A gyökhelygörbe azon tulajdonságai, melyek alapján a menete felvázolható

1. A példa gyökhelygörbéjének annyi ága van, ahányad fokú a visszacsatolt kör eredő átviteli függvényének a nevezőjében szereplő polinom.
2. A gyökhelygörbe szimmetrikus a valós tengelyre.
3. Legyen a felnyitott kör átviteli függvénye alapján a zérusok száma *Z*, a pólusoké *P* ekkor
   - ha $P > Z$, akkor a gyökhelygörbe ágai a felnyitott kör pólusaiból indulnak ki és *Z* számú ág a felnyitott kör zérushelyeibe tart, *P-Z* számú ág pedig a végtelenbe;
   - ha $P = Z$, akkor valamennyi ág a felnyitott kör zérushelyeibe tart;
   - a $P < Z$ esettel ebben a félévben nem foglalkozunk.
4. A valós tengelyen akkor és csak akkor lehetnek gyökhelygörbe szakaszok, ha a vizsgált ponttól jobbra a pólusok és a zérushelyek együttes száma páratlan, azaz, ha a valós tengelyen -∝-ből kiindulva és a +∝ felé tartva vizsgáljuk a jobbra lévő pólusok zérusok együttes számát, és ha az páratlan, akkor ott van gyökhelygörbe szakasz.
5. A végtelenbe tartó ágak érintőinek a valós tengellyel bezárt szögeit:

$$\alpha_i = \frac{l \cdot 180°}{P - Z} \qquad l = 1,3, \dots, l_{max} \qquad l_{max} = 2(P - Z) - 1$$

   összefüggések segítségével adhatjuk meg.
6. A végtelenbe tartó ágak érintői a súlypontba metszik egymást, melynek koordinátája:

$$S = \frac{\sum Re(p_i) - \sum Re(z_j)}{P - Z}$$

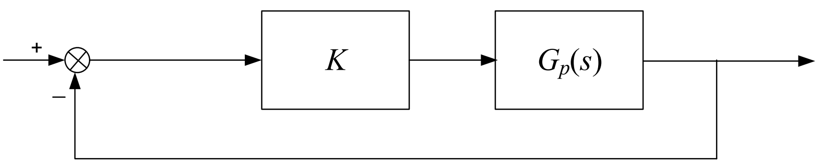
   összefüggés segítségével adható meg.
7. A gyökhelygörbe és a képzetes tengely metszéspontja, vagyis a stabilitás határához tartozó pólusokhoz tartozó erősítési érték a korábban ismertetett Hurwitz módszer segítségével határozható meg.
8. A gyökhelygörbe kilépése a valós tengelyből, vagyis a valós tengelynek az az *x* pontja, ahol többszörös gyököket kapunk a következő egyenlet segítségével határozható meg:

$$\sum_{i=1}^{P} \frac{1}{x - p_i} - \sum_{j=1}^{Z} \frac{1}{x - z_j} = 0$$

9. A gyökhelygörbe komplex pólusokból való kilépésének szöge a szögfeltétel segítségével határozható meg, úgy, hogy felveszünk egy pontot a pólushoz közel, és arra nézve megoldjuk a szögfeltételt:

$$\sum_{i=1}^{Z} \gamma_i - \sum_{j=1}^{P} \delta_j = \pm l \cdot 180° \qquad l = 1,3, \dots, l_{max} \qquad l_{max} = 2(P - Z) - 1$$

A gyakorló példák tárgyalásánál mindig az alábbi visszacsatolt kör fogjuk feltételezni:



$$G_e(s) = \frac{K G_p(s)}{1 + K G_p(s)}$$

ahol a $G_p(s)$ átviteli függvényt az egyes példákban megadom, K értékét változtatjuk 0 és $\propto$ között.

A gyökhelygörbe menetének a meghatározása az előbbi pontokra történő utalással végezzük el.

A végén a Matlabból kivágott diagramok segítségével láthatjuk a gyökhelygörbe menetét és az átmeneti függvényt, ha $K = 1$ és ha K valamilyen nagy érték.

Gyakorló példák:

1. a szabályozott tag átviteli függvénye

$$G_p(s) = \frac{1}{s+1}$$

az eredő átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{K\frac{1}{s+1}}{1+K\frac{1}{s+1}} = \frac{K}{s+1+K}$$

az 1. szabály szerint a gyökhelygörbének 1 ága lesz;

a 3. szabály szerint P=1, Z=0, p = -1 z nincs, így az egy ág K=0-nál a p = -1 pontból indul ki és $K \rightarrow \propto$ esetén a $-\propto$-be tart;

a 4. szabály szerint gyökhelygörbe szakasz a $(-\propto, -1]$ intervallumon lesz;

az 5 szabály szerint:

$$l_{max} = 2(P-Z) - 1 = 2(1-0) - 1 = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{1 \cdot 180°}{1-0} = 180°$$

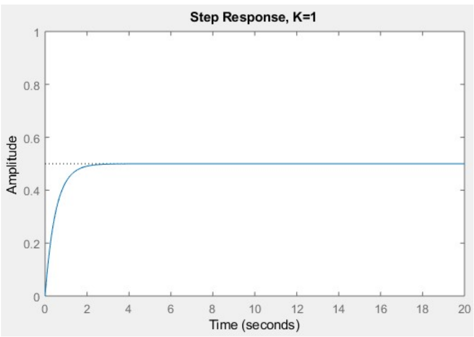
a 6. szabályt nem kell alkalmazni, mert csak egy ág van;

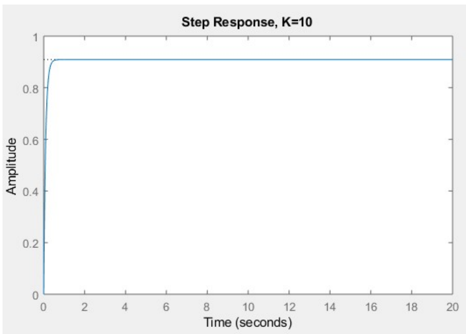
a 7. szabályt nem kell alkalmazni, mert a gyökhelygörbe nem metszi a képzetes tengelyt;

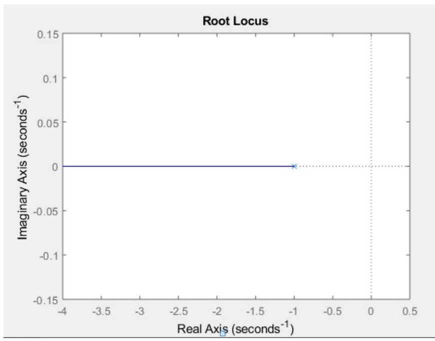
a 8. szabályt nem kell alkalmazni, mert nincs kilépési pont;

a 9. szabályt nem kell alkalmazni, mert nincs komplex konjugált gyökpár.

az átmeneti függvény (K =1, K = 10) és a gyökhelygörbe:







2. a szabályozott tag átviteli függvénye

$$G_p(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

az eredő átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{K\dfrac{s+2}{s+1}}{1 + K\dfrac{s+2}{s+1}} = \frac{Ks + 2K}{(K+1)s + 1 + 2K}$$

az 1. szabály szerint a gyökhelygörbének 1 ága lesz;

a 3. szabály szerint P=1, Z=1, p = -1 z = -2; így az egy ág K=0-nál a p = -1 pontból indul ki és $K \to \propto$ esetén az ág a felnyitott kör zérushelyébe, azaz -2-be tart:

$$p = -\frac{1+2K}{K+1}$$

a 4. szabály szerint gyökhelygörbe szakasz a [-2, -1] intervallumon lesz;

az 5 szabályt nem kell alkalmazni, mert nincs végtelenbe tartó ág;

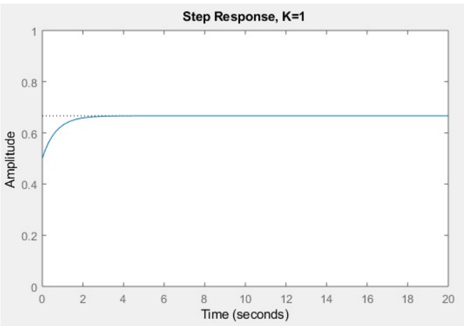
a 6. szabályt nem kell alkalmazni, mert nincs végtelenbe tartó ág;

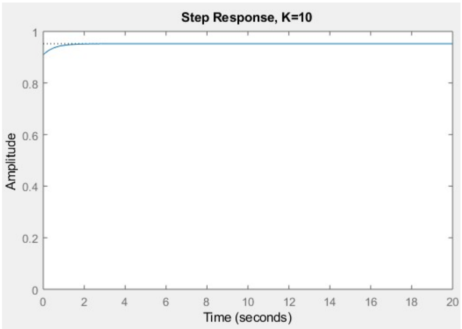
a 7. szabályt nem kell alkalmazni, mert a gyökhelygörbe nem metszi a képzetes tengelyt;

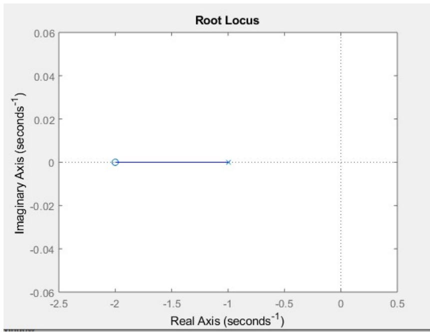
a 8. szabályt nem kell alkalmazni, mert nincs kilépési pont;

a 9. szabályt nem kell alkalmazni, mert nincs komplex konjugált gyökpár.

az átmeneti függvény (K =1, K = 10) és a gyökhelygörbe:







3. a szabályozott tag átviteli függvénye

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

az eredő átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{K\dfrac{1}{s^2+3s+2}}{1 + K\dfrac{1}{s^2+3s+2}} = \frac{K}{s^2 + 3s + 2 + K}$$

az 1. szabály szerint a gyökhelygörbének 2 ága lesz;

a 3. szabály szerint P=2, Z=0, , p_1 = -1, p_2 = -2, z nincs, így K=0-nál az egyik ág a p_1 = -1, a másik ág a p_2 = -2 pontból indul ki és $K \to \propto$ esetén mindkét ág a végtelenbe tart;

a 4. szabály szerint gyökhelygörbe szakasz a [-2, -1] intervallumon lesz;

az 5 szabály szerint:

$$l_{max} = 2(P - Z) - 1 = 2(2 - 0) - 1 = 3$$

$$\alpha_1 = \frac{1 \cdot 180°}{2 - 0} = 90°$$

$$\alpha_2 = \frac{3 \cdot 180°}{2 - 0} = 270°$$

azaz a végtelenbe tartó ágak érintői párhuzamosak lesznek a képzetes tengellyel;

a 6. szabály szerint a két végtelenbe tartó ág érintője a súlypontba metszi egymást, melynek koordinátája:

$$S = \frac{\sum Re(p_i) - \sum Re(z_j)}{P - Z} = \frac{(-2) + (-1)}{2} = -1{,}5$$

a 7. szabályt nem kell alkalmazni, mert a gyökhelygörbe nem metszi a képzetes tengelyt;

a 8. szabály szerint kilépési pont koordinátája;

$$\sum_{i=1}^{P} \frac{1}{x - p_i} - \sum_{j=1}^{Z} \frac{1}{x - z_j} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+3}{(x+2)(x+1)} = 0$$

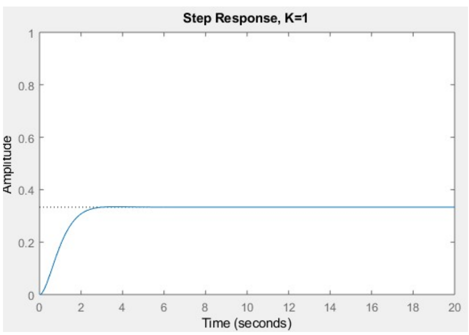
innen x = -1,5.

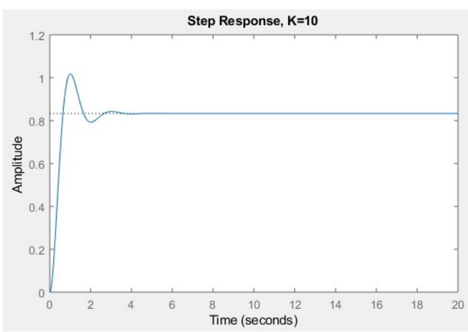
Extra feladatként meghatározhatjuk, hogy a kilépési pontnál mennyi az erősítés értéke. Ebben a pontban kétszeres negatív valós gyökünk van, így a másodfokú egyenlet megoldó képletében a diszkrimináns nulla:

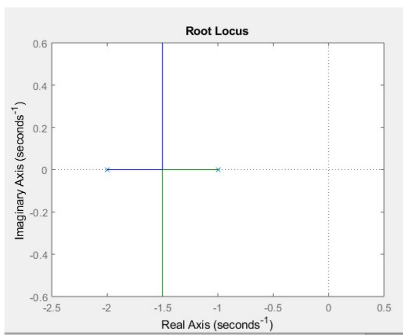
$$p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (2 + K)}}{2} \qquad 9 - 4 \cdot (2 + K) = 0 \qquad K = 0{,}25$$

a 9. szabályt nem kell alkalmazni, mert nincs komplex konjugált gyökpár.

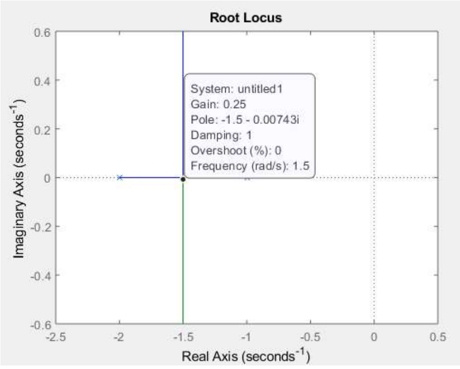
az átmeneti függvény (K =1, K = 10) és a gyökhelygörbe:







A kilépési ponthoz tartozó adatok:



4. a szabályozott tag átviteli függvénye

$$G_p(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

az eredő átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{K\dfrac{s+1}{s^2+s+1}}{1+K\dfrac{s+1}{s^2+s+1}} = \frac{K}{s^2+(1+K)s+1+K}$$

az 1. szabály szerint a gyökhelygörbének 2 ága lesz;

a 3. szabály szerint P=2, Z=1, , $p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$, z = -1, így K=0-nál az egyik ág a $p_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$, a másik ág a $p_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ pontból indul ki, és $K \to \propto$ esetén egyik a felnyitott kör zérusába, z = -1-be, a másik ág a végtelenbe tart;

a 4. szabály szerint gyökhelygörbe szakasz a (-∝, -1] intervallumon lesz;

az 5 szabály szerint:

$$l_{max} = 2(P-Z)-1 = 2(2-1)-1 = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{1\cdot 180°}{2-1} = 180°$$

azaz a végtelenbe tartó ág a valós tengelyen fut a -∝-be;

a 6. szabály szabályt nem kell alkalmazni, mert csak egy ág tart végtelenbe

a 7. szabályt nem kell alkalmazni, mert a gyökhelygörbe nem metszi a képzetes tengelyt;

a 8. szabály szerint kilépési pont ezúttal visszatérési pont lesz melynek koordinátája;

$$\sum_{i=1}^{P}\frac{1}{x-p_i} - \sum_{j=1}^{Z}\frac{1}{x-z_j} = \frac{1}{x+0{,}5+j0{,}5\sqrt{3}} + \frac{1}{x+0{,}5-j0{,}5\sqrt{3}} + \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\left(x+0{,}5+j0{,}5\sqrt{3}\right)(x+1) + \left(x+0{,}5-j0{,}5\sqrt{3}\right)(x+1) - \left(x+0{,}5+j0{,}5\sqrt{3}\right)\left(x+0{,}5-j0{,}5\sqrt{3}\right) = 0$$

$$x^2+2x = 0$$

innen csak az x = -2 megoldás jó, mert az x = 0 nem része a gyökhelygörbének.

Extra feladatként meghatározhatjuk, hogy a visszatérési pontnál mennyi az erősítés értéke. Ebben a pontban kétszeres negatív valós gyökünk van, így a másodfokú egyenlet megoldó képletében a diszkrimináns nulla:

$$p_{1,2} = \frac{-(1+K) \pm \sqrt{(1+K)^2 - 4\cdot(1+K)}}{2}$$

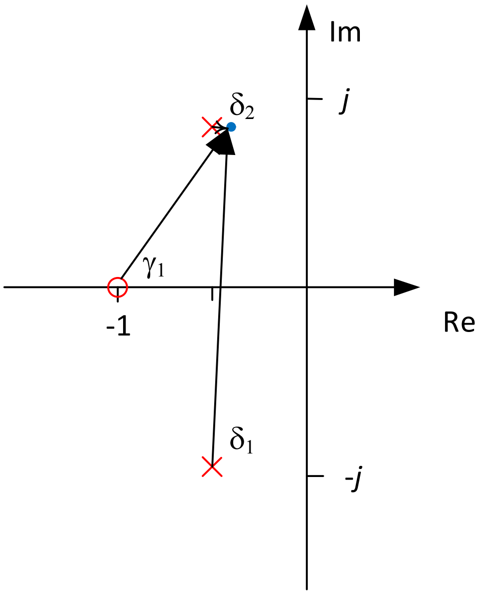
$$(1+K)^2 - 4\cdot(1+K) = 0$$

$$K^2 - 2K - 3 = 0$$

melyet megoldva K-ra 3-t és -1-t kapunk. A negatív megoldás nyilván nem jó, így az erősítés értéke 3 lesz a visszatérési pontnál.

9. A tagnak komplex konjugált gyökpár a pólusa, a kilépési szög meghatározása a szögfeltétel alapján:

Az alábbi ábrán felnyitott kör pólusai (piros X) és zérusa (piros kör) látható. Vegyünk fel egy pontot az egyik komplex pólushoz nagyon közel (kék pont) és húzzuk be az odamutató vektorokat: a zérusból kiinduló vektornak a valós tengellyel bezárt szöge legyen γ_1, a másik komplex pólusból kiindulóé δ_1, míg a kék ponthoz nagyon közel lévő pólusból kiindulóé δ_2.



Gyökök alapján könnyen γ_1 kiszámolható és δ_1 pedig a szimmetria miatt kb. 90°:

$\gamma_1 = 60°$, $\delta_1 = 90°$.

A szögfeltétel:

$$\sum_{i=1}^{Z} \gamma_i - \sum_{j=1}^{P} \delta_j = \pm l \cdot 180°$$

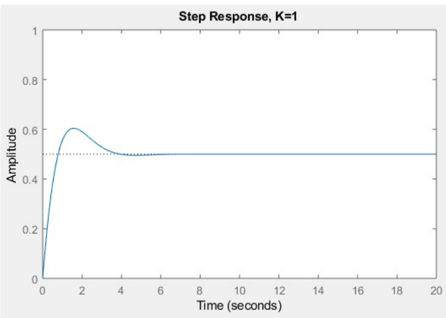
A keresett γ_3 szög így:

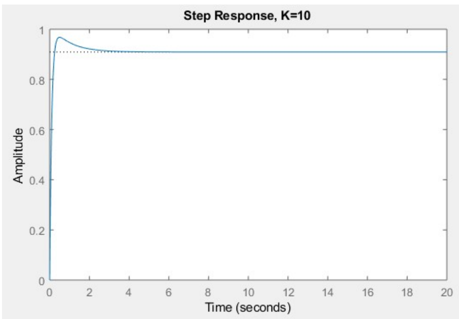
$$60° - (90° + \delta_2) = \pm l \cdot 180°$$

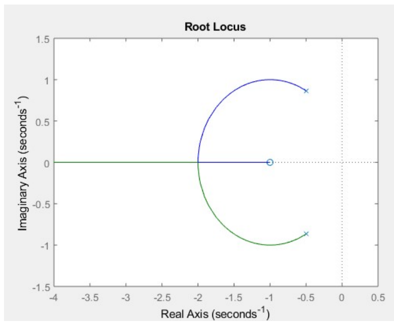
ahol l értékét úgy határozzuk meg, hogy pozitív értéket kapjunk, példánkban l = -1, így

$$\delta_2 = 150°.$$

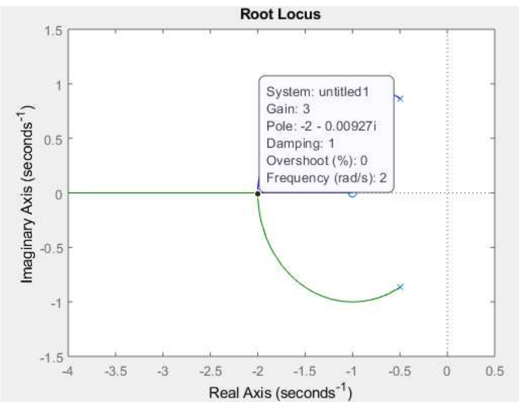
az átmeneti függvény (K =1, K = 10) és a gyökhelygörbe:







A kilépési ponthoz tartozó adatok:



5. a szabályozott tag átviteli függvénye

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

az eredő átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{K\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}}{1+K\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}} = \frac{K}{s^3+2s^2+2s+1+K}$$

az 1. szabály szerint a gyökhelygörbének 3 ága lesz;

a 3. szabály szerint P=3, Z=0, p_1 = -1, $p_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$, z nincs, így K=0-nál az egy ág a p_1 = -1, a másik két ág a $p_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ pontokból indul ki és $K \to \propto$ esetén mindhárom ág a végtelenbe tart;

a 4. szabály szerint gyökhelygörbe szakasz a (-∝, -1] intervallumon lesz;

az 5 szabály szerint:

$$l_{max} = 2(P-Z)-1 = 2(3-0)-1 = 5$$

$$\alpha_1 = \frac{1 \cdot 180°}{3-0} = 60°$$

$$\alpha_2 = \frac{3 \cdot 180°}{3-0} = 180°$$

$$\alpha_3 = \frac{5 \cdot 180°}{3-0} = 300°$$

azaz a végtelenbe tartó ágak érintői úgy helyezkednek le, hogy lehető legtávolabb legyenek egymástól;

a 6. szabály szerint a három végtelenbe tartó ág érintője a súlypontba metszi egymást, melynek koordinátája:

$$S = \frac{\sum Re(p_i) - \sum Re(z_j)}{P-Z} = \frac{(-1)+2\cdot(-0{,}5)}{3} = -\frac{2}{3}$$

a 7. szabályt alkalmazva a kritikus erősítés Hurwitz módszerrel történő meghatározására:

az eredő nevező: $s^3+2s^2+2s+1+K$

az I. feltétel rendben, hiszen $K > 0$, így minden együttható pozitív;

a II. feltételben a determináns

$$H_{3\times3} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1+K & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1+K \end{vmatrix}$$

a determinánsok ellenőrzése:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1+K \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-(1+K) = 3-K > 0$$

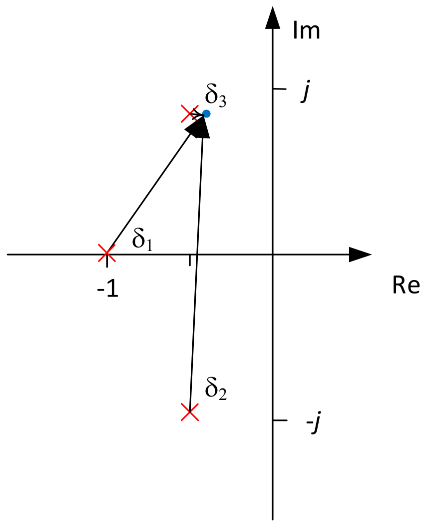
az a visszacsatolt kör csak $K < 3$ esetén lesz stabil.

a 8. szabályt nem kell alkalmazni, mert nincs kilépési pont;

9. A tagnak komplex konjugált gyökpár a pólusa, a kilépési szög meghatározása:

A meghatározás a szögfeltétel alapján történik.

Az alábbi ábrán felnyitott kör pólusai (piros X) láthatók. Vegyünk fel egy pontot az egyik komplex pólushoz nagyon közel (kék pont) és húzzuk be az odamutató vektorokat: a -1-ben lévő pólusból kiinduló vektornak a valós tengellyel bezárt szöge legyen δ_1, a másik komplex pólusból kiindulóé δ_2, míg a kék ponthoz nagyon közel lévő pólusból kiindulóé δ_3:



Gyökök alapján δ_1 könnyen kiszámolható és δ_2 pedig a szimmetria miatt kb. 90°:

$\delta_1 = 60°$, $\delta_2 = 90°$.

A szögfeltétel:

$$\sum_{i=1}^{Z} \gamma_i - \sum_{j=1}^{P} \delta_j = \pm l \cdot 180°$$

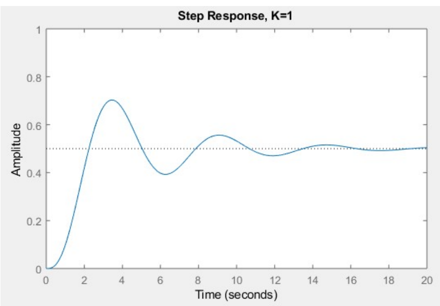
A keresett γ_3 szög így:

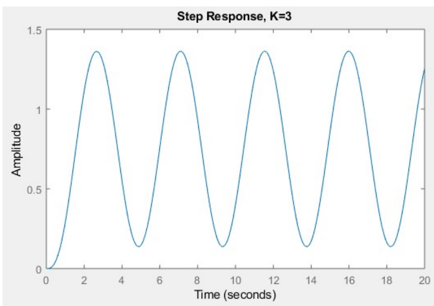
$$-(60° + 90° + \delta_3) = \pm l \cdot 180°$$

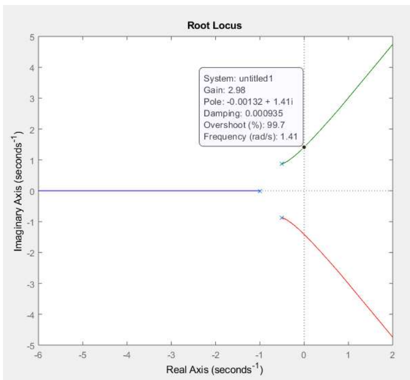
ahol l értékét úgy határozzuk meg, hogy pozitív értéket kapjunk, példánkban l = -1, így

$$\delta_3 = 30°.$$

az átmeneti függvény (K =1, K = 3) és a gyökhelygörbe a kritikus erősítéssel:







6. a szabályozott tag átviteli függvénye

$$G_p(s) = \frac{s+0{,}5}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{s+0{,}5}{s^3+2s^2+2s+1}$$

az eredő átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{K\dfrac{s+0{,}5}{s^3+2s^2+2s+1}}{1+K\dfrac{s+0{,}5}{s^3+2s^2+2s+1}} = \frac{Ks+0{,}5K}{s^3+2s^2+(2+K)s+1+0{,}5K}$$

az 1. szabály szerint a gyökhelygörbének 3 ága lesz;

a 3. szabály szerint P=3, Z=1, p_1 = -1, $p_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$, z_1 = -0,5, így K=0-nál az egy ág a p_1 = -1, a másik két ág a $p_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ pontokból indul ki és $K \to \propto$ esetén egy ág a zérushelybe, két ág a végtelenbe tart;

a 4. szabály szerint gyökhelygörbe szakasz a [-1, -0,5] intervallumon lesz;

az 5 szabály szerint:

$$l_{max} = 2(P-Z)-1 = 2(3-1)-1 = 3$$

$$\alpha_1 = \frac{1\cdot 180°}{3-1} = 90°$$

$$\alpha_2 = \frac{3\cdot 180°}{3-1} = 270°$$

azaz a végtelenbe tartó ágak érintői a képzetes tengellyel párhuzamosak lesznek;

a 6. szabály szerint a két végtelenbe tartó ág érintője a súlypontba metszi egymást, melynek koordinátája:

$$S = \frac{\sum Re(p_i) - \sum Re(z_j)}{P-Z} = \frac{(-1)+2\cdot(-0{,}5)-(-0{,}5)}{3-1} = -0{,}75$$

a 7. szabályt alkalmazva a kritikus erősítés Hurwitz módszerrel történő meghatározására:

az eredő nevező: $s^3+2s^2+(2+K)s+1+0{,}5K$

az I. feltétel rendben, hiszen $K > 0$, így minden együttható pozitív;

a II. feltételben a determináns

$$H_{3\times3} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1+0{,}5K & 0 \\ 1 & 2+K & 0 \\ 0 & 2 & 1+0{,}5K \end{vmatrix}$$

a determinánsok ellenőrzése:

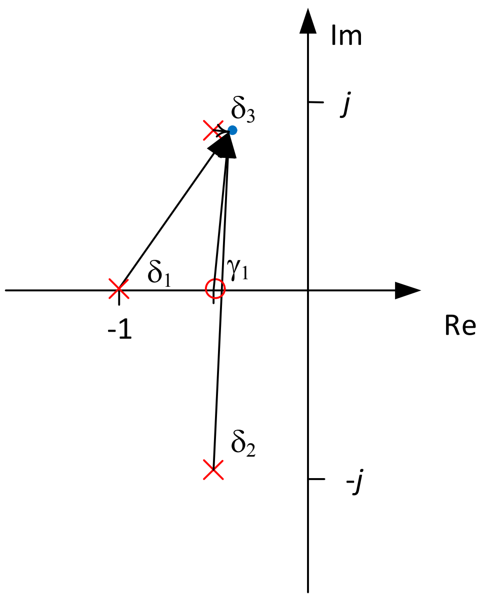
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1+0{,}5K \\ 1 & 2+K \end{vmatrix} = 2(2+K)-(1+0{,}5K) = 3+1{,}5K > 0$$

az a visszacsatolt kör tetszőleges $K > 0$ esetén stabil lesz.

a 8. szabályt nem kell alkalmazni, mert nincs kilépési pont;

a 9. szabály: a tagnak van egy komplex konjugált gyökpár pólusa, az abból kilépő ág kilépési szög meghatározása a szögfeltétel alapján:

Az alábbi ábrán felnyitott kör pólusai (piros X) és zérusa (piros kör) láthatók. Vegyünk fel egy pontot az egyik komplex pólushoz nagyon közel (kék pont) és húzzuk be az odamutató vektorokat: a zérusból kiinduló vektornak a valós tengellyel bezárt szöge legyen γ_1, a -1-ben lévő pólusból kiinduló vektoré δ_1, a másik komplex pólusból kiindulóé δ_2, míg a kék ponthoz nagyon közel lévő pólusból kiindulóé δ_3:



Gyökök alapján γ_1 kb. 90°, δ_1 könnyen kiszámolható és δ_2 pedig a szimmetria miatt kb. 90°:

$\gamma_1 = 90°$, $\delta_1 = 60°$, $\delta_2 = 90°$.

A szögfeltétel:

$$\sum_{i=1}^{Z} \gamma_i - \sum_{j=1}^{P} \delta_j = \pm l \cdot 180°$$

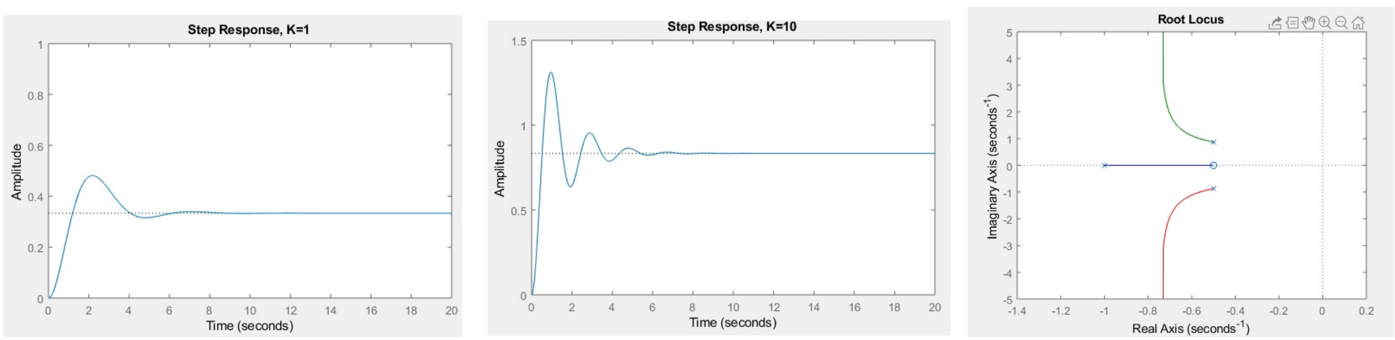
A keresett γ_3 szög így:

$$90° - (60° + 90° + \delta_3) = \pm l \cdot 180°$$

ahol l értékét úgy határozzuk meg, hogy pozitív értéket kapjunk, példánkban $l = -1$, így

$$\delta_3 = 120°.$$

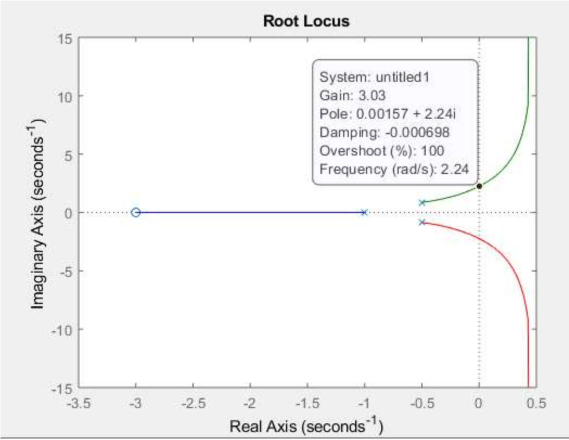
az átmeneti függvény ($K = 1$, $K = 10$) és a gyökhelygörbe:



A példából úgy tűnik, hogy a számlálóbeli elsőfokú polinom hatására stabil lesz a rendszer tetszőleges K-ra. Ez azonban nem így van, a zérushely helyétől függ a stabilitás. Módosítsuk az tag átviteli függvényét:

$$G_p(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{s+3}{s^3+2s^2+2s+1}$$

azaz a zérushely -3-ban lesz, ekkor a gyökhelygörbe:



Mint látható, $K > 3$ esetén instabil lesz a rendszer. (Javaslat vezessék le erre a rendszerre is a gyökhelygörbe tulajdonságokat!)