

Példák a dinamikus tagok témaköréből

1. a, Vázolja fel (grafikonban ábrázolja) az alábbi tag súlyfüggvényét!

$$G(s) = \frac{6}{8s^2 + 12s + 2}$$

- b, Csatolja vissza negatívan a $G(s)$ tagot, és ábrázolja ennek is a súlyfüggvényét!
(Rajzolja bele az előző diagramba!)

- c, Végezze el ugyanezeket a vizsgálatokat az átmeneti függvény esetében is!

Megoldás:

- a, Határozzuk meg tag paramétereit, ehhez rendezzük a törtet úgy, a nevezőben a másodfokú tag együtthatója 1 legyen és írjuk fel a másodrendű tag általános alakját:

$$G(s) = \frac{6}{8s^2 + 12s + 2} = \frac{6/8}{s^2 + 12/8s + 2/8} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_ns + \omega_n^2}$$

Így megkaphatjuk a tag paramétereit:

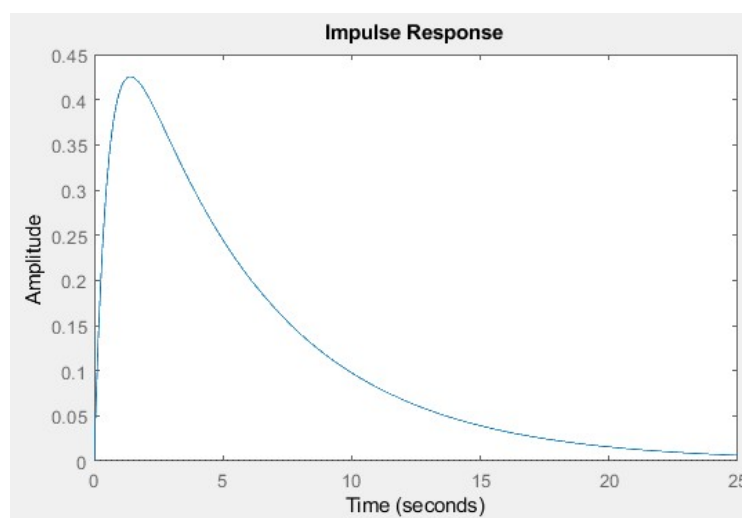
$$\omega_n^2 = 0,25 \rightarrow \omega_n = 0,5 \rightarrow T = 2$$

$$K\omega_n^2 = 0,75 \rightarrow K = 3$$

$$2\xi\omega_n = 1,5 \rightarrow \xi = 1,5$$

A súlyfüggvény a Dirac-impulzus bemenetre adott válaszfüggvény. Az előadáson elmondottaknak megfelelően, a másodrendű rendszereknél $t = 0$: $h(0) = 0$ és $t \rightarrow \infty$ $h(\infty) \rightarrow 0$, miután a csillapítási tényező 1-nél nagyobb, azaz a tag túlcillapított, így a visszaállás túllendülés nélkül, aszimptotikusan simulva valósul meg.

A súlyfüggvény menetét jellegében következő ábrának megfelelően kell bemutatni:



b, Írjuk fel a visszacsatolás eredő átviteli függvényének általános alakját, majd helyettesítsük be a tagot:

$$G_e(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{6}{8s^2 + 12s + 2}}{1 + \frac{6}{8s^2 + 12s + 2}} = \frac{6}{8s^2 + 12s + 8} = \frac{6/8}{s^2 + 12/8s + 8/8}$$

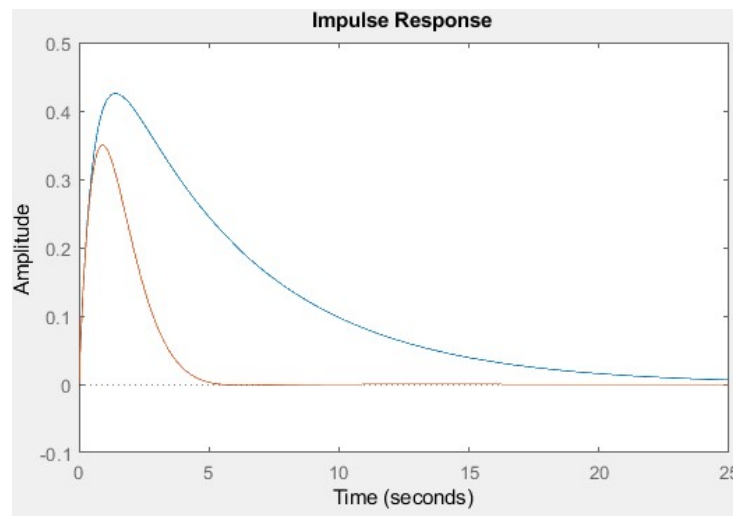
Határozzuk meg a visszacsatolt tag paramétereit:

$$\omega_{n,e}^2 = 1 \rightarrow \omega_{n,e} = 1 \rightarrow T_e = 1$$

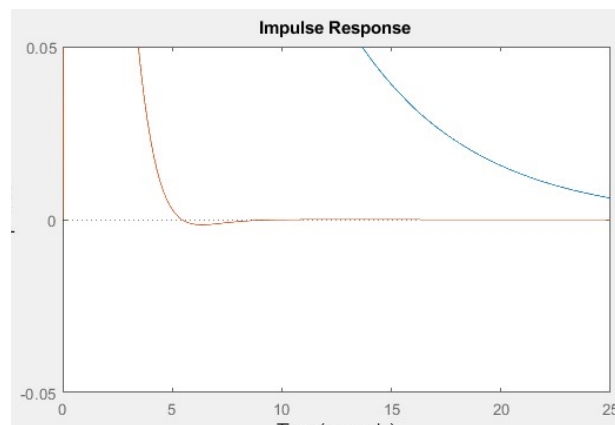
$$K_e \omega_{n,e}^2 = 0,75 \rightarrow K_e = 0,75$$

$$2\xi_e \omega_{n,e} = 1,5 \rightarrow \xi_e = 0,75$$

A kapott adatokból megállapítható, hogy a visszacsatolás hatására a tag erősítése 1-nél kisebb lett, csillapítási tényezője is 1-nél kisebb lett, azaz alálendülített a rendszer, így alálendüléssel fog visszaállni az eredeti értékéhez, ahogy ez a következő ábrán látható:



Az alálendülés a $\xi_e = 0,75$ csillapítási tényezőnél kicsi, nagyítva viszont látszik:



Megfigyelhető, hogy az eredő természetes frekvencia nőtt, azaz az időállandó kisebb lett, így a visszacsatolt tag működése felgyorsult.

c, Az átmeneti függvény felvázolásához használjuk fel a tagnak ($G(s)$) az a , pontban, a visszacsatolt körnek ($G_e(s)$) pedig a b , pontban meghatározott paramétereit:

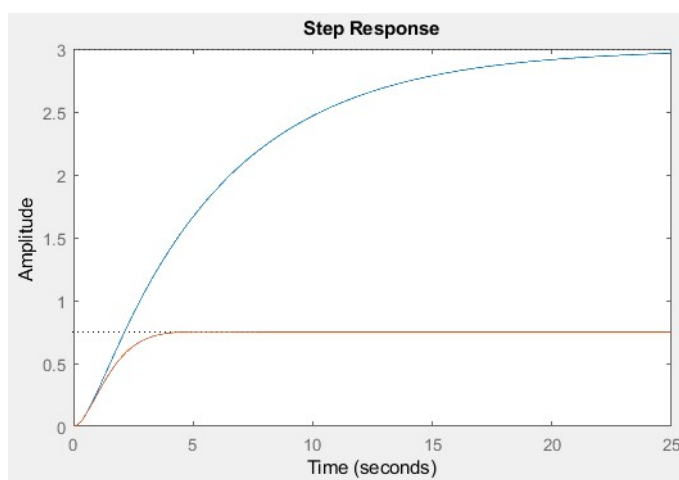
$$G(s): \omega_n = 0,5 \rightarrow T = 2 \quad K = 3 \quad \xi = 1,5$$

illetve

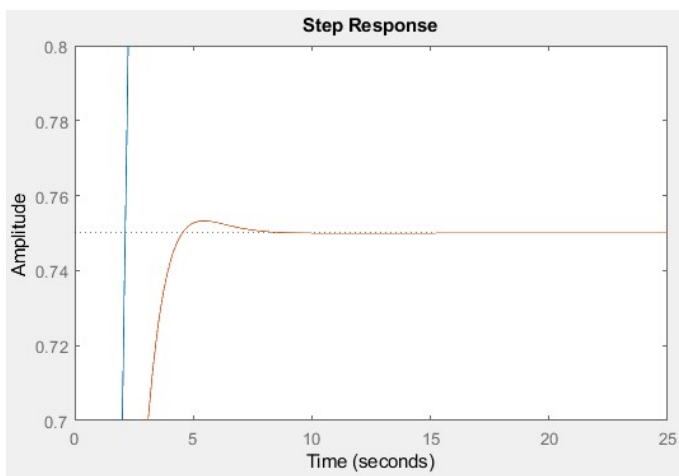
$$G_e(s): \omega_{n,e} = 1 \rightarrow T_e = 1 \quad K_e = 0,75 \quad \xi_e = 0,75$$

Az átmeneti függvény az egységugrás bemenetre adott válaszfüggvény. Az előadáson elmondottaknak megfelelően, a másodrendű rendszereknél $t = 0$ $y(0) = 0$ és $t \rightarrow \infty$ $y(\infty) \rightarrow K$. A tag esetében a csillapítási tényező 1-nél nagyobb, azaz a tag túlcillapított, így a beállítás túllendülés nélkül, aszimptotikusan simulva valósul meg. A visszacsatolt körnél az eredő csillapítási tényező 1-nél kisebb, így a kör kimenete túllendüléssel fog beállni az eredő erősítés által meghatározott értékhez

Az átmeneti függvényeket felvázolva jellegében következő ábrának megfelelő lefutást kell bemutatni:



A visszacsatolt kör túllendülése itt is csak nagyítással látszik:



2. Legyen adott két tag az alábbi bemenet-kimenet modellek segítségével:

$$4y^{(1)}(t) = 2u(t)$$

és

$$24y^{(1)}(t) + 3y(t) = 15u(t)$$

- a, Vázolja fel közös grafikonban a két tag átmeneti és súlyfüggvényét!
- b, Csatolja vissza negatívan külön-külön a két tagot, és ábrázolja így is az átmeneti és a súlyfüggvényeket!
- c, Kösse sorosan össze a két tagot és ábrázolja a kapott rendszernek az átmeneti és a súlyfüggvényét, majd csatolja vissza negatívan és vázolja fel így is a válaszfüggvényeket!
- d, Ismételje meg a c, pontot a tagok párhuzamos csatolása esetén!

Megoldás:

Határozzuk meg a tagok átviteli függvényét és paramétereit:

Az első tag esetében elvégezve a Laplace-transzformációt zérus kezdeti feltételek mellett:

$$4sY(s) = 2U(s)$$

ebből az átviteli függvény:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{4s} = \frac{1}{2s}$$

A tag tehát egy ideális integráló viselkedésű tag, melynek egy paramétere van, az integrálási idő állandó, melynek értéke 2.

Ugyanezt elvégezve a második tagra:

$$24Y(s) + 3Y(s) = 15U(s)$$

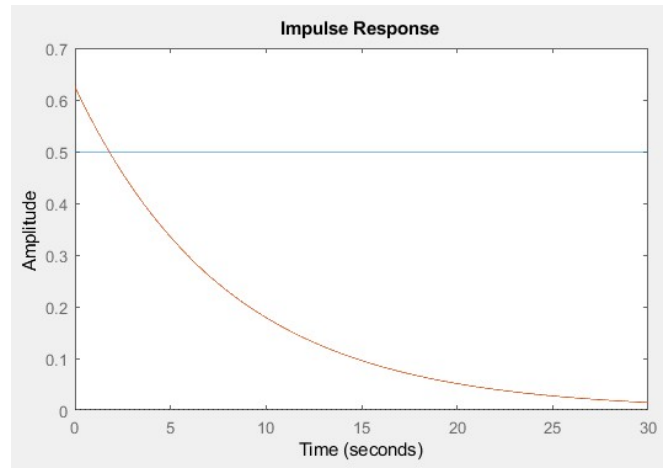
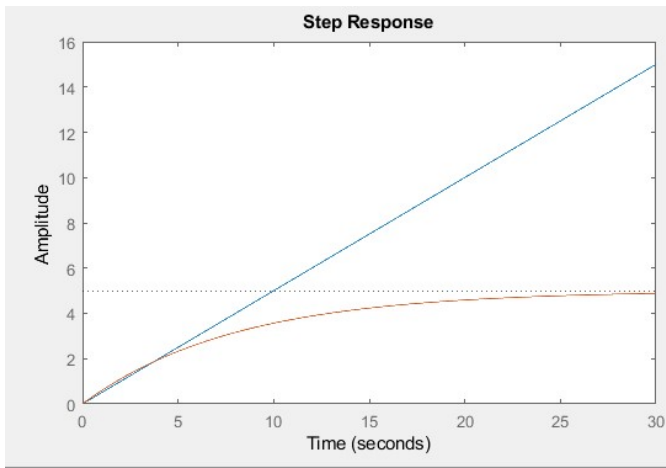
$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{15}{24s + 3} = \frac{5}{8s + 1}$$

A második tag egy elsőrendű tag, melynek két paramétere van: az erősítése $K = 5$, az időállandója $\tau = 8$.

a, A tagok paramétereire alapján az átmeneti és súlyfüggvények menete a következő lesz:

- az integráló tag esetében a válaszfüggvény a bemenő jel integrálja lesz, azaz az átmeneti függvény sebességugrás jellegű lesz, melynek a meredeksége az integrálási idő állandó reciprokéval lesz egyenlő;
- az elsőrendű tag esetében az átmeneti függvény menete a következő $t = 0$ $y(0) = 0$ és $t \rightarrow \infty$ $y(\infty) \rightarrow K$;
- az integráló tag súlyfüggvénye ugrásfüggvény lesz, melynek az amplitúdóját az integrálási idő állandó reciproka határozza meg;
- az elsőrendű tag esetében a súlyfüggvény menete a következő $t = 0$ $h(0) = K/\tau$ és $t \rightarrow \infty$ $h(\infty) \rightarrow 0$;

A válaszfüggvényeket a következő ábráknak megfelelően kell felvázolni (kék az integráló tag, bordó az elsőrendű tag válaszfüggvénye).



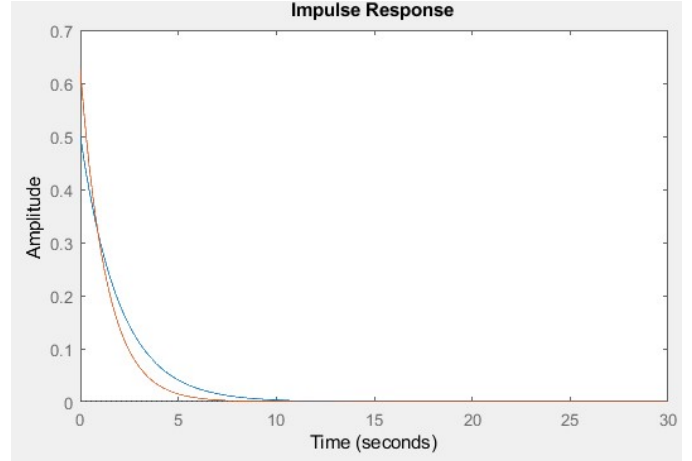
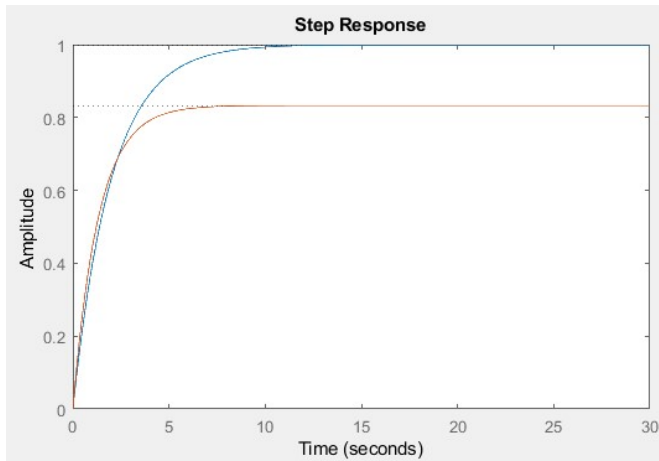
b, Külön-külön negatívan visszacsatolva a tagokat a következő eredő átviteli függvényeket kapjuk:

$$G_1(s) = \frac{1}{2s} \rightarrow G_{1,e}(s) = \frac{1}{2s+1}$$

$$G_2(s) = \frac{5}{8s+1} \rightarrow G_{2,e}(s) = \frac{5}{8s+6}$$

Azaz az integráló tag visszacsatolásával egy első rendű tagot kapunk, melynek paraméterei: az erősítése 1, az időállandója 2, míg az elsőrendű tag visszacsatolt átviteli függvénye továbbra is elsőrendű jellegű, de az erősítés 5/6, míg az időállandó 8/6.

Az átviteli és a súlyfüggvényeket az *a*, pontban tett megfontolások alapján a következő módon vázolhatjuk fel:



Az előző vizsgálattal való könnyebb összehasonlítás érdekében az ábrázolt időtartamot nem változtattam meg, így jól megfigyelhető a visszacsatolt tagoknak a kisebb időállandó miatti gyorsabb működése.

c, Soros kapcsolás esetén az eredő átviteli függvény a tagok átviteli függvényének a szorzata lesz:

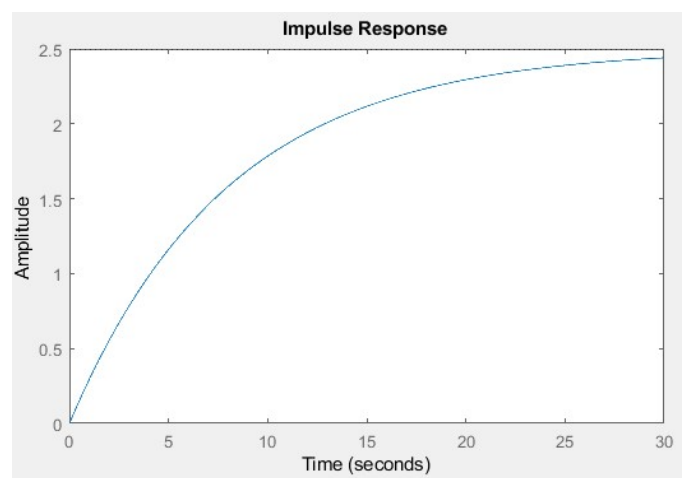
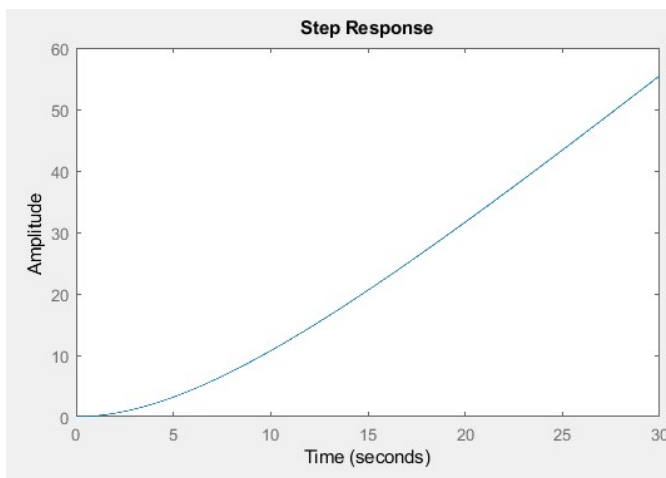
$$G_s(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{2s} \cdot \frac{5}{8s+1} = \frac{1}{0,4s} \cdot \frac{1}{8s+1}$$

Azaz eredőként egy egytárolós integráló tagot kapunk, melynek válaszfüggvényeiben a paramétereinek: az integrálási időállandónak, értéke $T_I = 0,4$ és az első rendű tag időállandójának $\tau = 8$ hatása megfigyelhető:

- az átmeneti függvény meredeksége megegyezik az integrálási időállandó reciprokával, és az előadáson levezetett képletnek megfelelően:

$$y(t) = \frac{1}{T_I} \left(t - \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right), \text{ ha } t = 30: y(30) = \frac{1}{0,4} \left(30 - 8 \left(1 - e^{-\frac{30}{8}} \right) \right) \approx 55$$

- a súlyfüggvény esetében az állandósult állapotbeli érték felel meg $1/T_I$ -nek, és megbecsülhető, hogy a $t = 0$ ponthoz húzott érintő a $\tau = 8$ -nál éri el az állandósult állapotbeli értéket.



Visszacsatolás hatására az eredő átviteli függvény egy másodrendű tagénak felel meg:

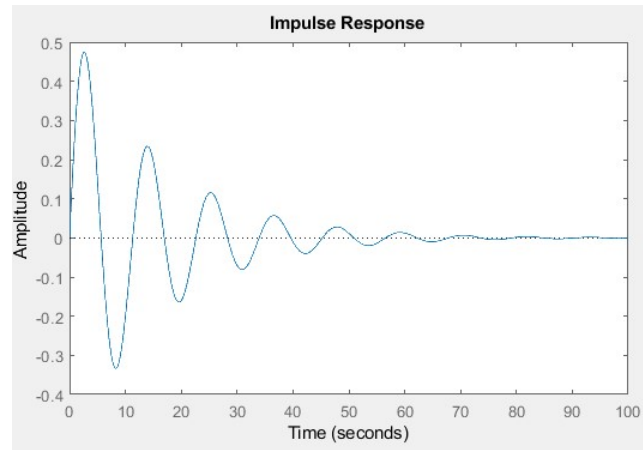
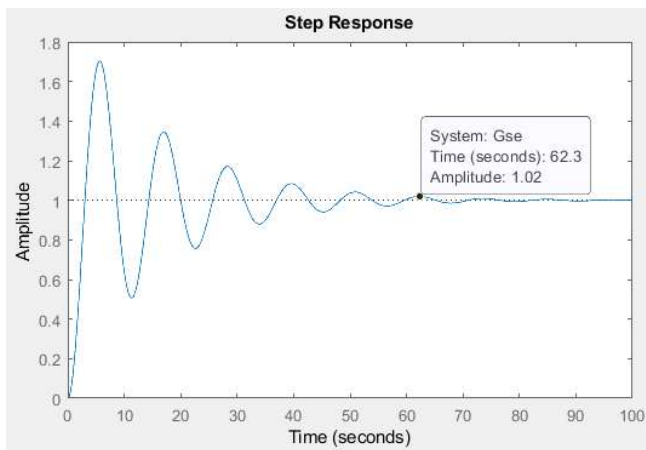
$$G_{e,s}(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{1}{2s} \cdot \frac{5}{8s+1}}{1 + \frac{1}{2s} \cdot \frac{5}{8s+1}} = \frac{5}{16s^2 + 2s + 5} = \frac{5/16}{s^2 + 2/16s + 5/16}$$

Az utolsó alak alapján a zárt kör paraméterei:

$$\omega_{n,es} = \sqrt{5/16} = 0,56 \rightarrow T_{e,s} = 1,79 \quad K_{e,s} = 1 \quad \xi_e = 0,11$$

Mint az az integráló jellegű tag visszacsatolásából várható volt, a zárt kör erősítése 1, azaz kimeneten a bemenetnek megfelelő jel jelenik meg az átmeneti függvény esetében, azonban a csillapítási tényezője kicsi, egy elég sok lengés után áll be ehhez az értékhez (lecsengési idő kb. 62s).

A súlyfüggvény szintén jelentős lengések után áll vissza az eredeti értékére.

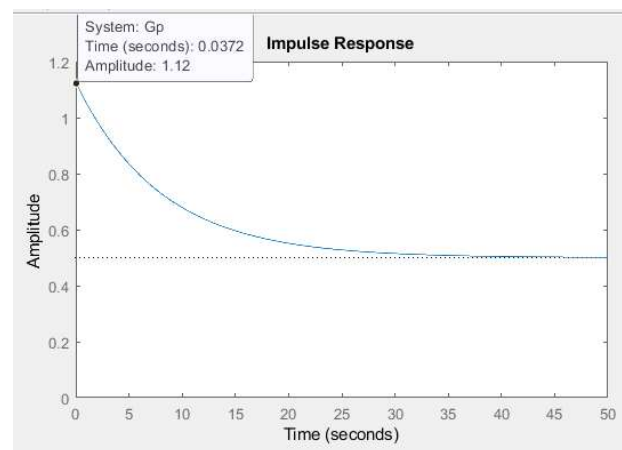
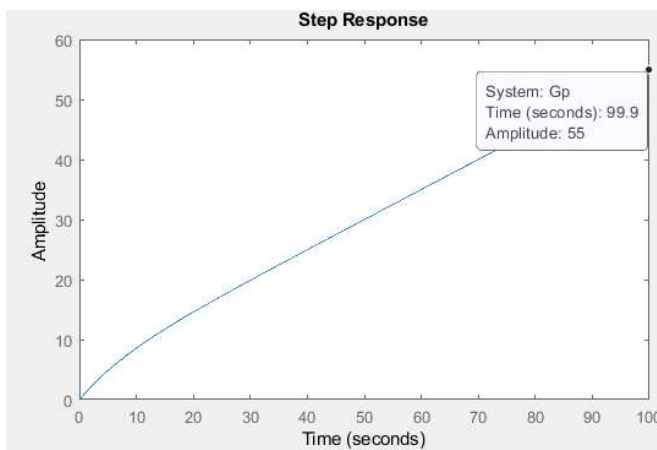


d, Párhuzamos kapcsolás esetén az eredő átviteli függvény a tagok átviteli függvényének az összege lesz:

$$G_s(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{1}{2s} + \frac{5}{8s+1} = \frac{18s+1}{2s(8s+1)}$$

Azaz eredőként egy olyan egytárolós integráló tagot kapunk, melynél az elsőrendű tag számlálójában egy elsőfokú polinom szerepel, és az ehhez tartozó időállandó nagyobb, mint a nevező időállandója. Ennek hatására a következők figyelhetők meg a válaszfüggvényekben:

- az átmeneti függvény meredeksége megegyezik az integrálási időállandó reciprokával és az integráló tag miatti sebességugrás kimenethez hozzáadódik az elsőrendű tag erősítésének megfelelő érték ($t = 100$ $y(100) = 0,5 \cdot 100 + 5 = 55$);
- a súlyfüggvény esetében az állandosult állapotbeli érték felel meg $1/T_I$ -nek, azaz 0,5-nek, és $t = 0$ -nál $y(0) = 1/T_I + K/\tau = 0,5 + 5/8 = 1,125$, ahol T_I az integráló tag integrálási időállandója, K és τ az elsőrendű tag erősítése és időállandója.



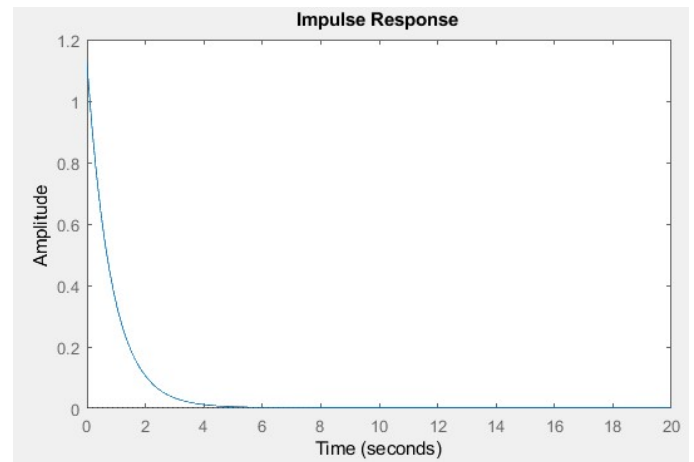
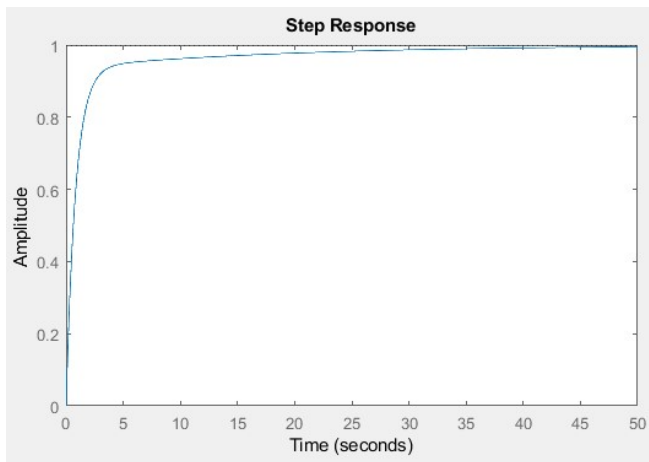
Ha a párhuzamosan kapcsolt tagokat visszacsatoljuk, akkor az eredő átviteli függvény a következő lesz:

$$G_{e,p}(s) = \frac{G_1(s) + G_2(s)}{1 + G_1(s) + G_2(s)} = \frac{\frac{1}{2s} + \frac{5}{8s+1}}{1 + \frac{1}{2s} + \frac{5}{8s+1}} = \frac{18s+1}{16s^2+20s+1}$$

az eredő tag paraméterei:

$$T_{e,p} = 4 \rightarrow \omega_{n,ep} = 0,25 \quad K_{e,p} = 1 \quad \xi_e = 2,5 \quad T_{sz} = 18 \text{ ahol } T_{sz} \text{ a számláló időállandója.}$$

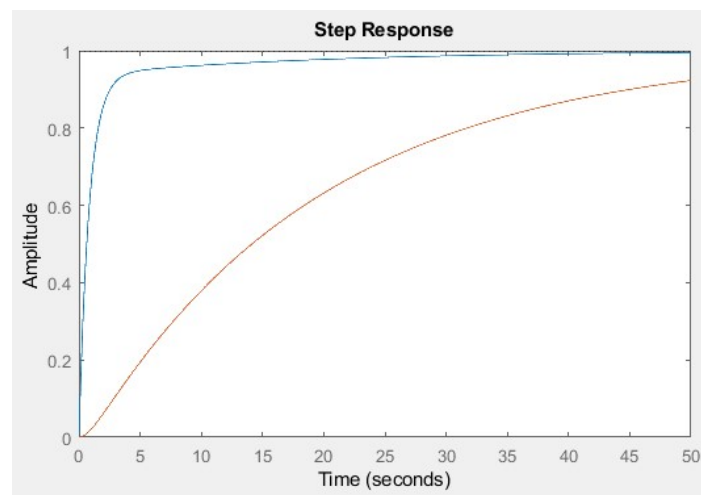
- Mint látható a visszacsatolt tag erősítése 1, az átmeneti függvény egyhez fog beállni, a csillapítási tényező egynél nagyobb, így túlszillapított (nincsenek lengések), és a számlálóbeli elsőfokú polinom hatására a beállítás az elsőrendű rendszerkéhez lesz hasonló.
- A súlyfüggvény az elsőrendű rendszerekre emlékeztetően nem 0-ról indul és aszimptotikusan simulva áll vissza a kiindulási értékre.



A számlálóbeli polinom hatása jól érzékelhető, ha az alábbi két tagnak vesszük az átmeneti függvényét:

$$G_{e,p}(s) = \frac{18s + 1}{16s^2 + 20s + 1} \quad G(s) = \frac{1}{16s^2 + 20s + 1}$$

azaz a párhuzamosan kapcsolású visszacsatolt tagok eredő átviteli függvényét vetjük össze egy ugyanolyan nevezőjű (azaz ugyanolyan pólusokkal rendelkező), de a számlálóban csak konstans 1-t tartalmazó taggal:



A kontrol tagnak tipikus, a másodrendű tagokra jellemző az átmeneti függvénye, inflexiós ponttal és a nagy időállandó miatti lassú beállással.