Pannon Egyetem
Villamosmérnöki és Információs Tanszék

Digitális Áramkörök

(Villamosmérnök BSc / Mechatronikai mérnök MSc)

2. hét - Boole algebra (függvény, igazságtábla, kanonikus alak). Kombinációs Hálózatok tervezése

Előadó: Dr. Vörösházi Zsolt
voroshazi.zsolt@virt.uni-pannon.hu

Kapcsolódó jegyzet, segédanyag:

- http://www.virt.uni-pannon.hu
  → Oktatás → Tantárgyak → Digitális Áramkörök (Villamosmérnöki BSc / Mechatronikai mérnöki BSc/MSc).
  - Fóliák, óravázlatok (.ppt)
  - Frissítésük folyamatosan

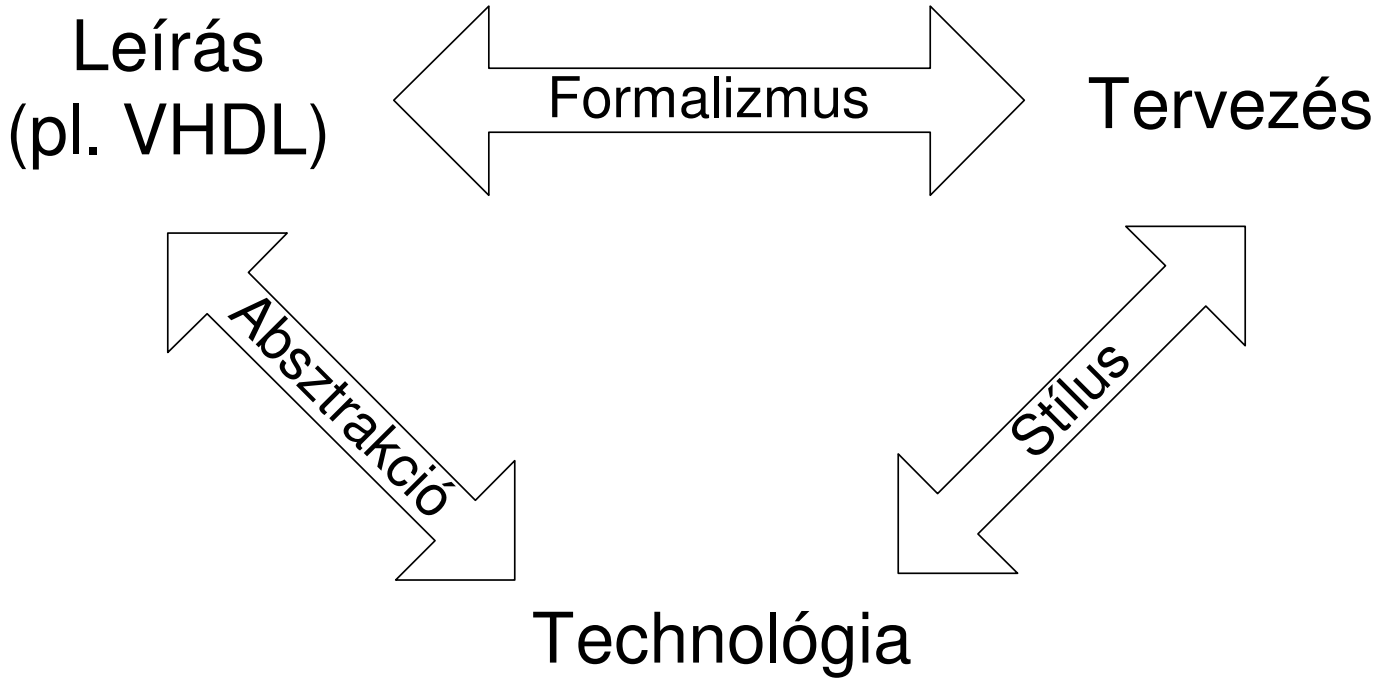
Logikai tervezés alapjai

A logikai tervezés kritériumai

- Tervdokumentációt (követelmény / tervezési specifikációt) kell készíteni a hálózatról
  - Egységes, szabványos jelölésrendszer szükséges
- A berendezésnek könnyen vizsgálhatónak, megbízhatónak kell lennie
  - Tagolt legyen (könnyen átlátható, javítható)
  - Moduláris, strukturált felépítés: hiba esetén csak adott modult kelljen cserélni
- Gyárthatónak kell lennie
  - Mérőpontokat, tesztelő helyeket kell kialakítani (Test pins, JTAG)
  - Építőelem készletet figyelembe kell venni
- Gazdaságosság: lehetőleg minimális építőelem felhasználás
- Működési sebesség: elérhető teljesítmény

Logikai hálózatok/rendszerek tervezése

- Stílus – Absztrakció – Formalizmus



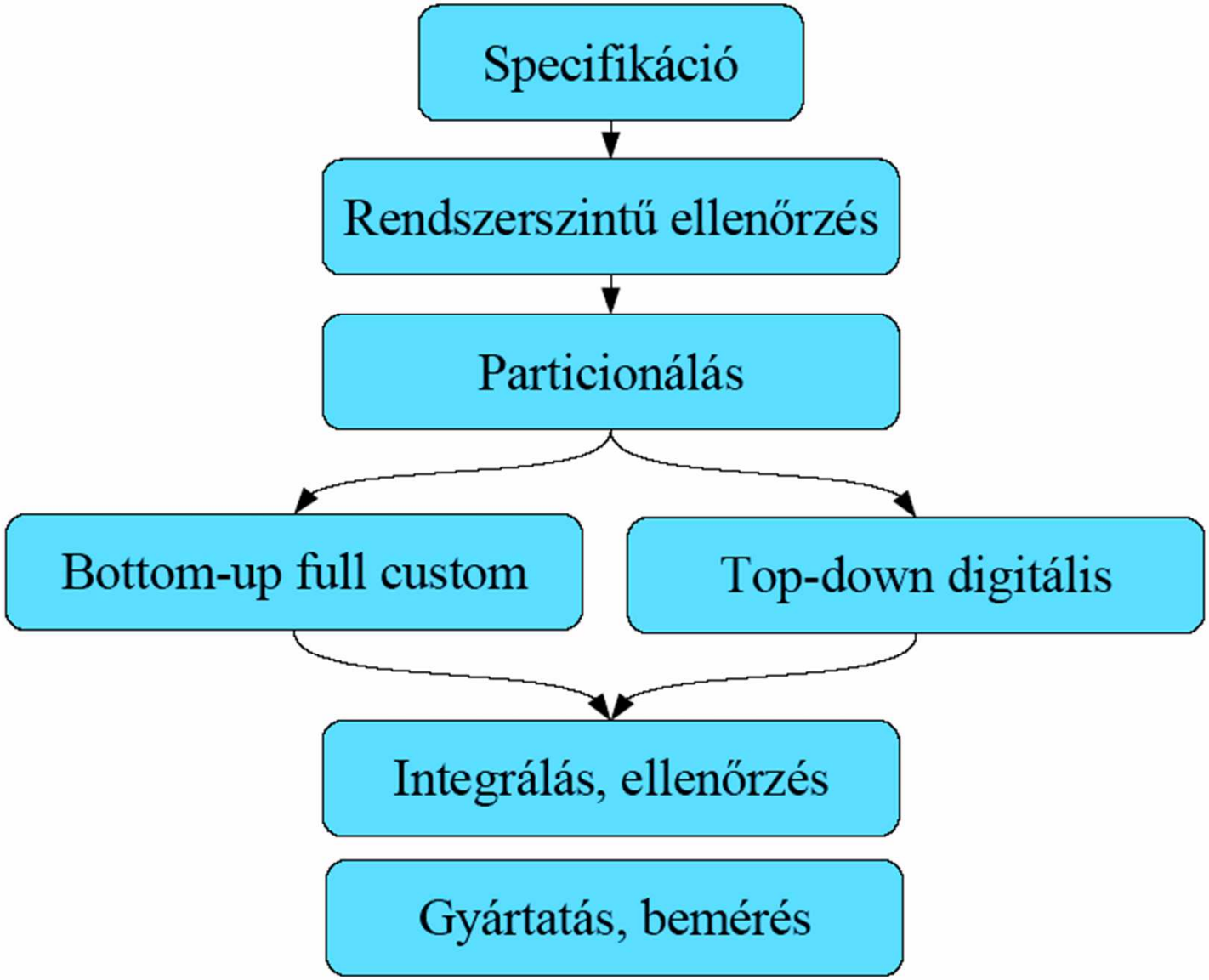
1. Stílus

- Komplex feladat ⇒ egyszerűbb, kezelhető részfeladatokra bontása
  - Szisztematikus: módszer
  - Érthető módszerek kellenek

  Pl: programozási/tervezési stílusok (Top-down, Bottom-up, strukturált stb.)

- Jó stílus kialakításának szabályai:
  - „Top-down”/Bottom-up módszer szerinti tervezés
  - Csak kiforrott, biztos technikákat szabad alkalmazni
  - Fontos a dokumentálás!

Általános Design Flow

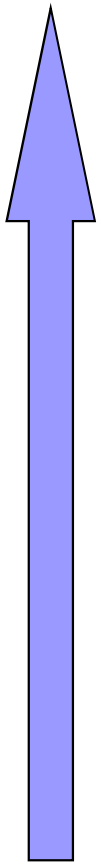


2. Absztrakció

- Digitális tervezés „elvi-fogalmi” szintje
  - Kezdeti absztrakció a tervezés során meghatározó, kritikus pont!
    - 1. koncepcionális modell (elvi elgondolás)
    - 2. megvalósítható, realizálható modell (HW)
  - Magas-szintű absztrakció $\Rightarrow$ elvi modell szintenkénti finomítása és felépítése

Absztrakciós szintek

- Rendszer szint
- Algoritmikus szint
- Funkcionális szint (pl. multiplexer, dekóder, ALU, stb.)
  - RTL szint: regiszter-transzfer leírás (pl. VHDL, Verilog)
- *Logikai szint (kapuk – Boole algebra)*
- Fizikai áramkör szint (tranzisztor - erősen gyártási-technológia függő – pl. deep submicron technology)



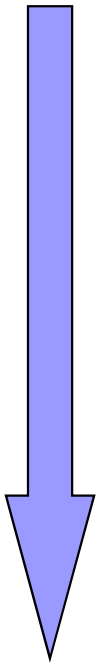
3. Formalizmus

- A rendszer viselkedésének leírására szolgál
  - Szisztematikus szabályok és eljárások
  - Minden absztrakciós szinten fontos a használatuk
    - Pl: alapvető formalizmus **a Boole-algebra** (bináris logika elmélete) – de csak alsóbb szinteken használható

(felsőbb-, rendszer-szint)		(alsóbb-, áramköri szint)
Absztrakció	⇔	Boole algebra (konkretizálás)

Integrált áramkörök osztályozása komplexitás (integráltsági fok) szerint:

- SSI (Small-Scale Integration): ~10 alacsony-szintű elemet (kaput/tranz.) tartalmaz
- MSI (Medium-Scale Integration): 10-1000
- LSI (Large-Scale Integration): 1000-10000
- **VLSI (Very-Large-Scale Int.): >100000**
- **ULSI (Ultra-Large Scaling Int.) > 1 millió**
  - Mikroprocesszorok (2 milliárd tr. – ‘2010-től)
  - Memóriatömbök (256/512Gbit Toshiba - 2017)



Fogalmak: ASIC, VLSI

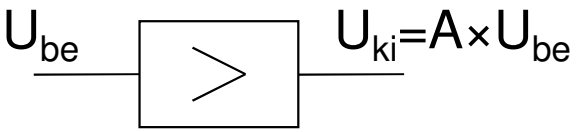
- **VLSI:** Nagyon-nagy integráltsági fokú áramkörök – elektromosan programozható

- **ASIC:** Application Specific IC (BOÁK: Alkalmazás v. Berendezés Orientált Áramkörök) – maszk-programozható eszközök
  - Nagy integráltság - Csökkenő komponens költség
  - Növekvő teljesítmény
  - Növekvő „csomag” sűrűség – lábszám (package)
  - Olcsó összeszerelés (assembly)
  - Kis disszipáció, nagy kapcsolási sebesség

Logikai feladat definiálása:

- A *logikai* feladat definiálását a könnyebb megérthetőség miatt tegyük egy ***ellenpéldával***
  - Pl: egy *analóg* feszültségerősítő esetén

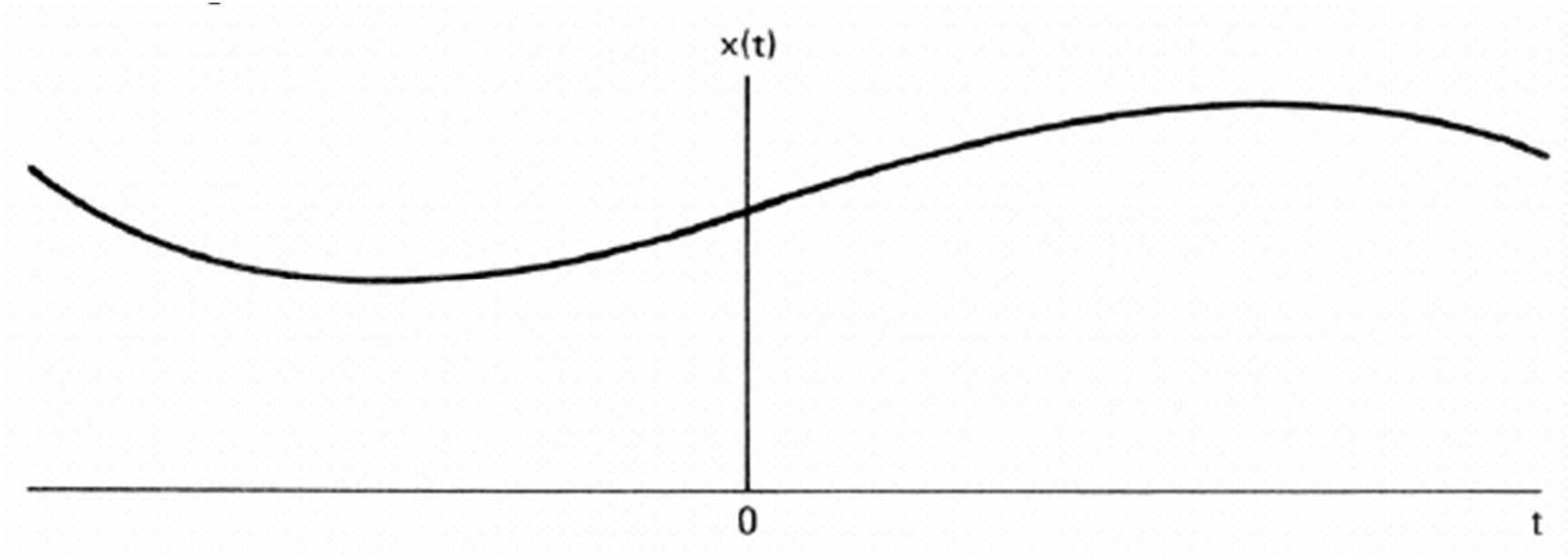
Ube = bemenő jel (feszültség)
Uki = kimenő jel (feszültség)
A = erősítési tényező



  - *Az analóg* rendszer esetén, csak az van definiálva, hogy a be-, ill. kimeneti jel között mi a kapcsolat (jelen esetben: $U_{ki}=A\times U_{be}$), míg a bemeneti érték egy bizonyos tartományon belül végtelen számú lehet, és ehhez végtelen számú kimeneti érték tartozhat.

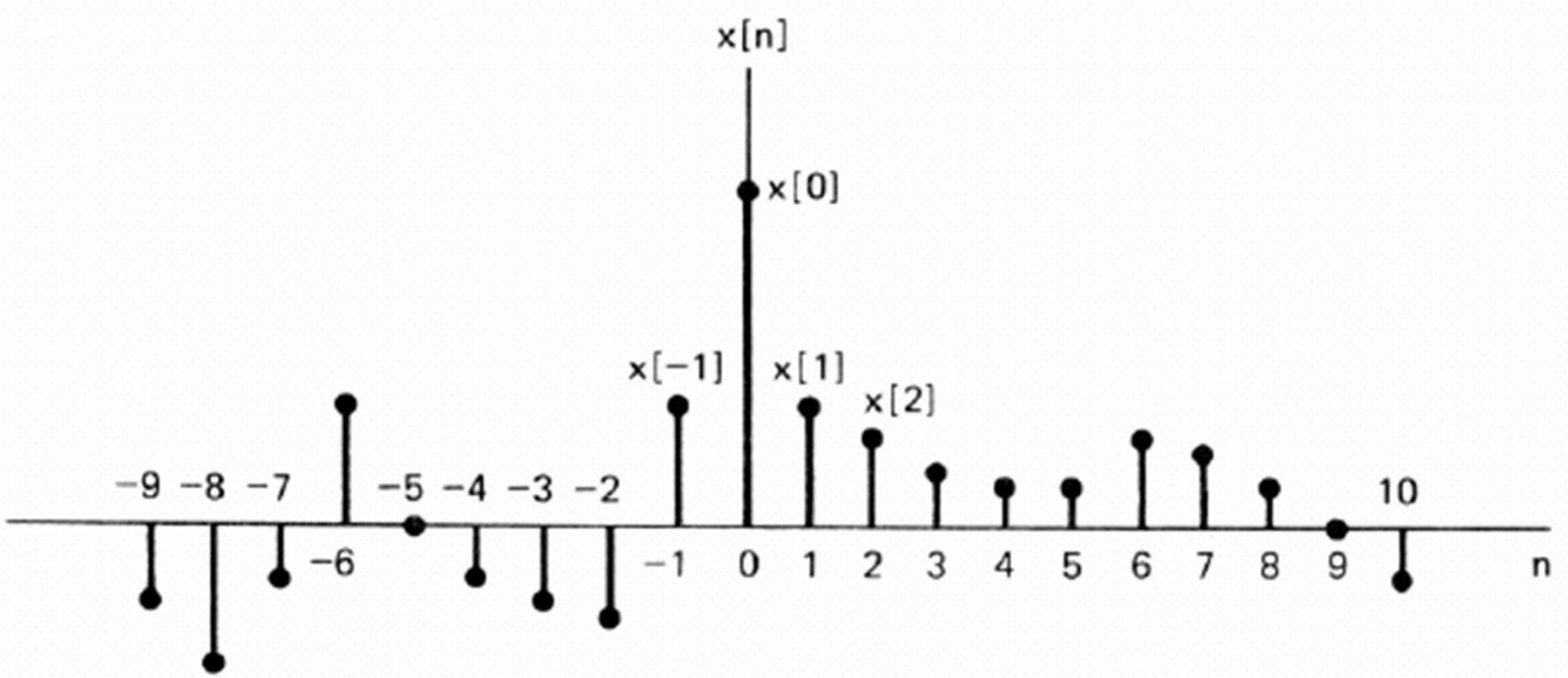
Def: Folytonos jelek

- **Def: Folytonos (analóg) változójú jelek:** Olyan jelek amelyeknek minden független változója folytonos. A mi vizsgálataink szerint az ilyen csupán az *időtől folytonosan függő jeleket* folytonos idejű jeleknek (Continuous Time Signals) azaz **CT** (jelölés) nevezzük. A folytonos idejű jelek két időpont között *végtelen* sok értékre vannak definiálva, ezért *bármely* időpontra felvesznek értéket.

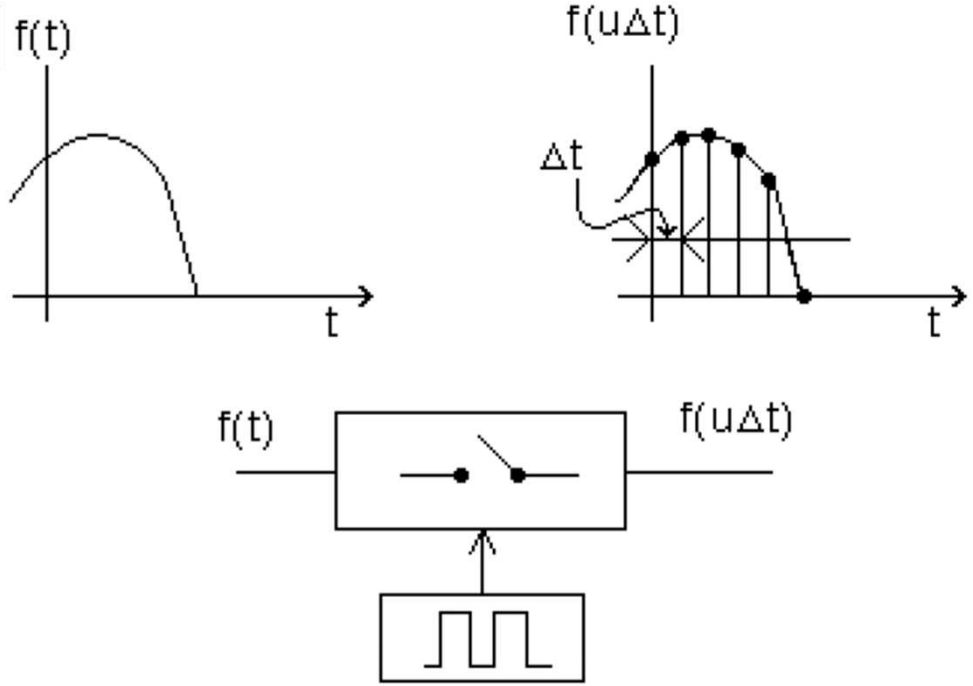


Def: Digitális jelek

- **Def: Diszkrét változójú jelek.** Olyan jelek amelyeknek minden független változója diszkrét értékű. A mi vizsgálataink szerint az ilyen, csupán az *időtől diszkréten függő jeleket* diszkrét idejű jeleknek (Discrete Time Signals) azaz **DT** (jelölés) nevezzük. A diszkrét idejű jelek csak diszkrét időpontokra vannak definiálva, ezért mindig csak meghatározott időközökben vesznek fel értékeket, és az időközök között nem definiáltak.



Mintavételezés csoportosítása:



- A **jeltől független** mintavételezés, **ekvidisztáns** időközönként. Ezeket lineáris, rögzített lefolyású mintavevő rendszereknek nevezzük.
- A **jeltől függő** mintavételezés, amikor a változás sebességének növekedése pontosabb ábrázolást igényel, de gazdasági okokból a mintavételezés gyakoriságát valamilyen jellemzőnek a változásához kötjük. Ezeket ***nem lineáris***, jeltől függő mintavevő rendszereknek nevezzük.
- **Statisztikai** mintavételezés, általában a manuális mintavételezés tartozik ide.

ADC: analóg-digitális konverzió

- Digitalizálás két lépésben történik: (folyt. (A) → diszkrét → digitális (D))
  - 1. Az analóg jelből (A) *mintavételezéssel* (sampling) előállított diszkrét, majd
  - *2. kvantálással* (quantization) előállított digitális (D) / bináris jel.
- Mintavételezési gyakoriság problémája: „aliasing” effektus (gyors jelváltozásból). Mintavétel: konstans számú minta / sec. Lehet
  - Időbeli: ált. pl. hang, video esetén
  - Térbeli: valamilyen minta szerinti (pl. Moire pattern)
- Kvantálási pontosság problémája: Kvantálási zaj $e_q(t)$

- Ezek a hibák kezelhetők, szabályozhatók megfelelően tervezett szűrők segítségével: quantizer, anti-aliasing filter stb. és betartva a következőt:
  - **Nyquist-Shannon mintavételi elv alkalmazása**: $f > 2f_0$*:* tehát a mintavételezési frekvenciának (f) nagyobbnak kell lennie, minimálisan a jel sávszélességének kétszeresénél

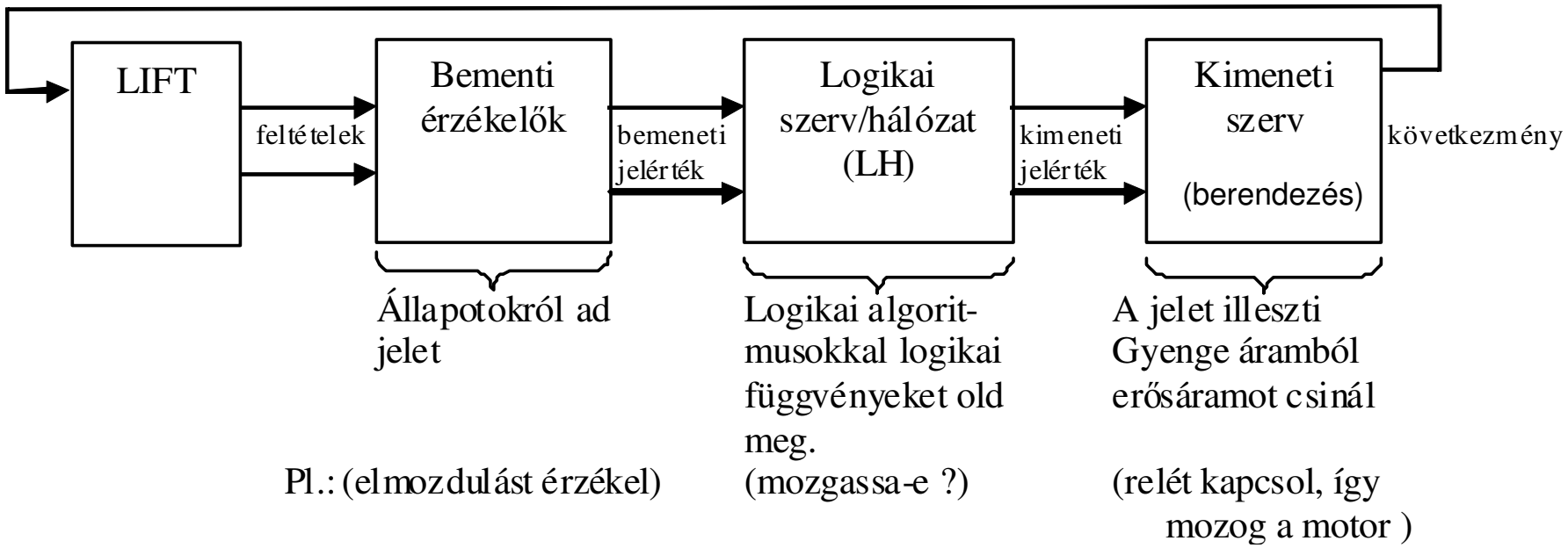
Definíciók-Alapfogalmak:

- *Hogyan ábrázolják ezeket a jelértékeket a fizikai hardver eszközök? Egy hardver-tervező az implementáció során saját maga szabhatja meg, hogy mit-mivel jelöl.*
- **Digitális változó:** eldöntendő kérdésre adott egyértelmű válasszal adható meg.
- **Logikai érték**: a kérdésre adott válasz igen vagy nem.
  - Logikai konstansok:
    - Logikai állítás: Igaz / Hamis, True / False, 1 / 0, Asserted/Non-Asserted
  - Logikai (bináris) változók:
    - Pl: ‘A’ logikai változó esetén legyen, A:=fotódióda hiba
      ‘A’ lehet: T / F (A=F nincs hiba; A=T hiba)
    - Logikai változó neve lehetőleg utaljon a funkciójára
  - Logikai operátorok:
    - Felírásuk igazság táblázattal (Truth Table)

Neumanni alapelvek

- **Neumann János** (1903-1957)
  - **használjon kettes (bináris) számrendszert**
  - a számítógép legyen teljesen elektronikus
  - legyen külön vezérlő (CU) és végrehajtó (ALU) egysége
  - Memória struktúra: adat-, és program egyazon memóriában helyezkedjen el, azaz a belső tárban (Tárolt programozás elve)
  - A számítógép legyen egy univerziális Turing-gép (digitális számítás elmélet)

Példa: LIFT vezérlése



Liftmotor mozgatás

Ebben a feladatban azt definiáljuk (az úgynevezett igazságtábla segítségével), hogy adott bemeneti értékek mellett mikor induljon el a lift. Jelen esetben az igazságtáblánknak $2^4=16$ sora kell, hogy legyen, mert 4 bemeneti változónk van.

- Bemeneti változó:
  - nyomtak-e gombot (GNY)
  - liftajtó be van-e csukva (LZ)
  - van-e valaki a liftben (VL)
  - túlterhelt-e (TT)
- Kimeneti változó: - Bekapcsolja-e a motort (0 v. 1)

Igazságtábla: Lift vezérlése

Automatikus feltételek — következmények

GNY	LZ	VL	TT	Liftmotor	
0	0	0	0	0	nem indul
0	0	1	0	0	nem indul
1	0	1	0	0	nem indul
1	1	1	0	1	indul
1	1	1	1	0	nem indul
1	1	0	1	-	NTSH*

NTSH*: Nem Teljesen Specifikált Hálózat, don't care „közömbös 'állapotokkal'

Logikai hálózatok csoportosítása a megoldandó logikai feladatok szerint

- **Logikai hálózat:** ált. készen kapható logikai építőelemekből állítható össze
- **Logikai rendszer**: logikai hálózatoknak egy adott feladat megoldása céljából együttműködő összességét logikai rendszernek nevezzük.

- Mivel a logikai feladat megoldása szempontjából, nem mindig elég a mindenkori fennálló pillanatnyi bemeneti kombinációk figyelembevétele a kimeneti kombinációk előállításához, szükségünk lehet ***másodlagos*** (ún. ***szekunder*****) feltételeknek** megfelelő szekunder kombinációkra is.

  - **Pl: a lift vezérlése:** nem elég, ha a liftmotor a feltételek teljesülése után, csak úgy elindul, mert nem mindegy *melyik irányba* forog (fel v. le). Hiszen, ha az 1.-ről akarunk eljutni a 3.-ra, akkor más irányba kell forognia, mintha az 5.-ről akarnánk eljutni a 3.-ra. Tehát a szekunder változó ebben az esetben a *felvonó mindenkori helyzetéről* ad felvilágosítást érzékelők segítségével. (A szekunder változó feladata a hálózat belső állapotának figyelése.)

Logikai hálózatok csoportosítása

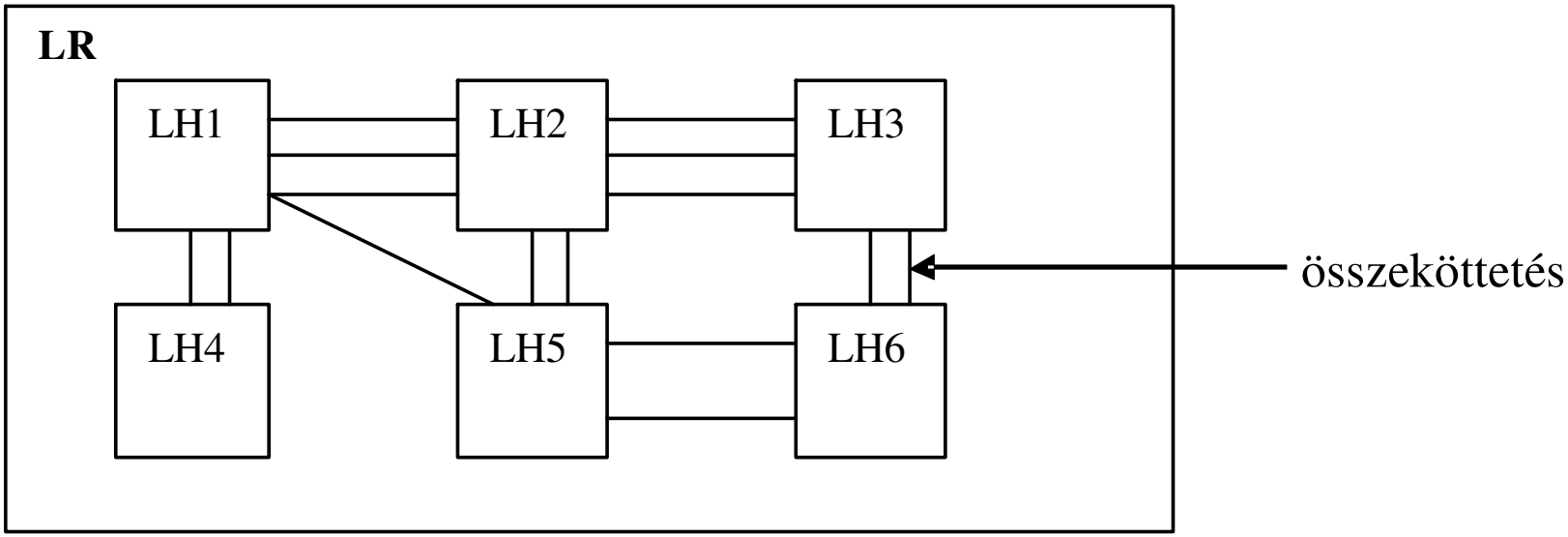
Ezek alapján kétféle hálózatot különböztetünk meg

- **(K.H.) Kombinációs logikai hálózat**ról beszélünk: ha a mindenkori kimeneti kombinációk létrehozásához *elég a bemeneti kombinációk* pillanatnyi értéke

- **(S.H.) Sorrendi (szekvenciális) logikai hálózat**ról beszélünk**:** ha a mindenkori kimeneti kombinációt, nemcsak *a pillanatnyi* bemeneti kombináció, hanem *a korábban fennállt bementi kombinációk* és azok sorrendje is befolyásolja. (A *szekunder kombinációk* segítségével az ilyen hálózatok képessé vállnak arra, hogy az ugyanolyan bemeneti kombinációkhoz **más-más kimeneti** kombinációt szolgáltassanak, attól függően, hogy a bemeneti kombináció fellépésekor, milyen értékű a szekunder kombináció)

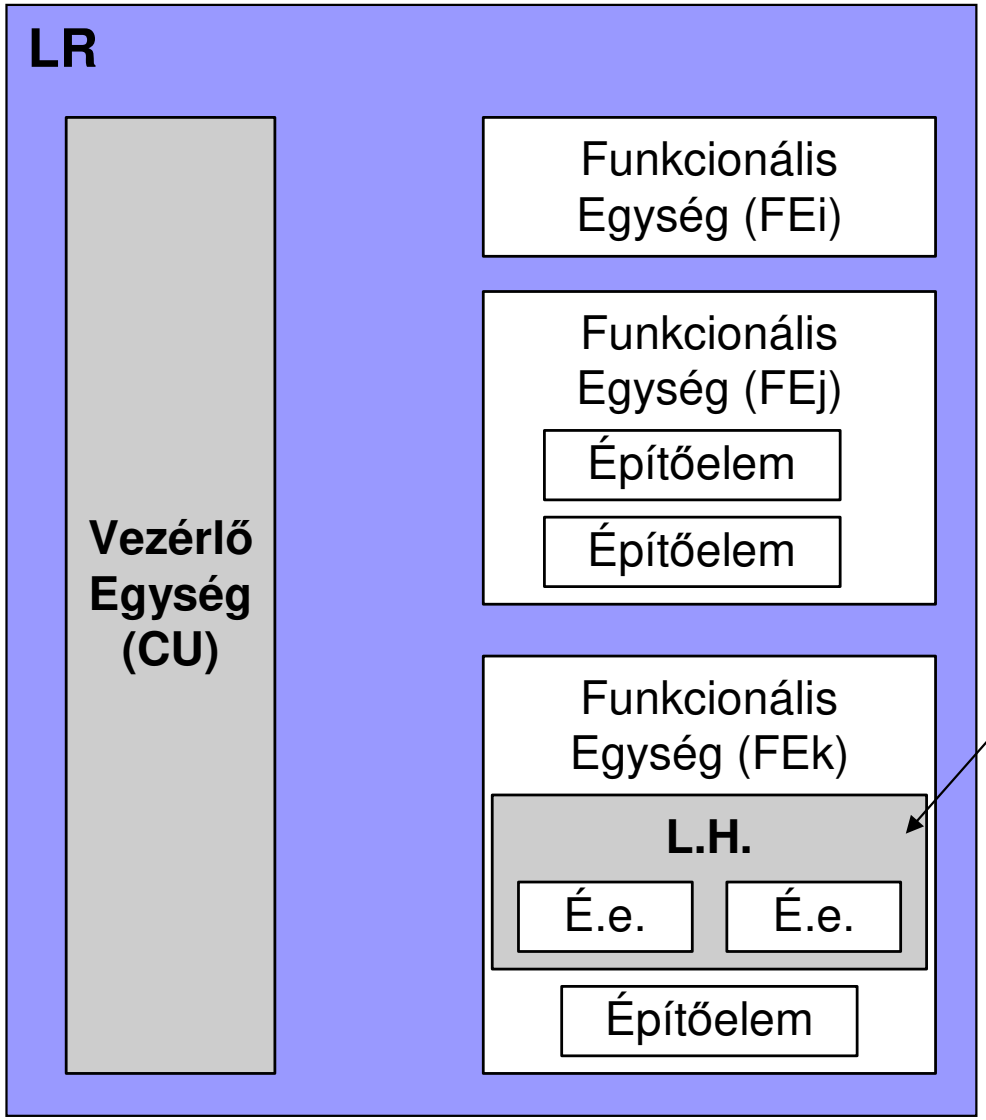
A logikai hálózat és a logikai rendszer kapcsolata

- **Logikai rendszer (LR):** logikai hálózatokból (LH) épül fel (be-, és ki-menetekkel)



- Egy bonyolult logikai feladat megoldásához nem célszerű egy bonyolult logikai hálózatot (LH) tervezni; sokkal célszerűbb egyszerű LH-k összehangolt működésével megoldanunk a problémát. Az LH-k összehangolt működésű rendszerét logikai rendszernek (LR) nevezzük.

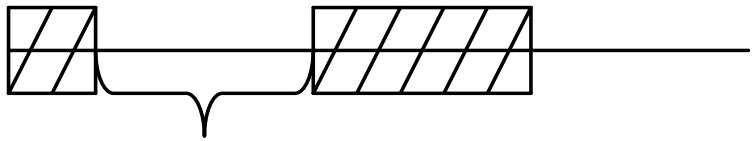
Logikai rendszer hierarchikus felépítése



Látszólagos építőelem, ami ha valódi építőelemmé válik **generációváltásról** beszélünk.

Digitális jelértékek ábrázolása fizikai eszközöknél:

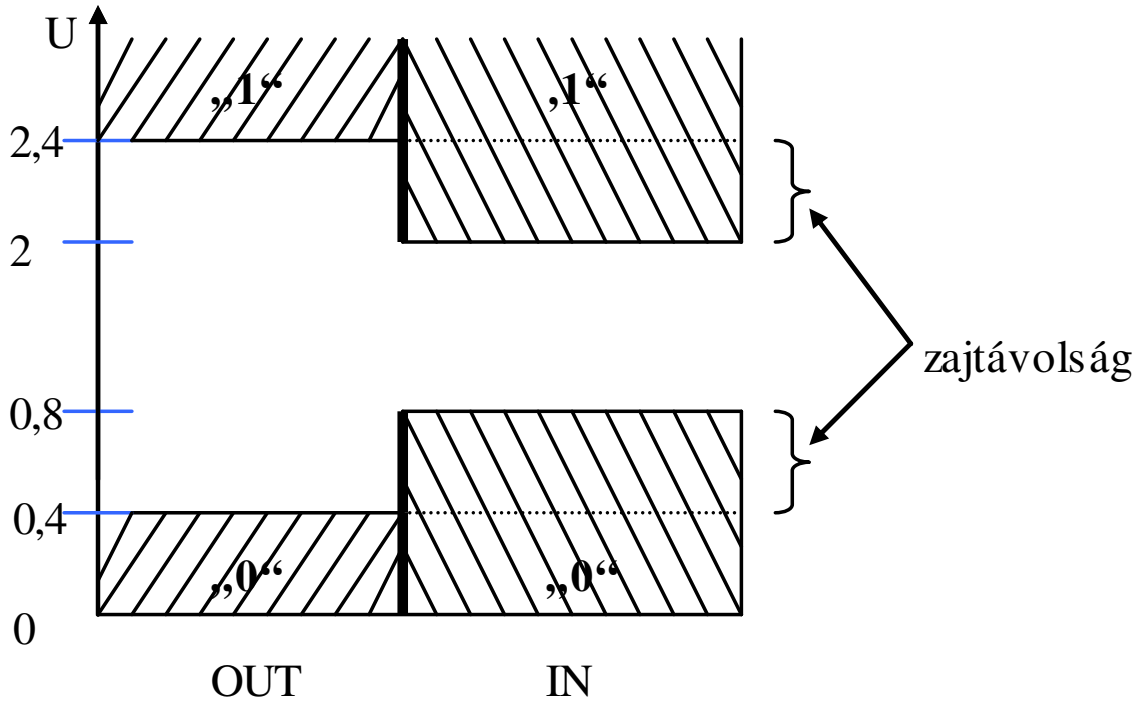
- Lyukkártya: lyuk=1, nincs lyuk=0
- Mágneses szalag / lemez: a hordozó felület adott oldalának felmágnesezése
- Kapcsolók: két állapota: nyitott=0, zárt=1
- Feszültség logikai szintek: pl: TTL 74LS esetén:
  - 0.0 – 0.5V = alacsony szint (‘0’) - L
  - 2.7 – 5V = magas szint (‘1’) - H



Zajtávolság: standard 0 – 5 V feszültség tartomány esetén

Feszültség

0-5 V-os tartományban
„0“ = 0-0,8V-ig
„1“ = 2-5 V-ig
0,8-2-ig nem értelmezzük



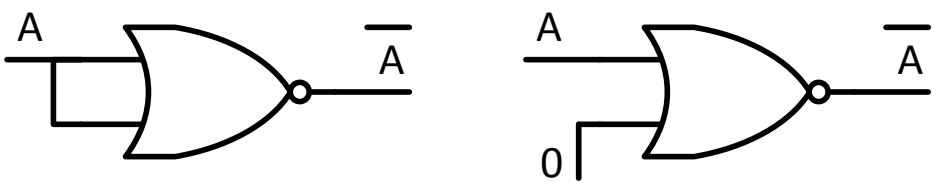
A zajtávolság azért kell, mert ha a feszültség pont a határon van akkor a különféle külső környezeti hatások (zajok) miatt rossz értéket kaphatunk.
Ilyen zajok Pl.:
a termikus zajok -- a vezeték hőmozgása;
az induktív zajok -- külső elektromágneses tér, aminek a hatása akár pár V is lehet az eltérés;

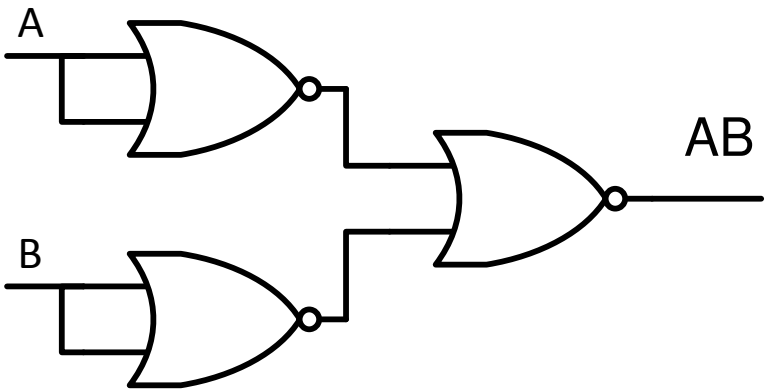
Logikai operátorok és igazságtáblájuk

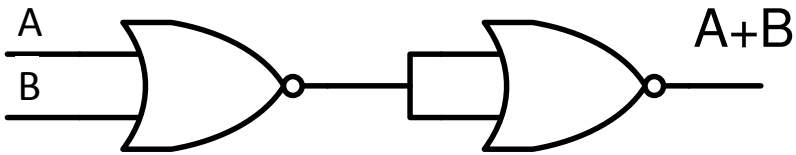
Logikai operátorok

- Fajtáik:
  - Egy-változós
  - Kettő-, vagy több-változós
- Három alapművelet:
  - NOT (NEM)
  - AND (ÉS)
  - OR (VAGY)
- **Funkcionális** / **Univerzális teljesség:** bizonyos logikai műveletek használatával bármely tetszőleges más logikai függvény megadható.
  - CMOS technológiában ilyenek a NAND, NOR kapuk!

Funkcionális teljesség: példák







Funkcionálisan teljes vagy univerzális áramköri alapkapuk:
Logikai hálózatok esetén a CMOS NAND, illetve NOR kapu.

(Aritmetikai egységek esetében ilyen univerzális építőelem az ‚összeadó'.)

Igazságtábla: logikai operátorok felírása

- ‘F’ logikai függvény megadása az ‘A,C,B’ logikai változók összes lehetséges értékétől függően
  Jel: F(*A,C,B*) //3 változó → 2^3 = 8 sor//

A	C	B	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

A	C	B	Fgv	sor
F	F	F	F	0.
F	F	T	T	1.
F	T	F	T	2.
F	T	T	F	3.
T	F	F	T	4.
T	F	T	F	5.
T	T	F	F	6.
T	T	T	F	7.

- Kanonikus „standard” igazság tábla:
  000 – 111 -ig (3 változó esetén)

Logikai operátorok és igazság táblázatuk (NOT)

- Jel: $\mathrm{NOT\ A} = \overline{A}$
- Formális definíció igazságtáblával:

A	NOT A
0	1
1	0

- Def:
  - ha ’A’ hamis, ’NOT A’ igaz
  - ha ’A’ igaz, ’NOT A’ hamis

Logikai operátorok és igazság táblázatuk (AND)

- Jel: B **AND** C = B·C
- Formális definíció igazságtáblával:

B	C	B·C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Def: B·C értéke pontosan akkor ‘igaz’ ha ‘B’ és ‘C’ is egyszerre ‘igaz’, különben hamis

Logikai operátorok és igazság táblázatuk (OR)

- Jel: B **OR** C = B**+**C
- Formális definíció igazságtáblával:

B	C	B+C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Def: B**+**C értéke pontosan akkor ‘igaz’ ,ha ‘B’ és ‘C’ közül legalább az egyik ‘igaz’, különben hamis

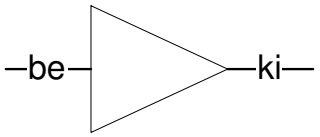
Smart áramkörök ☺

Egy- ill. két-változós logikai függvények bemutatása és szabványos jelöléseik

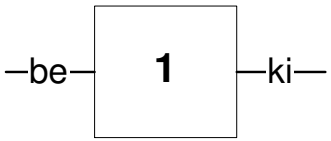
Egyváltozós logikai függvények:

- Jelmásoló („buffer” - jel-erősítő):

be	ki
0	0
1	1



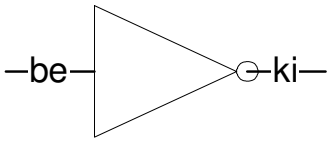
Nemzetközi szabvány

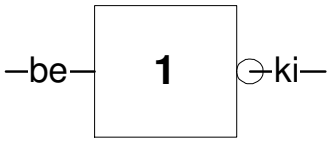


Magyar szabvány

- Negálás - Inverter (NOT): $\overline{A}$

be	ki
0	1
1	0



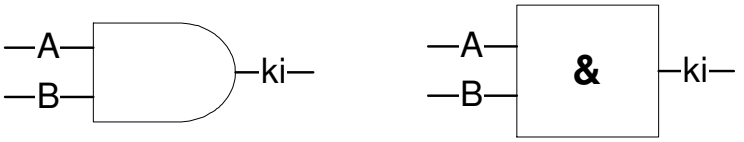


Kétváltozós logikai függvények:

- ÉS (AND):

$$A \cdot B$$

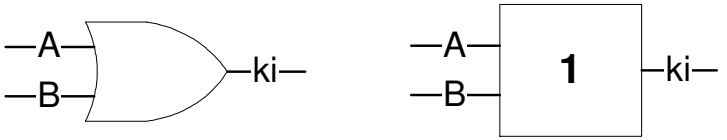
A	B	ki
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



- VAGY (OR):

$$A + B$$

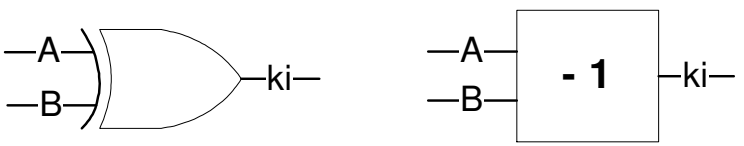
A	B	ki
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



- Antivalencia (XOR):

$$A \oplus B$$

A	B	ki
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

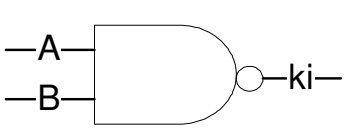


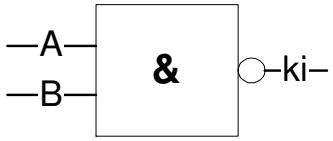
Kétváltozós log.függv. (folyt.):

- NEM-ÉS (NAND):

$$\overline{A \cdot B}$$

A	B	ki
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

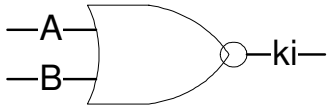


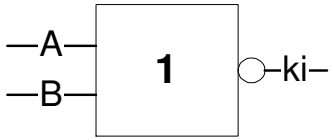


- NEM-VAGY (NOR):

$$\overline{A + B}$$

A	B	ki
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

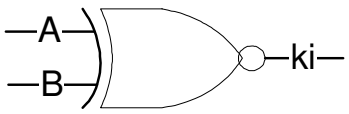


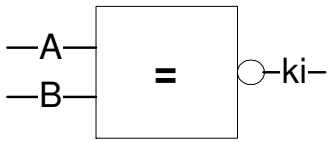


- Ekvivalencia (NXOR):

$$A \odot B$$

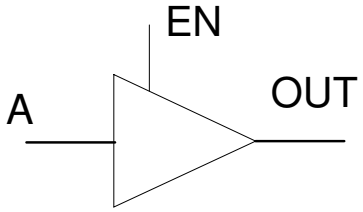
A	B	ki
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1





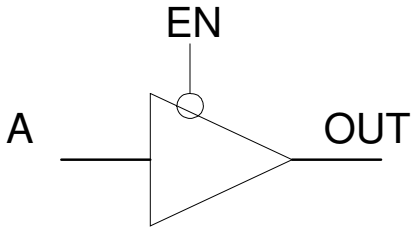
Tri-State Buffer:

- buszok esetén használatos: kommunikációs irány változhat
  - Driver: egyirányú kommunikációra
  - Transceiver: kétirányú kommunikációra
- 3 állapota lehet:
  - magas: ‘1’
  - alacsony: ‘0’ (normál TTL szintek)
  - nagy impedanciás áll: ‘Z’ – mindkét kimeneti tranzisztor zár



High-true enable

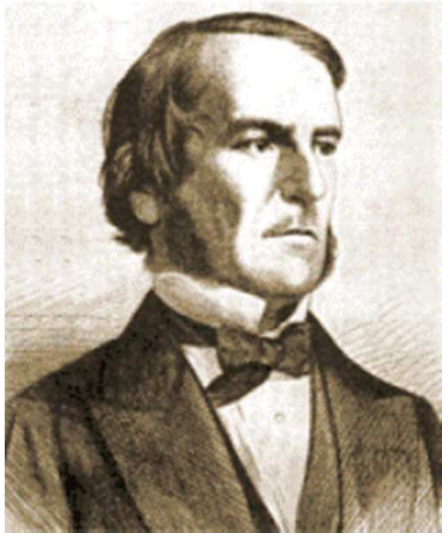
A	EN	OUT
0	1	0
1	1	1
X	0	Z



Low-true enable

Boole algebra

Boole-algebra



(1815-1864)

- Logikai operátorok algebrája
- George Boole: először mutatott **hasonlóságot** az általa vizsgált ***logikai operátorok*** és a már jól ismert ***aritmetikai operátorok*** **között**.
- HW tervezés alacsonyabb absztrakciós szintjén rendkívül fontos szerepe van. (Specifikáció + egyszerűsítések)

Boole algebra elemei:

- 3 alapművelet: AND, OR, NOT
- Tulajdonságaik (AND, OR esetén):
  - Kommutatív: $A+B=B+A, \quad A \cdot B=B \cdot A$
  - Asszociatív: $A+(B+C) =(A+B)+C=A+B+C$
    $A \cdot (B \cdot C)=(A \cdot B) \cdot C=A \cdot B \cdot C$
  - Disztributív: $A \cdot (B+C) = A \cdot B+A \cdot C,$
    $A+(B \cdot C)=(A+B) \cdot (A+C)$
- Operátor **precedencia** (csökkenő sorrendben):
  - NOT
  - AND
  - OR

  - átzárójelezhetőség!

Boole algebrai azonosságok!

1.) $\overline{\overline{A}} = A$ NOT

2.) $A + 0 = A$

3.) $A + 1 = 1$

4.) $A + A = A$

5.) $A + \overline{A} = 1$ OR

6.) $A \cdot 1 = A$

7.) $A \cdot 0 = 0$

8.) $A \cdot A = A$

9.) $A \cdot \overline{A} = 0$ AND

10.) $A + A \cdot B = A$ *

11.) $A \cdot (A + B) = A$ * Elnyelési tul.

12.) $A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$

13.) $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$

14.) $A + \overline{A} \cdot B = A + B$ *

15.) $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$

De-Morgan azonosságok:

18.) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

19.) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ DUAL ITÁS

Boole-algebrai azonosság igazolása igazságtáblával

- Pl: De Morgan

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Dualitás elve

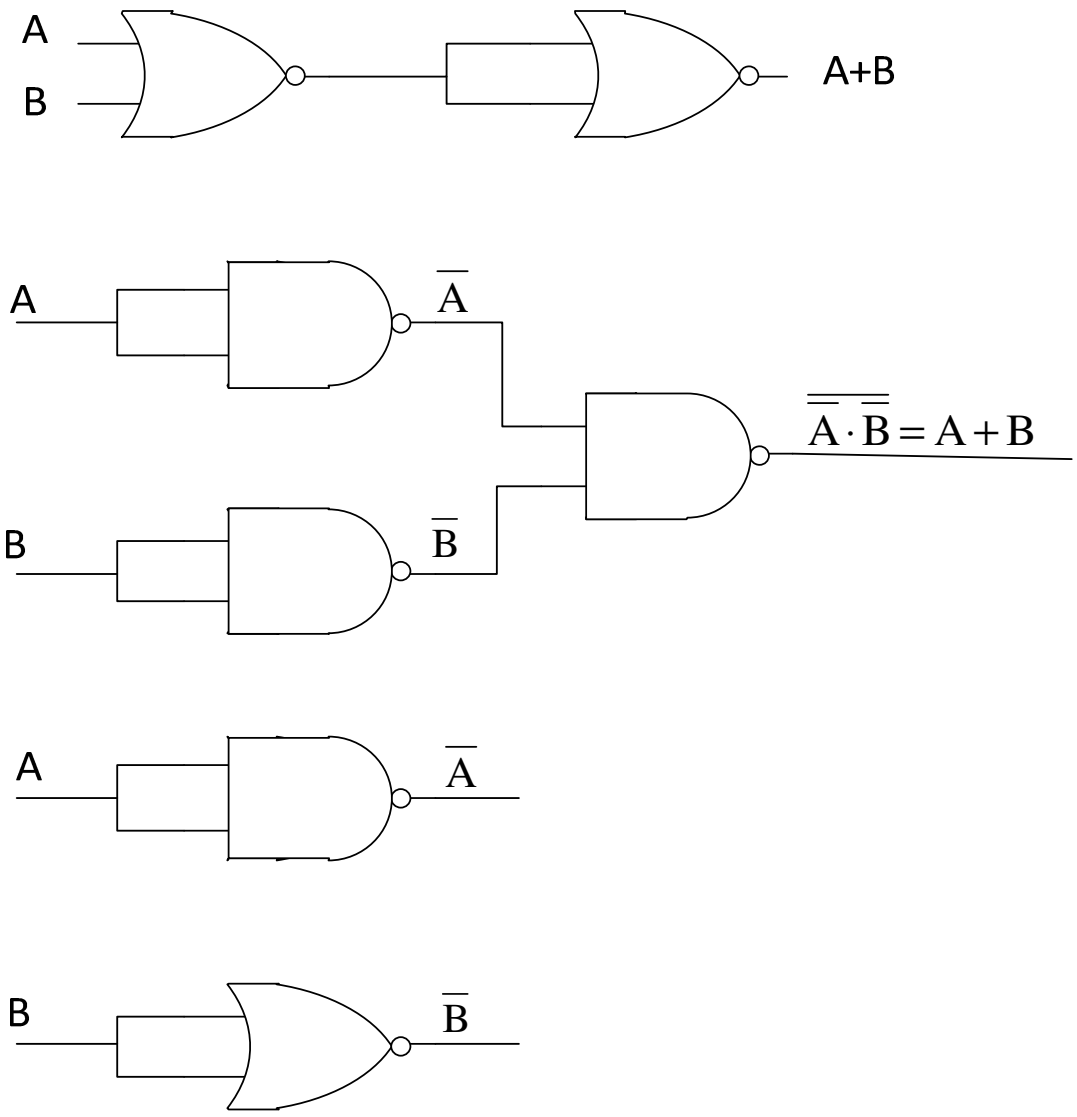
A	B	A·B	NOT (A·B)
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

A	B	NOT A	NOT B	NOT(A) + NOT(B)
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

- Példa: egyszerűsítésre

$$\overline{A \cdot (B + C \cdot (B + \overline{A}))} \stackrel{?}{=} \overline{A} + \overline{B}$$

Funkcionális teljesség: példák



Funkcionálisan teljes, vagy univerzális áramköri alapkapuk: VLSI CMOS **l**ogikai hálózatok esetén a **NAND**, illetve **NOR** kapu.

(Aritmetikai egységek esetén esetében ilyen univerzális építőelem az „összeadó”.)

Logikai egyenletek megadása igazság-táblázat alapján

- PI:

sor	A	B	F
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	0

F pontosan akkor lesz **igaz**, ha A igaz és B hamis, egyébként F **hamis** lesz. Vagyis egyenletként kifejezve:

$$F = A \cdot \overline{B}$$

- PI:

sor	A	B	F
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	1

F pontosan akkor lesz **igaz**, ha A és B is hamis, vagy A igaz és B hamis, vagy A és B is igaz, egyébként F **hamis** lesz. Vagyis egyenletként kifejezve:

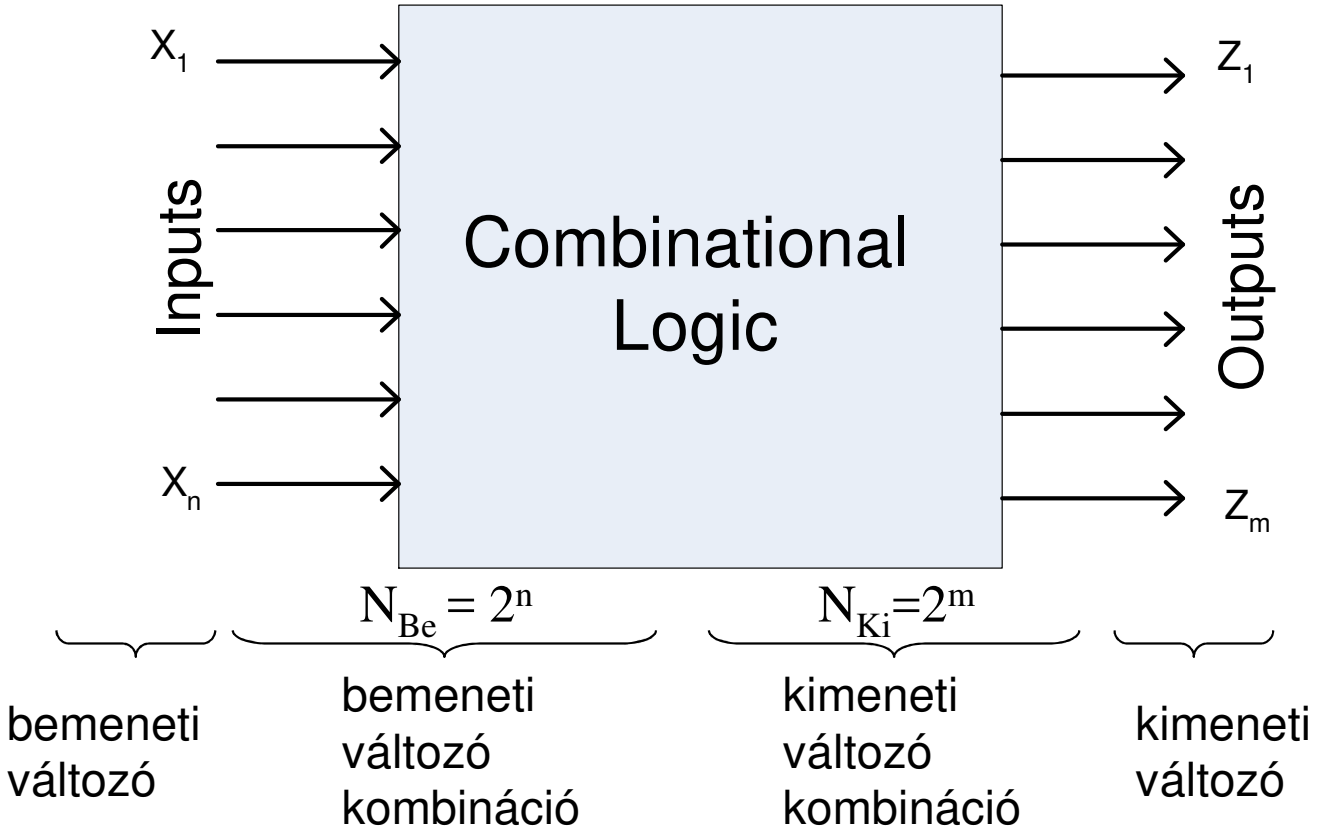
$$1 = F = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{B} + A \cdot B \Rightarrow \overline{B} + A \cdot B \Rightarrow \overline{B} + A$$

$$0 = \overline{F} = \overline{A} \cdot B$$

Def: Logikai függvény

- Független változó: bemeneti változó(k)
- Függő változó: kimeneti változó(k)
- **Logikai függvény**:
  - minden kimeneti változó értéke a *függvénykapcsolat* alapján határozható meg (minden egyes bemeneti kombinációhoz meghatározható a kimeneti változó).
  - Egyértelmű hozzárendelés (de nem kölcsönösen egyértelmű!)

Teljesen határozott logikai hálózat hány különböző függvénnyel írható le összesen?



$$N_f = N_K^{N_B} = (2^m)^{2^n}$$

PÉLDA: 4 bemenet, 2 kimenet esetén a függvények lehetséges száma:
$\mathbf{N_f}$ =$(2^2)^{(2^4)}=4^{16}$ logikai függvényt lehet definiálni (teljesen határozott LH)

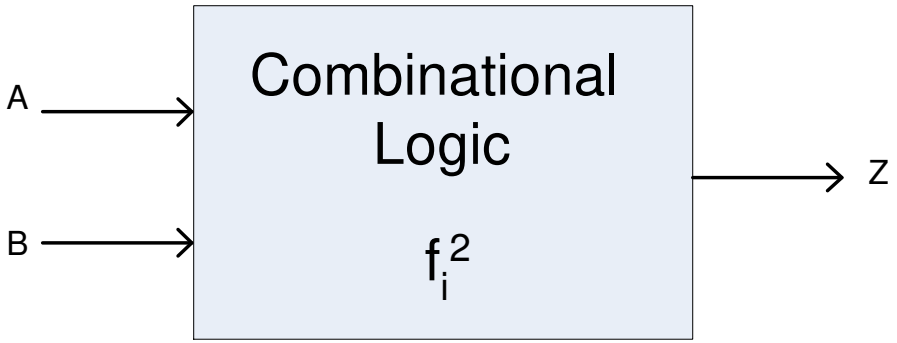
Nem teljesen határozott logikai hálózat hány különböző függvénnyel írható le összesen?

- d: közömbös bemeneti kombinációk száma ($0 \leq d < 2^n$)
  - Egy teljesen határozott log. feladatból → annyi nem teljesen határozott feladatot tudunk képezni, ahányféleképpen 2^n bemeneti kombinációból d számút közömbössé tudunk tenni.
  - Ekkor a *nem teljesen határozott* logikai feladat

$$\binom{2^n}{d}$$

-szerese a teljesen határozott logikai feladatok számának.

Pl. Összes lehetséges két-bemenetű / egy-kimenetű logikai függvény igazságtáblája



$$N_f = N_K^{N_B} = (2^m)^{2^n}$$

$$= (2^1)^{2^2} = 2^4 = 16$$

A	B	f_0^2	f_1^2	f_2^2	f_3^2	f_4^2	f_5^2	f_6^2	f_7^2	f_8^2	f_9^2	f_{10}^2	f_{11}^2	f_{12}^2	f_{13}^2	f_{14}^2	f_{15}^2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Egymás negáltjai/komplemensei

$$Z = f_0^2(A,B) \equiv 0$$

$$Z = f_1^2(A,B) = A \cdot B$$

$$Z = f_2^2(A,B) = A \cdot \overline{B}$$

$$Z = f_3^2(A,B) = A \cdot \overline{B} + A \cdot B \equiv A$$

$$Z = f_4^2(A,B) = \overline{A} \cdot B$$

$$Z = f_5^2(A,B) = \overline{A} \cdot B + A \cdot B \equiv B$$

$$Z = f_6^2(A,B) = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \equiv A \oplus B$$

$$Z = f_7^2(A,B) = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + A \cdot B =$$

$$= \overline{A} \cdot B + A \cdot (\overline{B} + B) = \overline{A} \cdot B + A \equiv A + B$$

$$Z = f_8^2(A,B) = \overline{A} \cdot \overline{B} \Leftrightarrow \overline{f_7^2(A,B)}$$

$$Z = f_9^2(A,B) = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B \equiv A \odot B \Leftrightarrow \overline{f_6^2(A,B)}$$

$$Z = f_{10}^2(A,B) = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{B} \equiv \overline{B} \Leftrightarrow \overline{f_5^2(A,B)}$$

$$Z = f_{11}^2(A,B) = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{B} + A \cdot B =$$

$$= \overline{B} \cdot (\overline{A} + A) + A \cdot B = A + \overline{B} \Leftrightarrow \overline{f_4^2(A,B)}$$

$$Z = f_{12}^2(A,B) = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = \overline{A} \cdot (\overline{B} + B) = \overline{A}$$

$$\Leftrightarrow \overline{f_3^2(A,B)}$$

$$Z = f_{13}^2(A,B) = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot B =$$

$$= \overline{A} \cdot (\overline{B} + B) + A \cdot B = \overline{A} + B \Leftrightarrow \overline{f_2^2(A,B)}$$

$$Z = f_{14}^2(A,B) = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} =$$

$$= \overline{A} \cdot (\overline{B} + B) + A \cdot \overline{B} = \overline{A} + \overline{B} \Leftrightarrow \overline{f_1^2(A,B)}$$

$$Z = f_{15}^2(A,B) \equiv 1 \Leftrightarrow \overline{f_0^2(A,B)}$$

Logikai függvények kanonikus (normál) alakjai

1.) Sum-of-Products (szorzat„termek” összege)

- **Szorzat (AND) termek összege (OR kapcsolata)**
- Emberi szemléletmódhoz közelebb áll: a táblázat soraiból azokat a függvényértékeket (F) vesszük amelyek ‘1’-esek
- Def: Triviális forma: ha egy változó egy adott szorzat termben vagy ponáltan, vagy negáltan legfeljebb egyszer szerepel.
  Ezt hívják még **mintermnek (m_i)** vagy **kanonikus szorzat termnek** is. Tegyük fel hogy F(A,B,C)
  - Pl: *valós / triviális* / kanonikus formulák: $A, \overline{A}, A \cdot B, \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
  - Pl: érvénytelen formulák (de ettől még Boole kifejezés), ami jelenti azt is, hogy tovább egyszerűsíthetők:

$$A \cdot \overline{A}, \overline{A} \cdot B \cdot B \cdot \overline{C}$$

Diszjunktív Normál Forma:

- Jel: $$F(DNF): \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i$$
- n változó esetén 2^n lehetséges minterm van.
- Képzésük: az igazságtáblázatból azoknak a **mintermeknek a VAGY kapcsolatát** vesszük, ahol függvényértékek sorában (F) ‘1’ -es szerepel, vagy ahol a függvény komplemensének ($\overline{F}$) értéke ‘0’.
- minterm: m_i (i. sora a kanonikus táblának, ahol F értéke ‘1’).

Példa: DNF felírása

- Igazságtábla:

sor	A	B	F
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	1

- Kapott egyenlet: $1 = F = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{B} + A \cdot B = m_0 + m_2 + m_3$

  [0 0] [1 0] [1 1]

- Komplemens: $'0' = \overline{F} = \overline{A} \cdot B = m_1 = (\overline{m_0 + m_2 + m_3})$

  [0 1]

2.) Product-of-Sums: összeg„termek” szorzata

- **összeg (OR) termek szorzata (AND kapcsolata)**
- **Maxterm** (**M_i**): olyan kanonikus összeg term, amelyben mindegyik logikai változó pontosan egyszer fordul elő, ponált, vagy negált alakban.
  - Tegyük fel hogy F(P,Q,R)
  - Valós maxterm: $P+\overline{Q}+\overline{R}$, de nem valós: $P+Q$
  - Kanonikus forma: $F=(P+Q+R)(P+\overline{Q}+\overline{R})$
  - Nem kanonikus forma: $F=(P+Q)(P+\overline{Q}+\overline{R})$
- Gyakorlatban kevésbé használt forma.

KNF: Konjunktív Normál Forma

- Jel: $$F(KNF) = \prod_{i=0}^{2^n - 1} M_i$$
- Képzésük: a kanonikus igazságtábla azon **maxtermjeinek ÉS kapcsolatát** vesszük, ahol a függvény (F) értéke ‘0’, vagy a komplemens függvény ($\overline{F}$) értéke ‘1’.
- Pl: $F = \overline{A} + \overline{B}$ vagy

$$\overline{F} = (A+B)\cdot(\overline{A}+B)\cdot(A+\overline{B}) \overset{\text{disztributív}}{=\!=\!=} \overline{A\cdot B} = A\cdot B$$

- Maxterm (M_i): az igazságtáblázat i. sora, ahol az F kimeneti függvényérték ‘0’.

Példák: KNF

- Legyen: $M_i = \overline{A} + B + \overline{C}$ ahol az F kimeneti függvényérték *hamis* volt. Ez az M_i maxterm igaz A,B,C változók értékének kombinációjára, kivéve egyet, ahol A=1, B=0, C=1. Tehát i=[101]=5. → M_5 (táblázat 5.sora)

- Legyen: $M_i = A + B + C$ ahol az F kimeneti függvényérték *hamis* volt. Ez az M_i maxterm igaz A,B,C változók értékének kombinációjára, kivéve egyet, ahol A=0, B=0, C=0. Tehát i=[000]=0. → Így M_0 (táblázat 0.sora)

Példa: KNF/DNF felírása

- Igazságtábla

sor	J	K	L	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

- Igazságtáblából kapjuk, hogy:

$$0 = F(KNF) = (J + K + L) \cdot (\overline{J} + K + L) \cdot (\overline{J} + K + \overline{L}) \cdot (\overline{J} + \overline{K} + L) \cdot (\overline{J} + \overline{K} + \overline{L})$$

$$F(KNF) = [000] \cdot [100] \cdot [101] \cdot [110] \cdot [111] = M_0 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6 \cdot M_7$$

$$1 = F(DNF) = (\overline{J} \cdot \overline{K} \cdot L) + (\overline{J} \cdot K \cdot \overline{L}) + (\overline{J} \cdot K \cdot L)$$

$$F(DNF) = [001] + [010] + [011] = m_1 + m_2 + m_3$$

Igazságtábla felírása logikai kifejezésekből I.

- a.) **DNF-ből**: felírás egyszerű
  - **Kanonikus** mintermből: egy sor képződik (ahol F igaz),
  - **Nem kanonikus**, kevesebb változót tartalmazó termből: *több sor is képződhet*, mivel egy ilyen term egy adott logikai változó ponált és negált értékére is igaz kimeneti eredményt (F=1) ad,
  - Egy sorhoz **több term** is tartozhat!

Példa: DNF → Igazságtábla

- Eredeti egyenlet:

$$'1' = F(DNF) = J \cdot \overline{K} + \overline{J} \cdot K \cdot L + J \cdot K \cdot \overline{L} + K \cdot L$$

term1 term2 term3 term4

kanonikus (minterm)

- Kapott igazságtábla:

sor	J	K	L	F	
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	
2	0	1	0	0	
3	0	1	1	1	term2 és term4
4	1	0	0	1	term1
5	1	0	1	1	term1
6	1	1	0	1	term3
7	1	1	1	1	term4

Igazságtábla felírása logikai kifejezésekből II.

- b.) **KNF-ből**: felírás „nehezebb” (az egyes logikai változók negált értékeit kell venni)
  - **Kanonikus maxtermből**: egy sor képződik (ahol F hamis),
  - **Nem kanonikus,** kevesebb változót tartalmazó termből: több sor is képződhet, mivel egy ilyen term egy adott logikai változó ponált és negált értékére is ’*hamis’* kimeneti eredményt (F=0) ad,
  - Egy sorhoz **több term** is tartozhat!

Példa: KNF → Igazságtábla

- Eredeti egyenlet:

$$'0' = F(KNF) = (\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

term1 term2 term3

kanonikus (maxterm)

- Kapott igazságtábla:

sor	A	B	C	F	
0	0	0	0	1	
1	0	0	1	1	
2	0	1	0	1	
3	0	1	1	1	
4	1	0	0	0	term1 és term2
5	1	0	1	0	term2
6	1	1	0	1	
7	1	1	1	0	term3

Igazság táblák tömörebb felírási formája

- Eml: Kanonikus ig. táblánál: n változó → 2^n sor (összes lehetséges változó kombináció felírásával)
- Egyszerűsített / tömörebb felírás:
  - „**X**”: Don’t Care változó két értéke: 0 és 1 is lehet.
- Pl: $'1' = F(\mathrm{DNF}) = J \cdot \overline{K} + \overline{J} \cdot K \cdot L + J \cdot K \cdot \overline{L} + K \cdot L$

term1 term2 term3 term4

kanonikus (minterm)

J	K	L	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
X	1	1	1
1	0	X	1
1	1	0	1

term2 és term4

term1

term3

Term1: L don’t care (0 v. 1)

Term4: J dont’care (1 v. 0)

NTSH: Nem Teljesen Specifikált Hálózat (Don't Care kimenet)

- Bizonyos bemeneti kombinációkra ugyanazt a kimeneti eredményt kapjuk (irreleváns)
- Jele: „–" Don't care kimeneti értéke F-nek
- Pl.

A	B	F
0	X	1
1	0	-
1	1	0

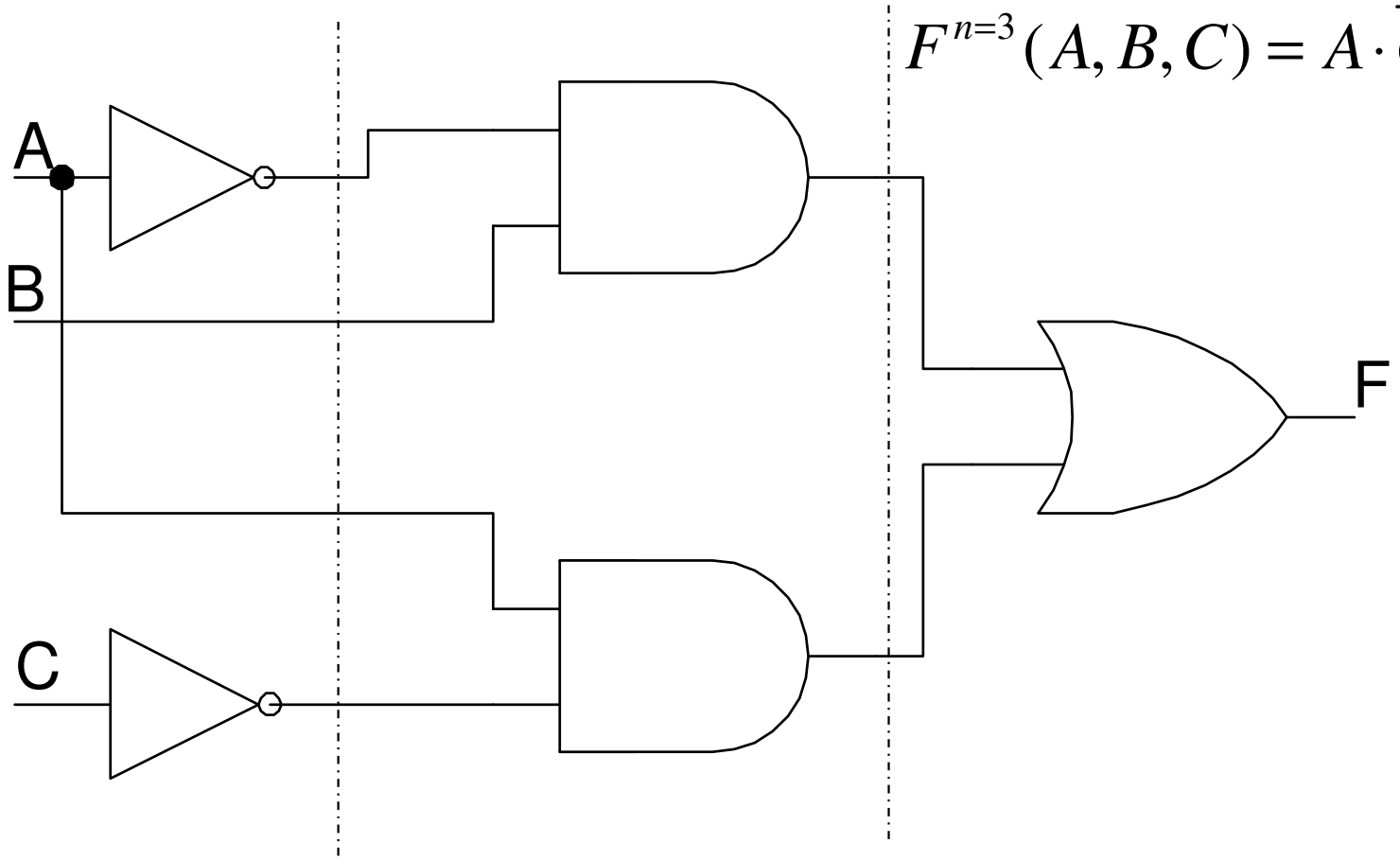
ha '–'=1, $F = \overline{A} + A \cdot \overline{B} = \overline{A} + \overline{B}$

ha '–'=0, $F = \overline{A}$

Elvi logikai rajz

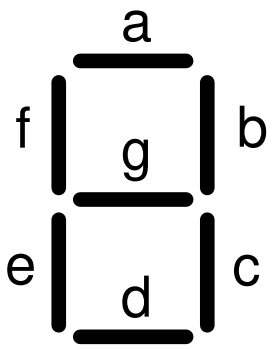
Az egyszerűsített függvény logikai áramköri realizációja

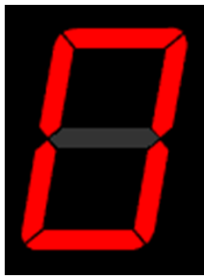
$$F^{n=3}(A,B,C) = A \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B$$



Példa 1: 7-szegmenses dekóder áramkör tervezése

- ***Számjegyek*** (0-9) és spec. ***hexadecimális karakterek*** megjelenítésére (A b C d E F)
- nemzetközi elnevezései a szegmenseknek: (a, b, c, d, e, f, g)
  - 16 érték (4 biten ábrázolható): F(X,Y,Z,W)

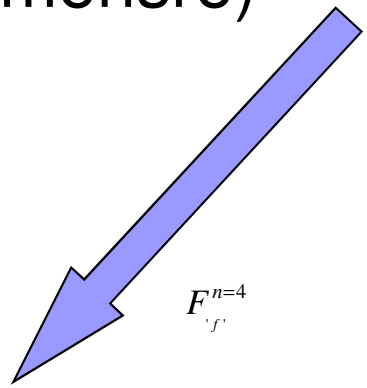




Példa: 7-szegmenses dekóder tervezése (folyt)

- Igazságtábla (**f** szegmensre)

$$F_{'f'}^{n=4} = ?$$



sor	X	Y	Z	W	F_f
0	0	0	0	0	**1**
1	0	0	0	1	**0**
2	0	0	1	0	**0**
3	0	0	1	1	**0**
4	0	1	0	0	**1**
5	0	1	0	1	**1**
6	0	1	1	0	**1**
7	0	1	1	1	**0**
8	1	0	0	0	**1**
9	1	0	0	1	**1**
10	1	0	1	0	**1**
11	1	0	1	1	**1**
12	1	1	0	0	**1**
13	1	1	0	1	**0**
14	1	1	1	0	**1**
15	1	1	1	1	**1**

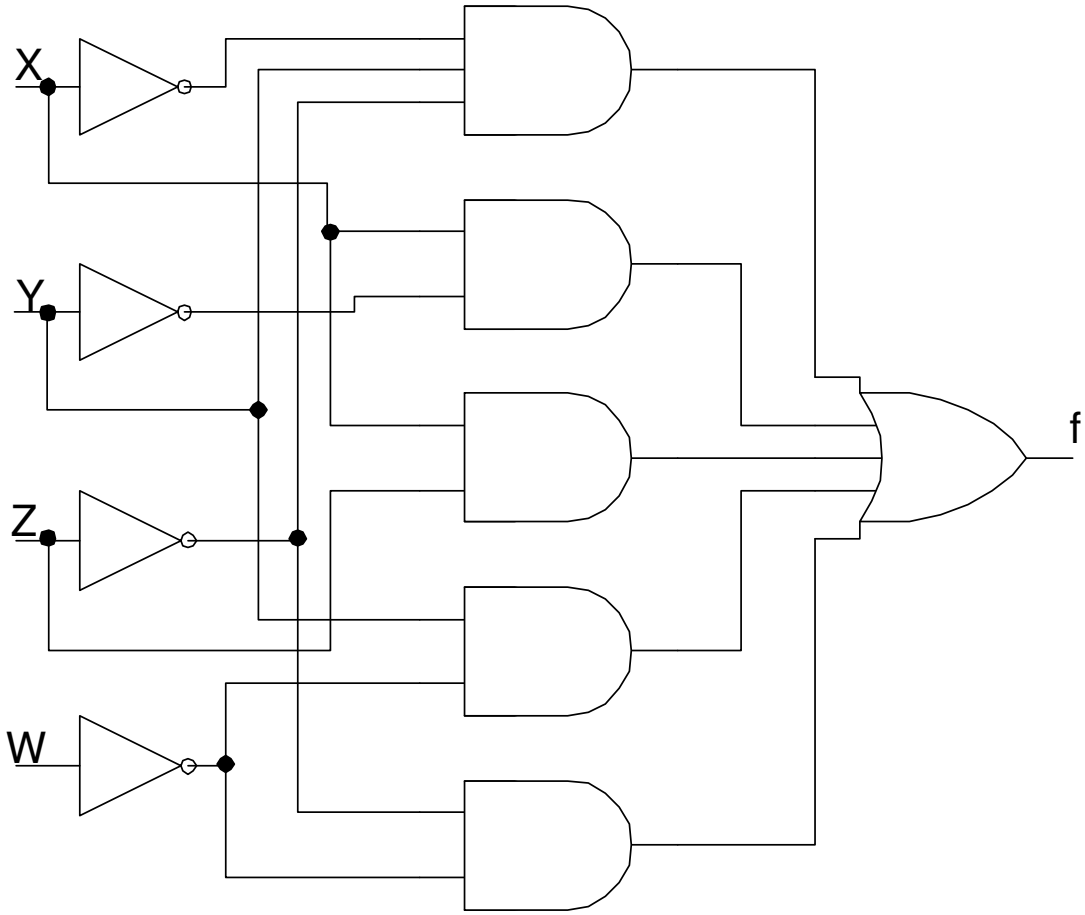
- Kapott optimalizált F kimeneti függvény **f** szegmensre:

$$F_{'f'}^{n=4}(X,Y,Z,W) = \overline{Z}\cdot\overline{W} + X\cdot\overline{Y} + Y\cdot\overline{W} +$$

$$+X\cdot Z + \overline{X}\cdot Y\cdot\overline{Z}$$

Példa 1: 7-szegmenses dekóder logikai áramköri realizációja

(f szegmensre)



$$F_{'f'}^{n=4}(X,Y,Z,W) = \overline{Z}\cdot\overline{W} + X\cdot\overline{Y} + Y\cdot\overline{W} + X\cdot Z + \overline{X}\cdot Y\cdot\overline{Z}$$