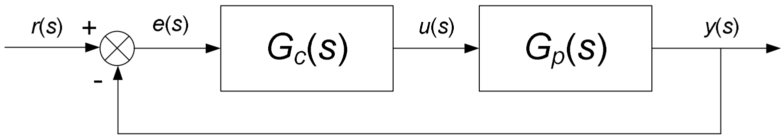
Tekintsük az alábbi szabályozó kört:



ahol a tag ($G_P(s)$) átviteli függvénye:

$$G_P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2},$$

a szabályozó ($G_C(s)$) átviteli függvénye pedig:

$$G_c(s) = K\left(1 + \frac{T_D s}{0{,}5s + 1}\right) \qquad K > 0, \qquad T_D > 0.$$

Legyen a maradó szabályozási hiba megengedett mértéke 0,02!

a) Határozza meg az ehhez szükséges minimális erősítési értéket (K)!

b) Vizsgálja meg, hogy az a) pontban kapott erősítési érték mellett milyen T_D érték esetén lesz a visszacsatolt kör stabil!

Megoldás:

A szabályozóra megadott átviteli függvényből megállapítható, hogy PD-szabályozót kell a körhöz illeszteni. A PD szabályozó nem képes a maradó szabályozási hibát eltüntetni, hiszen ahhoz I-tag kellene, de a D-tag csillapító hatása miatt nagyobb erősítést lehet alkalmazni. Vegyük észre, hogy a szabályozó algoritmusában reális D-tag szerepel. ezért ugyan a tag csak másodrendű, így nem állna fenn az instabilitás veszélye, az eredő átviteli függvény nevezője már harmadfokú polinom lesz.

– Határozzuk meg először az eredő átviteli függvényt:

$$G_P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2}$$

$$G_c(s) = K\left(1 + \frac{T_D s}{0{,}5s + 1}\right) = K\frac{(0{,}5 + T_D)s + 1}{0{,}5s + 1}$$

$$G_e(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{K\frac{(0{,}5 + T_D)s + 1}{0{,}5s + 1} \cdot \frac{1}{s^2 + s + 2}}{1 + K\frac{(0{,}5 + T_D)s + 1}{0{,}5s + 1} \cdot \frac{1}{s^2 + s + 2}} = \frac{K\big((0{,}5 + T_D)s + 1\big)}{0{,}5s^3 + 1{,}5s^2 + \big(2 + K(0{,}5 + T_D)\big)s + 2 + K}$$

– Határozzuk meg az előírt maradó szabályozási hibához szükséges erősítést:

$e_{ss} = 0{,}02$ ez azt jelenti, hogy a visszacsatolt kör eredő erősítése: $K_e = 1 - e_{ss} = 0{,}98$

az eredő erősítés a zárt kör átviteli függvénye alapján:

$$K_e = \frac{K}{2 + K} = 0{,}98 \quad \text{innen} \quad K = 98$$

– a stabilitás tartománya a T_D deriválási időállandó függvényében a Hurwitz kritérium segítségével határozható meg

a zárt kör átviteli függvényének nevezője, ha $K = 98$:

$$0{,}5s^3+1{,}5s^2+\left(2+98(0{,}5+T_D)\right)s+2+98$$

$$0{,}5s^3+1{,}5s^2+(51+98T_D)s+100$$

I. feltétel tejesül, hiszen T_D csak pozitív érték lehet, így minden együttható biztosan pozitív

II. feltétel:

$$H_{3\times3}=\begin{vmatrix}1{,}5 & 100 & 0\\ 0{,}5 & 51+98T_D & 0\\ 0 & 1{,}5 & 100\end{vmatrix}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1{,}5 & 100\\ 0{,}5 & 51+98T_D\end{vmatrix}=1{,}5(51+98T_D)-0{,}5\cdot100>0$$

$$26{,}5+147T_D>0$$

Mint látható, a II. feltétel is minden $T_D > 0$ esetre teljesül, így elvileg az erősítés növelésének nincs akadálya, azaz a maradó szabályozási hiba minden határon túl csökkenthető, de hogy a mi a hatása, azt a gyökhelygörbe vizsgálat mutatja meg.

– Gyökhelygörbe felvétele:

A gyökhelygörbe felvázolását az előadásban ismertetett tulajdonságok alapján végezzük el:

1. A példa gyökhelygörbéjének három ága lesz, hiszen a visszacsatolt kör eredő átviteli függvényének a nevezőjében is harmadfokú polinom szerepel:

$$G_e(s)=\frac{K\left((0{,}5+T_D)s+1\right)}{0{,}5s^3+1{,}5s^2+\left(2+K(0{,}5+T_D)\right)s+2+K}$$

2. A gyökhelygörbe szimmetrikus a valós tengelyre.
3. A visszacsatolt tag eredő átviteli függvénye alapján a zérusok száma Z=1, a pólusoké P=3, a felnyitott kör átviteli függvénye:

$$G_f(s)=G_c(s)G_p(s)=K\frac{(0{,}5+T_D)s+1}{0{,}5s+1}\cdot\frac{1}{s^2+s+2}$$

így a gyökhelygörbe ágai a felnyitott kör pólusaiból, -2, $-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{7}}{2}$-ből indulnak ki, és egy ág a felnyitott köt zérushelyébe, $-\frac{1}{0{,}5+T_D}$-be tart, a másik két ág pedig a végtelenbe.

4. A gyökhelygörbének a valós tengelyen a $\left[-2,-\frac{1}{0{,}5+T_D}\right]$intervallumon lesz szakasza, mert csak ekkor esetében igaz, hogy a -∞-ből kiindulva együttesen páratlan számú pólust és zérust látunk.
5. A végtelenbe tartó ágak érintőinek szögei:

$$\alpha_i=\frac{l\cdot180°}{P-Z}\qquad l=1{,}3,\dots,l_{max}\qquad\qquad l_{max}=2(P-Z)-1=2(3-1)-1=3$$

$$l=1\qquad \alpha_1=\frac{1\cdot180°}{2}=90°$$

$$l=3\qquad \alpha_1=\frac{3\cdot180°}{2}=270°$$

azaz, a végtelenbe tartó ágak párhuzamosak lesznek a képzetes tengellyel.

6. A két végtelenbe tartó ág érintője a súlypontba metszi egymást, melynek koordinátája:

$$S=\frac{\sum Re(p_i)-\sum Re(z_j)}{P-Z}=\frac{(-2)+2(-0{,}5)-\left(-\frac{1}{0{,}5+T_D}\right)}{2}=\frac{-0{,}25-1{,}5T_D}{0{,}5+T_D}\ ,$$

miután T_D értéke csak pozitív lehet, ezért az a képzetes tengellyel párhuzamos egyenes, amihez a végtelenbe tartó ágak simulni fognak mindig a komplex sík bal oldalán lesz ez is azt mutatja, hogy a visszacsatolt kör mindig stabil lesz. Ha T_D-t növeljük akkor a súlypont -1,5-hez tart

7. A Hurwitz kritérium alapján már láttuk, hogy az ágak nem metszik a képzetes tengelyt.
8. A gyökhelygörbének nincs kilépési pontja.

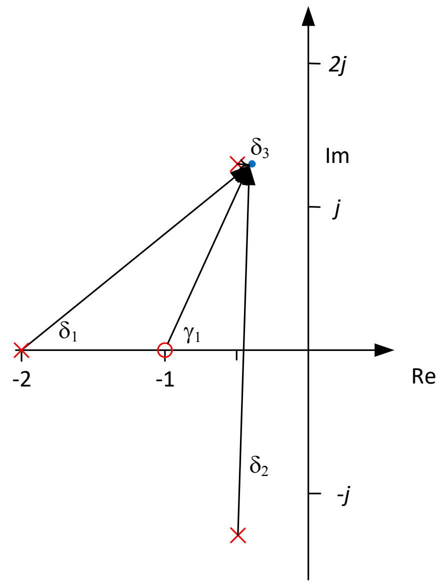
9. A tagnak van két képzetes pólusa, a kilépési szög meghatározása viszont kell a deriválási időállandó konkrét értéke, legyen $T_D = 0{,}5$:

   A meghatározás a szögfeltétel alapján történik. A szögfeltétel:

$$\sum_{i=1}^{Z} \gamma_i - \sum_{j=1}^{P} \delta_j = \pm l \cdot 180°$$

   azaz a felnyitott kör zérusaiból a gyökhelygörbe adott pontjába mutató vektoroknak a valós tengellyel bezárt szögeinek összegéből levonjuk a pólusokból ugyanebbe a pontba mutató vektorok szögeinek az összegét, akkor $\pm l \cdot 180°$-t kell kapnunk.

   Az alábbi ábrán felnyitott kör pólusai (piros X) és zérusa (piros kör) látható. Vegyünk fel egy pontot az egyik komplex pólushoz nagyon közel (kék pont) és húzzuk be az odamutató vektorokat: a zérusból kiinduló vektornak a valós tengellyel bezárt szöge legyen γ_1, az origóban lévő pólusból kiinduló vektoré δ_1, a másik komplex pólusból kiindulóé δ_2, míg a kék ponthoz nagyon közel lévő pólusból kiindulóé δ_3.



   Gyökök alapján könnyen γ_1, δ_1 és δ_2 kiszámolható:

   $\gamma_1 = 69{,}3°$, $\delta_1 = 41{,}3°$, $\delta_2 = 90°$.

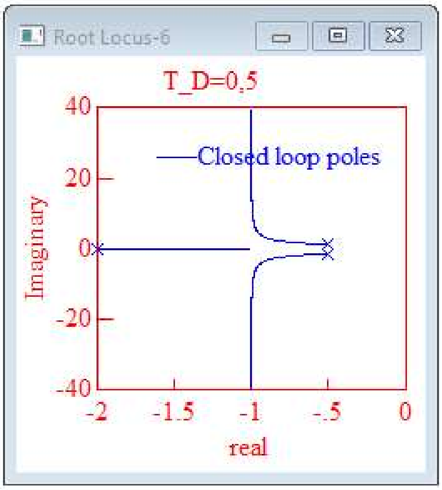
   A keresett γ_3 szög így:

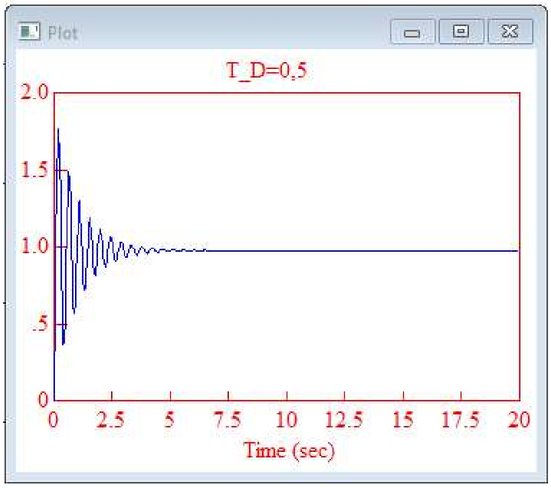
$$69{,}3° - (41{,}3° + 90° + \delta_3) = \pm l \cdot 180°$$

   ahol l értékét úgy határozzuk meg, hogy pozitív értéket kapjunk, példánkban $l = -1$, így

$$\delta_3 = 118°.$$

Az alábbi ábrákon a gyökhelygörbe és a zárt kör átmeneti függvénye látható $T_D = 0{,}5$ esetén.


Root Locus-6
T_D=0,5
Closed loop poles
40
20
0
-20
-40
Imaginary
-2
-1.5
-1
-.5
0
real


Plot
T_D=0,5
2.0
1.5
1.0
.5
0
0
2.5
5
7.5
10
12.5
15
17.5
20
Time (sec)