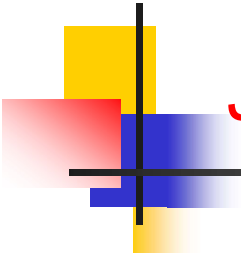
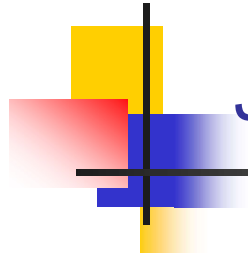


Jelek és rendszerek - alapfogalmak



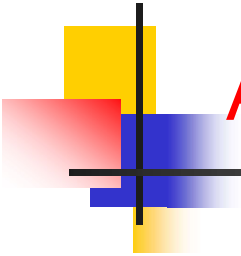
Jelek és rendszerek - bevezetés

- Jelek a műszaki gyakorlatban. Jelek osztályozása. Folytonos és diszkrét jelek.
- Lineáris és nemlineáris jelek. Nemlineáris jelek linearizálása.
- Rendszerek fogalma, típusai. Folytonos és diszkrét működésű rendszerek.
- Folytonos rendszerek leírása időtartományban, bemenet-kimenet modellek.
- Laplace transzformáció és tulajdonságai, inverz Laplace transzformáció
- Folytonos rendszerek leírása operátortartományban, átviteli függvény.
- Folytonos rendszerek leírása frekvenciatartományban, Nyquist-, Bode-diagram.
- Mintavételezés típusai. Mintavételezett jelek leírásának értelmezése.
- z-transzformáció és tulajdonságai
- Inverz z-transzformáció és kiértékelésének módszerei.
- Diszkrét rendszerek leírása időtartományban, differencia egyenlet modellek
- Diszkrét rendszerek leírása operátor tartományban, impulzus átviteli függvény.
- Fourier transzformáció és tulajdonságai, Mintavételezési tétel.
- Diszkrét Fourier transzformációs és gyors Fourier transzformáció



Jelek és rendszerek - bevezetés

- fóliák és példatár: virt.uni-pannon.hu, Tantárgyak, Jelek és rendszerek
- elérhetőség: gerzson@almos.uni-pannon.hu
- követelmények: 2 zárthelyi dolgozat
- aláírásfeltétel: zh-k külön-külön min. 30%
- aláírás pótlása: vizsgaidőszakban egy alkalommal (1. héten!)
- megajánlott jegy: zh min. 75%

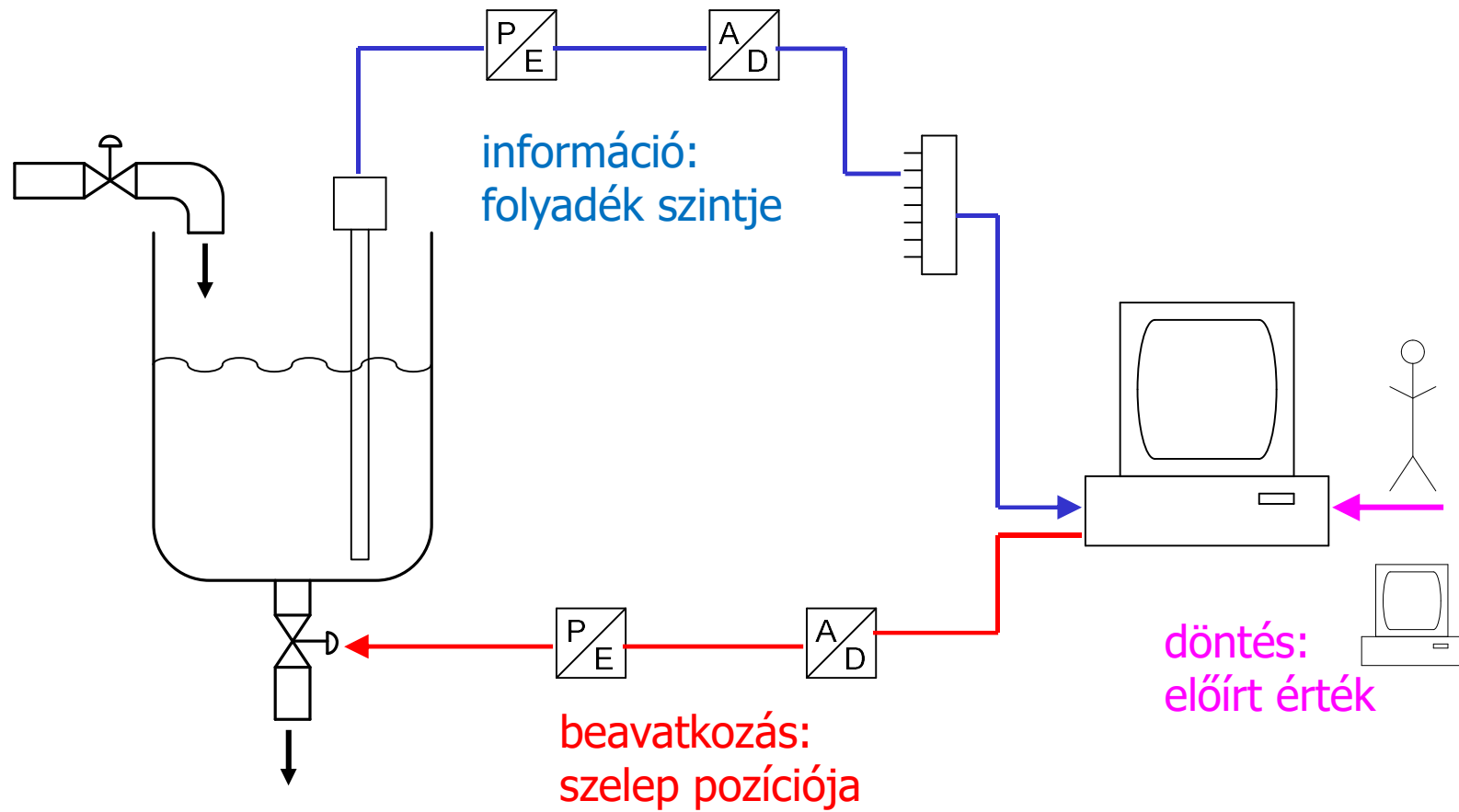


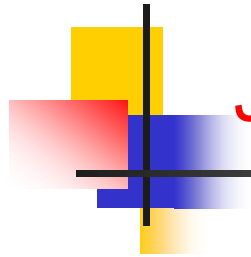
A jel fogalma

- *Jelhordozó*: minden mérhető fizikai/kémiai állapothatározó
- *Jellemzők*: azok a jelhordozók, amelyek az irányított folyamat állapotát jellemzik vagy befolyásolják
- *Jel*: valamely állapothatározó minden olyan értéke vagy értékváltozása, amely egy egyértelműen hozzárendelt információ szerzésére, továbbítására vagy tárolására alkalmas

A jel fogalma

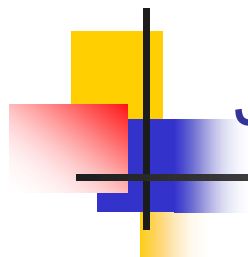
- példa



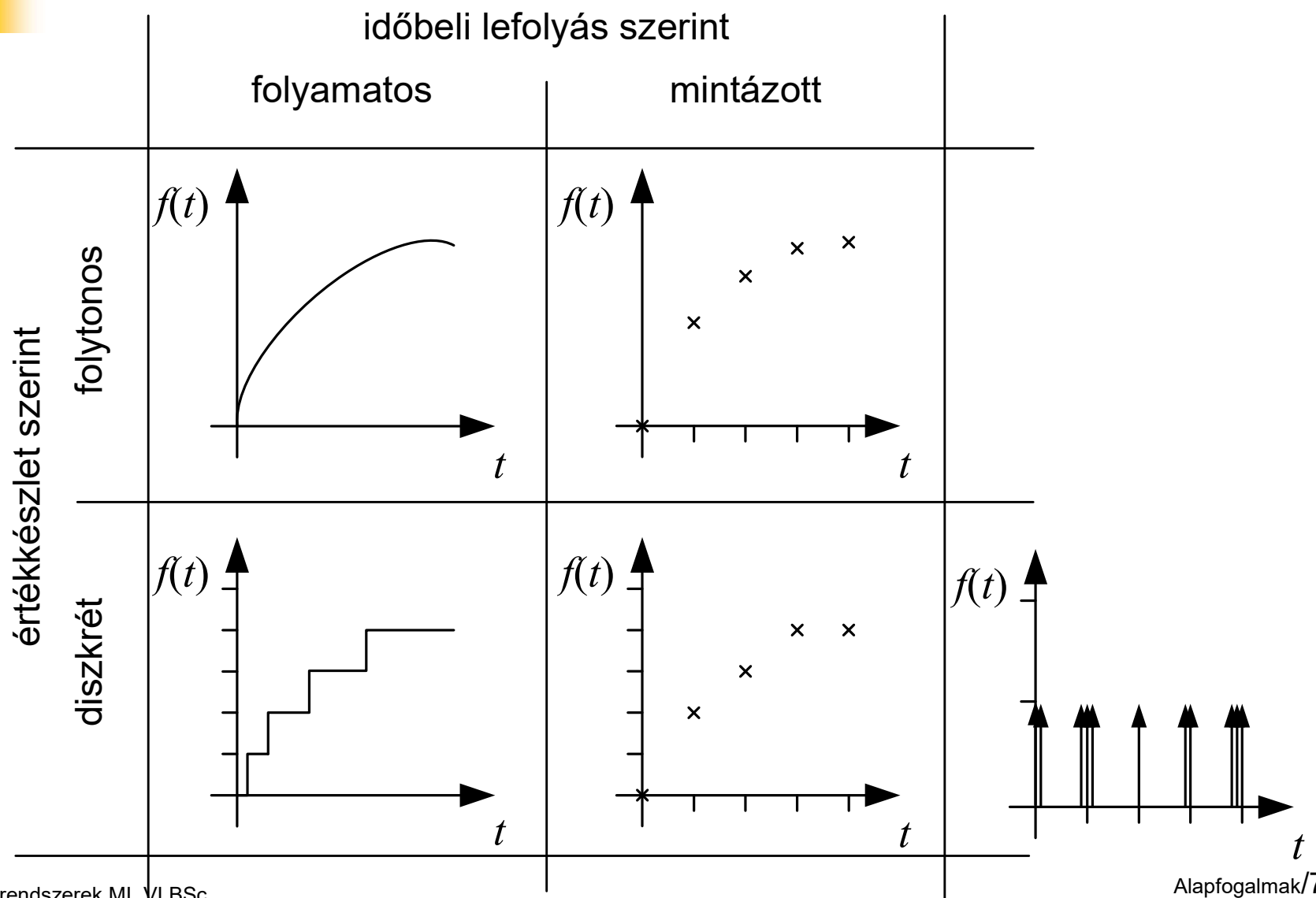


Jelek osztályozása

- értékkészlet szerint:
 - folytonos
 - diszkrét (szakaszos)
- időbeli lefolyás szerint:
 - folyamatos
 - diszkrét (szaggatott)
- meghatározottság szerint:
 - determinisztikus
 - sztochasztikus
- megjelenési forma szerint:
 - analóg
 - digitális

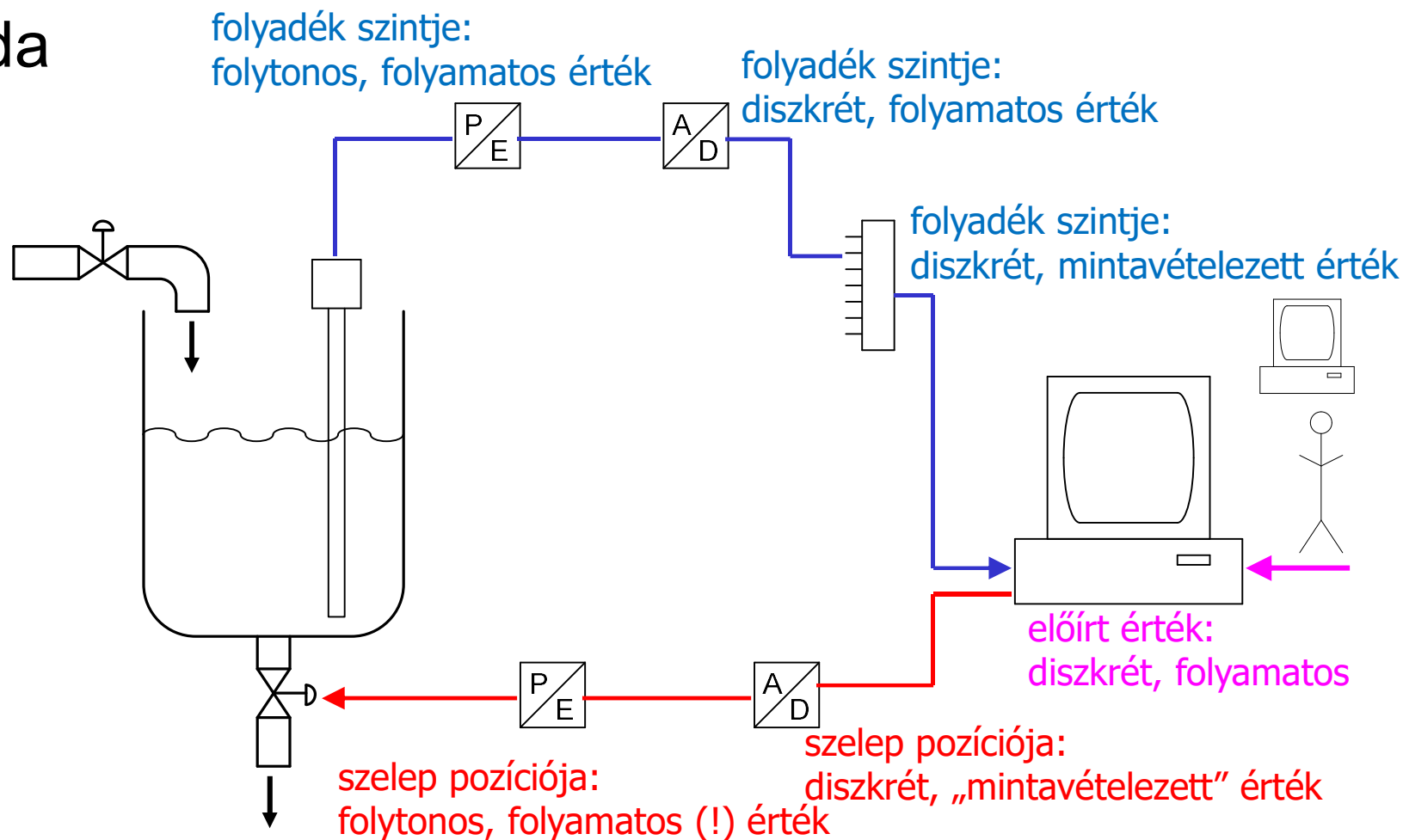


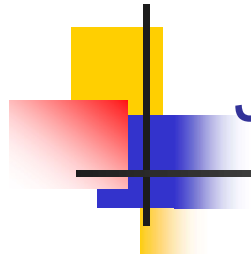
Jelek osztályozása



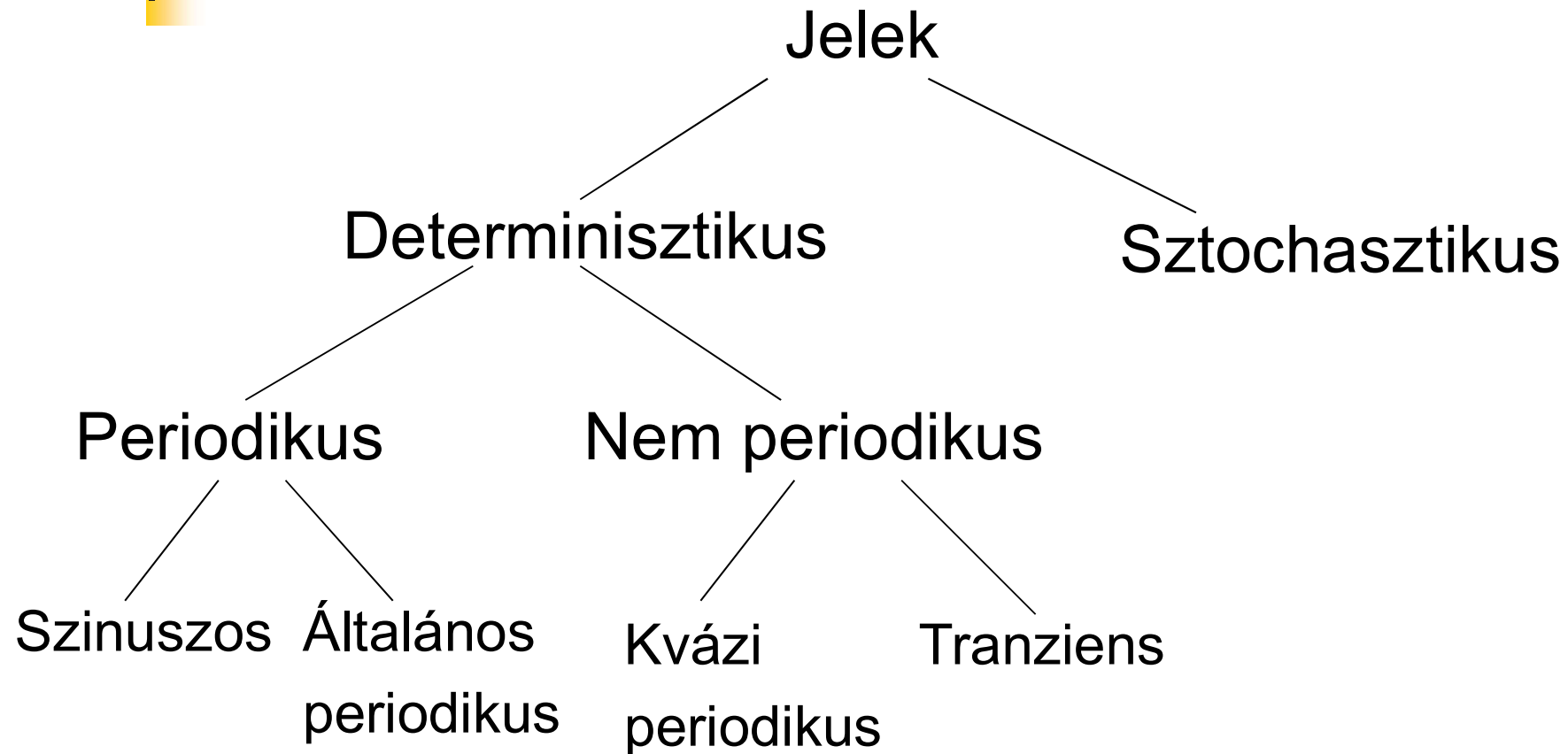
Jelek osztályozása

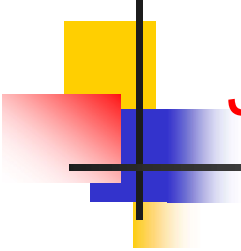
- példa





Jelek osztályozása



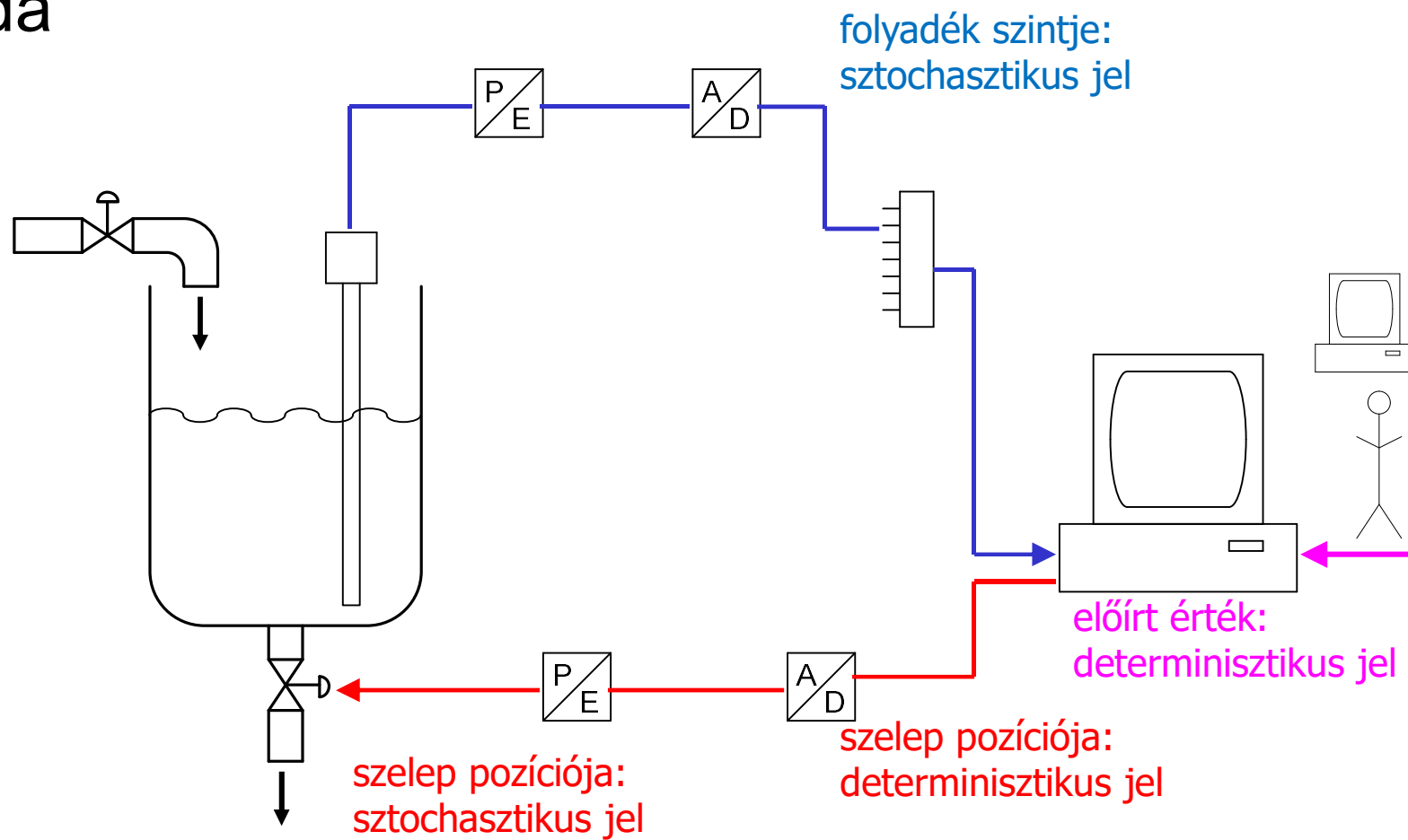


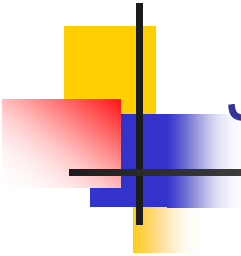
Jelek leírása

- Determinisztikus: ha a jelet létrehozó kölcsönhatások kimenetele *egyértelműen meghatározott*(nek tűnik)
- Sztochasztikus: ha a jelet létrehozó kölcsönhatások kimenetele *véletlenszerű*(nek tűnik)

Jelek leírása

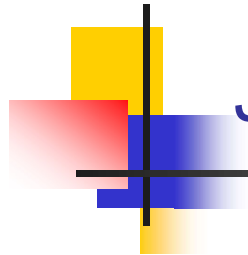
- példa





Jelek leírása

- Folytonos jel: a kölcsönhatás a vizsgált térrész *tetszőleges pontjában* egy adott időintervallumon belül *tetszőleges időpontban* jellemezhető
 - előny: hatékony matematikai eszközök
 - hátrány: nem illeszkedik a szg-es feldolgozáshoz
- Diszkrét jel: a kölcsönhatás a vizsgált térrésznek csak *kitüntetett pontjaiban* és az adott időintervallumnak csak *kitüntetett pillanataiban* jellemezhető
 - előny: illeszkedés szg-es feldolgozáshoz
 - hátrány: információvesztés



Jelek leírása

- Determinisztikus, periodikus, szinuszos jelek

$$M_s = \{x \mid x(t) = \operatorname{Re}(e^{\alpha + j(2\pi f_0 t + \Theta)}), -\infty < t < \infty, \alpha, f_0, \Theta \in \mathbb{R}\}$$

- a leírás 3 paraméter segítségével elvégezhető

- Determinisztikus, periodikus, általános periodikus jelek

$$M_P(T_P) = \{x \mid x(t+T_P) = x(t), -\infty < t < \infty\}$$

- gyakorlati szempontból Fourier-sorba fejthetőség:

$$M_{PF}(T_P) = \{x \mid x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n2\pi f_0 t) + B_n \sin(n2\pi f_0 t)), \\ -\infty < t < \infty, A_0, A_n, B_n \in \mathbb{R}\}$$

- jellemzés A_0, A_n, B_n Fourier-együtthatókkal, elvileg végtelen számú kell, gyakorlatban véges számúval közelítünk

- Determinisztikus, nemperiodikus, kváziperiodikus jelek

$$M_{KP} = \{x \mid x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n 2 \pi f_n t + B_n \sin n 2 \pi f_n t), \\ -\infty < t < \infty, A_0, A_n, B_n, f_n \in \mathbb{R}\}$$

- speciális eset: $f_n = n f_0$

- Determinisztikus, nemperiodikus, tranziens jelek

$$M_T = \{x \mid \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty\}$$

- véges energiájú jelek
- jellemzés leíró paraméterekkel (időállandó, erősítés, túllendülés, felfutási idő,...)
- Laplace-transzformáció

- Sztochasztikus jelek

$$M_V = \{x \mid x(t, \xi), t \in T, \xi \in \Theta\}$$

- sztochasztikus folyamatok formájában: $x(t, \xi)$
- leírás együttes eloszlás függvényekkel, momentumokkal



Jelek leírása

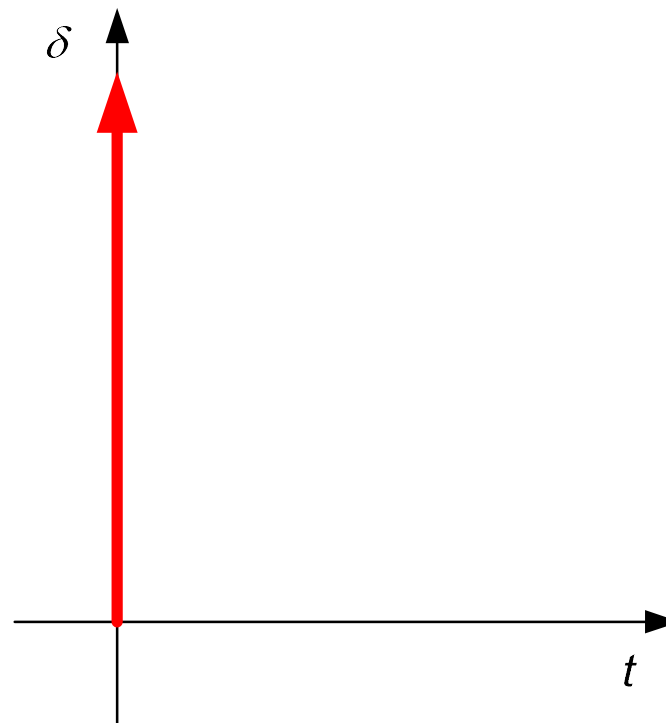
- Diszkrét időtartomány
 - mintavételezés
 - z-transzformáció
- Általános jellemzés
 - időtartomány
 - operátortartomány
 - frekvenciatartomány

- alkalmazásuk indoka:
 - aktív kísérlettervezés lehetősége
 - ismeretlen modellű rendszernél a modell típusának meghatározása – struktúra identifikáció
 - ismert modellű rendszer esetén a paraméterek meghatározása – paraméter identifikáció
 - ellenőrzés

Egységimpulzus függvény

- Dirac delta, $\delta(t)$, unit-impulse function, delta fv.

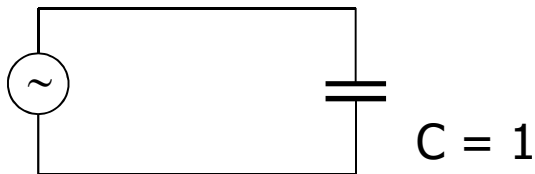
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$



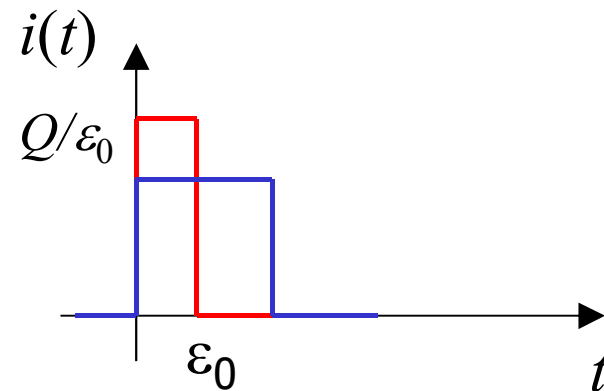
alkalmazás: impulzus jellegű zavarások

Egységimpulzus függvény

- fizikai jelenségek:
 - két golyó ütközése
 - ütő és labda ütközése
 - kondenzátor feltöltése



$$q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau$$



$$i(t) = Q \cdot p_{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & 0 \leq t \leq \epsilon_0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Egységimpulzus függvény

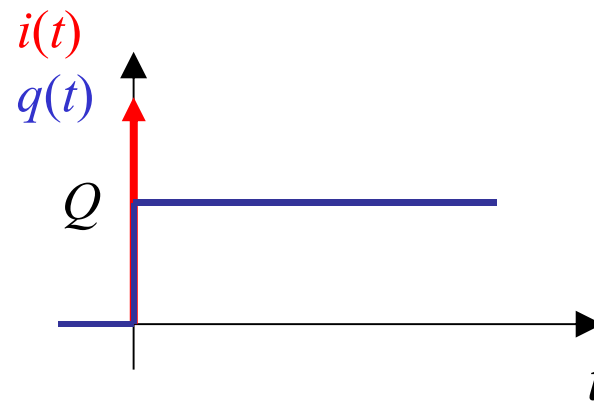
- kondenzátor töltése:

$$q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{Qt}{\varepsilon_0} & 0 \leq t \leq \varepsilon_0 \\ Q & t > \varepsilon_0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- elméletileg tekintve, azaz ε -t mindenhatáron túl csökkentve:

$$i(t) = Q \cdot \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

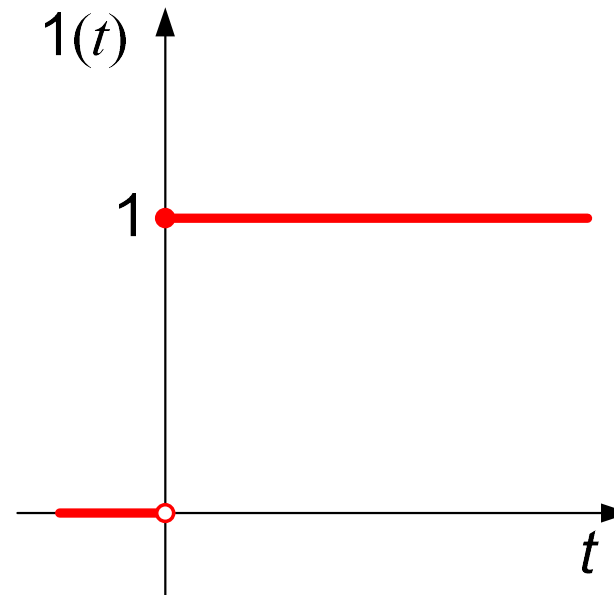
$$q(t) = Q \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = Q$$



Egységugrás függvény

- $1(t)$, unit step function

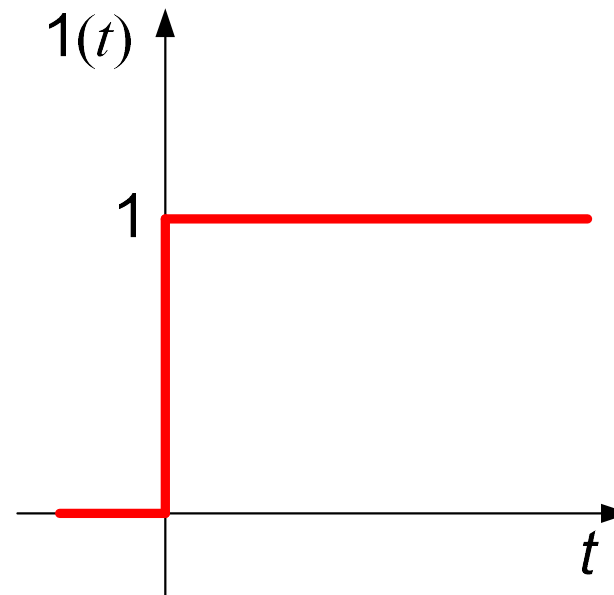
$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Egységugrás függvény

- $1(t)$, unit step function

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

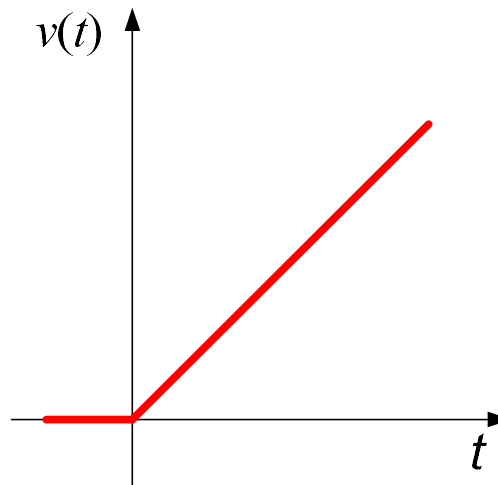


alkalmazás: alapjel-váltás, ugrás jellegű zavarások

Egység-sebességugrás függvény

- $v(t)$, ramp function

$$v(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

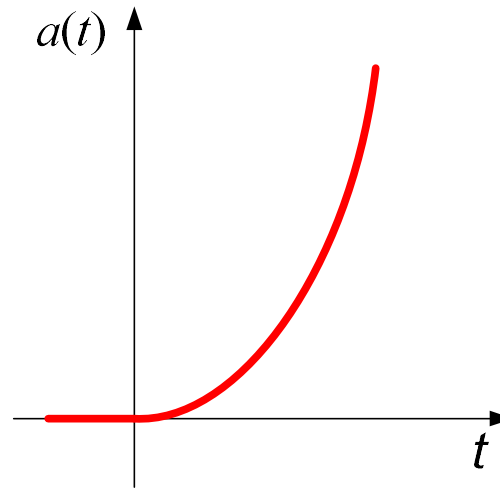


alkalmazás: programozott alapjel-váltás,
növekvő jellegű zavarások

Egység-gyorsulás függvény

- $a(t)$, acceleration function

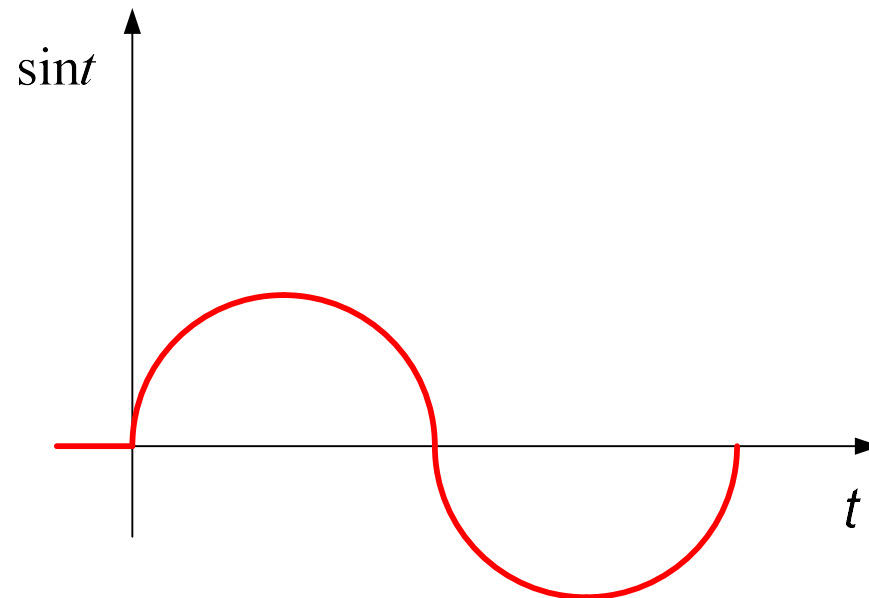
$$a(t) = \begin{cases} t^2/2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



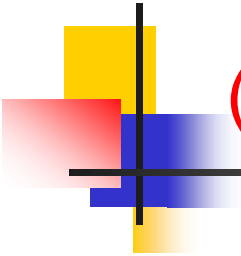
Színusz függvény

- $\sin \omega t$

$$\sin \omega t = \begin{cases} \sin t, & t \geq 0, \omega = 1 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

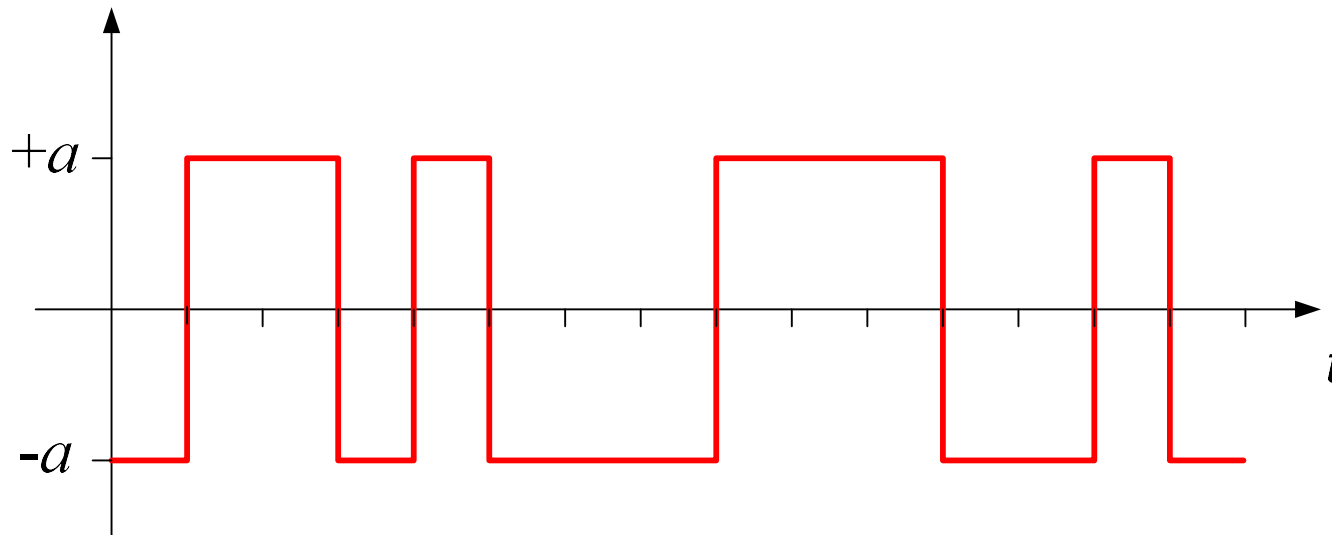


alkalmazás: periodikus bemenetű hálózatok



(Pszeudo) Random bináris jelsorozat

- Pseudo random binary sequences (PRBS)

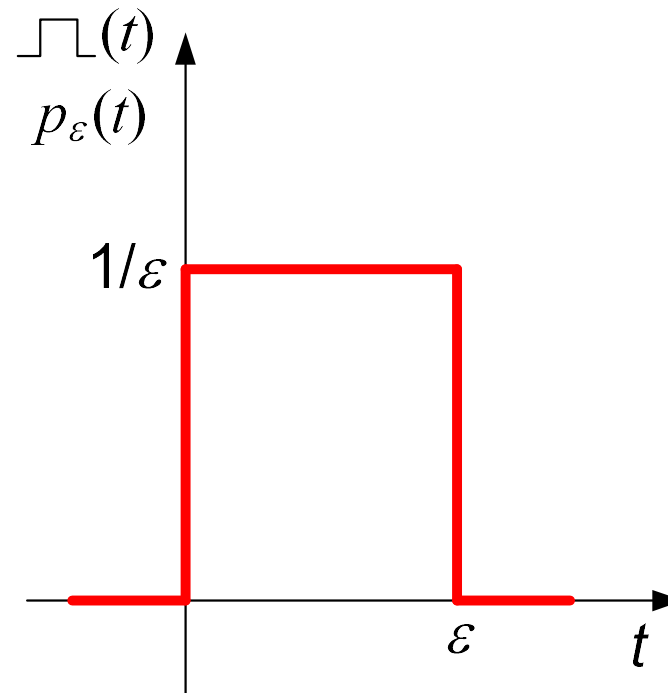


alkalmazás: statisztikus zaj bemenet szimulációja

Négyszögimpulzus függvény

- $p_\varepsilon(t)$, rectangle function –
egység négyszögimpulzus függvény

$$p_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/\varepsilon, & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}$$



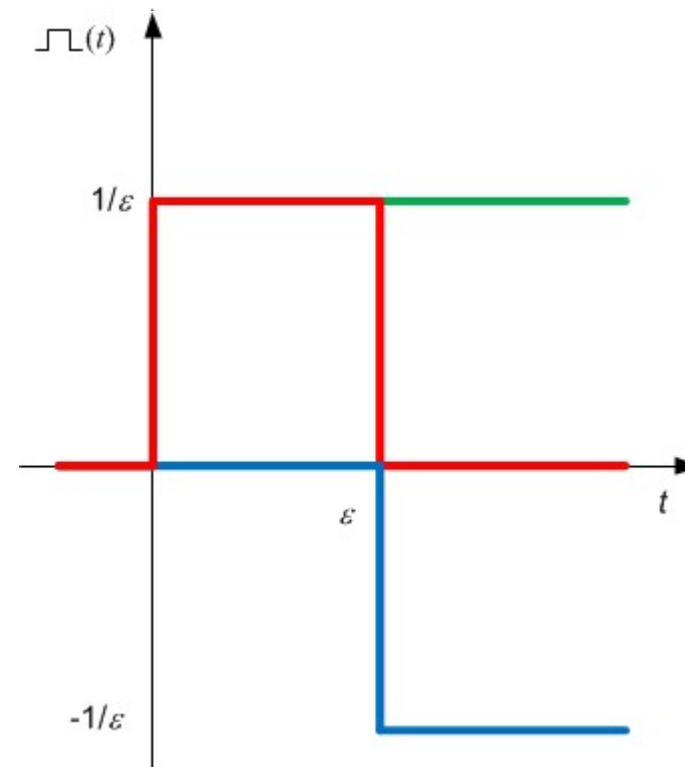
Négyszögimpulzus függvény

- $p_\varepsilon(t)$ származtatása, felbontása

$$\underline{u_1(t)} = 1(t) \quad \underline{u_2(t)} = -1(t - T)$$

$$p_1(t) = u_1(t) + u_2(t) = 1(t) - 1(t - 1)$$

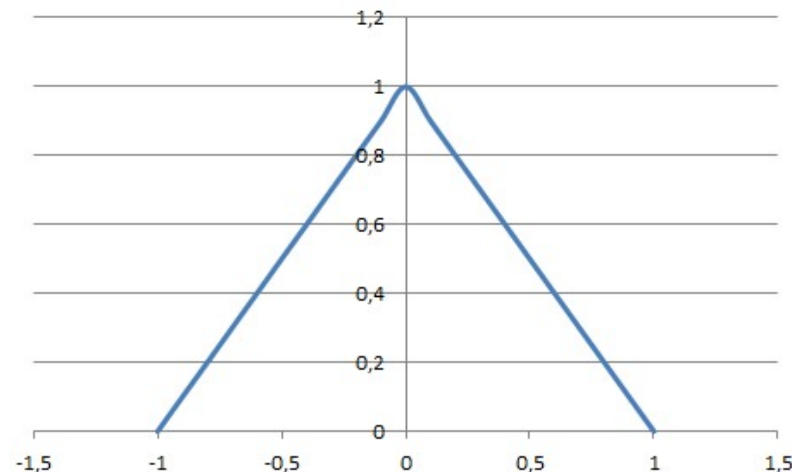
$$p_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} (1(t) - 1(t - \varepsilon))$$



További nevezetes függvények

- Háromszög függvény

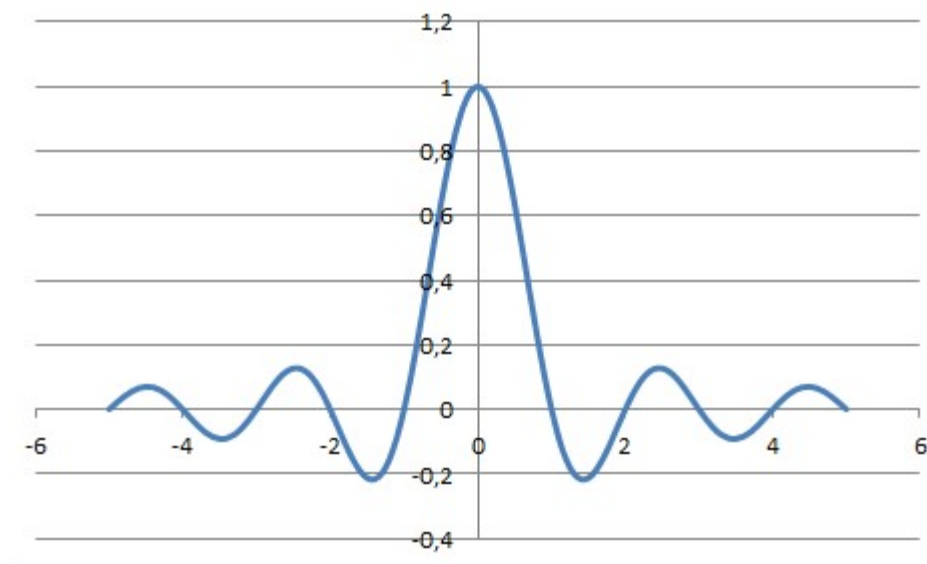
$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & -1 < t < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

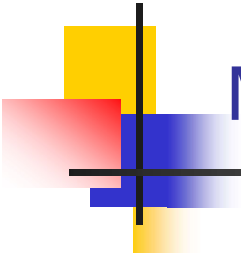


- Sinc függvény

$$\text{Sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

$$-\infty < t < \infty$$





Műveletek jelekkel

- eltolás
- tükrözés
- átskálázás

torzítás

$$f(at \pm b) = f \left[a \left(t \pm \frac{b}{a} \right) \right]$$

eltolás az előjel függvényében
+ balra
- jobbra

$$f(-at \pm b) = f \left[-a \left(t \mp \frac{b}{a} \right) \right]$$

tükrözés és torzítás

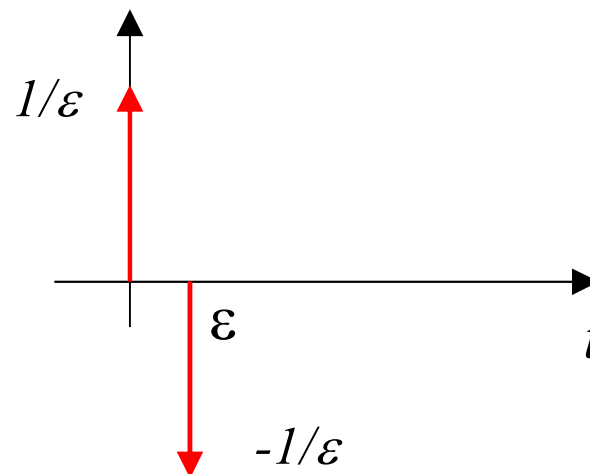
Vizsgáló jelek tulajdonságai

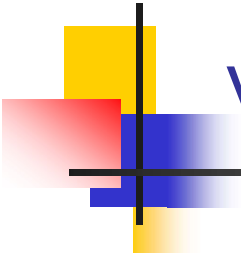
- Az egységimpulzus függvénnel értelmezhető szakadásos függvények differenciálhányadosa:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_{\varepsilon}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t - \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{d}{dt} 1(t)$$

- Dirac delta differenciálhányadosainak értelmezése:

$$\delta^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta(t) - \delta(t - \varepsilon)}{\varepsilon}$$





Vizsgáló jelek tulajdonságai

- egységimpulzus függvény tulajdonságai
 - mintavételezés

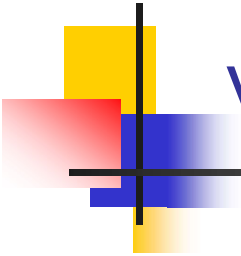
$$p_{\varepsilon}(t) = \frac{1(t) - 1(t - \varepsilon)}{\varepsilon}$$

ha $u(t)$ folytonos függvény, akkor

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int f(t) p_{\varepsilon}(t) dt = f(0)$$

illetve

$$\int f(t) \delta(t) dt = f(0) \qquad \int f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$$



Vizsgáló jelek tulajdonságai

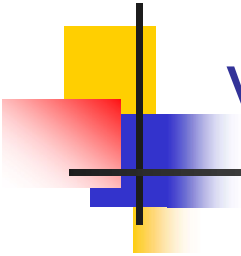
- felhasználva az általánosított deriváltat, és ha $f^{(1)}(0)$ létezik:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f(t) p_{\varepsilon}^{(1)}(t) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f(t) \frac{\delta(t) - \delta(t - \varepsilon)}{\varepsilon} dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(0 - \varepsilon)}{\varepsilon} = -f^{(1)}(0)\end{aligned}$$

$$\int f(t) \delta^{(1)}(t) dt = -f^{(1)}(0)$$

- általánosítva, ha $f^{(n)}(0)$ létezik:

$$\int f(t) \delta^{(n)}(t) dt = (-1)^n f^{(n)}(0)$$



Vizsgáló jelek tulajdonságai

- szűrés

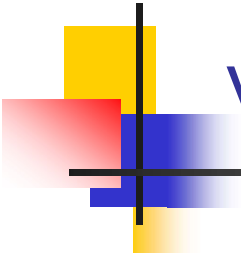
$$f(t)\delta(t - a) \equiv f(a)\delta(t - a)$$

- skálázás

$$\delta(at + b) \equiv \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right)$$

- konvolúció

$$f(t) \star \delta(t - a) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(t - u - a)dp = f(t - a)$$

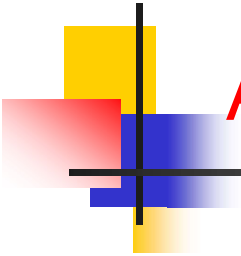


Vizsgáló jelek tulajdonságai

- vizsgáló jelek közti időtartománybeli kapcsolat:

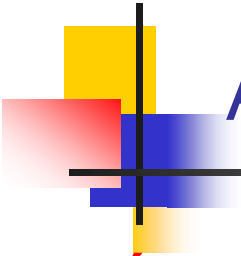
$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} \quad 1(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad v(t) = \frac{da(t)}{dt}$$

$$\int \delta(t) dt = 1(t) \quad \int 1(t) dt = v(t) \quad \int v(t) dt = a(t)$$



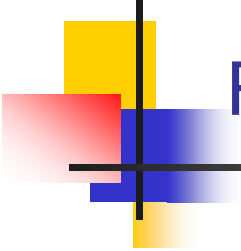
A rendszer fogalma

- **A rendszer:** kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések által összekapcsolt objektumok halmaza.
- **Objektumok:** a vizsgált rendszer egyszerű vagy összetett részei
- **Kölcsönhatások:** anyag-, energia- és információ-átadással járó folyamatok
 - objektív törvényszerűségek határozzák meg
 - jellemzésük: állapot-leírás
- A halmaz elemeit, azaz a rendszer határait a *figyelembe vett* kölcsönhatások jelölik ki.



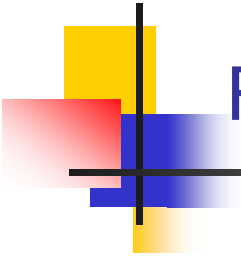
A rendszer fogalma

- **Állapot:** a rendszerben fellépő kölcsönhatások adott időpontra vonatkozó viszonyait megadó információk összessége
 - megadásához:
 - rendszer belső szerkezetének, elemek közötti kapcsolatoknak ismerete → struktúra
 - összefüggések mennyiségi viszonyai → paraméterek



Rendszerfogalmak általános jellemzői

- A rendszer tagolt egész
 - A „rész – egész” viszony a szerkezetben és a tulajdonságokban
- A rendszer kölcsönhatásban álló elemek összessége
 - kapcsolatok - relációk

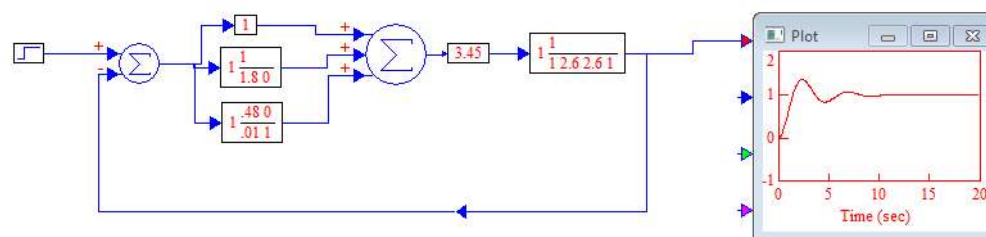
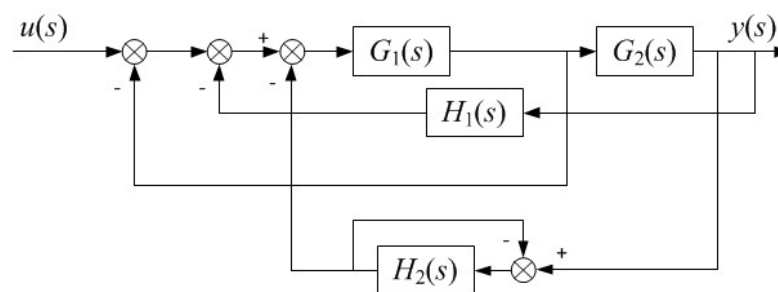


Rendszerfogalmak általános jellemzői

- A rendszer egység
 - rendszeralkotó tényező léte
 - autonóm - heteronóm
- Hierarchia
 - autonómítás → modularitás
 - heteronómítás → rendszerparadoxonok

Az irányítástechnikai rendszer fogalma

- cél: a szabályozási kör és az abban található elemek vizsgálata
- eszköz:
 - hatásvázlat
 - szimuláció
 - matematikai modellek

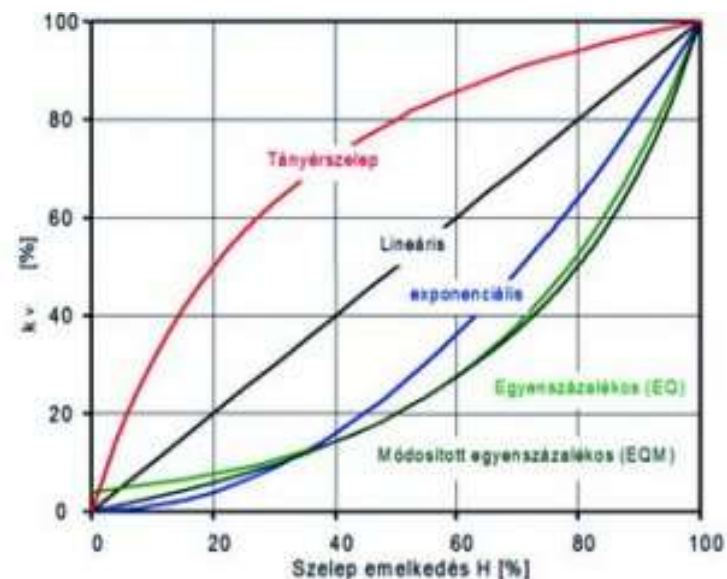


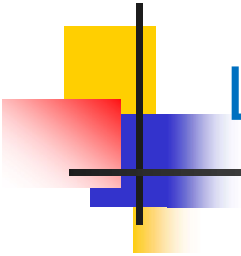
$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

Lineáris – nemlineáris rendszerek

- Valós rendszerek általában nemlineárisak
- pl. szabályozó szelepek működése
 - alapátfolyás jelleggörbe

$$Q = \alpha A \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = K_v \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$$





Lineáris – nemlineáris rendszerek

- Linearitás:

$$u_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$u_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

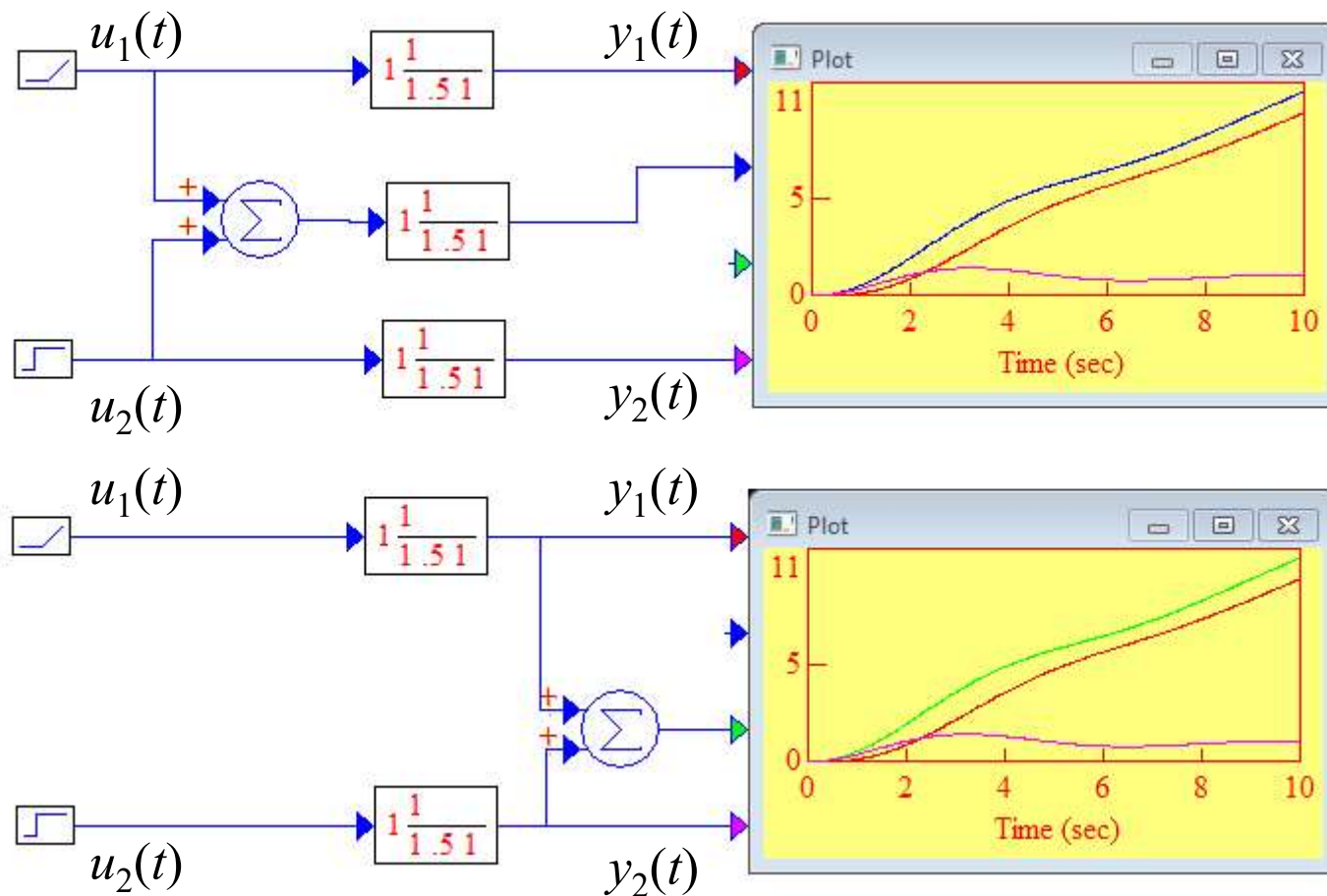
$$\lambda_1, \lambda_2 \in R$$

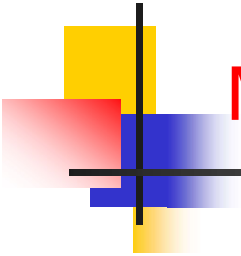
$$\lambda_1 \cdot u_1(t) + \lambda_2 \cdot u_2(t) \rightarrow \lambda_1 \cdot y_1(t) + \lambda_2 \cdot y_2(t)$$

- a leíró egyenletek nem tartalmazhatják a változók szorzatait vagy hatványait
- elméleti rendszerek
- valós rendszerek viselkedése szűk környezetben

Lineáris – nemlineáris rendszerek

- Lineáris rendszerek viselkedése





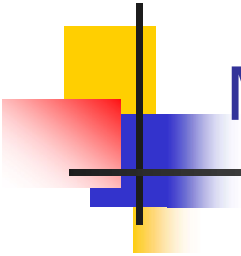
Munkaponti linearizálás

- valós rendszerek többé-kevésbé nemlineárisak
- lehetséges kezelés: munkaponti linearizálás
- Legyen

$$Y = f(U_1, U_2, U_3, \dots)$$

- parciálisan deriválva az egyes változók szerint:

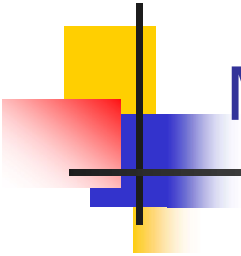
$$dY = \frac{\partial Y}{\partial U_1} dU_1 + \frac{\partial Y}{\partial U_2} dU_2 + \frac{\partial Y}{\partial U_3} dU_3 + \dots$$



Munkaponti linearizálás

- legyen adott egy tetszőleges munkapont, aminek viszonylag szűk környezetében vizsgáljuk a rendszer működését
- jelölje a munkaponti értékeket $_0$ index, így
$$[Y]_0, [U_1]_0, [U_2]_0, \dots$$
- a munkapont környezetében legyen a függő változó (Y) viselkedése lineáris
- jelölje a változóknak a munkapont körüli relatív megváltozásait:

$$y, u_1, u_2, u_3, \dots$$



Munkaponti linearizálás

- ekkor a linearizált egyenlet a következő alakú lesz:

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 + \dots$$

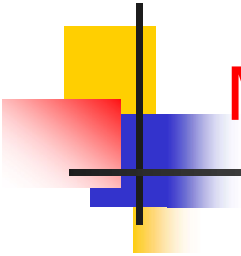
ahol

$$C_1 = \left[\frac{\partial Y}{\partial U_1} \right]_0, \quad C_2 = \left[\frac{\partial Y}{\partial U_2} \right]_0, \dots, u_1 = U_1 - U_{10}, \dots$$

és a vizsgált pontban felvett függvényérték:

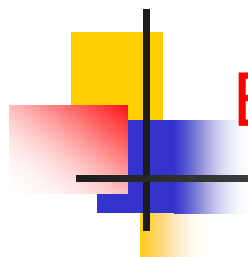
$$Y_l = Y_0 + y$$

ahol a Y_l linearizált összefüggés szerinti érték



Modellek típusai

- Irányítástechnikában alkalmazott matematikai modellek típusai:
 - bemenet/kimenet modellek
 - a vizsgált rendszert utánzó, „fekete doboz” modellek
 - állapottér modellek
 - a vizsgált rendszer belső összefüggéseit leíró, „fehér doboz” modellek



Bemenet/kimenet modellek

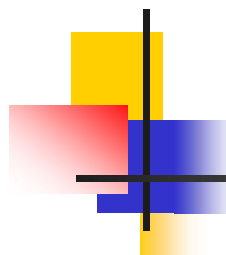
- Lineáris, időinvariáns, folytonos idejű bemenet/kimenet (I/O) modell:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

ahol $u(t)$ – a bemenő jel

$y(t)$ – a kimenő jel

$a_n, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0$ – paraméterek



Állapottér modellek

- Lineáris, időinvariáns, folytonos idejű állapotter modell:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}\underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}\underline{u}(t)$$

ahol $\underline{x}$ – a belső állapotok vektora

$\underline{u}$ – a bemeneti vektor

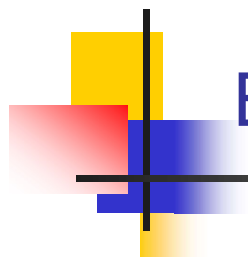
$\underline{y}$ – a kimeneti vektor

A – az állapot-átmeneti mátrix

B – a bemeneti mátrix

C – a kimeneti mátrix

D – a segédmátrix

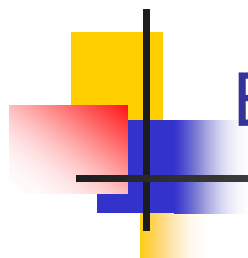


Bemenet/kimenet modellek

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u$$

I/O modell jelzői:

- lineáris
- időinvariáns
- folytonos idejű
 - $y(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)$ – kezdeti feltételek
- inhomogén
- n -ed rendű
 - $n \geq m$ – oksági szabály
- SISO



Bemenet/kimenet modellek

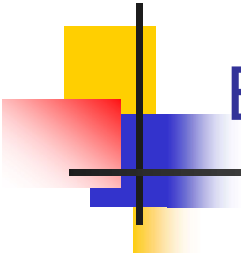
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u^{(1)} + b_0 u$$

- Szabályozástechnikában az általában ezt az egyenletet a következő alakra hozzák:

$$T_n^n y^{(n)} + T_{n-1}^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + T_1 y^{(1)} + y = K \left(\tau_m^m u^{(m)} + \dots + \tau_1 u^{(1)} + u \right)$$

$$\text{ahol } a_0 \neq 0 \quad T_i^i = \frac{a_i}{a_0} \quad \tau_i^i = \frac{b_i}{b_0}$$

$$K = \frac{b_0}{a_0} = \frac{y(\infty)}{u(\infty)} \quad (\text{stabil rendszer esetén})$$



Bemenet/kimenet modellek

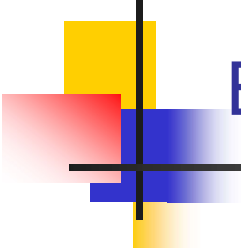
- differenciálegyenlet megoldása:
 - a rendszer válasza, azaz $y(t)$ időbeli lefolyása
 - a rendszer bemenetére adott jel, azaz az $u(t)$ bemenet
 - és adott kezdeti feltételek $y^{(i)}(t_0)$ $i = 1, \dots, n-1$ esetén

- inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(t) = y_{h0}(t) + y_{ih0}(t)$$

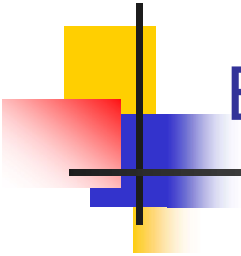
ahol

- $y_{h0}(t)$ – homogén egyenlet általános megoldása
- $y_{ih0}(t)$ – inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása



Bemenet/kimenet modellek

- legyen az $u(t)$ bemenet állandó vagy periodikus lefolyású jel, ekkor
 - az $y_{ih0}(t)$ partikuláris megoldás adja meg a kimenő jelet stacionárius vagy kvázistacionárius (állandósult) állapotban
 - az $y_{h0}(t)$ homogén megoldás írja le a tranziens (átmeneti) állapotbeli viselkedést



Bemenet/kimenet modellek

- keressük a tranziens megoldást a következő alakban:

$$y_{h0}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}$$

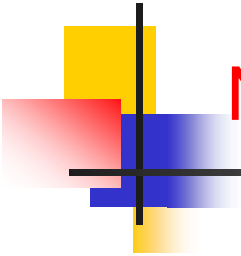
- visszahelyettesítve ezt a homogén egyenletbe:

$$\sum_{i=1}^n (a_n p_i^n + \dots + a_1 p_i + a_0) \cdot C_i e^{p_i t} = 0$$

- innen $p = p_i$, $i = 1, \dots, n$ -re teljesüljön:

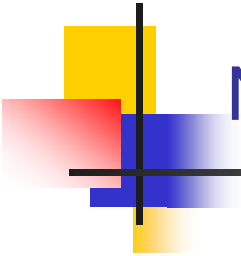
$$K(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

karakterisztikus egyenlet



Nevezetes válaszfüggvények

- Súlyfüggvény:
 - Dirac impulzus bemenő jelre adott válaszfüggvény
 - jele: $h(t)$
- Átmeneti függvény:
 - Egységugrás bemenő jelre adott válaszfüggvény
 - jele: $w_s(t)$
- értelmezhető a egység-sebességugrás és egység-gyorsulás bemenetekre adott válaszfüggvény is



Nevezetes válaszfüggvények

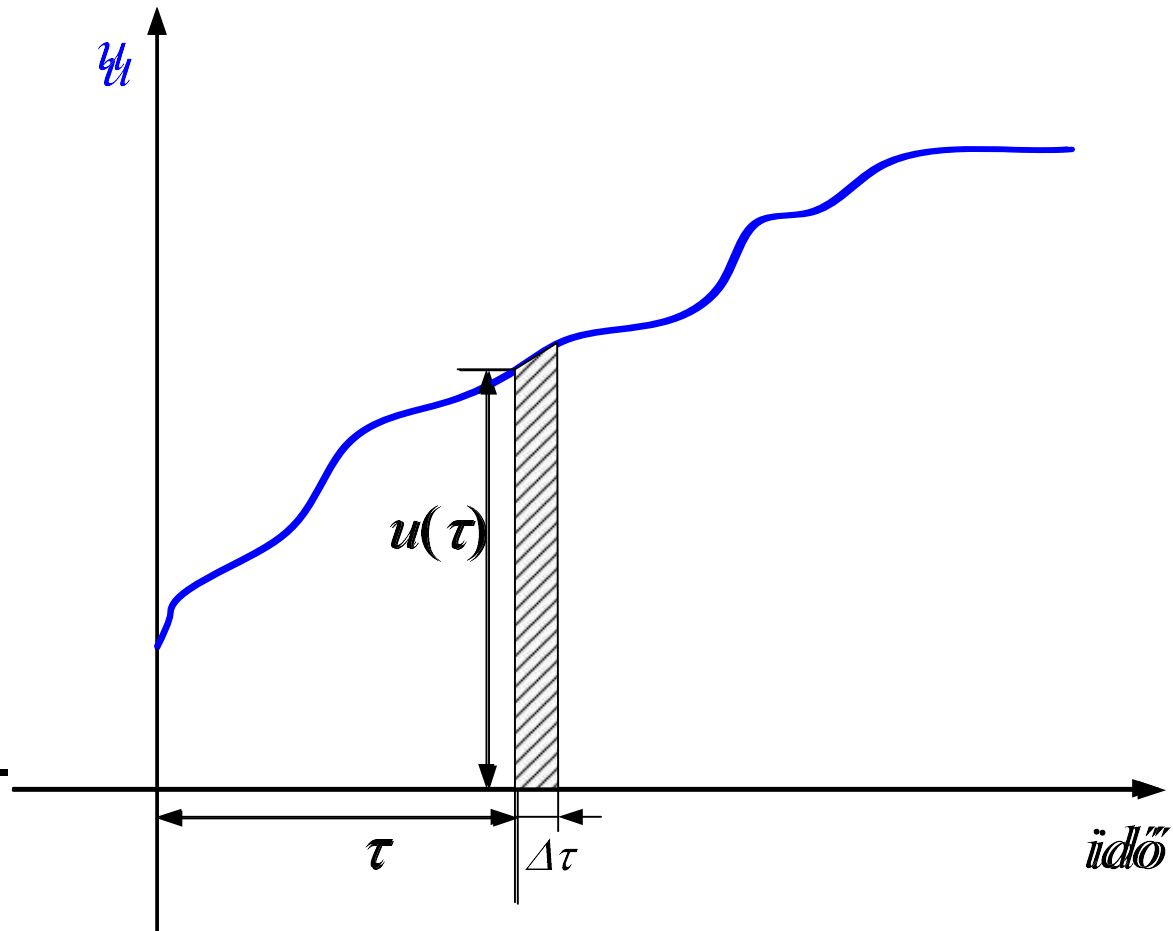
- A súlyfüggvény és az átmeneti függvény közötti összefüggés:

$$h(t) = \frac{dw_s(t)}{dt}$$

- Megj.: az összefüggés a linearitás következménye

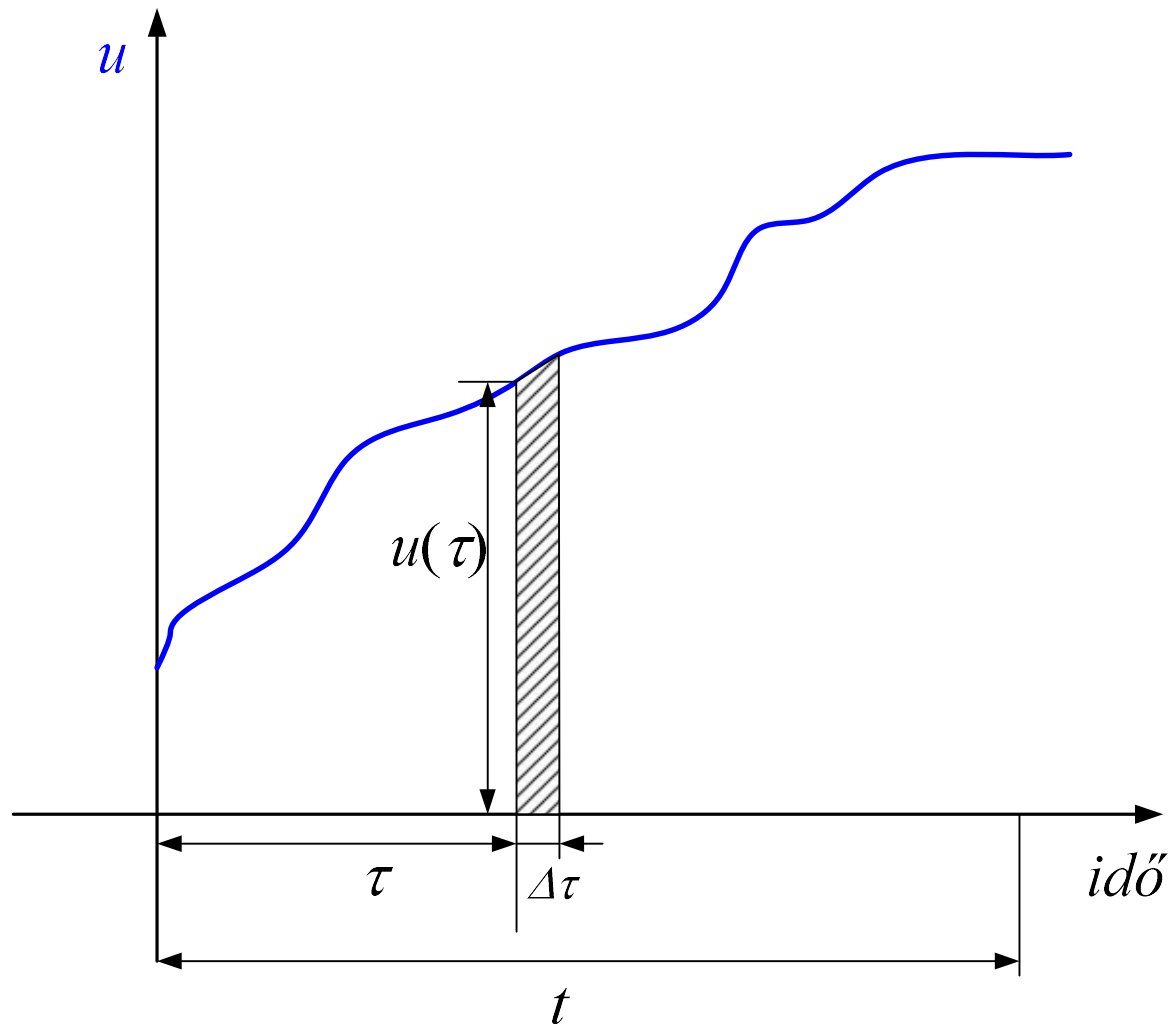
Válaszfüggvény meghatározása időtartományban

- legyen adott egy $u(t)$ bemenő jel
- az $u(t)$ bemenő jel elképzelhető, mint egymáshoz képest eltolт négyyszöglőkésorozat



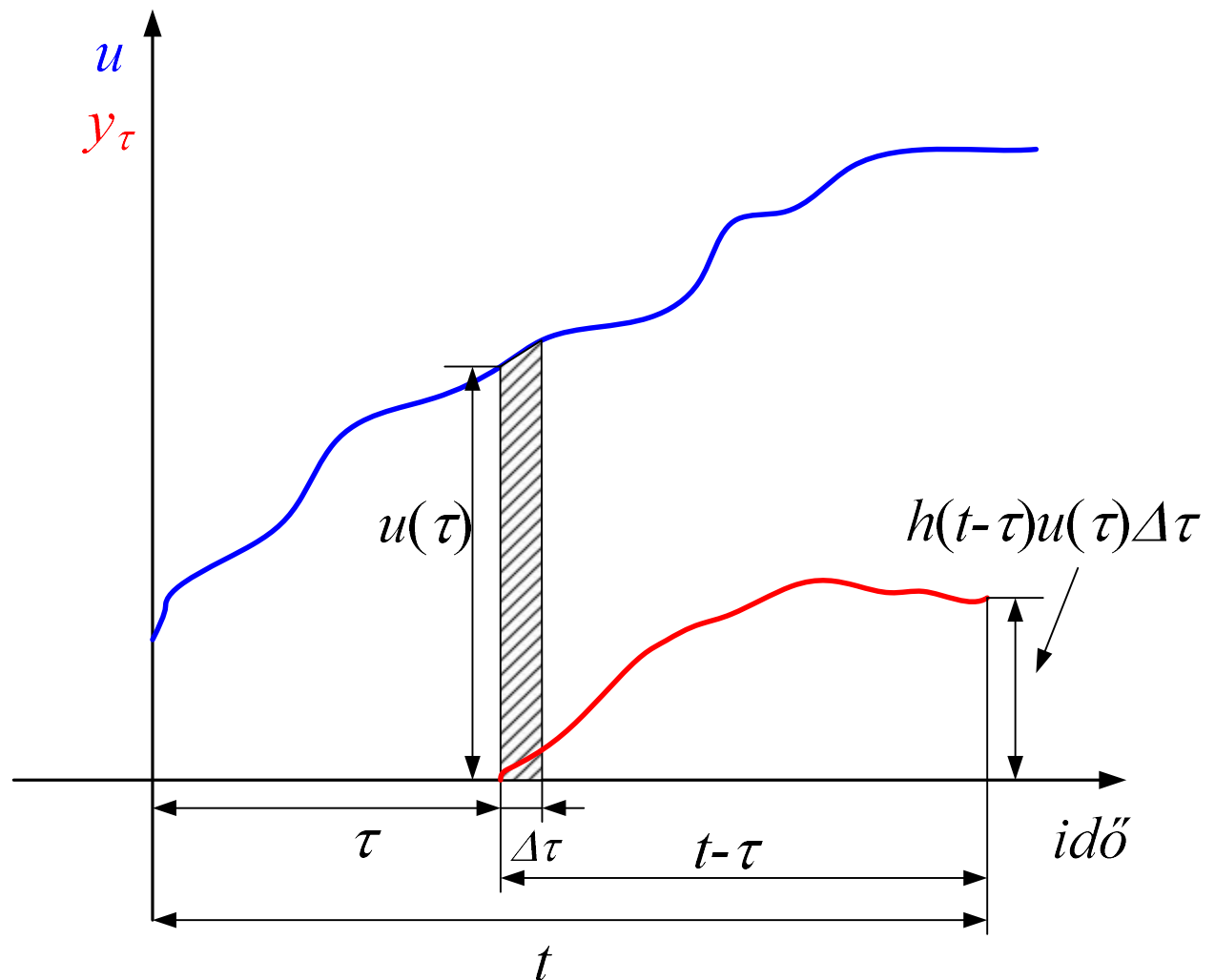
Válaszfüggvény meghatározása időtartományban

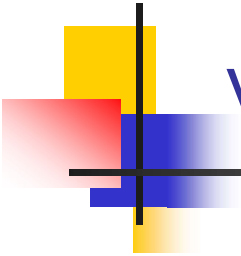
- vizsgáljuk meg, hogy τ időpontbeli $u(\tau)$ bemenő jel értéknek milyen hatása lesz a kimenetre egy tetszőleges $t > \tau$ időpontban



Válaszfüggvény meghatározása időtartományban

az $u(\tau)$ bemenet hatására a t időpontban létrejövő kimenő jel érték közelíthető a súlyfüggvény és a bemenő jel érték alapján





Válaszfüggvény meghatározása időtartományban

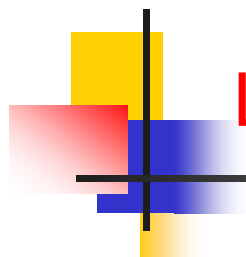
- természetesen a rendszer $y(t)$ kimenete valamennyi t időpillanat előtti bemenő jel értéktől függ:

$$y(t) \approx \sum_{i=1}^n h(t - \tau_i) u(\tau_i) \Delta \tau$$

- ha $\Delta \tau \rightarrow 0$, akkor a bemenetek impulzusok lesznek, így

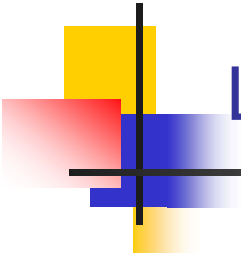
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

konvolúciós integrál



Laplace-transzformáció

- „Intuitív” bevezetés
- bevezetés célja: differenciálegyenletek megoldásának egyszerűsítése
 - analógia: a logaritmizálás bevezetése egyszerűsíti a szorzási, osztási, hatványozási feladatok elvégzését
- alkalmazásának menete
 - függvények, modellek Laplace transzformációja
 - műveletek elvégzése
 - az eredmény visszatranszformálása

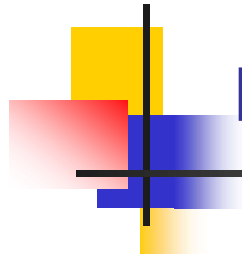


Laplace-transzformáció

- legyen $f(t)$ egy függvény
 - legyen $f(t) = 0$, ha $t < 0$; „bekapcsolási” függvény
 - legyen $f(t)$ értelmezve, ha $t \geq 0$
- legyen $s = \sigma + j\omega$ komplex változó, az ún. Laplace-operátor
- Az $f(t)$ függvény Laplace transzformáltja:

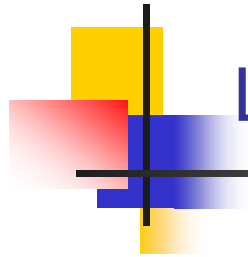
$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

- konvergencia feltétel: $\int_0^{\infty} |f(t) \cdot e^{-st}| dt = \int_0^{\infty} |f(t) \cdot e^{-\sigma t}| dt < \infty$
 $\sigma_1 < \operatorname{Re}(s) = \sigma < \sigma_2$



Laplace-transzformáció

- összefoglalva: a rendszerről (modellről) való ismereteinket a $t = 0$ időpontig elhanyagoljuk:
 - ez lesz a viszonyítási pont
 - ekkor adunk a bementre jelet, így a rendszer válasza sem lehet korábbi – okozati rendszerek
 - „egy oldalas” Laplace transzformáció
 - szigorúan véve: $t = 0^-$ és $t = \infty$ az integrálási határ, azaz $t \rightarrow 0$ -hoz balról
 - lényeges, ha $f(t)$ -nek $t = 0$ -ban szakadása van vagy impulzus jelet kap

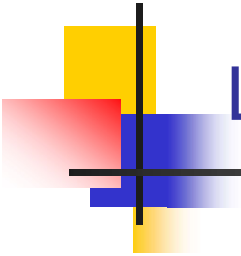


Laplace-transzformáció

- gyakorlati kivitelezés: táblázatok segítségével
- inverz Laplace-transzformáció:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$$

- parciális törtekre bontás után táblázatok segítségével



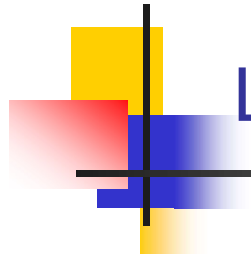
Laplace-transzformáció tételei

- szorzás konstanssal $L[k \cdot f(t)] = k \cdot F(s)$
- összegzés, kivonás $L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$

- deriválás $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s) - \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = sF(s) - f(0)$

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$\text{ahol} \quad f^{(i)}(0) = \left. \frac{d^i f(t)}{dt^i} \right|_{t=0}$$



Laplace-transzformáció tételei

- integrálás

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

- kezdeti érték

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

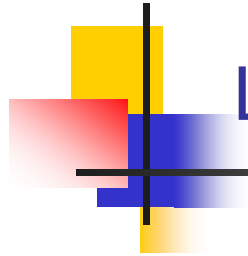
- végérték

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

ha $sF(s)$ -nek nincs nulla vagy pozitív valós részű pólusa

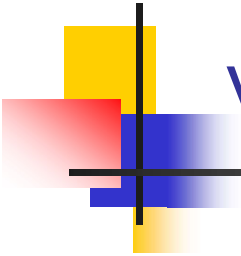
- időbeli eltolás

$$L[f(t-T)1(t-T)] = e^{-Ts} F(s)$$



Laplace-transzformáció

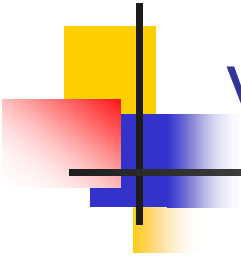
- nevezetes függvények Laplace-transzformáltjait és a Laplace transzformáció tulajdonságait összefoglaló táblázat



Vizsgáló jelek Laplace transzformáltjai

- $1(t)$ Laplace-transzformáltja:

$$L\{1(t)\} = \int_0^{\infty} 1(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-s} = \frac{1}{s}$$



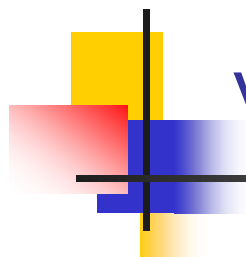
Vizsgáló jelek Laplace transzformáltjai

- $p_\varepsilon(t)$ Laplace-transzformáltja:

$$L\{p_\varepsilon(t)\} = \frac{1}{\varepsilon} L\{1(t) - 1(t - \varepsilon)\} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{s} - \frac{1}{\varepsilon} e^{-s\varepsilon} \frac{1}{s} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{s}$$

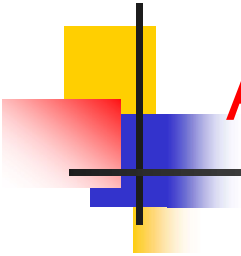
- $\delta(t)$ Laplace-transzformáltja

$$\begin{aligned} L\{\delta(t)\} &= L\left\{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon(t)\right\} = \int_0^\infty \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon(t) e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty p_\varepsilon(t) e^{-st} dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{s} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{se^{-s\varepsilon}}{s} = 1 \end{aligned}$$



Vizsgáló jelek Laplace transzformáltjai

- Egységugrás függvény, $1(t)$ $L\{1(t)\} = \frac{1}{s}$
- Egység-sebességugrás függvény, $v(t)$ $L\{v(t)\} = \frac{1}{s^2}$
- Egység-sebességugrás függvény, $a(t)$ $L\{a(t)\} = \frac{1}{s^3}$
- Szinuszos bemenet, $\sin \omega t$ $L\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

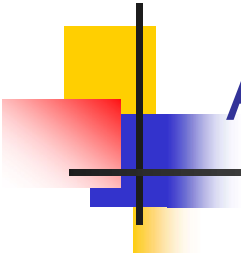


Átviteli függvény

- Az átviteli függvény:

$$G(s) = \frac{L(y(t))}{L(u(t))} \Big|_{z.k.f.} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

- célja: a rendszer modelljének megadása operátor tartományban, a kimenet és a bemenet közti kapcsolat racionális törtfüggvény formájában történő megadásával



Átviteli függvény

- levezetése – I/O modell alapján

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u$$

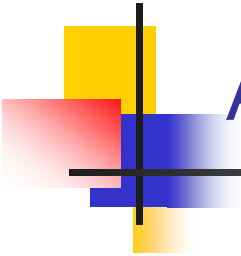
$$L(a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y) = L(b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u)$$

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \dots + b_0 U(s)$$

(zérus kezdeti feltételek!)

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_0) U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$



Átviteli függvény

- levezetése – konvolúciós integrál alapján

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) \cdot u(\tau) d\tau$$

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(t - \tau) \cdot u(\tau) d\tau \cdot e^{-st} dt$$

$$Y(s) = \int_0^{\infty} h(t - \tau) e^{-s(t - \tau)} dt \cdot \int_0^{\infty} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$Y(s) = \int_0^{\infty} h(\vartheta) e^{-s\vartheta} d\vartheta \cdot \int_0^{\infty} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad \vartheta = t - \tau$$

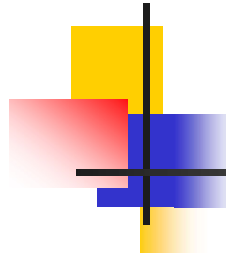
$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

- szokásos jelölései:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{z(s)}{p(s)}$$

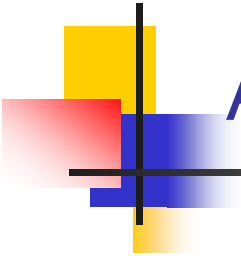
$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{K(s - z_m) \cdot \dots \cdot (s - z_2)(s - z_1)}{(s - p_n) \cdot \dots \cdot (s - p_2)(s - p_1)}$$

- számláló gyökei: zérushelyek, zérusok
($z_1, z_2, \dots, z_m$)
- nevező gyökei: pólusok ($p_1, p_2, \dots, p_n$)



Átviteli függvény

- tulajdonságai
 - csak lineáris, időinvariáns rendszerekre
 - operátortartománybeli kapcsolat
 - a rendszer jellemzője, független a rendszer bementének nagyságától, formájától: a rendszer tulajdonságainak hordozója
 - kimenetek-bemenetek közötti kapcsolat, a rendszer belső szerkezetéről nem ad információt
→ különböző rendszereknek lehet azonos az átviteli függvénye



Átviteli függvény

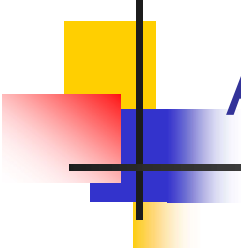
- ismert átviteli függvény esetén
 - különböző bemenetekkel vizsgálható a rendszer:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

- az átviteli függvény nevezője alakilag megegyezik a karakterisztikus polinommal:

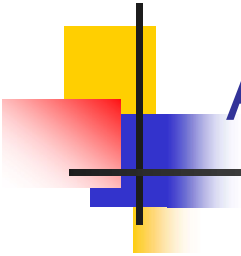
$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{\underbrace{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}} \quad \sum_{i=1}^n \underbrace{(a_n p_i^n + \dots + a_1 p_i + a_0)} \cdot C_i e^{p_i t} = 0$$

rendszer tulajdonságok meghatározása



Átviteli függvény

- ha az átviteli függvény alakja ismert, de az együtthatók értéke nem, akkor a vizsgáló jelek segítségével azok meghatározhatók – paraméter identifikáció
- ha az átviteli függvény nem ismert, akkor a vizsgáló jelekre adott kimenetek vizsgálatával meghatározható – struktúra identifikáció

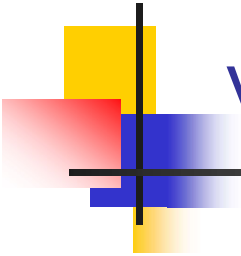


Átviteli függvény

- több bemenetű – több kimenetű rendszerek:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{G}}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1r}(s) \\ \vdots & \ddots & \dots \\ G_{p1}(s) & \dots & G_{pr}(s) \end{bmatrix} \quad \text{ahol} \quad G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}$$



Válaszfüggvények Laplace transzformáltjai

- legyen $G(s)$ egy jelformáló tag átviteli függvénye
- ekkor a kimenet operátor tartományban

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

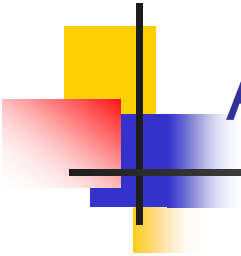
- legyen a bemenet $u(t) = \delta(t)$, ekkor a kimenet a súlyfüggvény lesz:

$$h(t) = L^{-1} \{G(s) \cdot U(s)\} = L^{-1} \{G(s)\}$$

mivel $L\{\delta(t)\} = 1$

- legyen a bemenet $u(t) = 1(t)$, ekkor a kimenet az átmeneti függvény lesz:

$$w_s(t) = L^{-1} \{G(s) \cdot U(s)\} = L^{-1} \left\{ G(s) \frac{1}{s} \right\} = \int_0^t h(\tau) d\tau$$



Átviteli függvény

- Az átviteli függvény felhasználásával definiálható a *bement/kimenet modell* és az *állapottér modell* közötti kapcsolat:

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = \\ = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u^{(1)} + b_0 u \end{aligned}$$



$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \underline{c}^T (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{b} + d$$

