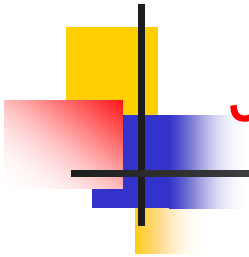


Jelek és rendszerek - alapfogalmak

Gerzson Miklós

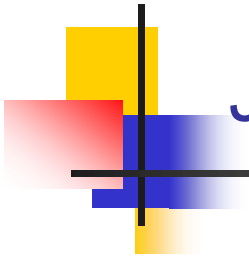
Pannon Egyetem, Villamosmérnöki és Információs
Rendszerek Tanszék

2020/2021 I. félév



Jelek és rendszerek - bevezetés

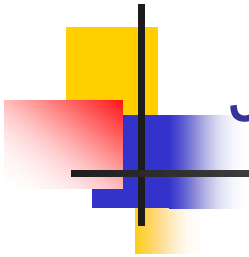
- Jelek a műszaki gyakorlatban. Jelek osztályozása. Folytonos és diszkrét jelek.
- Lineáris és nemlineáris jelek. Nemlineáris jelek linearizálása.
- Rendszerek fogalma, típusai. Folytonos és diszkrét működésű rendszerek.
- Folytonos rendszerek leírása időtartományban, bemenet-kimenet modellek.
- Laplace transzformáció és tulajdonságai, inverz Laplace transzformáció
- Folytonos rendszerek leírása operátortartományban, átviteli függvény.
- Folytonos rendszerek leírása frekvenciatartományban, Nyquist-, Bode-diagram.
- Mintavételezés típusai. Mintavételezett jelek leírásának értelmezése.
- z-transzformáció és tulajdonságai
- Inverz z-transzformáció és kiértékelésének módszerei.
- Diszkrét rendszerek leírása időtartományban, differencia egyenlet modellek
- Diszkrét rendszerek leírása operátor tartományban, impulzus átviteli függvény.
- Fourier transzformáció és tulajdonságai, Mintavételezési tétel.
- Diszkrét Fourier transzformációs és gyors Fourier transzformáció



Jelek és rendszerek - bevezetés

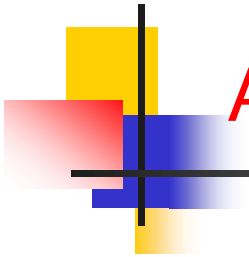
- előadás fóliák és példatár:
  virt.uni-pannon.hu, Tantárgyak, Jelek és rendszerek

- oktató elérhetősége: gerzson@almos.uni-pannon.hu



Jelek és rendszerek - bevezetés

- kurzus aláírás követelmények:
- nappali tagozat
  - 2 zárthelyi dolgozat
  - aláírás feltétele: zh-k külön-külön min. 30%
  - aláírás pótlása: vizsgaidőszakban egy alkalommal (a HKR-ben rögzített időszakban!)
  - megajánlott jegy: min. 75%-os zh-k esetén
  - vizsgán: „elméleti” kérdések
  - értékelés: a zh-k és a vizsga alapján
- levelező tagozat
  - vizsgaidőszakban írásbeli és szóbeli vizsga
  - írásbeli vizsga: elméleti kérdések és példák

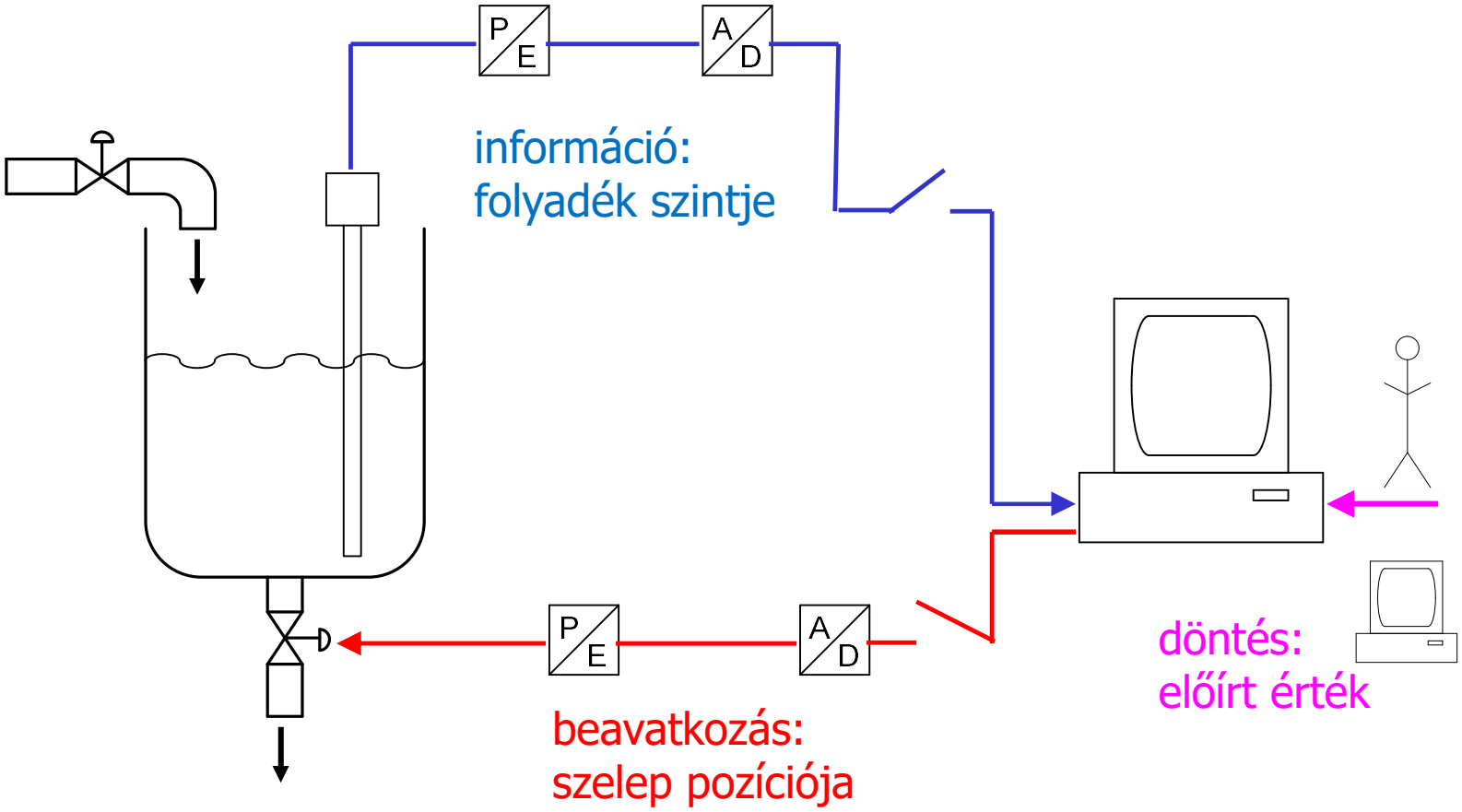


A jel fogalma

- *Jelhordozó*: minden mérhető, meghatározható fizikai/kémiai állapothatározó
- *Jellemzők*: azok a jelhordozók, amelyek az irányított folyamat állapotát, az irányítás szempontjából jellemzik vagy befolyásolják
- *Jel*: valamely állapothatározó minden olyan értéke vagy értékváltozása, amely egy egyértelműen hozzárendelt információ szerzésére, továbbítására vagy tárolására alkalmas

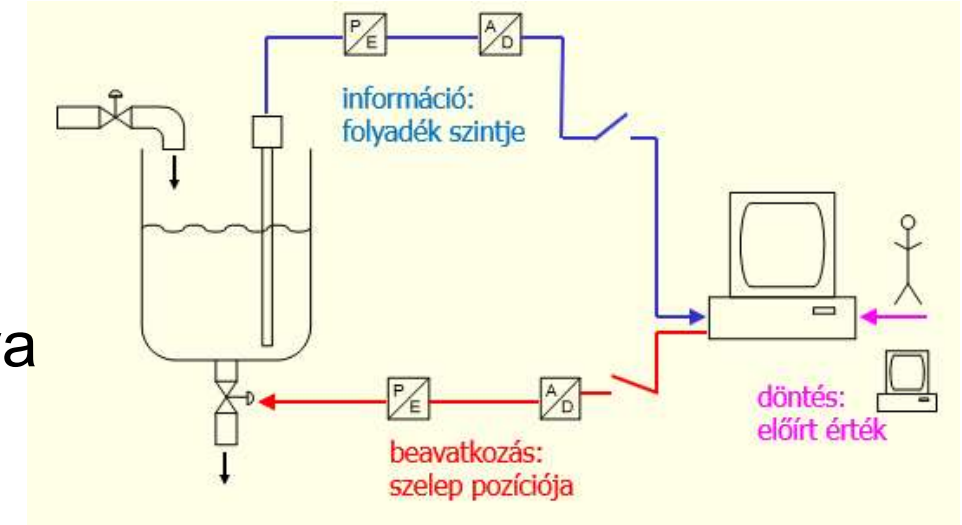
A jel fogalma

- példa

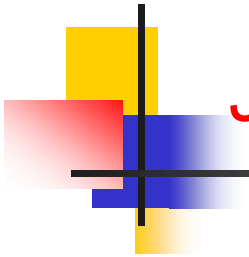


A jel fogalma

- *Jelhordozó*:
  - folyadékszint
  - folyadékösszetétel
  - műszer méréstartománya
  - processzor típusa
  - A/D konverter típusa
  - …
- *Jellemzők*:
  - folyadékszint
  - szeleppozíció
  - alapjel



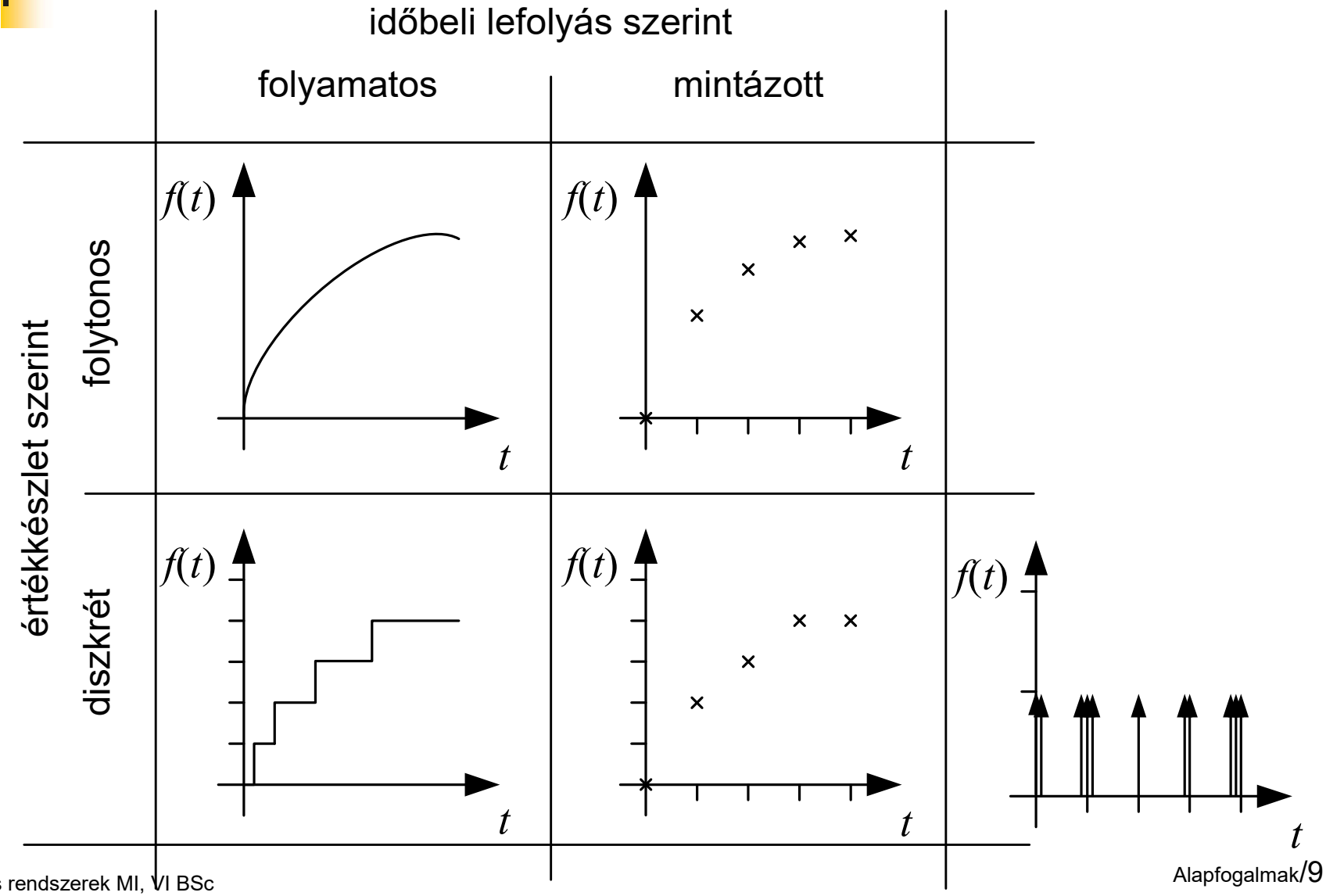
- *Jel*:
  - folyadék szintjének pillanatnyi értéke vagy értékének megváltozása
  - szelep pozíciója pillanatnyi értéke
  - aktuális előírt érték



Jelek osztályozása

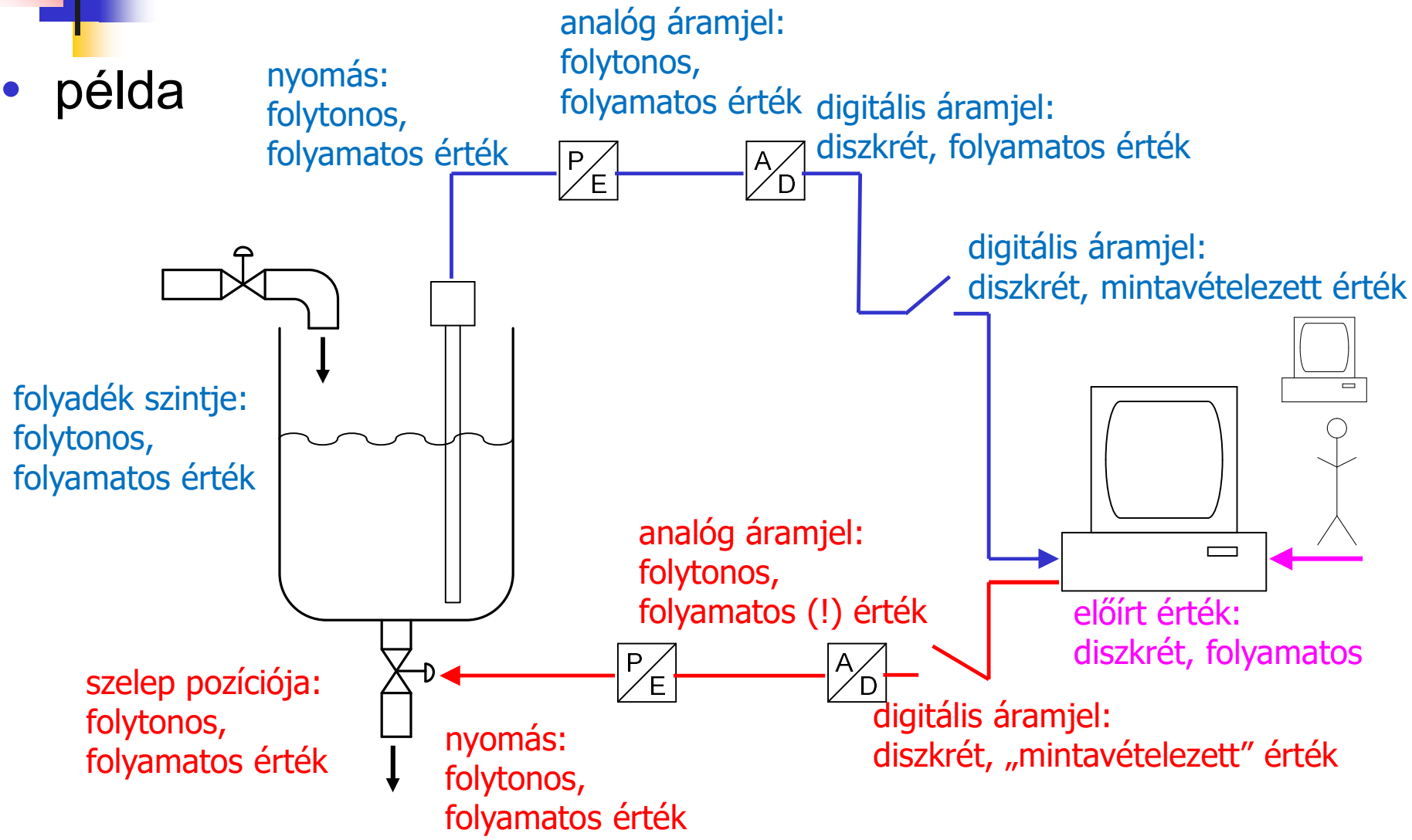
- értékkészlet szerint: - folytonos
  - diszkrét (szakaszos)
- időbeli lefolyás szerint: - folyamatos
  - diszkrét (szaggatott)
- meghatározottság szerint: - determinisztikus
  - sztochasztikus
- megjelenési forma szerint: - analóg
  - digitális

Jelek osztályozása

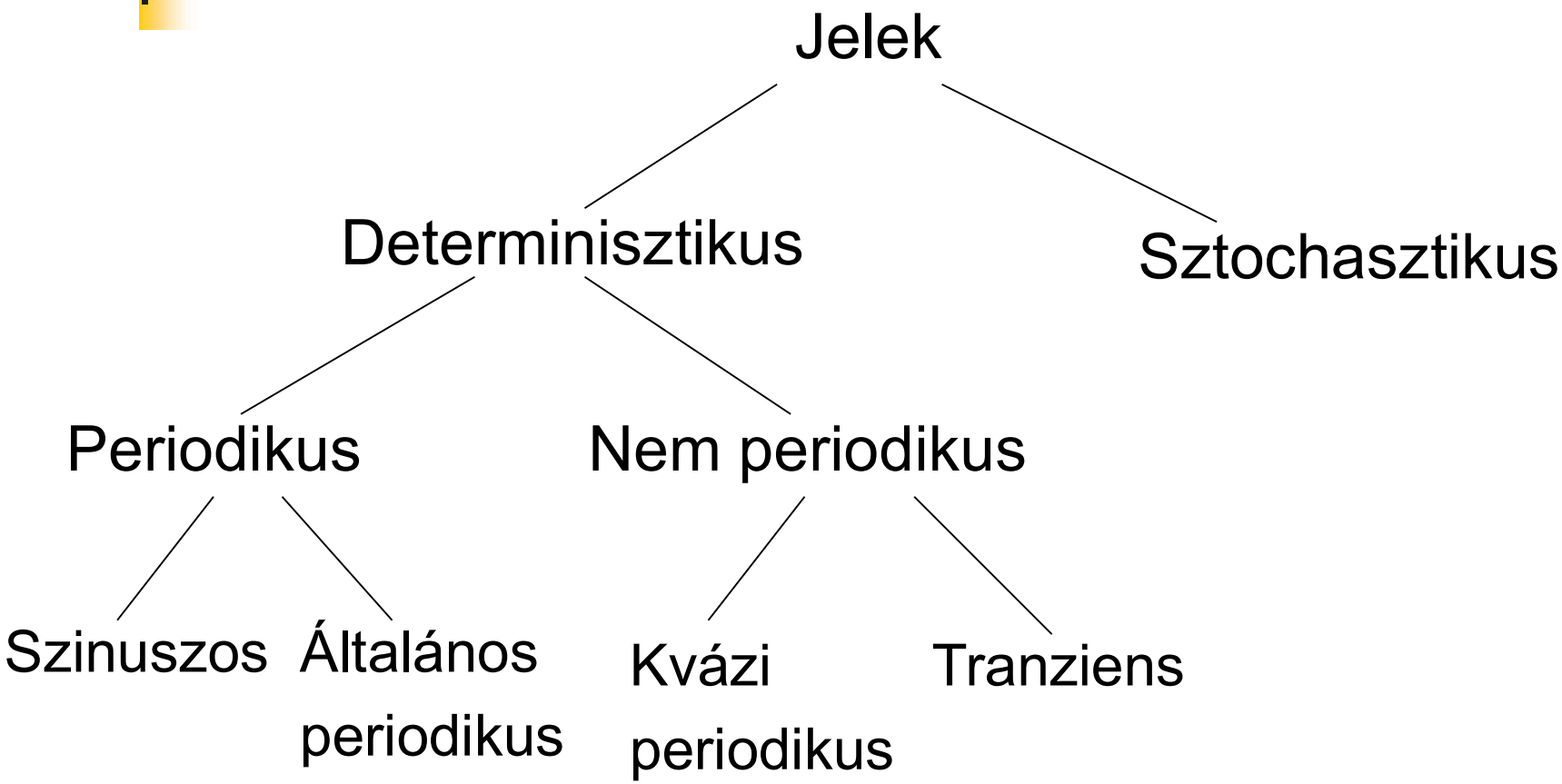


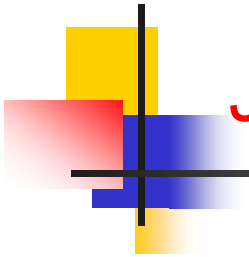
Jelek osztályozása

- példa



Jelek osztályozása





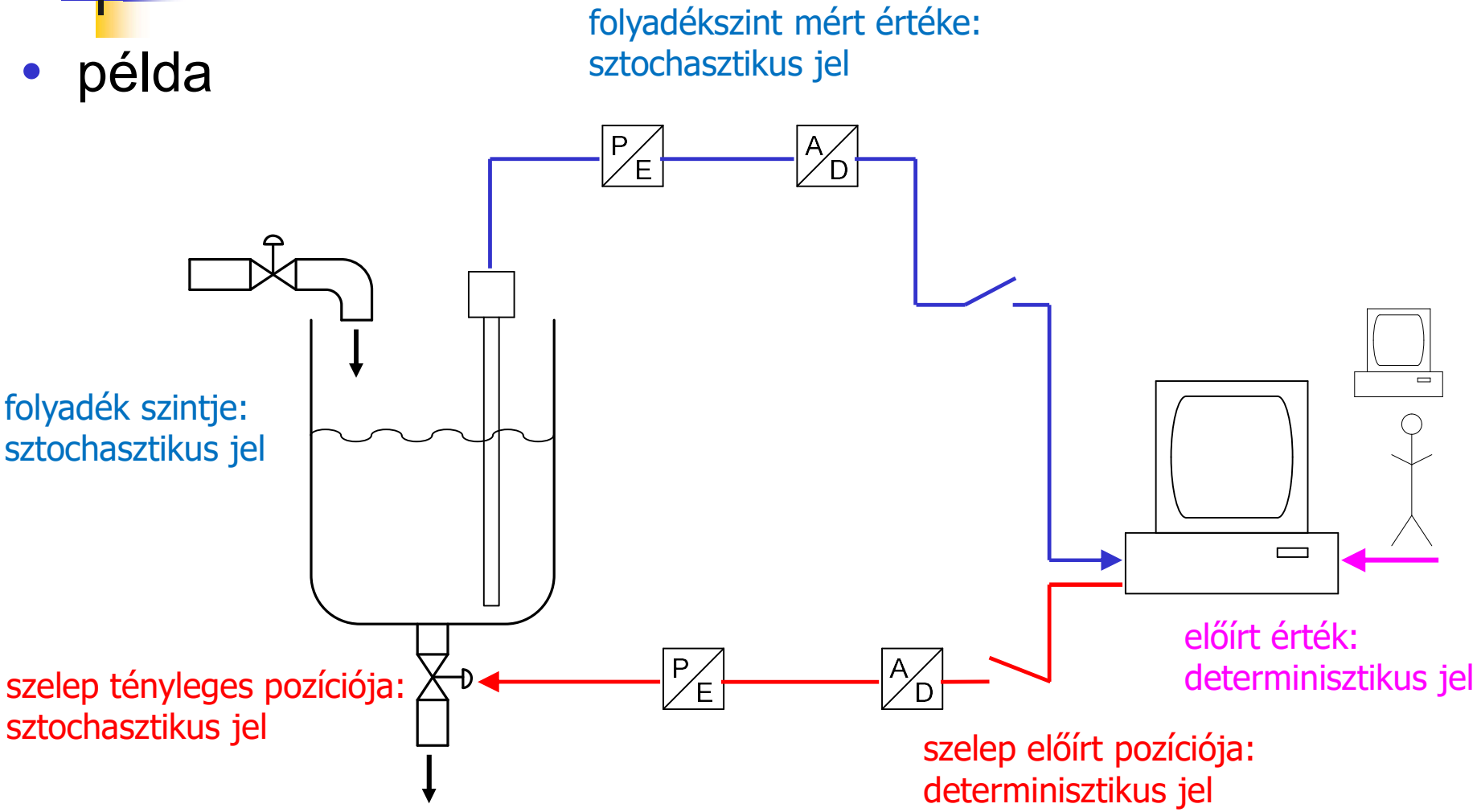
Jelek leírása

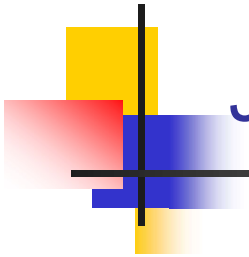
- Determinisztikus: ha a jelet létrehozó kölcsönhatások kimenetele *egyértelműen meghatározott*(nak tűnik)

- Sztochasztikus: ha a jelet létrehozó kölcsönhatások kimenetele *véletlenszerű*(nek tűnik)

Jelek leírása

- példa





Jelek leírása

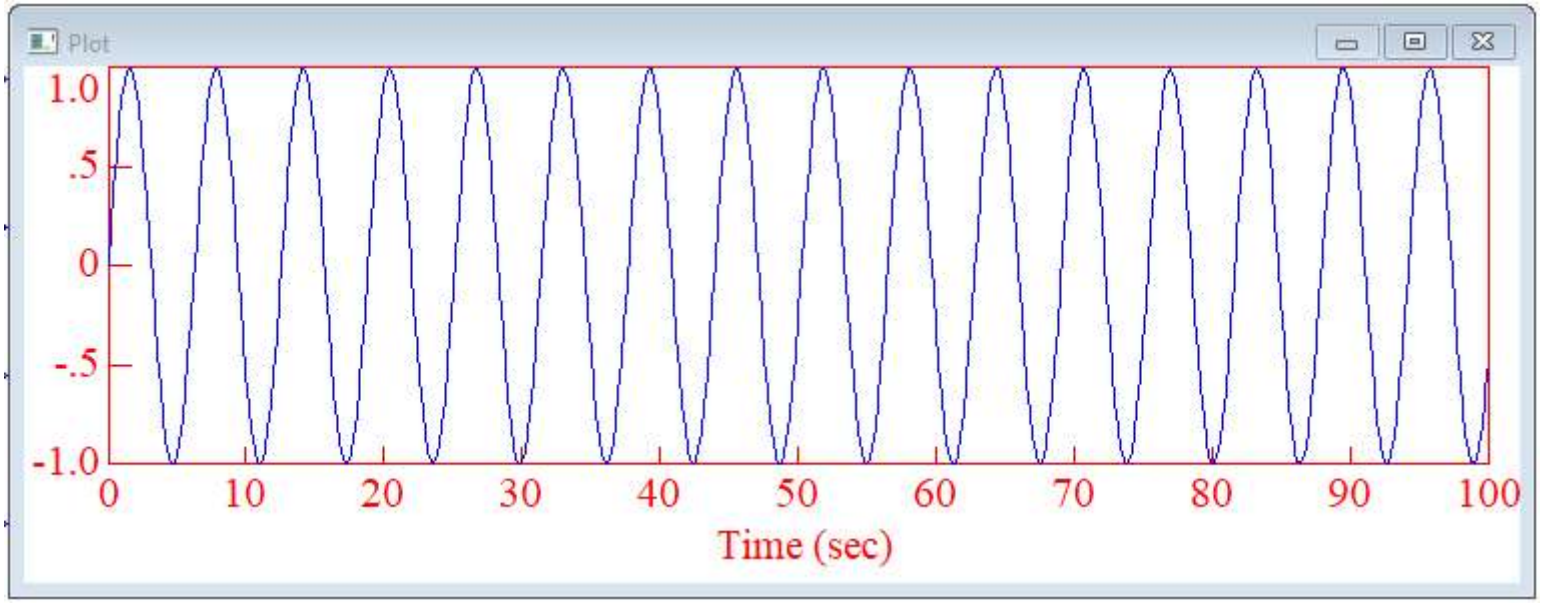
- Folytonos jel: a kölcsönhatás a vizsgált térrész *tetszőleges pontjában* egy adott időintervallumon belül *tetszőleges időpontban* jellemezhető
  - előny: hatékony matematikai eszközök
  - hátrány: nem illeszkedik a szg-es feldolgozáshoz
- Diszkrét jel: a kölcsönhatás a vizsgált térrésznek csak *kitüntetett pontjaiban* és az adott időintervallumnak csak *kitüntetett pillanataiban* jellemezhető
  - előny: illeszkedés szg-es feldolgozáshoz
  - hátrány: információvesztés

Jelek leírása

- Determinisztikus, periodikus, szinuszos jelek

$$M_s = \{x \mid x(t) = \mathrm{Re}(e^{\alpha + j(2\pi f_0 t + \Theta)}),\ -\infty < t < \infty,\ \alpha, f_0, \Theta \in \mathrm{R}\}$$

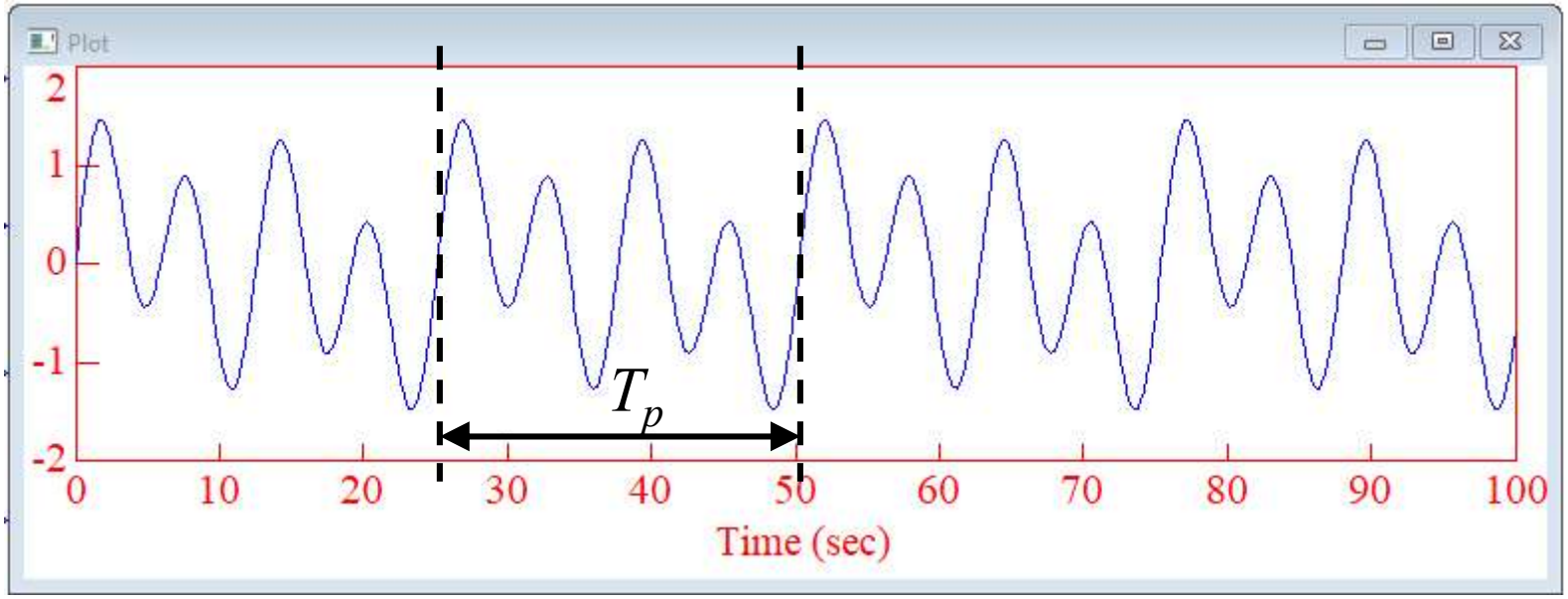
  - a leírás 3 paraméter segítségével elvégezhető



Jelek leírása

- Determinisztikus, periodikus, általános periodikus jelek

$$M_P(T_P) = \{x \mid x(t+T_P) = x(t),\ -\infty < t < \infty\}$$



Jelek leírása

- Determinisztikus, periodikus, általános periodikus jelek

$$M_P(T_P) = \{x \mid x(t+T_P) = x(t),\ -\infty < t < \infty\}$$

  - gyakorlati kezelésük Fourier-sorba fejtéssel:

$$M_{PF}(T_P) = \{x \mid x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos(n2\pi f_0 t) + B_n \sin(n2\pi f_0 t)),$$
$$-\infty < t < \infty,\ A_0,\ A_n,\ B_n \in \mathrm{R}\}$$

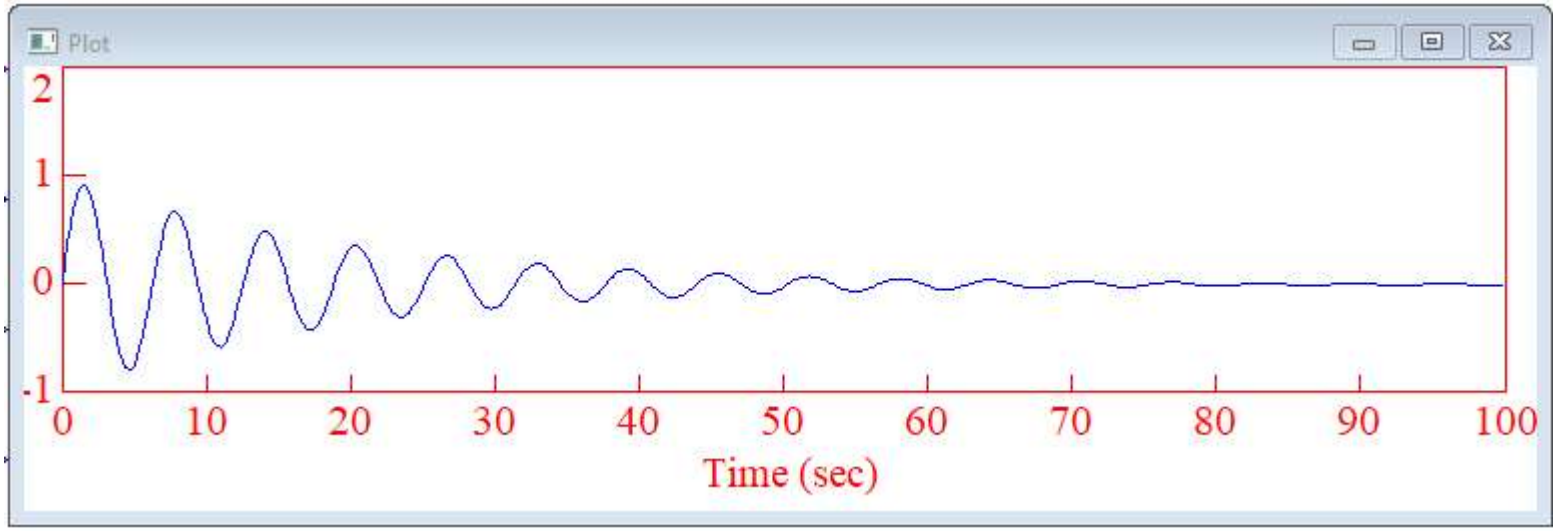
  - jellemzés A_0, A_n, B_n Fourier-együtthatókkal, elvileg végtelen számú kell, gyakorlatban véges számúval közelítünk

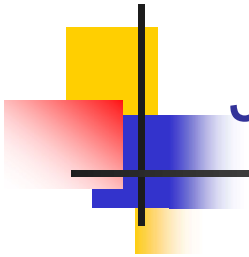
Jelek leírása

- Determinisztikus, nemperiodikus, kváziperiodikus jelek

$$M_{KP} = \{x \mid x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n2\pi f_n t) + B_n \sin(n2\pi f_n t)),$$
$$-\infty < t < \infty,\ A_0,\ A_n,\ B_n,\ f_n \in \mathrm{R}\}$$

  - speciális eset: $f_n = n f_0$





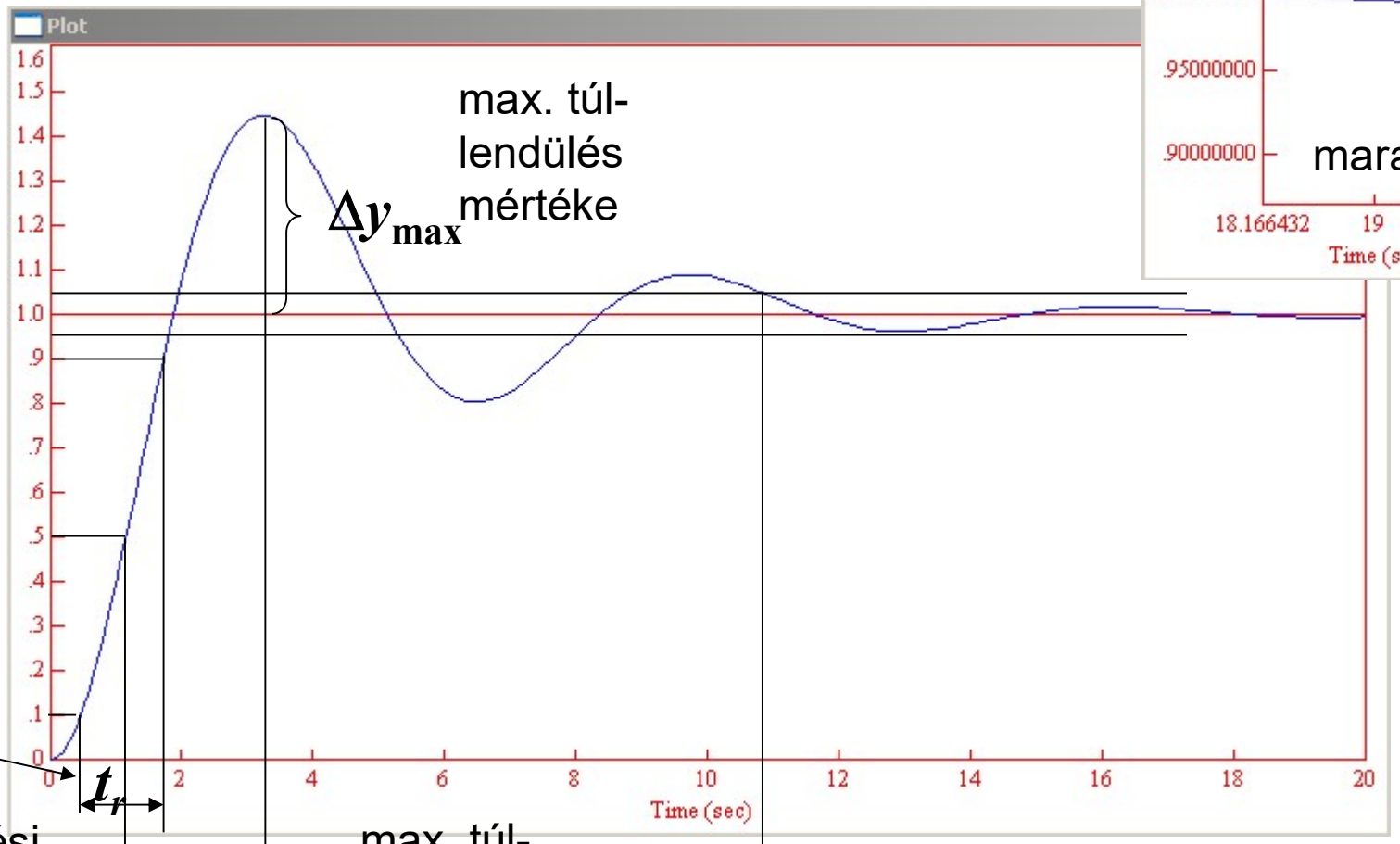
Jelek leírása

- Determinisztikus, nemperiodikus, tranziens jelek

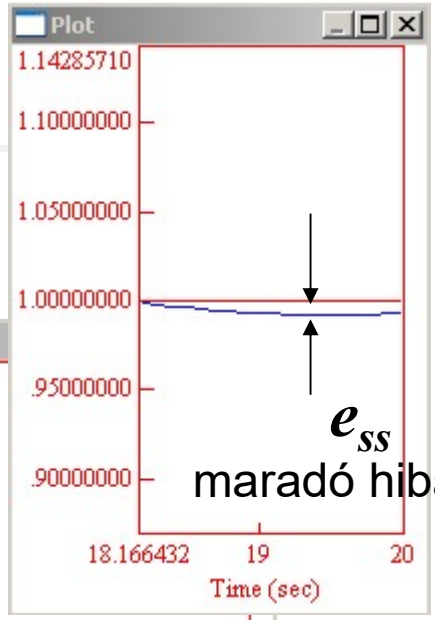
$$M_T = \{x \mid \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\mathrm{d}t < \infty\}$$

  - véges energiájú jelek
  - jellemzés leíró paraméterekkel (időállandó, erősítés, túllendülés, felfutási idő,…)
  - Laplace-transzformáció

Jelek leírása



max. túl-lendülés mértéke Δy_{max}



e_{ss} maradó hiba

felfutási idő t_r

késleltetési idő t_d

max. túl-lendülés ideje t_{max}

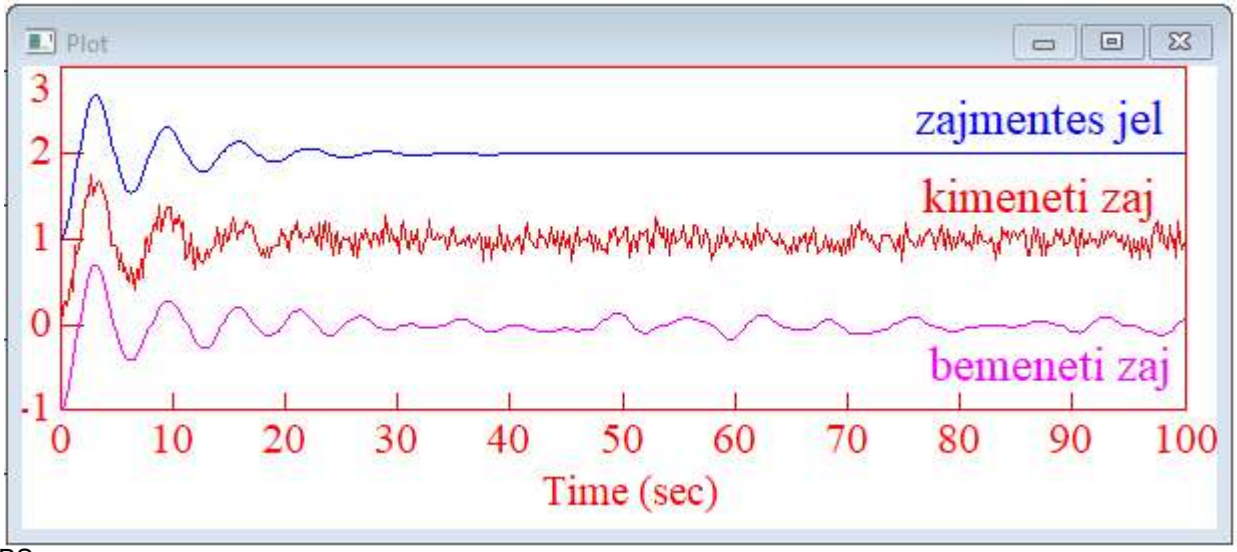
t_s lecsengési idő

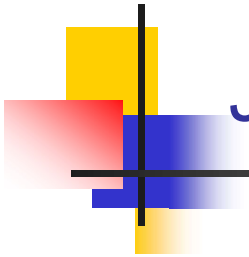
Jelek leírása

- Sztochasztikus jelek

$$M_V = \{x \mid x(t,\ \xi),\ t \in T,\ \xi \in \Theta\}$$

  - sztochasztikus folyamatok formájában: $x(t,\ \xi)$
  - leírás együttes eloszlás függvénnyel, momentumokkal

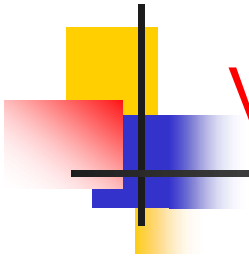




Jelek leírása

- Diszkrét időtartomány
  - mintavételezés
  - z-transzformáció

- Általános jellemzés
  - időtartomány
  - operátortartomány
  - frekvenciatartomány



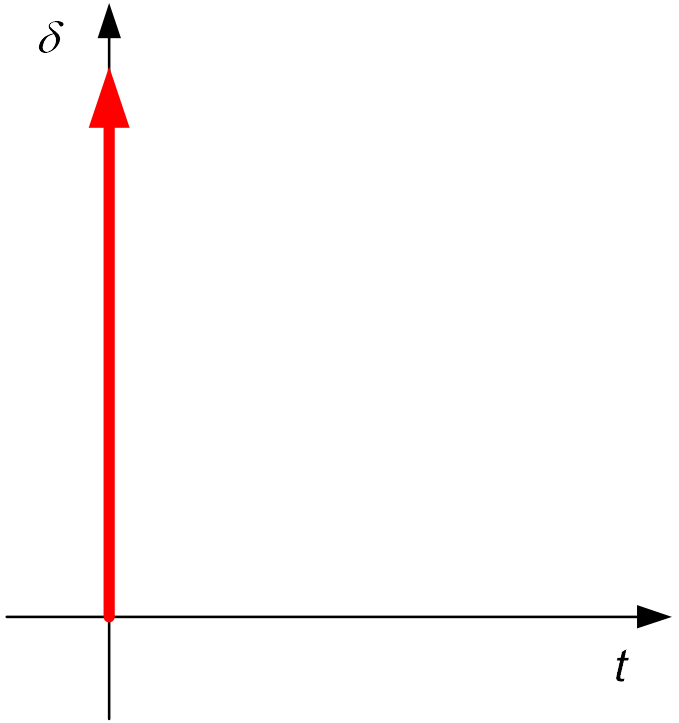
Vizsgálójelek

- alkalmazásuk indoka:
  - aktív kísérlettervezés lehetősége
  - ismeretlen modellű rendszernél a modell típusának meghatározása – struktúra identifikáció
  - ismert modellű rendszer esetén a paraméterek meghatározása – paraméter identifikáció
  - ellenőrzés

Egységimpulzus függvény

- Dirac delta, $\delta(t)$, unit-impulse function, delta fv.

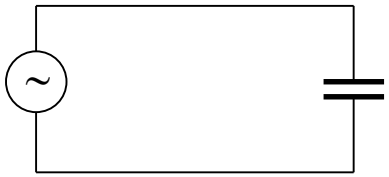
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$



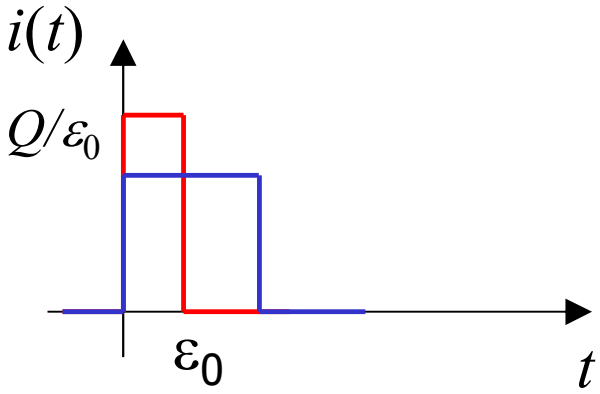
alkalmazás: impulzus jellegű zavarások

Egységimpulzus függvény

- fizikai jelenségek:
  - két golyó ütközése
  - ütő és labda ütközése
  - kondenzátor feltöltése



$$q(t) = \int_0^t i(\tau)d\tau$$



$$i(t) = Q \cdot p_{\varepsilon_0} = \begin{cases} \frac{Q}{\varepsilon_0} & 0 \le t \le \varepsilon_0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Egységimpulzus függvény

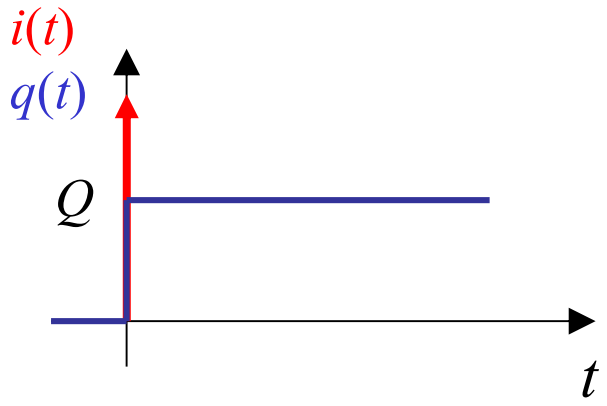
- kondenzátor töltése:

$$q(t) = \int_0^t i(\tau)d\tau = \begin{cases} \dfrac{Qt}{\varepsilon_0} & 0 \le t \le \varepsilon_0 \\ Q & t > \varepsilon_0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- ε_0-t minden határon túl csökkentve (elméletileg):

$$i(t) = Q \cdot \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

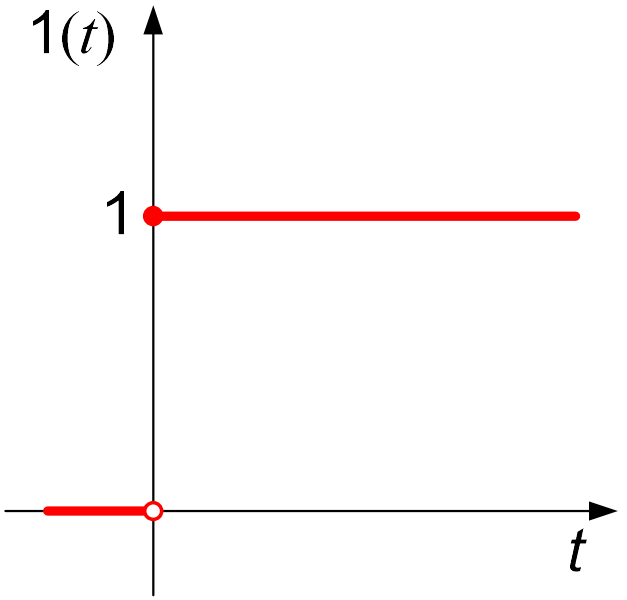
$$q(t) = Q \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)d\tau = Q$$



Egységugrás függvény

- $1(t)$, unit step function

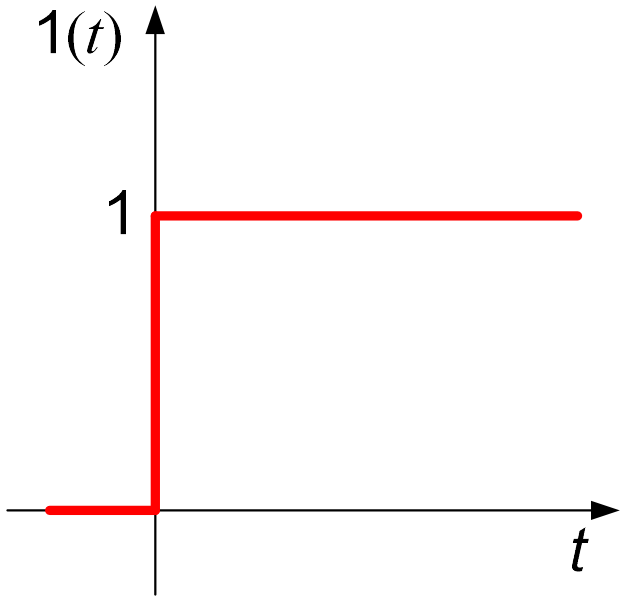
$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Egységugrás függvény

- $1(t)$, unit step function

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

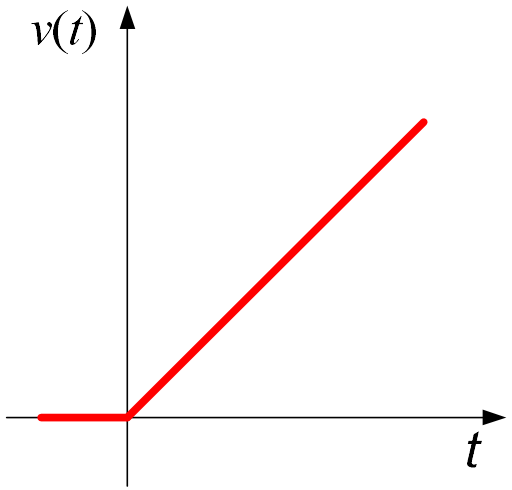


alkalmazás: alapjel-váltás, ugrás jellegű zavarások

Egység-sebességugrás függvény

- $v(t)$, ramp function

$$v(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

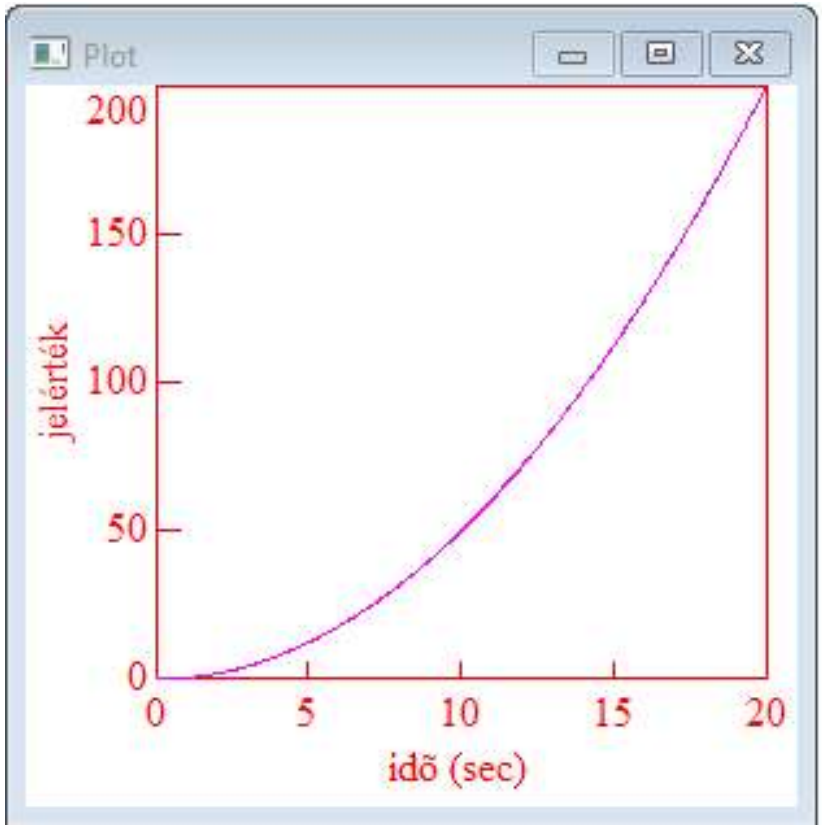


alkalmazás: programozott alapjel-váltás,
növekvő jellegű zavarások

Egység-gyorsulás függvény

- $a(t)$, acceleration function

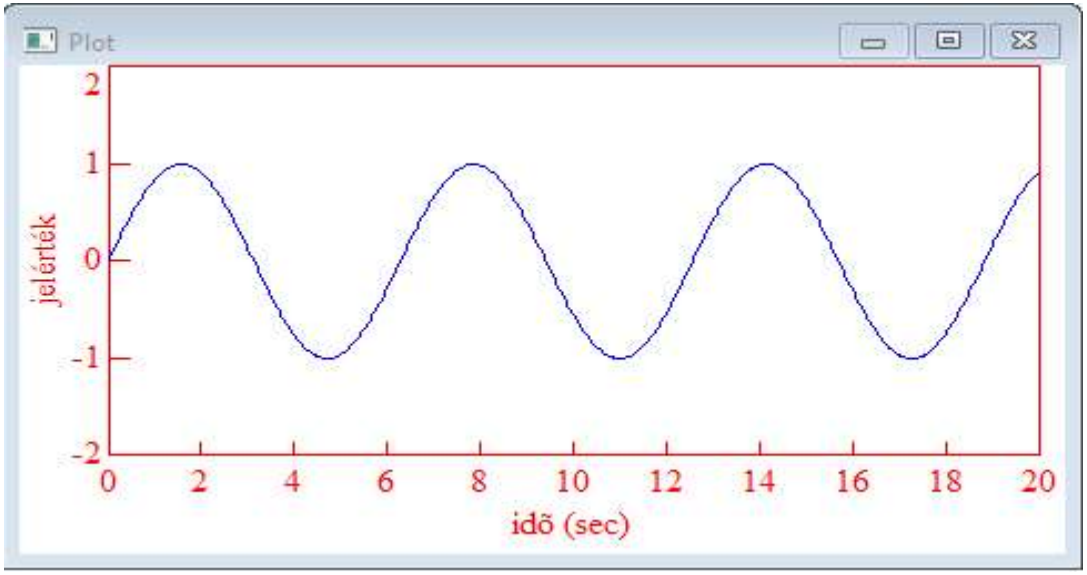
$$a(t) = \begin{cases} t^2/2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Szinusz függvény

- $\sin\omega t$

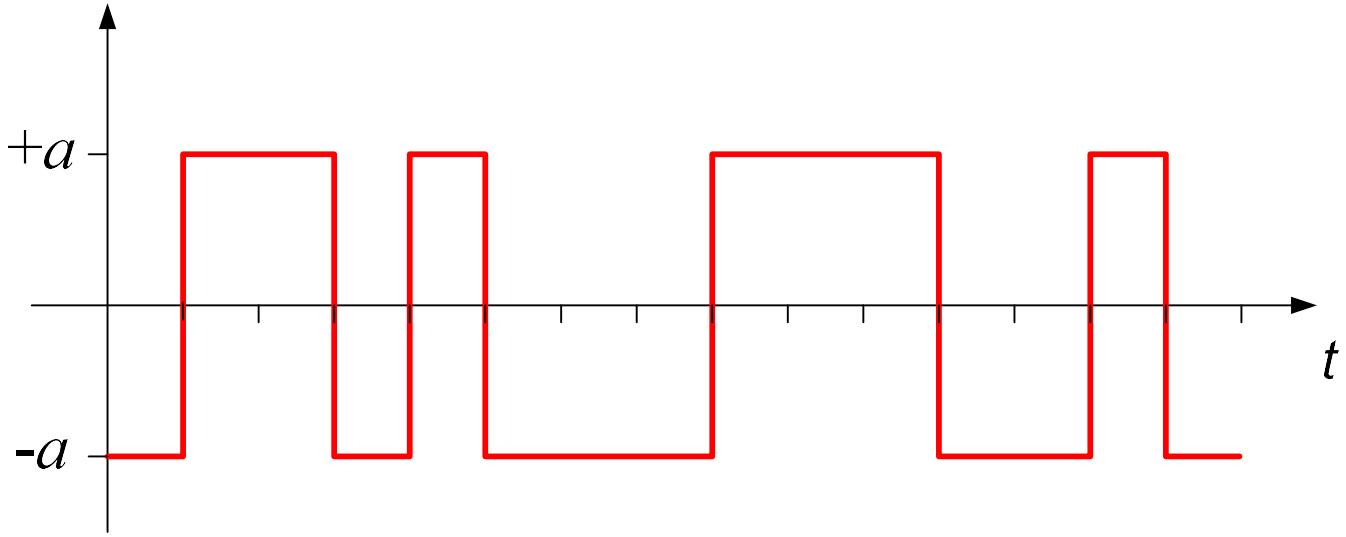
$$\sin\omega t = \begin{cases} \sin t, & t \geq 0, \quad \omega = 1\, rad/s \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



alkalmazás: periodikus bemenetű hálózatok

(Pszeudo) Random bináris jelsorozat

- Pseudo random binary sequences (PRBS)

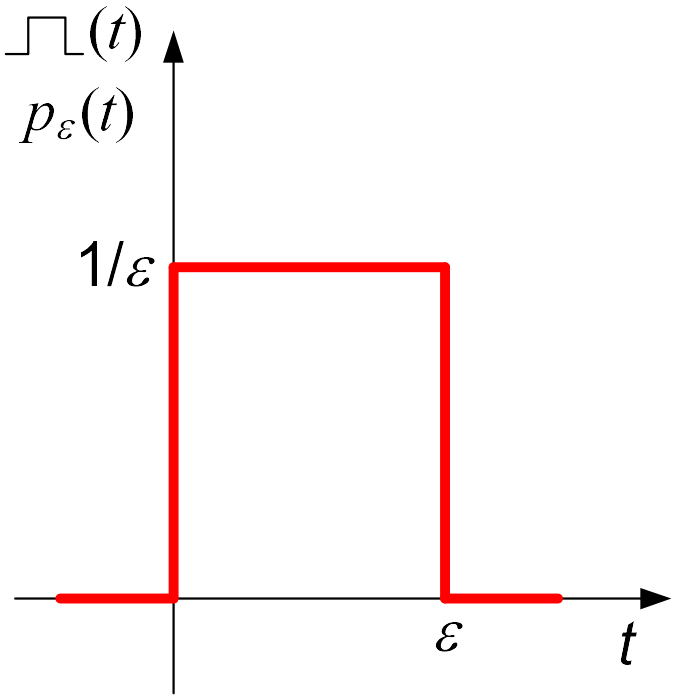


alkalmazás: statisztikus zaj bemenet szimulációja

Négyszögimpulzus függvény

- $p_\varepsilon(t)$, rectangle function –
  egység négyszögimpulzus függvény

$$p_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/\varepsilon, & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}$$



Négyszögimpulzus függvény

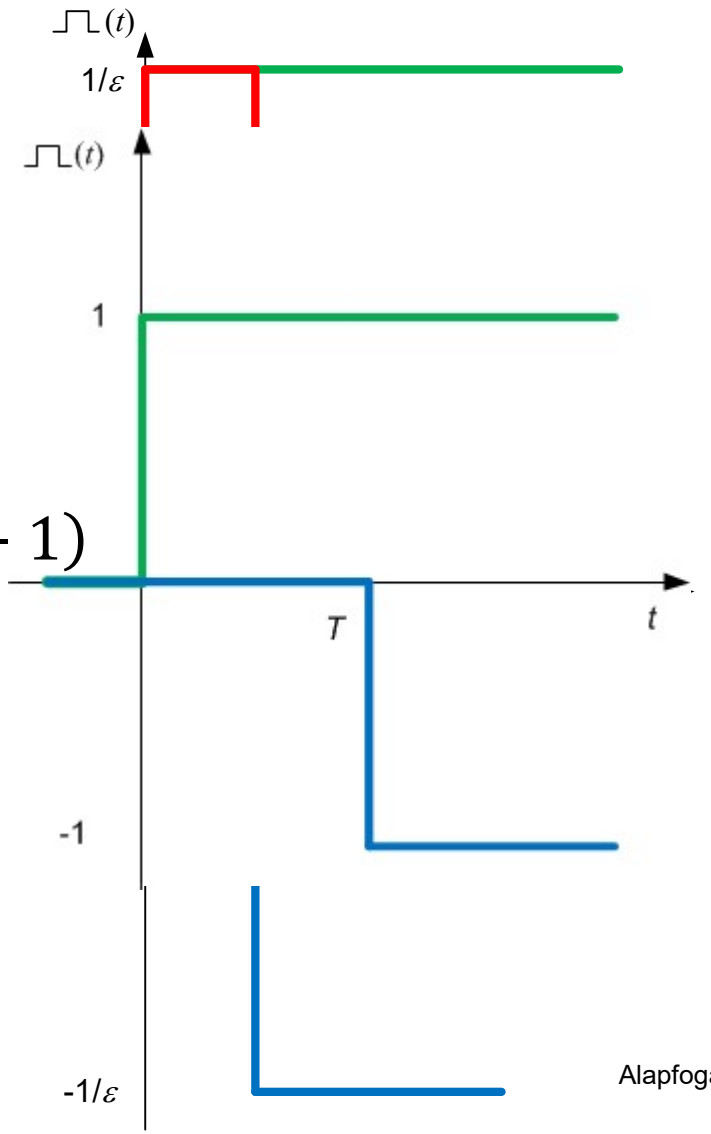
- $p_\varepsilon(t)$ származtatása

$u_1(t) = 1(t)$ $u_2(t) = -1(t-T)$

legyen $T = 1$

$$p_1(t) = u_1(t) + u_2(t) = 1(t) - 1(t-1)$$

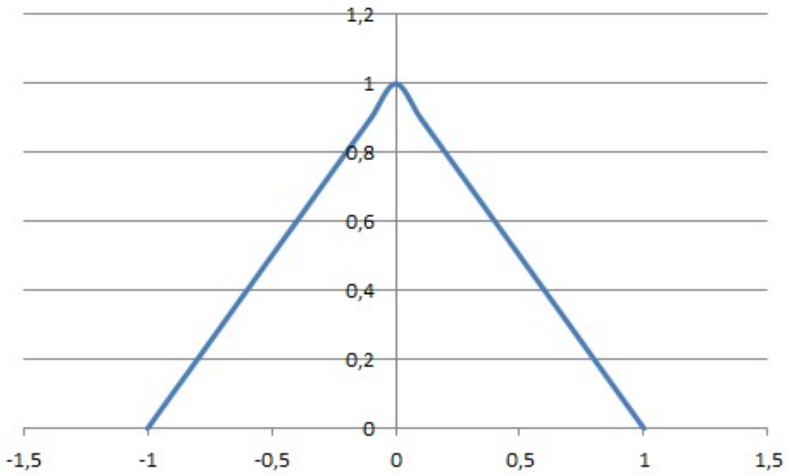
$$p_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\big(1(t) - 1(t-\varepsilon)\big)$$



További nevezetes függvények

- Háromszög függvény

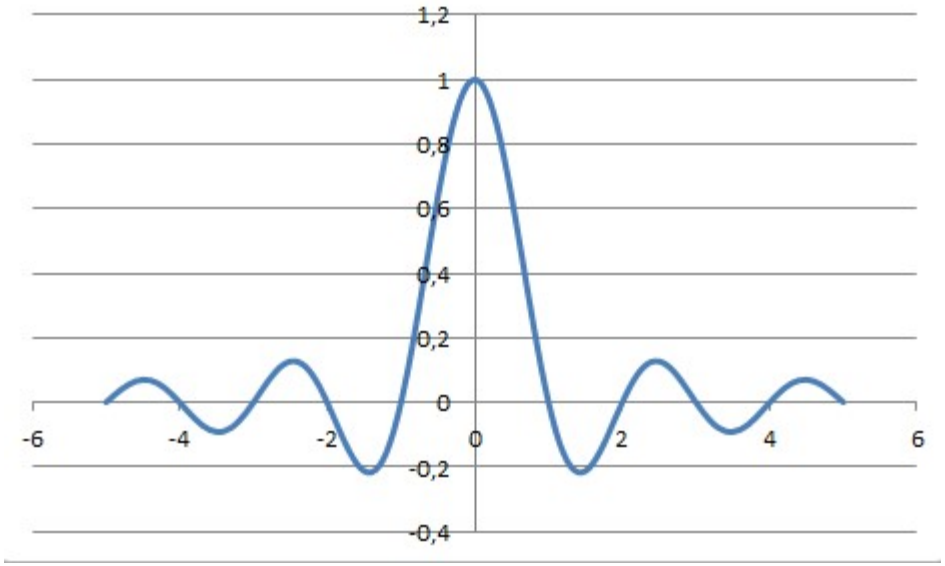
$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & -1 < t < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



- Sinc függvény

$$\mathrm{Sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

$$-\infty < t < \infty$$



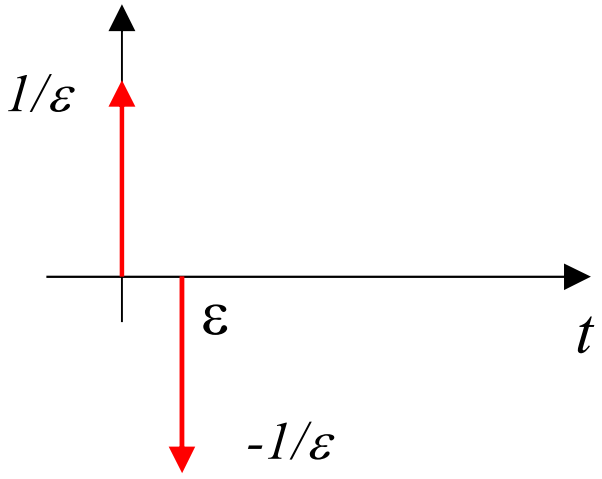
Vizsgáló jelek tulajdonságai

- Az egységimpulzus függvénnyel értelmezhető szakadásos függvények differenciálhányadosa:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} p_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1(t) - 1(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{d}{dt} 1(t)$$

- Dirac delta differenciálhányadosainak értelmezése:

$$\delta^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta(t) - \delta(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$$



Vizsgáló jelek tulajdonságai

- egységimpulzus függvény tulajdonságai
  - mintavételezés

$$p_\varepsilon(t) = \frac{1(t) - 1(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

ha $u(t)$ folytonos függvény, akkor

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int f(t) p_\varepsilon(t) dt = f(0)$$

illetve

$$\int f(t)\, \delta(t) dt = f(0) \qquad \int f(t)\, \delta(t-a) dt = f(a)$$

Vizsgáló jelek tulajdonságai

- felhasználva az általánosított deriváltat, és ha $f^{(1)}(0)$ létezik:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int f(t)p_\varepsilon{}^{(1)}(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int f(t)\frac{\delta(t)-\delta(t-\varepsilon)}{\varepsilon}dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(0)-f(0-\varepsilon)}{\varepsilon} = -f^{(1)}(0)$$

$$\int f(t)\delta^{(1)}(t)\,dt = -f^{(1)}(0)$$

- általánosítva, ha $f^{(n)}(0)$ létezik:

$$\int f(t)\delta^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

Vizsgáló jelek tulajdonságai

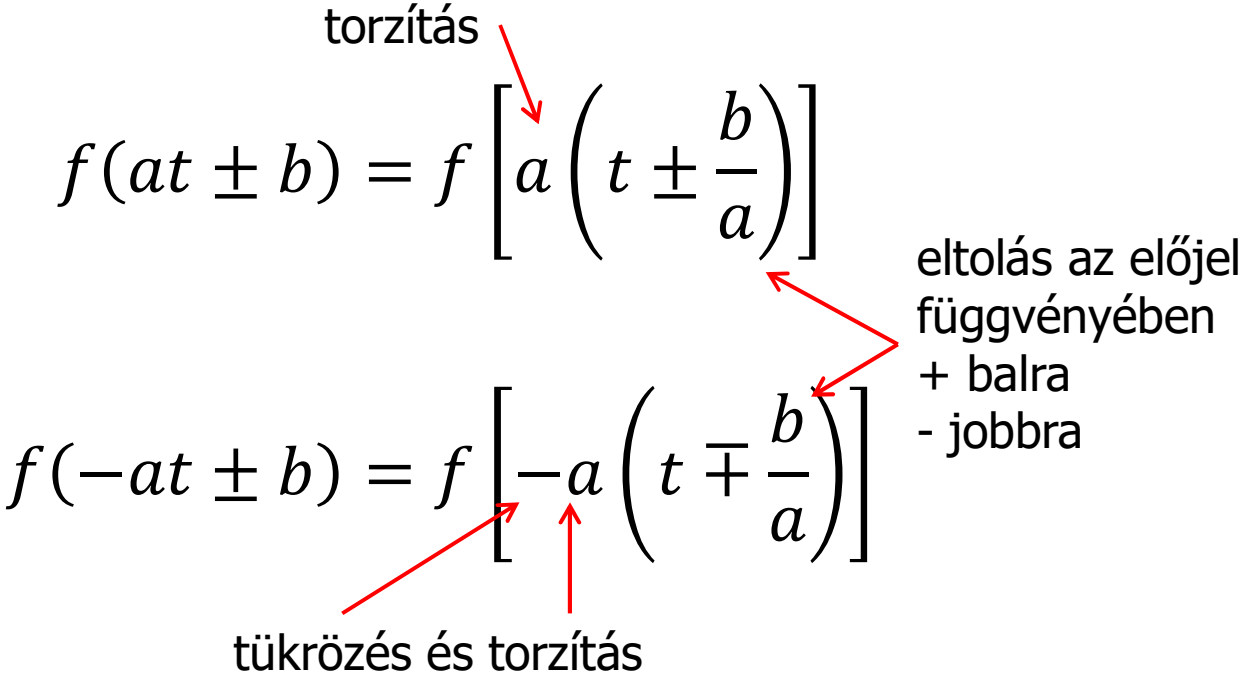
- vizsgáló jelek közti időtartománybeli kapcsolat:

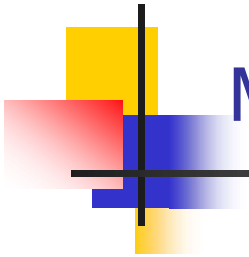
$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} \qquad 1(t) = \frac{dv(t)}{dt} \qquad v(t) = \frac{da(t)}{dt}$$

$$\int \delta(t)dt = 1(t) \qquad \int 1(t)dt = v(t) \qquad \int v(t)dt = a(t)$$

Műveletek jelekkel

- eltolás
- tükrözés
- átskálázás





Műveletek jelekkel

- mintavételezés

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-a)dt = f(a)$$

- kiszűrés

$$f(t)\delta(t-a) \equiv f(a)\delta(t-a)$$

Műveletek jelekkel

- átskálázás, átléptékezés

$$\delta(at+b) \equiv \frac{1}{|a|}\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)$$

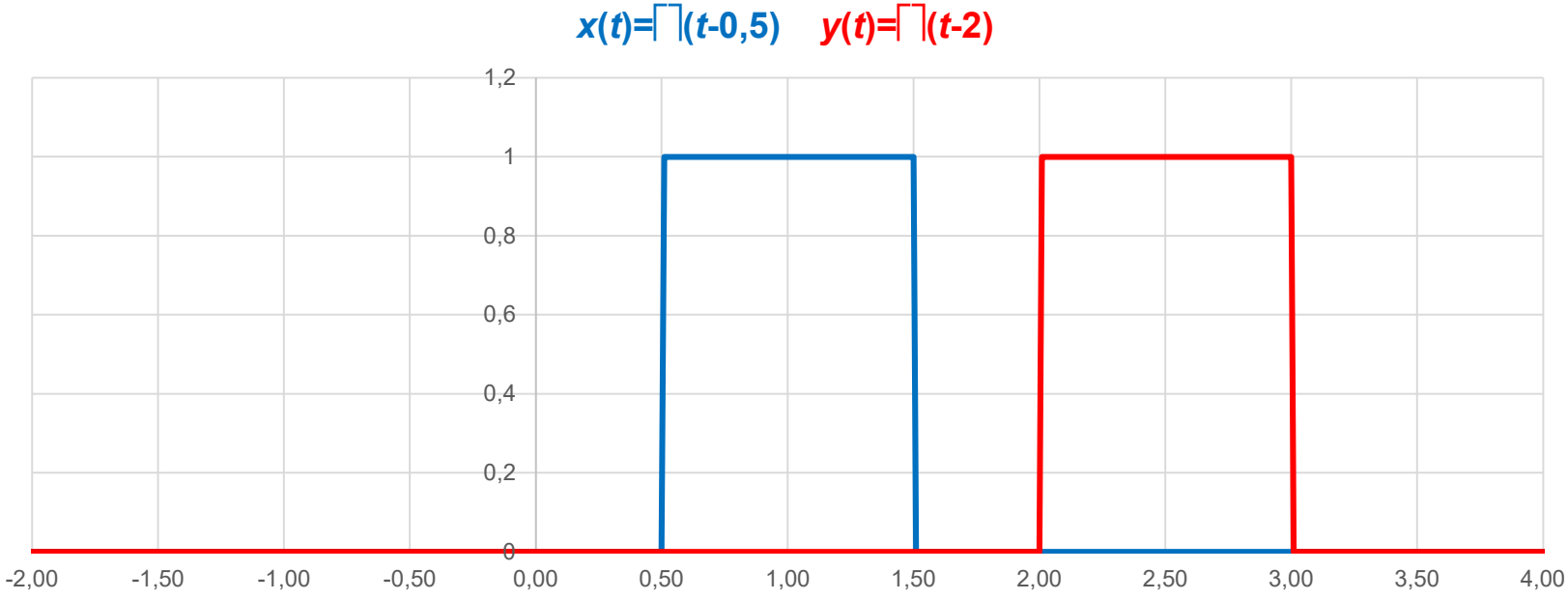
- konvolúció

$$f(t) \star \delta(t-a) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(t-u-a)du = f(t-a)$$

Műveletek jelekkel

- Konvolúció – példa

$$x(t) = \sqcap(t - 0{,}5) \qquad y(t) = \sqcap(t - 2)$$

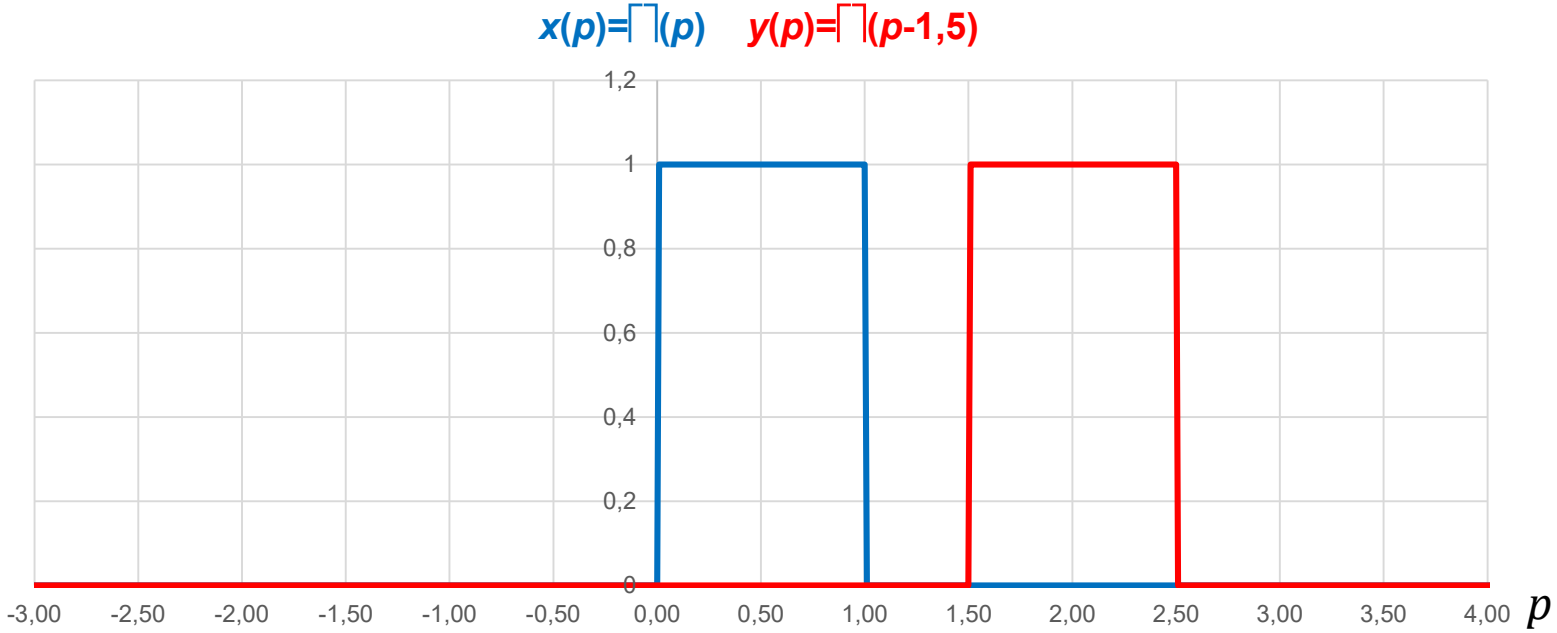


Műveletek jelekkel

$$r(t) = x(t) \star y(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(p)y(t-p)dp$$

$$p = t - 0{,}5 \quad t = p + 0{,}5$$

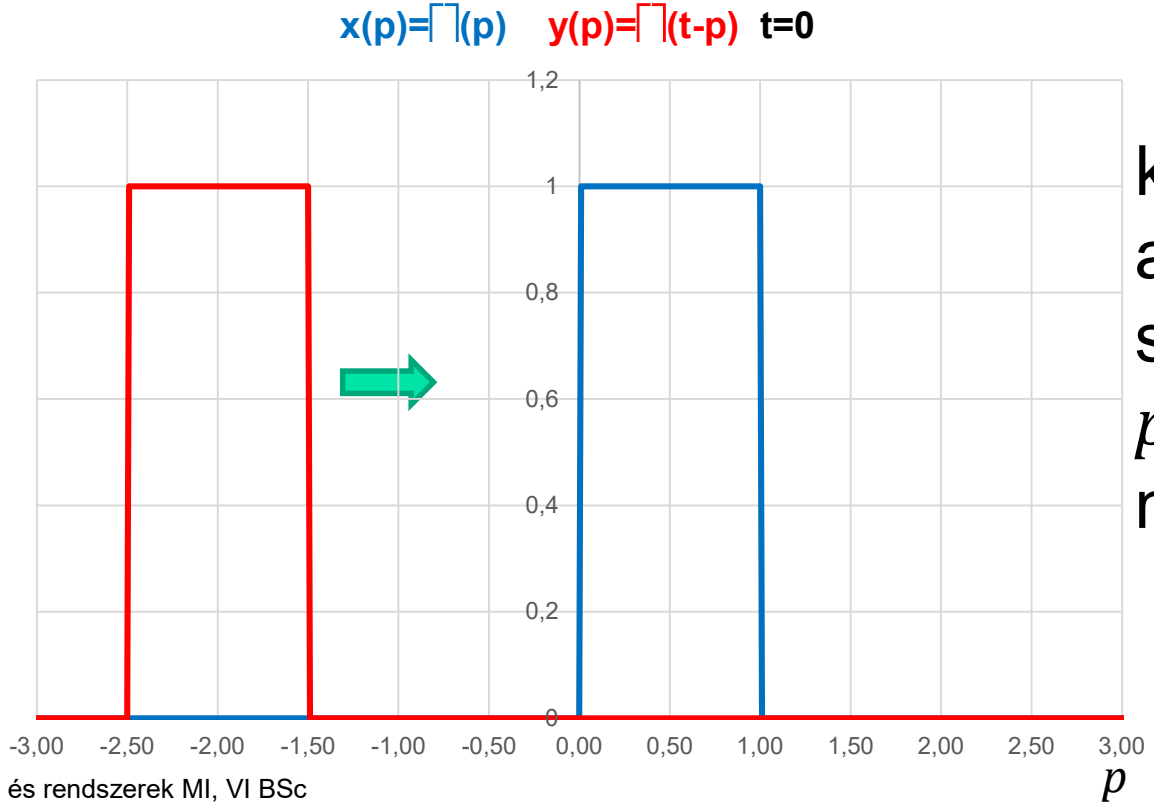
$$x(p) = \sqcap(p) \quad y(p) = \sqcap(p + 0{,}5 - 2) = \sqcap(p - 1{,}5)$$



Műveletek jelekkel

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(p)y(t-p)dp$$

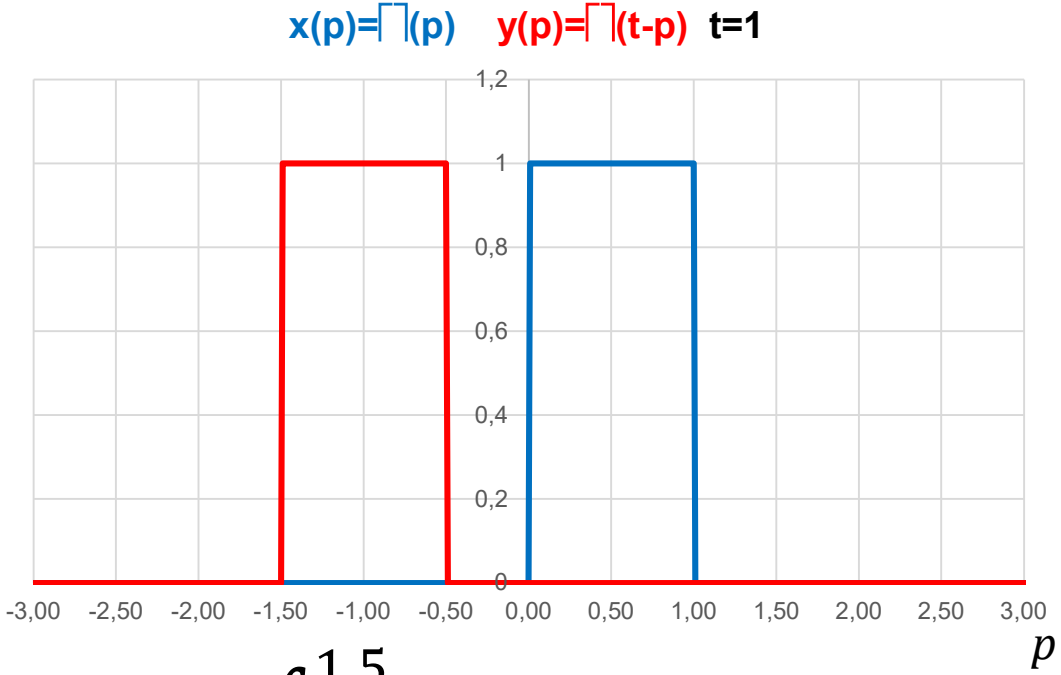
$$y(t-p) = \sqcap(t-p-2) = \sqcap(-(p-(t-2)))$$



konvolúció:
az $x(p)$ és az $y(t\text{-}p)$ szorzatát integráljuk p szerint növekvő t mellett

Műveletek jelekkel

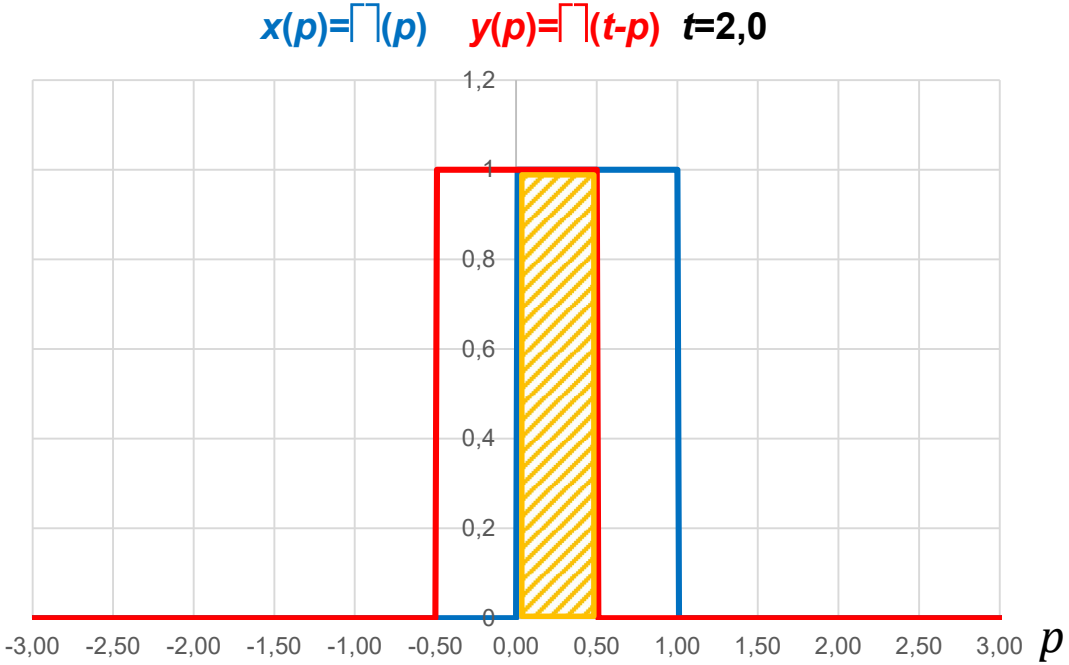
- $t < 1{,}5 \Rightarrow p < 0$



$$r(t) = \int_{-\infty}^{1{,}5} x(p)y(t-p)dp = 0$$

Műveletek jelekkel

- $1{,}5 < t < 2{,}5 \Rightarrow 0 < p < t - 1{,}5$

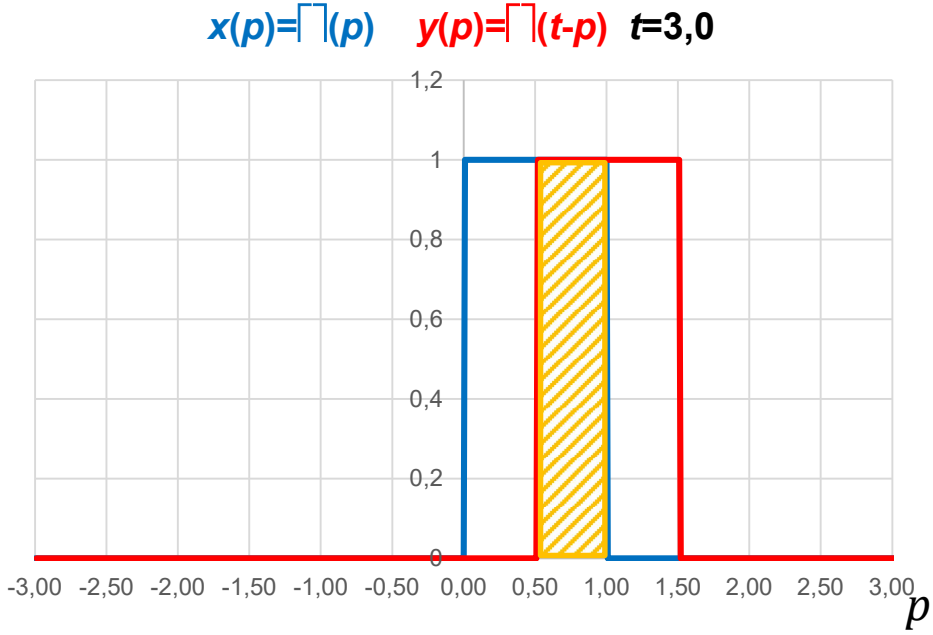


$$r(t) = \int_0^{t-1{,}5} x(p)y(t-p)dp = \int_0^{t-1{,}5} (1)(1)dp =$$

$$= [p]_0^{t-1{,}5} = t - 1{,}5$$

Műveletek jelekkel

- $2{,}5 < t < 3{,}5 \Rightarrow t - 2{,}5 < p < 1$

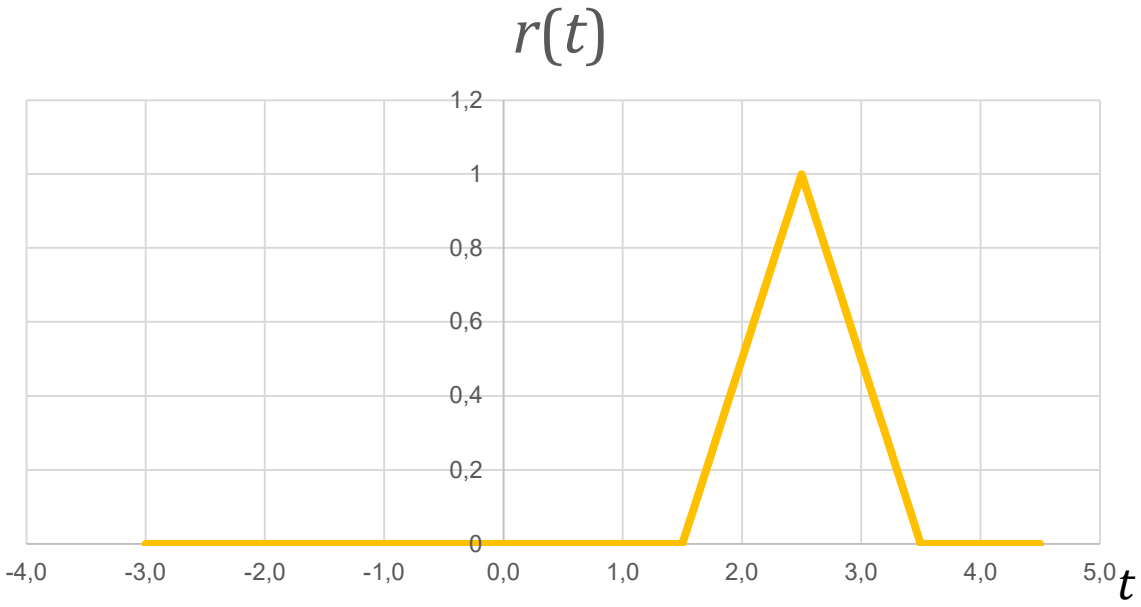


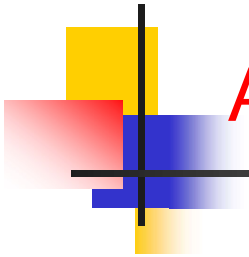
$$r(t) = \int_{t-2,5}^{1} x(p)y(t-p)dp = \int_{t-2,5}^{1} (1)(1)dp = 3{,}5 - \mathrm{t}$$

- $t > 3{,}5 \Rightarrow p > 1 \quad r(t) = 0$

Műveletek jelekkel

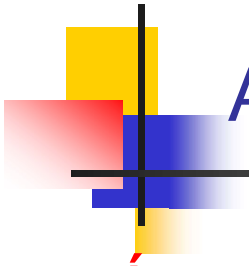
$$r(t) = \begin{cases} 0, & ha\ t < 1{,}5 \\ t - 1{,}5 & ha\ 1{,}5 < t < 2{,}5 \\ 3{,}5 - t & ha\ 2{,}5 < t < 3{,}5 \\ 0, & ha\ t > 3{,}5 \end{cases}$$





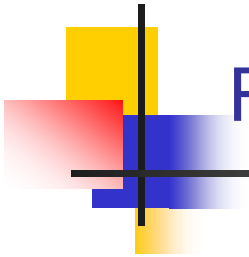
A rendszer fogalma

- A rendszer: kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések által összekapcsolt objektumok halmaza.
- Objektumok: a vizsgált rendszer egyszerű vagy összetett részei
- Kölcsönhatások: anyag-, energia- és információ-átadással járó folyamatok
  - objektív törvényszerűségek határozzák meg
  - jellemzésük: állapot-leírás
- A halmaz elemeit, azaz a rendszer határait a *figyelembe vett* kölcsönhatások jelölik ki.



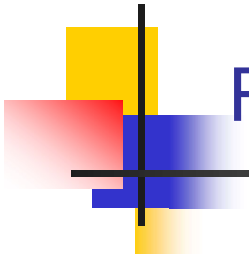
A rendszer fogalma

- Állapot: a rendszerben fellépő kölcsönhatások adott időpontra vonatkozó viszonyait megadó információk összessége
  - megadásához:
    - rendszer belső szerkezetének, elemek közötti kapcsolatoknak ismerete → struktúra
    - összefüggések mennyiségi viszonyai → paraméterek



Rendszerfogalmak általános jellemzői

- A rendszer tagolt egész
  - A „rész – egész” viszony a szerkezetben és a tulajdonságokban
- A rendszer kölcsönhatásban álló elemek összessége
  - kapcsolatok - relációk

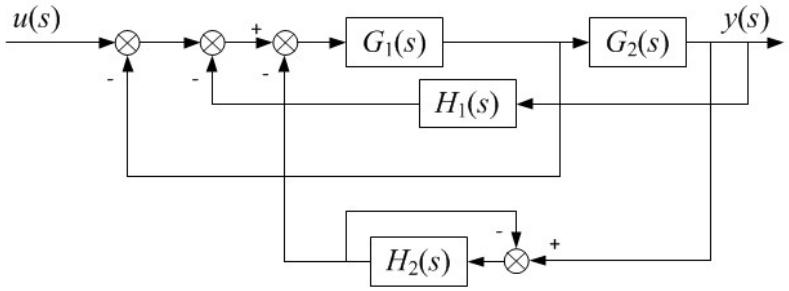


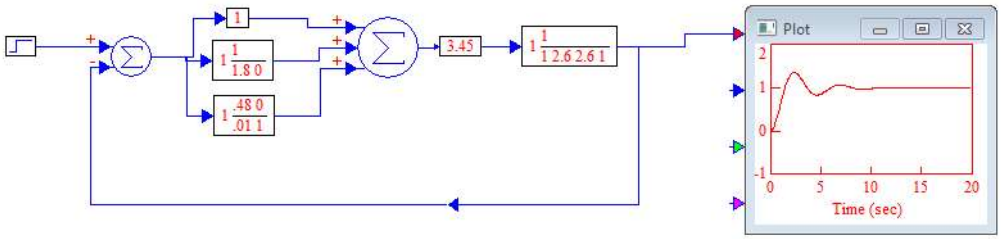
Rendszerfogalmak általános jellemzői

- A rendszer egység
  - rendszeralkotó tényező léte
  - autonóm - heteronóm
- Hierarchia
  - autonomitás $\rightarrow$ modularitás
  - heteronomitás $\rightarrow$ rendszerparadoxonok

Az irányítástechnikai rendszer fogalma

- cél: a szabályozási kör és az abban található elemek vizsgálata
- eszköz:
  - hatásvázlat
  - szimuláció
  - matematikai modellek



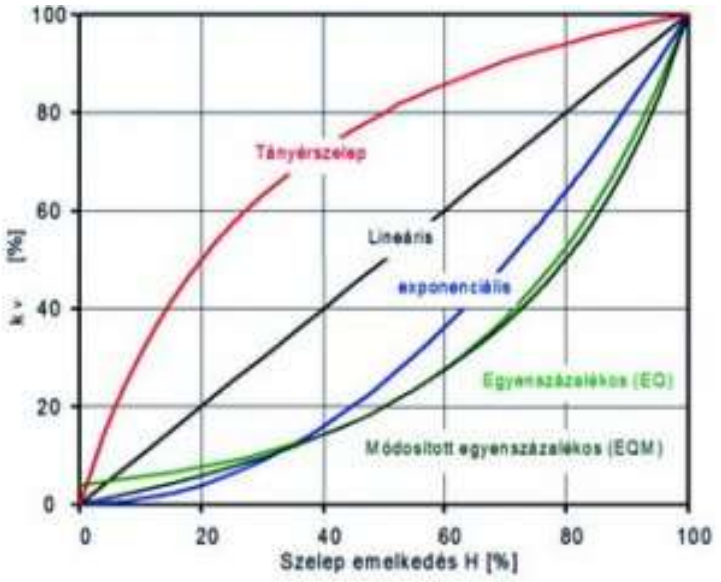


$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_0 u(t)$$

Lineáris – nemlineáris rendszerek

- Valós rendszerek általában nemlineárisak
- pl. szabályozó szelepek működése
  - alapátfolyás jelleggörbe

$$Q = \alpha A \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = K_v \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$$



Lineáris – nemlineáris rendszerek

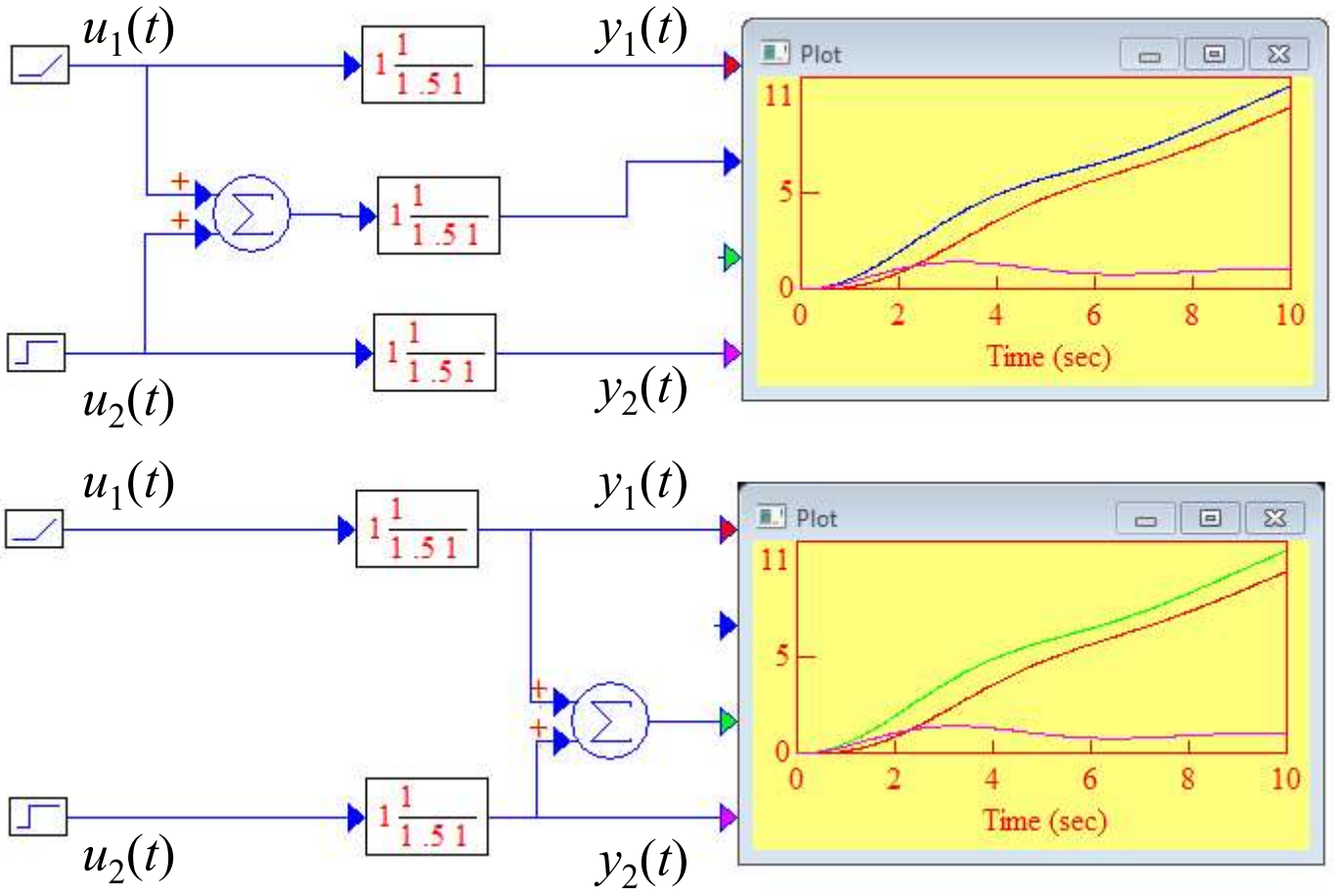
- Linearitás:

$$u_1(t) \rightarrow y_1(t)$$
$$u_2(t) \rightarrow y_2(t)$$
$$\lambda_1, \lambda_2 \in R$$
$$\lambda_1 \cdot u_1(t) + \lambda_2 \cdot u_2(t) \rightarrow \lambda_1 \cdot y_1(t) + \lambda_2 \cdot y_2(t)$$

- a leíró egyenletek nem tartalmazhatják a változók szorzatait vagy hatványait
- elméleti rendszerek
- valós rendszerek viselkedése szűk környezetben

Lineáris – nemlineáris rendszerek

- Lineáris rendszerek viselkedése



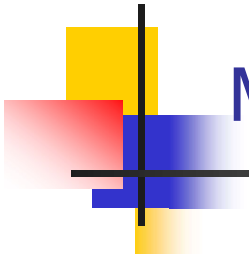
Munkaponti linearizálás

- valós rendszerek többé-kevésbé nemlineárisak
- lehetséges kezelés: munkaponti linearizálás
- Legyen

$$Y = f(U_1, U_2, U_3, \ldots)$$

  - parciálisan deriválva az egyes változók szerint:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial U_1} dU_1 + \frac{\partial Y}{\partial U_2} dU_2 + \frac{\partial Y}{\partial U_3} dU_3 + \ldots$$



Munkaponti linearizálás

- legyen adott egy tetszőleges munkapont, aminek viszonylag szűk környezetében vizsgáljuk a rendszer működését
- jelölje a munkaponti értékeket $_0$ index, így

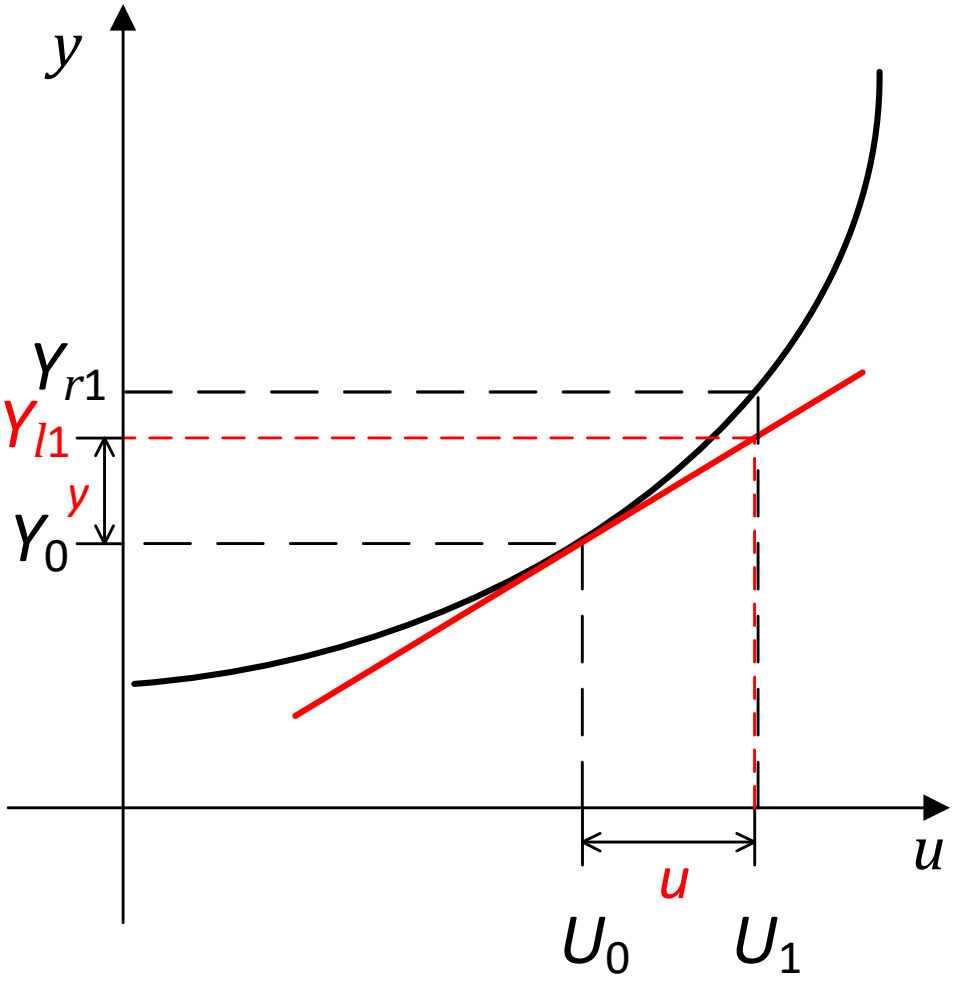
$$[Y]_0,\ [U_1]_0,\ [U_2]_0,\ \ldots$$

- a munkapont környezetében legyen a függő változó (Y) viselkedése lineáris
- jelölje a változóknak a munkapont körüli *relatív* megváltozásait:

$$y,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots$$

Munkaponti linearizálás

- U_0 a független változó munkaponti értéke
- Y_0 a függő változó munkaponti értéke
- U_1 a független változó tetszőleges értéke
- Y_{r1} a függő változó tényleges értéke U_1-re
- Y_{l1} a független változó közelítő értéke U_1-re
- $u = U_1 - U_0$
- $Y_{l1} = Y_0 - y$



Munkaponti linearizálás

- ekkor a linearizált egyenlet a következő alakú lesz:

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 + \ldots$$

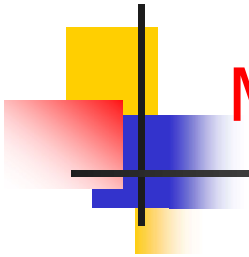
ahol

$$C_1 = \left[\frac{\partial Y}{\partial U_1}\right]_0, C_2 = \left[\frac{\partial Y}{\partial U_2}\right]_0, \ldots, u_1 = U_1 - U_{1_0}, \ldots$$

és a vizsgált pontban felvett függvényérték:

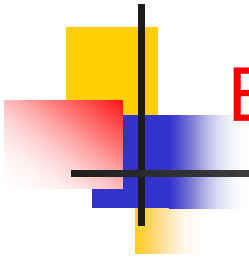
$$Y_l = Y_0 + y$$

ahol a Y_l linearizált összefüggés szerinti érték



Modellek típusai

- irányítástechnikában alkalmazott matematikai modellek típusai:
  - bemenet/kimenet modellek
    - a vizsgált rendszert utánzó, „fekete doboz” modellek
  - állapottér modellek
    - a vizsgált rendszer belső összefüggéseit leíró, „fehér doboz” modellek



Bemenet/kimenet modellek

- Lineáris, időinvariáns, folytonos idejű bemenet/kimenet (I/O) modell:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_0 u(t)$$

ahol $u(t)$ – a bemenő jel

$y(t)$ – a kimenő jel

$a_n, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0$ – paraméterek

Állapottér modellek

- Lineáris, időinvariáns, folytonos idejű állapottér modell:

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}(t)$$
$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}\,\underline{u}(t)$$

ahol $\underline{x}$ – a belső állapotok vektora

$\underline{u}$ – a bemeneti vektor

$\underline{y}$ – a kimeneti vektor

$\underline{\underline{A}}$ – az állapot-átmeneti mátrix

$\underline{\underline{B}}$ – a bemeneti mátrix

$\underline{\underline{C}}$ – a kimeneti mátrix

$\underline{\underline{D}}$ – a segédmátrix

Bemenet/kimenet modellek

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_0 u$$

I/O modell jelzői:

- lineáris
- időinvariáns
- folytonos idejű
  - $y(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)$ – kezdeti feltételek
- inhomogén
- n-ed rendű
  - $n \geq m$ – oksági szabály
- SISO

Bemenet/kimenet modellek

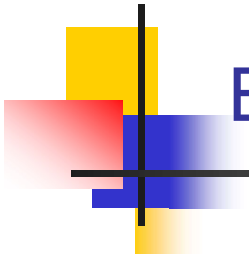
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u$$

- Szabályozástechnikában az általában ezt az egyenletet a következő alakra hozzák:

$$T_n^n y^{(n)} + T_{n-1}^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + T_1 y^{(1)} + y = K\left(\tau_m^m u^{(m)} + \cdots + \tau_1 u^{(1)} + u\right)$$

ahol $a_0 \neq 0$ $\quad T_i^i = \dfrac{a_i}{a_0}$ $\quad \tau_i^i = \dfrac{b_i}{b_0}$

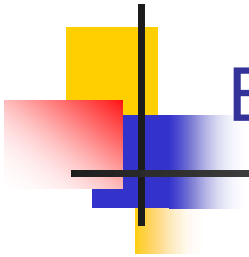
$$K = \frac{b_0}{a_0} = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}$$ (stabil rendszer esetén)



Bemenet/kimenet modellek

- differenciálegyenlet megoldása:
  - a rendszer válasza, azaz $y(t)$ időbeli lefolyása
    - a rendszer bemenetére adott jel, azaz az $u(t)$ bemenet
    - és adott kezdeti feltételek $y^{(i)}(t_0)$ $i = 1,\ldots, n\text{-}1$

  esetén



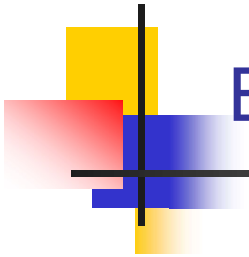
Bemenet/kimenet modellek

- inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(t) = y_{h0}(t) + y_{ih0}(t)$$

ahol

- $y_{h0}(t)$ – homogén egyenlet általános megoldása
- $y_{ih0}(t)$ – inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása



Bemenet/kimenet modellek

- legyen az $u(t)$ bemenet állandó vagy periodikus lefolyású jel, ekkor
  - az $y_{ih0}(t)$ partikuláris megoldás adja meg a kimenő jelet stacionárius vagy kvázistacionárius (állandósult) állapotban
  - az $y_{h0}(t)$ homogén megoldás írja le a tranziens (átmeneti) állapotbeli viselkedést

Bemenet/kimenet modellek

- keressük a tranziens megoldást a következő alakban:

$$y_{h0}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t}$$

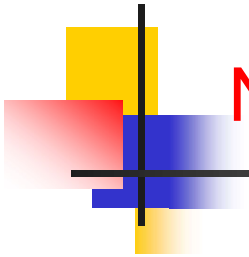
- visszahelyettesítve ezt a homogén egyenletbe:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_n p_i^n + \cdots + a_1 p_i + a_0) \cdot C_i e^{p_i t} = 0$$

- innen $p = p_i$, $i = 1,\ldots,n$ -re teljesüljön:

$$K(p) = a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0 = 0$$

karakterisztikus egyenlet

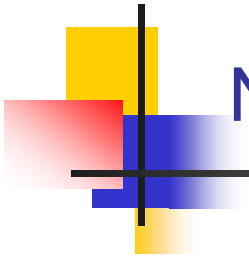


Nevezetes válaszfüggvények

- Súlyfüggvény:
  - Dirac impulzus bemenő jelre adott válaszfüggvény
  - jele: $h(t)$

- Átmeneti függvény:
  - Egységugrás bemenő jelre adott válaszfüggvény
  - jele: $(w_s(t))$

- értelmezhető a egység-sebességugrás és egység-gyorsulás bemenetekre adott válaszfüggvény is



Nevezetes válaszfüggvények

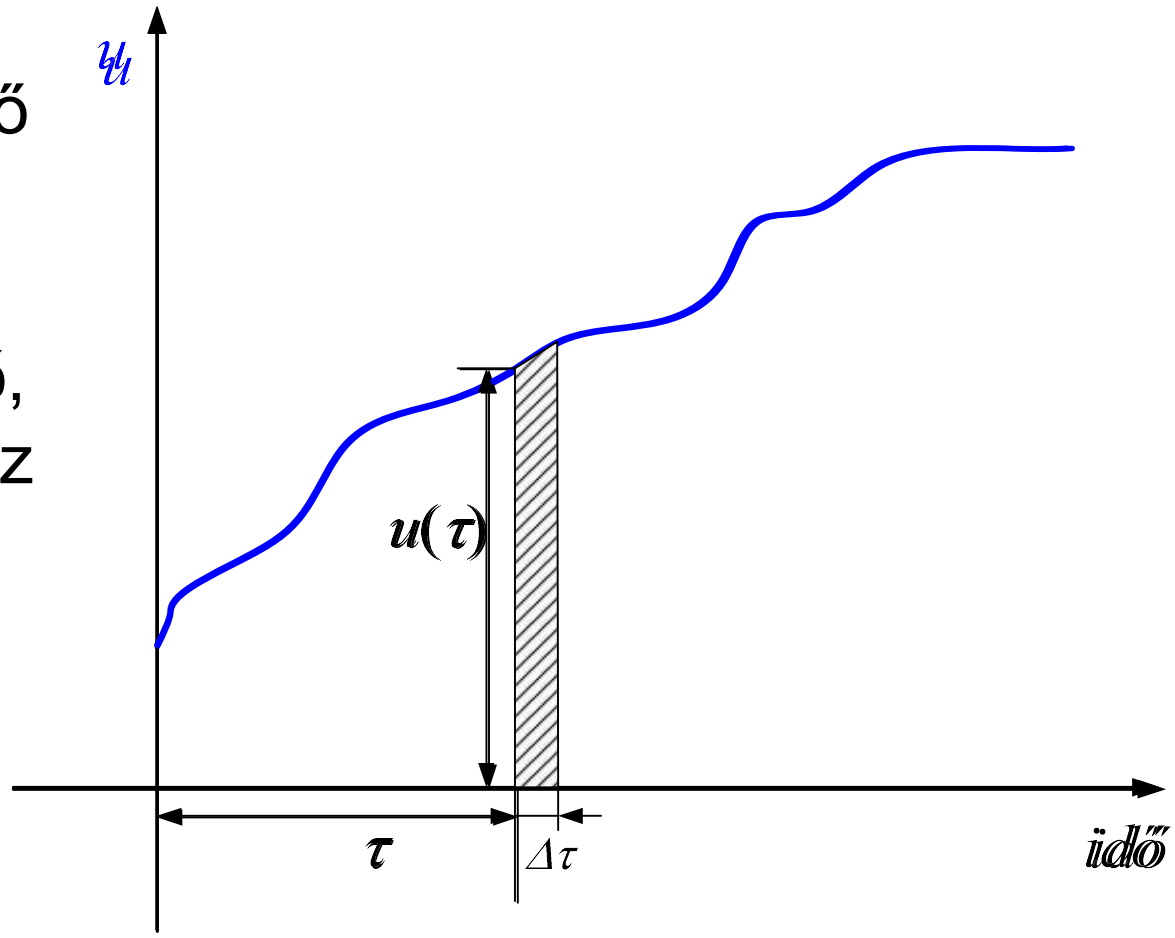
- A súlyfüggvény és az átmeneti függvény közötti összefüggés:

$$h(t) = \frac{dw_s(t)}{dt}$$

  - Megj.: az összefüggés a linearitás következménye

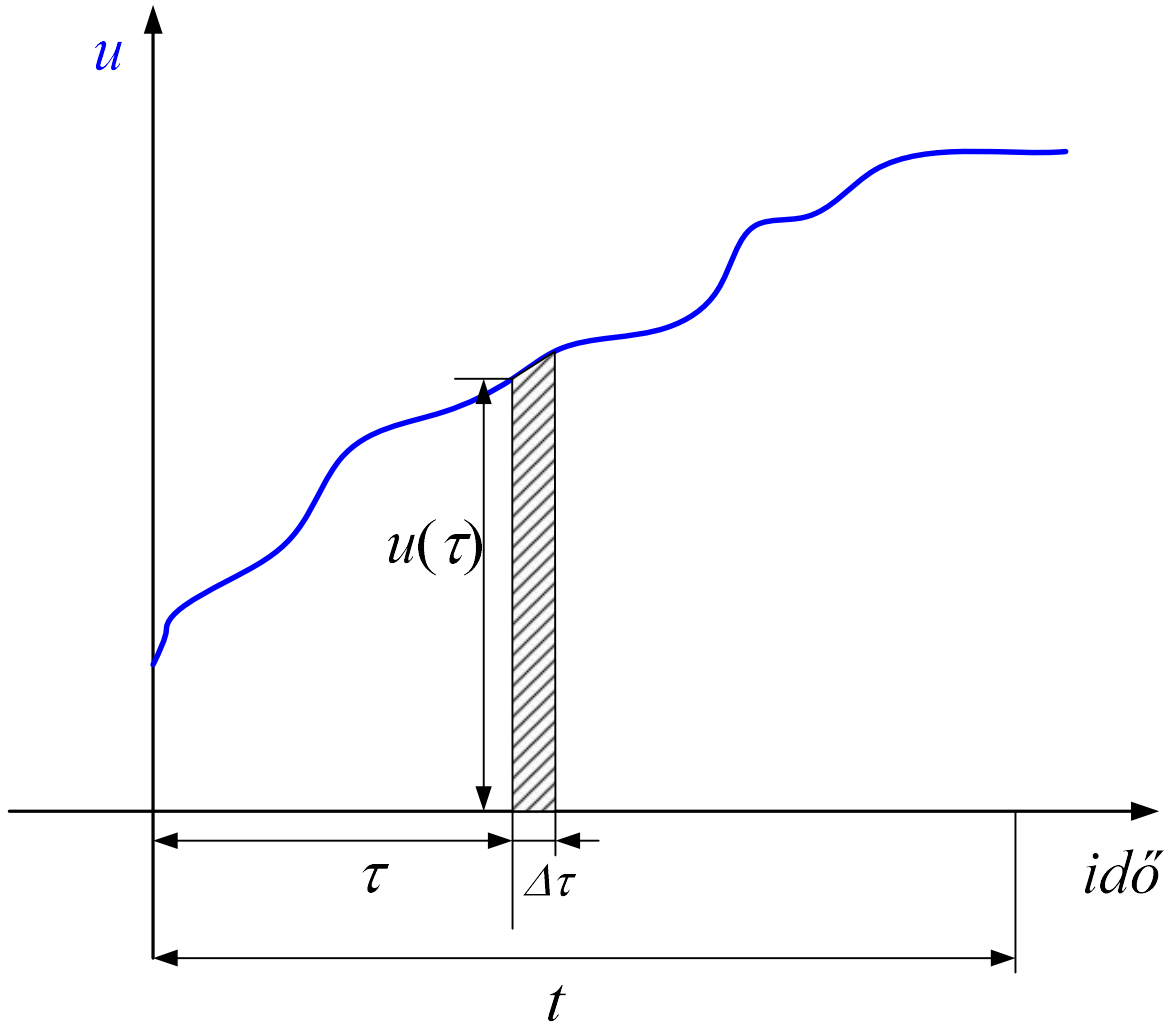
Válaszfüggvény meghatározása időtartományban

- legyen adott egy $u(t)$ bemenő jel
- az $u(t)$ bemenő jel elképzelhető, mint egymáshoz képest eltolt négyszöglökés-sek sorozata



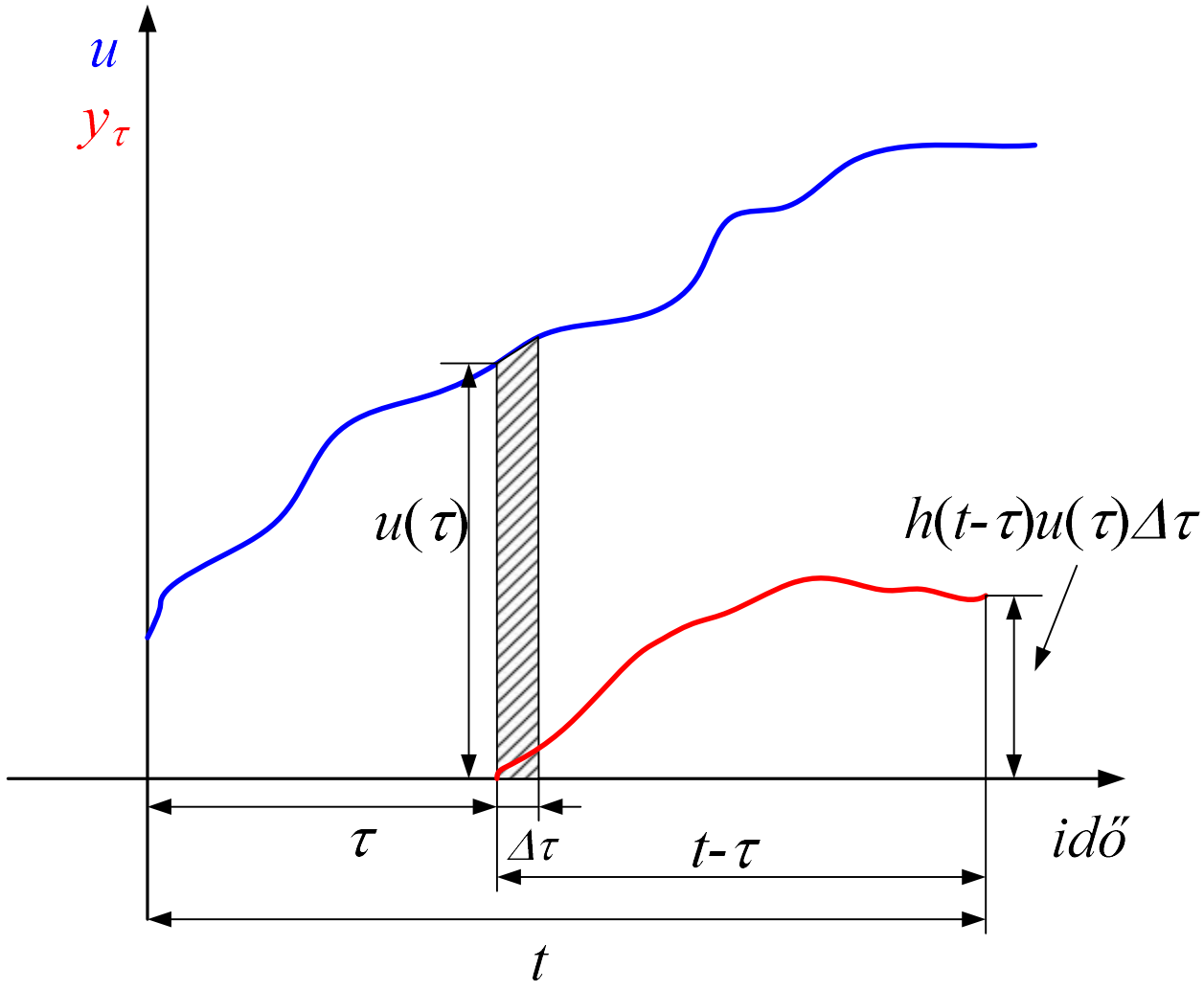
Válaszfüggvény meghatározása időtartományban

- vizsgáljuk meg, hogy τ időpont-beli $u(\tau)$ bemenő jel értéknek milyen hatása lesz a kimenetre egy tetszőleges $t > \tau$ időpontban



Válaszfüggvény meghatározása időtartományban

az $u(\tau)$ bemenet hatására a t időpontban létrejövő kimenő jel érték közelíthető a súlyfüggvény és a bemenő jel érték alapján



Válaszfüggvény meghatározása időtartományban

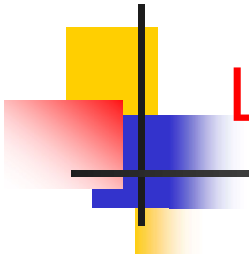
- természetesen a rendszer $y(t)$ kimenete valamennyi t időpillanat előtti bemenő jel értéktől függ:

$$y(t) \approx \sum_{i=1}^{n} h(t-\tau_i)u(\tau_i)\Delta\tau$$

- ha $\Delta\tau \to 0$, akkor a bemenetek impulzusok lesznek, így

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

konvolúciós integrál



Laplace-transzformáció

- „intuitív” bevezetés
- bevezetés célja: differenciálegyenletek megoldásának egyszerűsítése
  - analógia: a logaritmizálás bevezetése egyszerűsíti a szorzási, osztási, hatványozási feladatok elvégzését
- alkalmazásának menete
  - függvények, modellek Laplace transzformációja
  - műveletek elvégzése
  - az eredmény visszatranszformálása

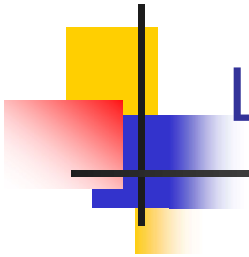
Laplace-transzformáció

- legyen $f(t)$ egy függvény
  - legyen $f(t) = 0$, ha $t < 0$; „bekapcsolási” függvény
  - legyen $f(t)$ értelmezve, ha $t \geq 0$
- legyen $s = \sigma + j\omega$ komplex változó, az ún. Laplace-operátor
- Az $f(t)$ függvény Laplace transzformáltja:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$$

- konvergencia feltétel: $\int_0^\infty |f(t) \cdot e^{-st}| dt = \int_0^\infty |f(t) \cdot e^{-\sigma t}| dt < \infty$

$$\sigma_1 < \mathrm{Re}(s) = \sigma < \sigma_2$$



Laplace-transzformáció

- összefoglalva: a rendszerről (modellről) való ismereteinket a $t = 0$ időpontig elhanyagoljuk:
  - ez lesz a viszonyítási pont
  - ekkor adunk a bementre jelet, így a rendszer válasza sem lehet korábbi – okozati rendszerek
  - „egy oldalas” Laplace transzformáció
    - szigorúan véve: $t = 0^-$ és $t = \infty$ az integrálási határ, (azaz $t \to 0$-hoz balról)
    - lényeges, ha $f(t)$-nek $t = 0$-ban szakadása van vagy impulzus jelet kap

Laplace-transzformáció

- gyakorlati kivitelezés: táblázatok segítségével
- inverz Laplace-transzformáció:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$$

  - parciális törtekre bontás után táblázatok segítségével

Laplace-transzformáció tételei

- szorzás konstanssal $\mathcal{L}[k \cdot f(t)] = k \cdot F(s)$
- összegzés, kivonás $\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
- deriválás $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - \lim_{t \to 0} f(t) = sF(s) - f(0)$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] =$$

$$= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

ahol $f^{(i)}(0) = \left.\frac{d^i f(t)}{dt^i}\right|_{t=0}$

Laplace-transzformáció tételei

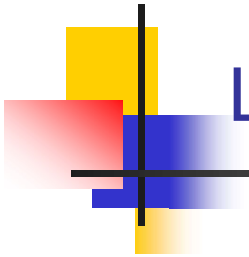
- integrálás $$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

- kezdeti érték $$\lim_{t\to 0} f\,(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

- végérték $$\lim_{t\to\infty} f\,(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$$

  ha $sF(s)$-nek nincs nulla vagy pozitív valós részű pólusa

- időbeli eltolás $$\mathcal{L}[f(t-T)1(t-T)] = e^{-Ts}F(s)$$



Laplace-transzformáció

- nevezetes függvények Laplace-transzformáltjait és a Laplace transzformáció tulajdonságait összefoglaló táblázat

Vizsgáló jelek Laplace transzformáltjai

- $1(t)$ Laplace-transzformáltja:

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^\infty 1(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty = 0 - \frac{1}{-s} = \frac{1}{s}$$

Vizsgáló jelek Laplace transzformáltjai

- $p_\varepsilon(t)$ Laplace-transzformáltja:

$$\mathcal{L}\{p_\varepsilon(t)\} = \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}\{1(t) - 1(t-\varepsilon)\} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{s} - \frac{1}{\varepsilon}e^{-s\varepsilon}\frac{1}{s} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1-e^{-s\varepsilon}}{s}$$

- $\delta(t)$ Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \mathcal{L}\{\lim_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon(t)\} = \int_0^\infty \lim_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon(t)e^{-st}dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty p_\varepsilon(t)e^{-st}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{1-e^{-s\varepsilon}}{s}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{se^{-s\varepsilon}}{s} = 1$$

Vizsgáló jelek Laplace transzformáltjai

- Egységugrás függvény, $1(t)$ $\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$
- Egység-sebességugrás függvény, $v(t)$ $\mathcal{L}\{v(t)\} = \frac{1}{s^2}$
- Egység-gyorsulás függvény, $a(t)$ $\mathcal{L}\{a(t)\} = \frac{1}{s^3}$
- Szinuszos bemenet, $\sin\omega t$ $\mathcal{L}\{\sin\omega\, t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

Átviteli függvény

- Az átviteli függvény:

$$G(s) = \left.\frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(u(t))}\right|_{z.k.f.} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

- célja: a rendszer modelljének megadása operátor tartományban, a kimenet és a bemenet közti kapcsolat racionális törtfüggvény formájában történő megadásával

Átviteli függvény

- levezetése – I/O modell alapján

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_0 u$$

$$\mathcal{L}\left(a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y\right) = \mathcal{L}\left(b_m u^{(m)} + \cdots + b_0 u\right)$$

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) =$$

$$= b_m s^m U(s) + \cdots + b_0 U(s)$$

(zérus kezdeti feltételek!)

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + \cdots + b_0\right) U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

Átviteli függvény

- levezetése – konvolúciós integrál alapján

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau$$

$$Y(s) = \int_{0}^{\infty} y(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} h(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau \cdot e^{-st} dt$$

$$Y(s) = \int_{0}^{\infty} h(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt \cdot \int_{0}^{\infty} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$Y(s) = \int_{0}^{\infty} h(\vartheta) e^{-s} \, d\vartheta \cdot \int_{0}^{\infty} u(\tau) e^{-s} \, d\tau, \quad \vartheta = t - \tau$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

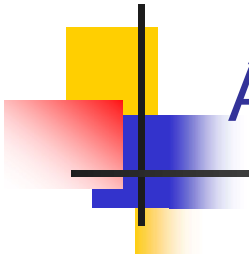
Átviteli függvény

- szokásos jelölései:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{z(s)}{p(s)}$$

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{K(s - z_m) \cdot \ldots \cdot (s - z_2)(s - z_1)}{(s - p_n) \cdot \ldots \cdot (s - p_2)(s - p_1)}$$

  - számláló gyökei: zérushelyek, zérusok $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$
  - nevező gyökei: pólusok $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$



Átviteli függvény

- tulajdonságai
  - csak lineáris, időinvariáns rendszerekre
  - operátortartománybeli kapcsolat
  - a rendszer jellemzője, független a rendszer bementének nagyságától, formájától: a rendszer tulajdonságainak hordozója
  - kimenetek-bemenetek közötti kapcsolat, a rendszer belső szerkezetéről nem ad információt $\rightarrow$ különböző rendszereknek lehet azonos az átviteli függvénye

Átviteli függvény

- ismert átviteli függvény esetén
  - különböző bemenetekkel vizsgálható a rendszer:

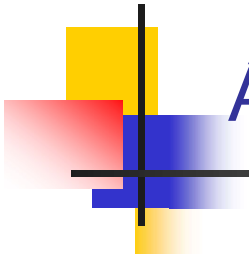
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

  - az átviteli függvény nevezője alakilag megegyezik a karakterisztikus polinommal:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{\underbrace{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(a_n p_i^n + \cdots + a_1 p_i + a_0)} \cdot C_i e^{p_i t} = 0$$

rendszer tulajdonságok meghatározása



Átviteli függvény

- ha az átviteli függvény alakja ismert, de az együtthatók értéke nem, akkor a vizsgáló jelek segítségével azok meghatározhatók – paraméter identifikáció

- ha az átviteli függvény nem ismert, akkor a vizsgáló jelekre adott kimenetek vizsgálatával meghatározható – struktúra identifikáció

Átviteli függvény

- több bemenetű – több kimenetű rendszerek:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \qquad \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1r}(s) \\ \vdots & \ddots & \dots \\ G_{p1}(s) & \dots & G_{pr}(s) \end{bmatrix}$$

ahol $G_{ij}(s) = \dfrac{Y_i(s)}{U_j(s)}$

Válaszfüggvények Laplace transzformáltjai

- legyen $G(s)$ egy jelformáló tag átviteli függvénye
- ekkor a kimenet operátor tartományban

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

- legyen a bemenet $u(t)=\delta(t)$, ekkor a kimenet a súlyfüggvény lesz:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

mivel $\mathcal{L}\{\delta(t)\}=1$

- legyen a bemenet $u(t)=1(t)$, ekkor a kimenet az átmeneti függvény lesz:

$$w_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\frac{1}{s}\right\} = \int_0^t h(\tau)d\tau$$

Átviteli függvény

- Az átviteli függvény felhasználásával definiálható a *bement/kimenet modell* és az *állapottér modell* közötti kapcsolat:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = \\ = b_m u^{(m)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{b}u(t)$$
$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) + du(t)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} = \underline{c}^T \left(s\underline{I} - \underline{A}\right)^{-1} \underline{b} + d$$