Bevezetés a lágy számítás módszereibe

Fuzzy logika
Fuzzy irányítási rendszerek

Werner Ágnes

Villamosmérnöki és Információs Rendszerek Tanszék

e-mail: werner.agnes@virt.uni-pannon.hu

Felépítés

1. **Szabálybázis**: ez a modell *"Ha a bemenet* A*, akkor a kimenet* B*"* típusú szabályokból áll (A és B fuzzy halmazok
2. **illeszkedési mértéket meghatározó egység**: a szabálybázis *antecedens* elemeit hasonlítja össze az aktuális megfigyelés függvényével vagy konkrét értékével, és a tüzelő szabályoknál meghatároz egy 0 és 1 közötti fuzzy illeszkedési mértéket
3. **következtető gép**: az illeszkedési mérték meghatározása után a kapott súlyokat valamilyen módon a fuzzy szabálybázisban található tüzelő szabályok *konzekvens*eivel általában egy konjunkció segítségével kombinálja
4. **defuzzifikáló egység**: valamilyen módon a kapott fuzzy tagsági függvény legjellemzőbb, valamilyen értelemben vett középértékét választja ki

A szabálybázis szerkezete

A tudásbázis analízise
Információt gyűjthetünk több féle képpen:

- **közvetlen eljárás**: nyelvi szabályok
- bizonyos ideig **megfigyeljük az operátor munkáját** irányítás közben
- **metaszabálybázis** alkalmazása

A fuzzy szabálybázis alkotói **természetes nyelvi** vagy közvetlenül **fuzzy szabályok**kal kifejezett szabályok:

$R: \quad Ha \;\; x = A \;\; akkor \;\; y = B$

$x \in X$ a bemeneti változó, $y \in Y$ a kimeneti változó vagy következtetés

X és Y rendre a bemeneti és kimeneti változók alaphalmaza

A és B nyelvi változók

A az R szabály antecedense (előzménye)

B az R szabály konzekvense (következménye)

Ha a szabályban szereplő nyelvi változók fuzzy halmazok, akkor **fuzzy szabály**ról beszélünk.

Közlekedési lámpa

- szabály: "Ha a forgalom erős északi irányból, akkor a lámpa legyen hosszabb ideig zöld."
- x bemenet = északi irányú forgalom
- y kimenet = mi a teendő a zöld lámpával
- A = erős forgalom (fuzzy halmaz)
- B = hosszabb ideig legyen zöld (fuzzy halmaz)

Több dimenziós szabályok

a rendszernek n bemenete és m kimenete van
$R_i: \quad Ha \;\; \underline{x} = \underline{A_i} \;\; akkor \;\; \underline{y} = \underline{B_i}$ alakú

ahol $\underline{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ a bemeneti értékek vektora $x_j \in X_j$,
$X = X_1 \times \ldots \times X_n$ az alaphalmaz

$\underline{A_i} = \langle A_{1i}, \ldots, A_{ni} \rangle$ az antecedens halmazok vektora, $\underline{A_i} \in X$

$\underline{y} = \langle y_1, \ldots, y_m \rangle$ a kimeneti változók vektora $y_i \in Y_i$

$Y = Y_1 \times \ldots \times Y_m$ a kimeneti változók alaphalmaza

$\underline{B_i} = \langle B_{1i}, \ldots, B_{mi} \rangle$ a konzekvens halmazok vektora, $\underline{B_i} \in Y$ és
$i \in [1, r]$, ahol r a szabályok száma

Több dimenziós szabályok

A szabály felírható:

R_i: $Ha\ \ x_1 = A_{1,i}$ és ... és $x_n = A_{n,i}$ akkor $\underline{y} = \underline{B_i}$

A kimenő változók értékei függetlenek egymástól:

$R_i \longrightarrow \{R_{1,i}, \ldots R_{m,i}\}$ ahol

$R_{1,i}$: $Ha\ \ x_1 = A_{1,i}$ és ... és $x_n = A_{n,i}$ akkor $y_1 = B_{1,i}$

$\vdots$

$R_{m,i}$: $Ha\ \ x_1 = A_{1,i}$ és ... és $x_n = A_{n,i}$ akkor $y_m = B_{m,i}$

A szabályok ábrázolása fuzzy relációkkal

A konjunkció alapú modell az egyes szabályokat adatpárokként kezeli.
Az R_i **fuzzy szabály-reláció** az $X \times Y$ Descartes-szorzattéren értelmezett **fuzzy halmaz**, amely az
$R_i(x, y) : \quad \mu_{R_i(x,y)}(x, y) = t(A_i(x), B_i(y)), \quad (x, y) \in X \times Y,$
ahol t egy tetszőleges t-norma

Zadeh-féle t-norma:
$\mu_{R_i(x,y)}(x, y) = min(A_i(x), B_i(y))$

R fuzzy szabálybázis-reláció:
$R = \bigcup_{i=1}^{r} R_i$

Ha a Zadeh-féle uniót használjuk t-konormaként, akkor a teljes R relációt $\mu_{R(x,y)}(x, y) = max_{i=1}^{r}(\mu_{R_i(x,y)}(x, y)) = max_{i=1}^{r}(min(A_i(x), B_i(y)))$ alakban írhatjuk fel.

Nyelvi változó

- Értékei természetes (vagy mesterséges) nyelvi szavak vagy kifejezések lehetnek
- Fuzzy halmazokkal adhatjuk meg
- Az információ egységeknek minden dimenzióban nyelvi változók értékei felelnek meg
- A nyelvi változók értékei felosztják, részlegesen lefedik a változóhoz tartozó alaphalmazt
- Feltételek a bemeneti nyelvi változókhoz tartozó fuzzy halmazokra:
  - Együttesen fedjék le az alaphalmazt: $\forall x \in X, \exists i \in [1, n] : A_i(x) \geq \epsilon \quad \epsilon > 0$ az X lefedettségének a mértéke
    - Az $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ fuzzy halmazcsaládot az X alaphalmaz **fuzzy partíció**jának nevezzük
    - Ha az A_i halmazok tagsági értékének összege $\forall x$ alaphalmazbeli elemre vonatkozóan 1, akkor az A halmazcsalád ún. **Ruspini-partíció**t alkot: $\sum_{i=1}^{n} A_i(x) = 1, \forall x \in X$
  - Megfelelő alaphalmaz kiválasztása
  - Az alaphalmaz skálázását úgy kell megoldani, hogy kis számú fuzzy halmazzal lefedhető legyen

Mamdani-féle fuzzy irányítási rendszerek

- *Zadeh javaslata*: a modellt $\langle X \times Y, \mu_R \rangle$ formában fuzzy relációként interpretáljuk, ahol $\mu_R : X \times Y \to [0,1]$
- A megfigyelés ekvivalencia relációként fogalmazható meg: $A^* : X \times X \to [0,1]$
- Lehetővé válik a következtetés fuzzy kompozícióként való előállítása: $B^* = A^* \circ R$
- *Mamdani javaslata* a nagy számításigény miatt: több dimenziós X bemenet esetén nem magán az R reláción, hanem annak projekcióin működő algoritmust használ
- A következtető algoritmus ***1. lépése***: az **aktuális megfigyelés** (bemeneti értékek) és a **szabályok** antecedenseinek **illesztése**

Mamdani-féle fuzzy irányítási rendszerek

2. lépés: **illeszkedés mértékének** meghatározása $\Longrightarrow$ az egyes szabályok milyen mértékben játszanak szerepet a konklúzió megalkotásában

Legyen az $\underline{A^*} \in X_1 \times \ldots \times X_n$ az n dimenziós megfigyelésvektor az r szabály:

R_i: Ha $x_1 = A_{1,i}$ és ... és $x_n = A_{n,i}$ akkor $\underline{y} = \underline{B_i}$ alakú

az illeszkedés mértéke a j-edik dimenzióban $j \in [1, n]$ a

$w_{j,i} = max_{x_j}\{min\{A_j^*(x_j), A_{j,i}(x_j)\}\}$ **súlyfaktor**

3. lépés: az R_i szabály alkalmazhatósága a súlyfaktorok minimumaként határozható meg

$w_i = min_{j=1}^n w_{j,i}$

4. lépés: $B_i^* = min(w_i, B_i(y))$

5. lépés: összesített következtetés

$B^* = \cup_{i=1}^r B_i^*$ azaz $B^*(y) = max_{i=1}^r B_i^*(y)$

Mamdani-féle fuzzy irányítási rendszerek

Figyeljük meg a módszerben a fuzzy relációk megjelenését. A szabálybázis reláció
$R(x_1,\ldots,x_n,y) = max_{i=1}^{r}\{min_{x,y}\{A_{1,i}(x_1),\ldots,A_{n,i}(x_n),B_i(y)\}\}$
$R(\underline{x},y) = max_{i=1}^{r}\{min_{\underline{x},y}\{A_i(\underline{x}),B_i(y)\}\}$ alakban írható fel.

A következőt kapjuk:
$w_{j,i} = max_{x_j}\{min_{x_j}\{A_j^*(x_j),A_{j,i}(x_j)\}\}$

$$w_i = min_j\{max_{x_j}\{min_{x_j}\{A_j^*(x_j),A_{j,i}(x_j)\}\}\} =$$
$$= max_{x_j,j}\{min_j\{min_{x_j}\{A_j^*(x_j),A_{j,i}(x_j)\}\}\} =$$
$$= max_{\underline{x}}\{min_{\underline{x}}\{A^*(\underline{x}),A_i(\underline{x})\}\}$$

Mamdani-féle fuzzy irányítási rendszerek

$$B_i^*(y) = min_y\{B_i(y), max_{\underline{x}}\{min_{\underline{x}}\{A^*(\underline{x}), A_i(\underline{x})\}\}\}$$
$$= max_{\underline{x}}\{min_y\{B_i(y), min_{\underline{x}}\{A^*(\underline{x}), A_i(\underline{x})\}\}\}$$
$$= max_{\underline{x}}\{min_{\underline{x},y}\{B_i(y), A^*(\underline{x}), A_i(\underline{x})\}\}$$

$$B^*(y) = max_{i=1}^r\{max_{\underline{x}}\{min_{\underline{x},y}\{B_i(y), A^*(\underline{x}), A_i(\underline{x})\}\}\}$$
$$= max_{\underline{x}}\{max_{i=1}^r\{min_{\underline{x},y}\{A^*(\underline{x}), min_{\underline{x},y}\{A_i(\underline{x}), B_i(y)\}\}\}\}$$
$$= max_{\underline{x}}\{min_{\underline{x},y}\{A^*(\underline{x}), max_{i=1}^r min_{\underline{x},y}\{A_i(\underline{x}), B_i(y)\}\}\}$$

$$B^*(y) = max_{\underline{x}}\{min_{\underline{x},y}\{A^*(\underline{x}), R(\underline{x}, y)\}\}$$

A Mamdani-módszer következtetési algoritmusa által előállított konklúzió a **megfigyelés és a szabálybázis reláció max-min kompozíciója**:
$B^* = A^* \circ R$
Kompozíciós következtetési eljárás

Defuzzifikációs módszerek

- A következtetési algoritmus erdményül fuzzy halmazt ad.
- **Defuzzifikálás**: a fuzzy konklúzióból ki kell választani egy konkrét értéket, amely az adott fuzzy halmazt a legjobban jellemzi.
  1. Súlypont módszer (COG)
  2. Geometriai középpont módszer (COA)
  3. Maximumok közepe módszer (MOM)
  4. Középső maximum módszer (COM)

Súlypont módszer (COG)

A módszer alkalmazásának előfeltétele, hogy a B^* tartója intervallum legyen, valamint a $MAX(B^*) = \{y \in supp(B^*) | \forall y' \in supp(B^*) : B^*(y') \leq B^*(y)\}$ halmaz nem üres és Borel-mérhető legyen.

$$y_i^* = \frac{\int_{y \in supp(B_i^*)} B_i^*(y) y dy}{\int_{y \in supp(B_i^*)} B_i^*(y) dy}$$

$$w_i^* = \int_{y \in supp(B_i^*)} B_i^*(y) dy$$

$y_{COG} = \frac{\sum_{i=1}^r (y_i^* w_i^*)}{\sum_{i=1}^r w_i^*}$ w_i^* a súlyozási faktor

y_i^* a B_i^* részkonklúzió súlypontja

Geometriai középpont módszer (COA)

A defuzzifikált érték:

$$y_{COA} = \frac{\int_{y \in B^*} B^*(y) y dy}{\int_{y \in B^*} B^*(y) dy}$$

Diszkrét kimenet esetén, ha a B^* konklúzió az $\{y_1, \ldots, y_m\}$ halmazon van definiálva

$$y_{COA} = \frac{\sum_{i=1}^{m} B^*(y_i) y_i}{\sum_{i=1}^{m} B^*(y_i)}$$

Maximumok közepe módszer (MOM)

A deffuzifikált érték a $MAX(B^*) = \{y \in supp(B^*) | \forall y' \in supp(B^*) : B^*(y') \leq B^*(y)\}$ halmaz középértéke:

$$y_{MOM} = \frac{\int_{y \in MAX(B^*)} y dy}{\int_{y \in MAX(B^*)} dy}$$

Ha a $MAX(B^*)$ halmaz véges vagy megszámlálható számosságú, akkor az

$$y_{MOM} = \frac{\sum_{y \in MAX(B^*)} y}{|MAX(B^*)|}$$

Középső maximum módszer (COM)

A következtetés legnagyobb tagsági függvényértékű elemeiből választja ki a középsőt.
Legyen $h(B^*)$ a következtetés magassága, ekkor

$y_{COM} = \frac{inf M + sup M}{2}$ ahol $M = \{y | \; ahol \; y - hoz \; h(B^*) \; tartozik\}$

Diszkrét esetben:

$$y_{COM} = \frac{min\{y_k | y_k \in M\} + max\{y_k | y_k \in M\}}{2}$$