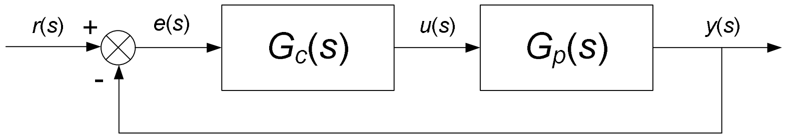
Tekintsük az alábbi szabályozó kört



ahol a tag ($G_P(s)$) átviteli függvénye:

$$G_P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1},$$

a szabályozó ($G_C(s)$) átviteli függvénye pedig:

$$G_c(s) = K\left(1 + \frac{1}{s}\right) \qquad K > 0.$$

Milyen K erősítésre lesz stabil a rendszer?

Megoldás:

- a szabályozott objektum tulajdonságai:
    - másodrendű tag, paraméterei: erősítés $K_p = 1$, természetes frekvencia ω_n=1, csillapítási tényező ξ=0,5, azaz a tag alulcsillapított
- a szabályozó tulajdonságai:
    - a megadott szabályozó egy PI-tag, melynél az integrálási időállandó T_I=1/K,
    - A PI-szabályozó esetében az I-tag biztosítja, hogy ne legyen maradó szabályozási hiba, de az erősítés K növelésének hatására az integrálási időállandó csökkeni fog, és a túllendülés és a lecsengési idő növekedéséhez, illetve instabilitáshoz vezethet.
- az eredő átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{\frac{Ks + K}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + s + 1}}{1 + \frac{Ks + K}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + s + 1}} = \frac{Ks + K}{s^3 + s^2 + (K + 1)s + K}$$

  - az eredő átviteli függvény alapján látható. hogy az I-tag hatására tényleg nem lesz maradó szabályozási hiba, ha rendszer stabil, hiszen a visszacsatolt kör eredő erősítése K_e=1.
  - a stabilitás tartományának meghatározása a Hurwitz kritérium segítségével:
      - I. feltétel: a_3, $a_2 > 0$, a_1: $K > -1$, a_0: $K > 0$, de a feladat szerint $K > 0$, így ez is rendben
      - II. feltétel:

$$H_{3\times 3} = \begin{vmatrix} 1 & K & 0 \\ 1 & K + 1 & 0 \\ 0 & 1 & K \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & K \\ 1 & K + 1 \end{vmatrix} = (K + 1) - K > 0$$

Mint látható, a II. feltétel is minden $K > 0$ esetre teljesül, így elvileg az erősítés növelésének nincs akadálya, de hogy a mi a hatása, azt a gyökhelygörbe vizsgálat mutatja meg.

  - Gyökhelygörbe felvétele:

  A gyökhelygörbe felvázolását az előadásban ismertetett tulajdonságok alapján végezzük el:

1. A példa gyökhelygörbéjének három ága lesz, hiszen a visszacsatolt kör eredő átviteli függvényének a nevezőjében is harmadfokú polinom szerepel:

$$G_e(s) = \frac{Ks + K}{s^3 + s^2 + (K+1)s + K}$$

2. A gyökhelygörbe szimmetrikus a valós tengelyre.
3. A visszacsatolt tag eredő átviteli függvénye alapján a zérusok száma Z=1, a pólusoké P=3, a felnyitott kör átviteli függvénye:

$$G_f(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{Ks + K}{s(s^2 + s + 1)}$$

így a gyökhelygörbe ágai a felnyitott kör pólusaiból, 0, $-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$-ből indulnak ki, és egy ág a felnyitott köt zérushelyébe, -1-be tart, a másik két ág pedig a végtelenbe.

4. A gyökhelygörbének a valós tengelyen a [-1, 0] intervallumon lesz szakasza, mert csak ekkor esetében igaz, hogy a -∞-ből kiindulva együttesen páratlan számú pólust és zérust látunk.
5. A végtelenbe tartó ágak érintőinek szögei:

$$\alpha_i = \frac{l \cdot 180°}{P - Z} \qquad l = 1,3,\ldots,l_{max} \qquad l_{max} = 2(P - Z) - 1 = 2(3 - 1) - 1 = 3$$

$$l = 1 \qquad \alpha_1 = \frac{1 \cdot 180°}{2} = 90°$$

$$l = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{3 \cdot 180°}{2} = 270°$$

azaz, a végtelenbe tartó ágak párhuzamosak lesznek a képzetes tengellyel.

6. A két végtelenbe tartó ág érintője a súlypontba metszi egymást, melynek koordinátája:

$$S = \frac{\sum Re(p_i) - \sum Re(z_j)}{P - Z} = \frac{0 + 2(-0{,}5) - (-1)}{2} = 0$$

azaz a végtelenbe tartó ágak a képzetes tengelyhez fognak simulni.

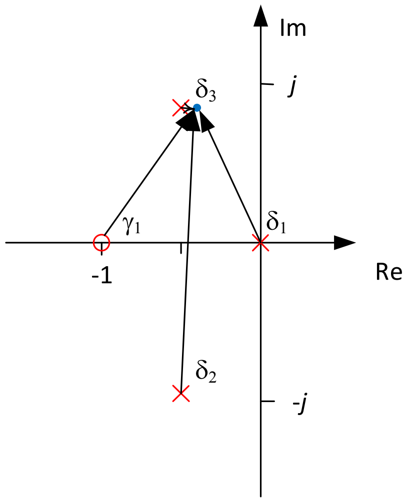
7. A Hurwitz kritérium alapján már láttuk, hogy az ágak nem metszik a képzetes tengelyt.
8. A gyökhelygörbének nincs kilépési pontja.
9. A tagnak van két képzetes pólusa, a kilépési szög meghatározása:

   A meghatározás a szögfeltétel alapján történik. A szögfeltétel:

$$\sum_{i=1}^{Z} \gamma_i - \sum_{j=1}^{P} \delta_j = \pm l \cdot 180°$$

   azaz a felnyitott kör zérusaiból a gyökhelygörbe adott pontjába mutató vektoroknak a valós tengellyel bezárt szögeinek összegéből levonjuk a pólusokból ugyanebbe a pontba mutató vektorok szögeinek az összegét, akkor $\pm l \cdot 180°$-t kell kapnunk.

   Az alábbi ábrán felnyitott kör pólusai (piros X) és zérusa (piros kör) látható. Vegyünk fel egy pontot az egyik komplex pólushoz nagyon közel (kék pont) és húzzuk be az odamutató vektorokat: a zérusból kiinduló vektornak a valós tengellyel bezárt szöge legyen γ_1, az origóban lévő pólusból kiinduló vektoré δ_1, a másik komplex pólusból kiindulóé δ_2, míg a kék ponthoz nagyon közel lévő pólusból kiindulóé δ_3.



Gyökök alapján könnyen γ_1, δ_1 és δ_2 kiszámolható:

$\gamma_1 = 60°$, $\delta_1 = 120°$, $\delta_2 = 90°$.

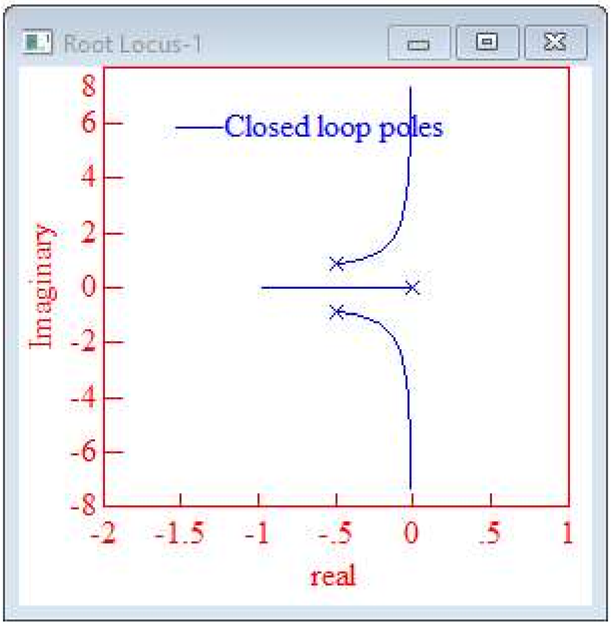
A keresett γ_3 szög így:

$$60° - (120° + 90° + \delta_3) = \pm l \cdot 180°$$

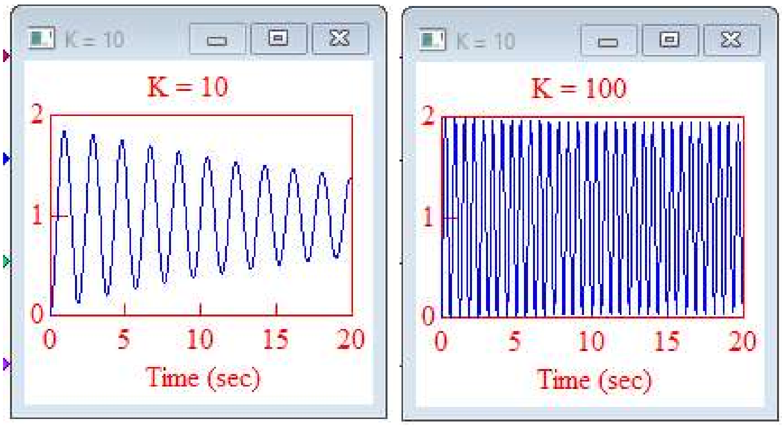
ahol l értékét úgy határozzuk meg, hogy pozitív értéket kapjunk, példánkban $l = -1$, így

$$\delta_3 = 30°.$$

Gyökhelygörbe a VisSim-ben (zérus nincs jelölve!):



Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy bár a visszacsatolt kör az erősítés növelésének hatására nem lesz instabil, azonban a zárt kör pólusainak valós része a nullához tart, így az erősítés növelésével egyre inkább lengő jellegű lesz a rendszer, egyre lassabban csillapodnak a lengések, nagy lesz a lecsengési idő, és a rendszer a stabilitása határa típusú viselkedéssel, azaz a kimentén állandósult lengésekkel jellemezhető. Demonstrációként a zárt kör átmeneti függvénye $K = 10$ és $K = 100$ esetén:


K = 10
K = 10
2
1
0
0
5
10
15
20
Time (sec)
K = 10
K = 100
2
1
0
0
5
10
15
20
Time (sec)