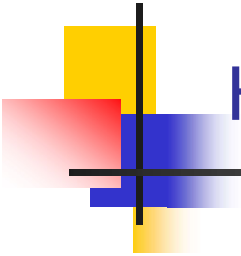
$$Y(s) = K e^{-sT_H} \frac{1}{s}$$

$$y(t) = K \cdot 1(t - T_H)$$

- súlyfüggvény:

$$Y(s) = K e^{-sT_H} \cdot 1$$

$$y(t) = K \delta(t - T_H)$$



Holt idő tagok

- Elsőrendű holtidős tag

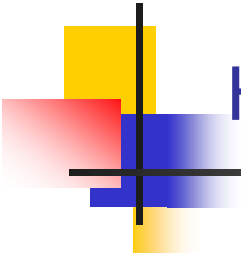
$$\tau y^{(1)}(t) + y(t) = Ku(t - T_H)$$

ahol T_H a holt idő értéke

- Átviteli függvény

$$\tau s Y(s) + Y(s) = e^{-sT_H} U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-sT_H}$$



Holt idős tagok

- átmeneti függvény

$$Y(s) = K e^{-sT_H} \frac{1}{\tau s + 1} \frac{1}{s}$$

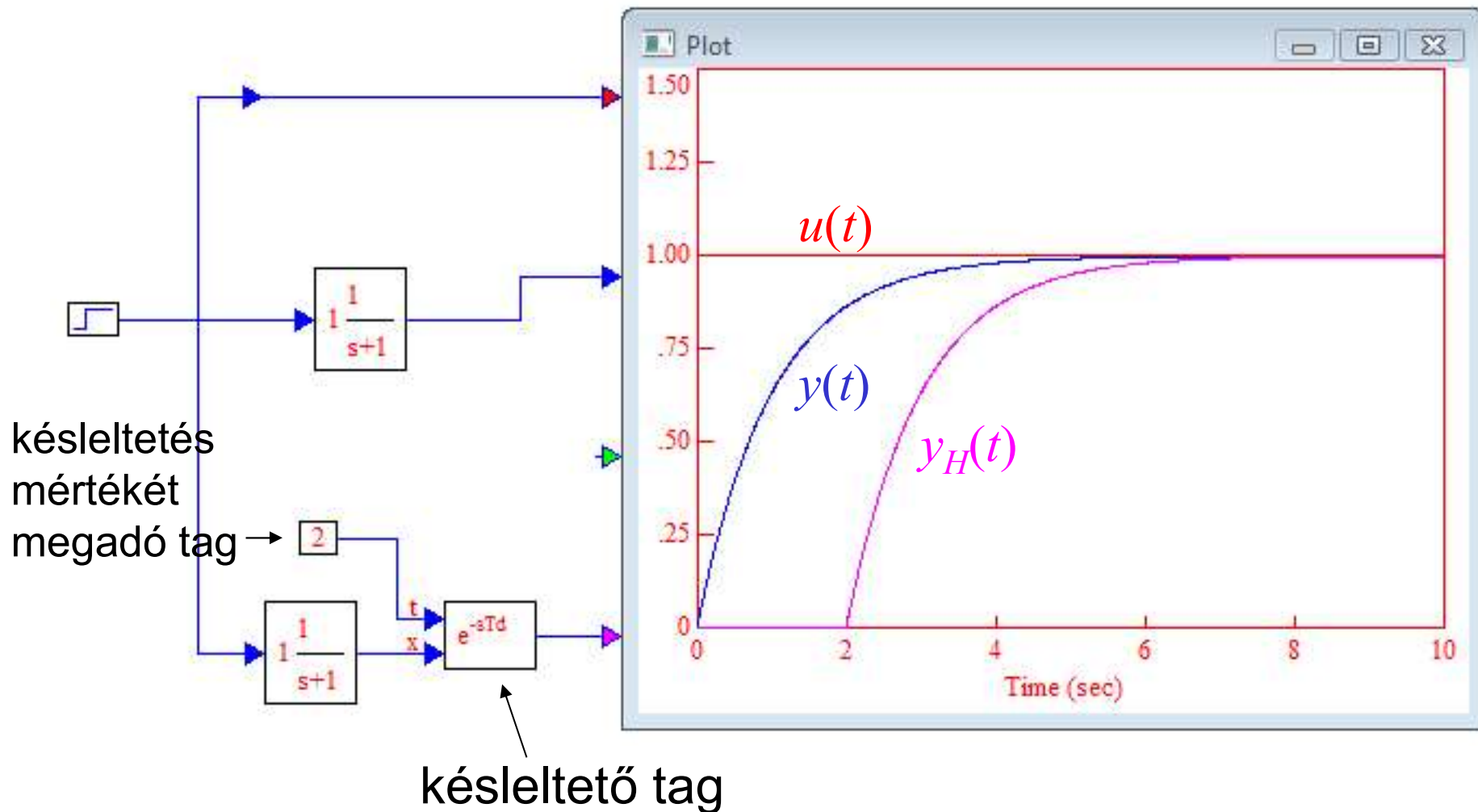
$$y(t) = K \left(1(t - T_H) - e^{-(t - T_H)/\tau} \right)$$

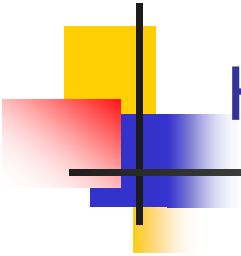
- súlyfüggvény

$$Y(s) = K e^{-sT_H} \frac{1}{\tau s + 1} \cdot 1$$

$$y(t) = K e^{-(t - T_H)/\tau}$$

Holt idős tagok szimulációja





Holt idő tagok

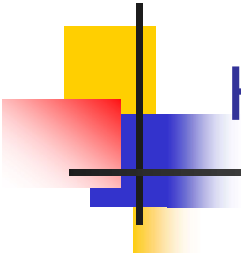
- Integráló tag

$$a_1 y^{(1)}(t) = b_0 u(t - T_H)$$

ahol T_H a holt idő értéke

- Átviteli függvény

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{T_I s} e^{-sT_H}$$



Holt idő tagok

- Másodrendű holtidős tag

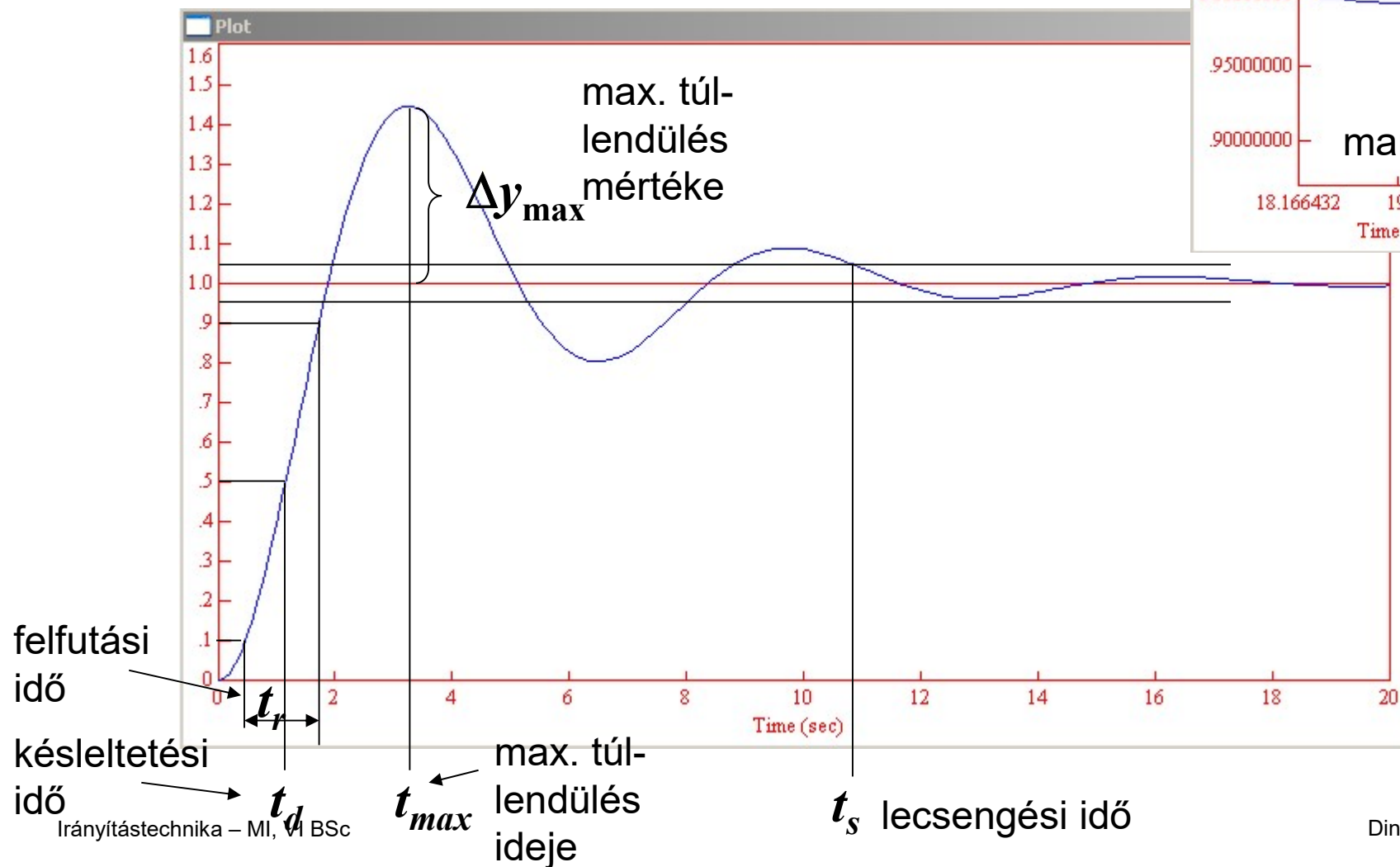
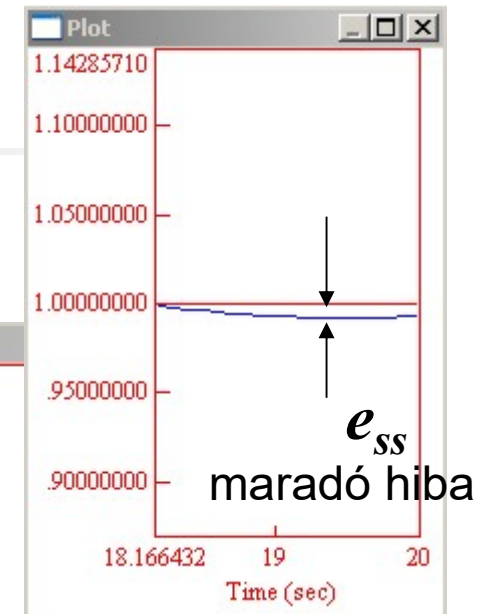
$$a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t - T_H)$$

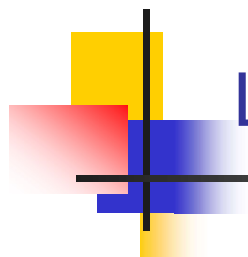
ahol T_H a holt idő értéke

- Átviteli függvény

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} e^{-sT_H}$$

Tranziens jellemzése





Leíró paraméterek meghatározása

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad \Delta y_{max} = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

$$t_d \cong \frac{1 + 0.7\xi}{\omega_n} \quad t_d \cong \frac{1.1 + 0.125\xi + 0.496\xi^2}{\omega_n} \quad 0 < \xi < 1$$

$$t_r \cong \frac{0.8 + 2.5\xi}{\omega_n} \quad t_r \cong \frac{1 - 0.4167\xi + 2.917\xi^2}{\omega_n} \quad 0 < \xi < 1$$

$$t_s \cong \frac{3.2}{\xi \omega_n} \quad 0 < \xi < 0.69 \quad \Delta y_{max} = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$