Gyökhelygörbe módszer

Vegyük fel az alábbi tag gyökhelygörbéjét:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

A gyökhelygörbe felvázolását az előadásban ismertetett tulajdonságok alapján végezzük el:

1. A példa gyökhelygörbéjének három ága lesz, hiszen a visszacsatolt kör eredő átviteli függvényének a nevezőjében is harmadfokú polinom szerepel:

$$G_e(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K}$$

2. A gyökhelygörbe szimmetrikus a valós tengelyre.
3. A visszacsatolt tag eredő átviteli függvénye alapján a zérusok száma Z=0, a pólusoké P=3, így a gyökhelygörbe ágai a felnyitott kör pólusaiból, -1, -2 és -3-ból indulnak ki, és a végtelenbe tartanak.
4. A gyökhelygörbének a valós tengelyen a]-∞, -3] és a [-2, -1] intervallumon lesznek szakaszai, mert csak ezek esetében igaz, hogy a -∞-ből kiindulva együttesen páratlan számú pólust és zérust látunk.
5. A végtelenbe tartó ágak érintőinek szögei:

$$\alpha_i = \frac{l \cdot 180°}{P - Z} \qquad l = 1,3, \dots, l_{max} \qquad\qquad l_{max} = 2(P - Z) - 1 = 2(3 - 0) - 1 = 5$$

$$l = 1 \qquad \alpha_1 = \frac{1 \cdot 180°}{3} = 60°$$

$$l = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{3 \cdot 180°}{3} = 180°$$

$$l = 5 \qquad \alpha_1 = \frac{5 \cdot 180°}{3} = 300°$$

6. A három végtelenbe tartó ág érintője a súlypontba metszi egymást, melynek koordinátája:

$$S = \frac{\sum Re(p_i) - \sum Re(z_j)}{P - Z} = \frac{(-1) + (-2) + (-3)}{3} = -2$$

7. A Hurwitz kritérium segítségével meghatározható, hogy az erősítés, K=60 értékénél metszi a két ág a képzetes tengelyt.
8. A gyökhelygörbe kilépési pontja a

$$\sum \frac{1}{x - p_i} - \sum \frac{1}{x - z_j} = 0$$

   egyenlet alapján:

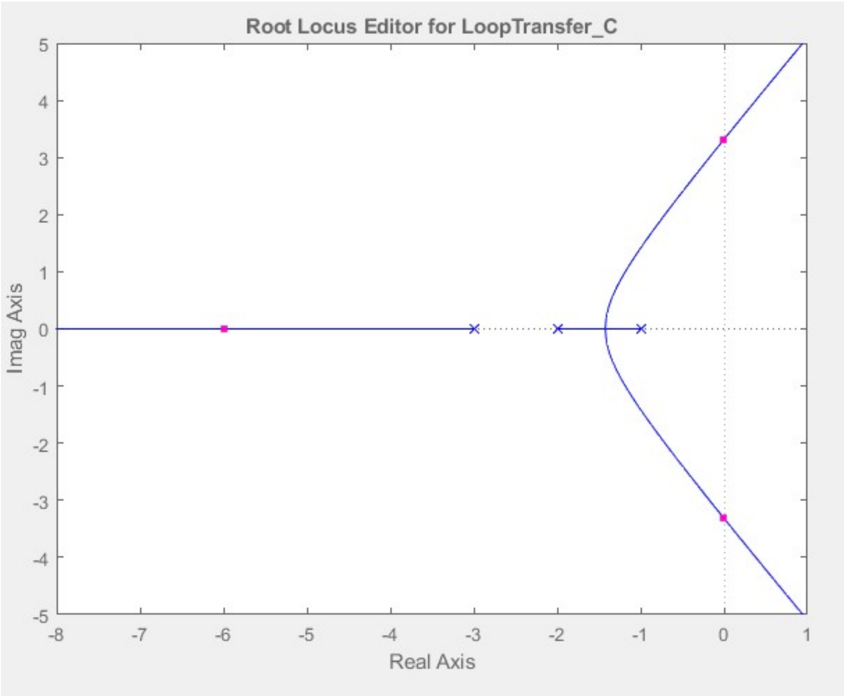
$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{(x+1)(x+2) + (x+1)(x+3) + (x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0$$

   a kapott kifejezés számlálója -1,42 és -2,57 értékeknél lesz 0. Mivel csak a -1,42 érték tartozik valós tengelyen lévő gyökhelygörbe szakaszhoz, így ez lesz a kilépési pont.

9. A tagnak csak való gyökei vannak, így nem kell kilépési szöget számítani.

A visszacsatolt rendszer erősítés függvényében felvett gyökhelygörbéje a Matlab alapján:

```
s=tf('s');
G=1/(s^3+6*s^2+11*s+6);
controlSystemDesigner('rlocus',G)
```



Módosítsuk a vizsgálandó tagot egy zérushely hozzáadásával, és vegyük így is a gyökhelygörbét:

$$G(s) = \frac{s+4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

A gyökhelygörbe felvázolását most is az előadásban ismertetett tulajdonságok alapján végezzük el:

1. A példa gyökhelygörbéjének három ága lesz, hiszen a visszacsatolt kör eredő átviteli függvényének a nevezőjében is harmadfokú polinom szerepel:

$$G_e(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K(s+4)}{s^3 + 6s^2 + (11+K)s + 6 + 4K}$$

2. A gyökhelygörbe szimmetrikus a valós tengelyre.
3. A visszacsatolt tag eredő átviteli függvénye alapján a zérusok száma Z=1, a pólusoké P=3, így a gyökhelygörbe ágai a felnyitott kör pólusaiból, -1, -2 és -3-ból indulnak ki, és egy a zérushelybe, -4-be tart, két ág pedig a végtelenbe tart.
4. A gyökhelygörbének a valós tengelyen a [-4, -3] és a [-2, -1] intervallumon lesznek szakaszai, mert csak ezek esetében igaz, hogy a -∝-ből kiindulva együttesen páratlan számú pólust és zérust látunk.
5. A végtelenbe tartó ágak érintőinek szögei:

$$\alpha_i = \frac{l \cdot 180°}{P - Z} \quad l = 1,3, \dots, l_{max} \qquad l_{max} = 2(P - Z) - 1 = 2(3-1) - 1 = 3$$

$$l = 1 \quad \alpha_1 = \frac{1 \cdot 180°}{3 - 1} = 90°$$

$$l = 3 \quad \alpha_1 = \frac{3 \cdot 180°}{2} = 270°$$

6. A két végtelenbe tartó ág érintője a súlypontba metszi egymást, melynek koordinátája:

$$S = \frac{\sum Re(p_i) - \sum Re(z_j)}{P - Z} = \frac{(-1) + (-2) + (-3) - (-4)}{2} = -1$$

7. A Hurwitz kritérium segítségével belátható, hogy a visszacsatolt kör tetszőleges K érték esetén stabil marad:

$$G_e(s) = \frac{K(s+4)}{s^3 + 6s^2 + (11+K)s + 6 + 4K}$$

   I. a nevező a_3, a_2 együtthatója pozitív, a_1 pozitív, ha K nagyobb, mint -11, a_0 pozitív, ha K nagyobb, mint -1,5 → teljesül

   II. Hurwitz determináns felírása:

$$H_{3\times3} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6+4K & 0 \\ 1 & 11+K & 0 \\ 0 & 6 & 6+4K \end{vmatrix}$$

   a determinánsok ellenőrzése:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6+4K \\ 1 & 11+K \end{vmatrix} = 6 \cdot (11+K) - (6+4K) = 60 + 2K > 0$$

   ami tetszőleges $K > 0$-ra igaz.

8. A gyökhelygörbe kilépési pontja a

$$\sum \frac{1}{x - p_i} - \sum \frac{1}{x - z_j} = 0$$

egyenlet alapján:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}=0$$

a kifejezés számlálója közös nevezőre hozás után harmadfokú polinom lesz.

9. A tagnak csak való gyökei vannak, így nem kell kilépési szöget számítani.

A visszacsatolt rendszer erősítés függvényében felvett gyökhelygörbéje a Matlab alapján: