Irányításelmélet és -technika példatár

Gerzson Miklós

2019. március 5.

Tartalomjegyzék

Jelölésjegyzék **7**

1. Laplace- és inverz Laplace-transzformáció alkalmazása **9**
1.1. Elméleti áttekintés . . . 9
1.1.1. Laplace-transzformációra vonatkozó fontosabb összefüggések . . . 9
1.1.2. Vizsgáló jelek, válaszfüggvények . . . 9
1.2. Kidolgozott feladatok . . . 11
1.3. Gyakorló feladatok a Laplace- és az inverz Laplace-transzformáció témaköréből . . . 13
1.3.1. Feladatok . . . 13
1.3.2. Megoldások . . . 15

2. Hatásvázlatok átalakítása **17**
2.1. Áttekintés . . . 17
2.1.1. Alapkapcsolások eredõ átviteli függvénye . . . 17
2.1.2. Helyettesítõ kapcsolások . . . 18
2.2. Kidolgozott feladatok . . . 21
2.3. Gyakorló feladatok hatásvázlatok átalakítása témakörébõl . . . 26
2.3.1. Feladatok . . . 26
2.3.2. Megoldások . . . 28

3. Dinamikus tagok **29**
3.1. Elméleti áttekintés . . . 29
3.1.1. Bemenet-kimenet modell, átviteli függvény . . . 29
3.1.2. Dinamikus tagok . . . 30
3.2. Kidolgozott feladatok . . . 32
3.3. Feladatok az átmeneti függvény és a súlyfüggvény meghatározására . . . 37
3.3.1. Feladatok . . . 37
3.3.2. Megoldások . . . 39

4. Frekvenciatartomány **41**
4.1. Elméleti áttekintés . . . 41
4.1.1. A frekvenciátviteli függvény . . . 41
4.1.2. Frekvenciaátviteli függvények ábrázolása . . . 43
4.2. Gyakorló feladatok frekvenciatartománybeli ábrázolásra . . . 43
4.2.1. Feladatok . . . 43
4.2.2. Megoldások . . . 44

5. Folytonos idejû rendszerek stabilitása **49**
5.1. Elméleti áttekintés . . . 49
5.1.1. Stabilitás definíciók . . . 49
5.1.2. Stabilitásvizsgálati módszerek . . . 50
5.2. Kidolgozott feladatok . . . 53
5.2.1. Stabilitás meghatározása pólusok közvetlen meghatározása alapján . . . 53
5.2.2. Stabilitás meghatározása Hurwitz-kritérium alapján . . . 54
5.2.3. Stabilitásvizsgálat gyökhelygörbe segítségével . . . 55

5.3. Gyakorló feladatok . . . 62
5.3.1. Stabilitás meghatározása pólusok közvetlen meghatározása alapján . . . 62
5.3.2. Stabilitás meghatározása Hurwitz kritérium alkalmazásával . . . 63
5.3.3. Stabilitás meghatározása gyökhelygörbe alapján . . . 65
5.3.4. Megoldások . . . 66

6. A z-transzformáció és a diszkrét bemenet-kimenet modell 73
6.1. Elméleti áttekintés . . . 73
6.1.1. A z-transzformációra vonatkozó fontosabb összefüggések . . . 73
6.1.2. Diszkrét bemenet-kimenet modell . . . 75
6.2. Kidolgozott feladatok . . . 76
6.3. Gyakorló feladatok . . . 81
6.3.1. Feladatok a z- és inverz z-transzformáció témaköréből . . . 81
6.3.2. Megoldások . . . 82

7. Mintavételezett rendszerek 85
7.1. Elméleti áttekintés . . . 85
7.1.1. Az impulzus-átviteli függvény . . . 85
7.1.2. Az eredõ impulzus-átviteli függvény meghatározása . . . 86
7.1.3. Diszkrét idejû rendszerek erõsítésének meghatározása . . . 87
7.1.4. Nulladrendû tartószerv . . . 87
7.2. Kidolgozott feladatok . . . 88
7.3. Gyakorló feladatok és megoldások . . . 94
7.3.1. Feladatok . . . 94
7.3.2. Megoldások . . . 96

8. Mintavételezett rendszerek stabilitása 99
8.1. Elméleti áttekintés . . . 99
8.1.1. Diszkrét BIBO stabilitás . . . 99
8.1.2. Aszimptotikus stabilitás . . . 99
8.1.3. Stabilitásvizsgálat diszkrét idõtartományban . . . 100
8.2. Kidolgozott feladatok . . . 101
8.3. Gyakorló feladatok és megoldások . . . 104
8.3.1. Feladatok . . . 104
8.3.2. Megoldások . . . 105

9. Szabályozási algoritmusok 107
9.1. Elméleti áttekintés . . . 107
9.1.1. Állandósult állapotbeli hiba . . . 107
9.1.2. Folytonos PID-szabályozó . . . 107
9.1.3. Diszkrét PID-szabályozó . . . 108
9.2. Gyakorló feladatok . . . 109

Melléklet 111
T/I. Laplace-transzformáció azonosságai . . . 112
T/II. Nevezetes függvények Laplace-transzformáltja . . . 113
T/III. z-transzformáció azonosságai . . . 114
T/IV. Nevezetes függvények Laplace- és z-transzformáltja . . . 115

Bevezetés

Az elmúlt években szerzett oktatási tapasztalataink alapján úgy látjuk, hogy a hallgatók jelentős részének gondot okoz az irányítástechnika kurzusokon hallgatott elméleti anyag alapján a számolási példák megoldása. Ennek segítésére készült ez a példatár, mely a legfontosabb anyagrészek összefoglalása mellett számos kidolgozott és önállóan megoldandó példát tartalmaz.

A jegyzet elsősorban a Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Karán oktatott alapképzési szakok tantervében szereplő irányítástechnikához kapcsolódó bevezető kurzusok tanmenetét követi, de remélhetőleg más intézmények hallgatói is használni tudják. Ennek megfelelően elsősorban az irányítástechnika megértéséhez és alkalmazásához szükséges alapokhoz kapcsolódó feladatok szerepelnek a példatárban. Az áttekintett témakörök az irányítástechnikai rendszerek leírása és vizsgálatának módszerei, a különböző dinamikus tagok ismertetése, a stabilitás fogalma és vizsgálata folytonos és diszkrét időtartományban.

A jegyzet a TÁMOP-4.1.1.C-12/1/KONV-2012-0002 azonosító számú Járműipari Felsőoktatási Kutatási Együttműködés című projekt keretében készült, a szerző köszöni a jegyzet elkészítéséhez nyújtott támogatást. Bár a kézirat leadásakor a jegyzetírás folyamatának egy lépése lezárul, de a szerző előre is köszöni a továbbfejlesztésre vonatkozó javaslatokat és az esetleges hibákra, elírásokra vonatkozó visszajelzést.

Veszprém, 2015. január 31.

Gerzson Miklós
Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar

Jelölésjegyzék

$\delta(t)$	egységimpulzus függvény, Dirac-delta
$1(t)$	egységugrás függvény
$G(s)$	jelformáló tag átviteli függvénye
$G(z)$	jelformáló tag impulzusátviteli (diszkrét átviteli) függvénye
$G(j\omega)$	jelformáló tag frekvenciaátviteli függvénye
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja
$\mathcal{Z}\{f^*(t)\}$	az $f^*(t)$ függvény z-transzformáltja
t	idõ
T_0	mintavételezési periódus idõ
τ	idõállandó (elsõrendû rendszerek)
T	idõállandó (másodrendû rendszerek)
T_i	i-dik idõállandó (magasabb rendû rendszerek)
T_I	integrálási idõállandó (integráló jellegû tagok, PID algoritmus)
T_D	deriválási idõállandó (deriváló jellegû tagok, PID algoritmus)
$u(t)$	bemenet idõfüggvény
$y(t)$	kimenet idõfüggvény
$h(t)$	súlyfüggvény - egységimpulzus válaszfüggvény
K	erõsítés, erõsítési tényezõ, átviteli tényezõ
ω_n	természetes frekvencia
ξ	csillapítási tényezõ

1. fejezet

Laplace- és inverz Laplace-transzformáció alkalmazása

1.1. Elméleti áttekintés

1.1.1. Laplace-transzformációra vonatkozó fontosabb összefüggések

Legyen $f(t)$ egy, a valós számok halmazán értelmezett valós értékű függvény. Ekkor az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja alatt az alábbi módon meghatározható $F(s)$ függvényt értjük:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \ , \tag{1.1}$$

ahol az $s = \sigma + j\omega$ komplex változó, az úgynevezett Laplace-operátor, az $f(t)$ függvényről feltételezzük, hogy $f(t) = 0 \quad t < 0$, azaz úgynevezett bekapcsolási függvény. Az $F(s)$ Laplace-transzformált olyan s komplex értékekre létezik, amelyeknél az integrál kifejezés konvergens lesz:

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-st}|dt = \int_0^\infty |f(t)e^{-\sigma t}|dt < \infty \ . \tag{1.2}$$

E feltételnek megfelelően, egy $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltjánál meg kell adni a $\sigma_1 < \mathrm{Re}(s) < \sigma_2$ konvergenciatartományt. A definiáló kifejezésben szereplő integrálás tényleges alsó határa 0^-, de ennek csak az impulzus függvény Laplace-transzformációjánál van szerepe, ezért külön nem jelezzük.

Az inverz Laplace-transzformáció a következő képlet alapján értelmezhető:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds \tag{1.3}$$

ahol c az $F(s)$ függvény legnagyobb valós részű pólusánál nagyobb érték.

A Laplace-transzformációhoz kapcsolódó szabályokat és tételeket a Melléklet 9.1 táblázatban foglaltuk össze. A 9.2 táblázat a gyakoribb vizsgálójelek és függvények Laplace-transzformáltjait tartalmazza.

1.1.2. Vizsgáló jelek, válaszfüggvények

Irányítástechnikai rendszerek vizsgálatakor szerkezetük és paramétereik meghatározására vizsgáló jeleket alkalmazhatunk. A leggyakrabban alkalmazott vizsgáló jelek a következők:

Egységimpulzus függvény $\delta(t)$

Definíciója:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{, ha } t = 0 \\ 0 & \text{, ha } t \neq 0 \end{cases}$$

Integrálja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Laplace-transzformáltja:

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)e^{-st}dt = 1$$

Egységugrás függvény $1(t)$

Definíciója:

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } t \geq 0 \\ 0 & \text{, ha } t < 0 \end{cases}$$

Laplace-transzformáltja:

$$\mathcal{L}(1(t)) = \int_{0}^{\infty} 1(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}$$

Egység sebességugrás függvény $v(t)$

Definíciója:

$$v(t) = \begin{cases} t & \text{, ha } t \geq 0 \\ 0 & \text{, ha } t < 0 \end{cases}$$

Laplace-transzformáltja:

$$\mathcal{L}(v(t)) = \int_{0}^{\infty} v(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}$$

Egység gyorsulásugrás függvény $a(t)$

Definíciója:

$$a(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{, ha } t \geq 0 \\ 0 & \text{, ha } t < 0 \end{cases}$$

Laplace-transzformáltja:

$$\mathcal{L}(a(t)) = \int_{0}^{\infty} a(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s^3}$$

Szinuszos bemenő jel függvény $\sin(\omega t)$

Definíciója:

$$\sin \omega t = \begin{cases} \sin t & \text{, ha } t \geq 0 \text{ és } \omega = 1 \\ 0 & \text{, ha } t < 0 \end{cases}$$

Laplace-transzformáltja:

$$\mathcal{L}(v(t)) = \int_{0}^{\infty} \sin \omega t e^{-st}dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Az egyes vizsgálójelekre adott válaszfüggvények a következők:

– Az egységimpulzus függvényre adott válasz a *súlyfüggvény*, jele: $h(t)$.

– Az egységugrásfüggvényre adott válasz az *átmeneti függvény*.

– Analóg módon értelmezhetjük a sebességugrás és gyorsulás bemenetekre adott válaszokat is, de ezeknek nincs külön elnevezésük.

1.2. Kidolgozott feladatok

1. $f_1(t) = 3; \quad F_1(s) = ?$

   Megoldás:
   Értelmezzük az $f_1(t)$ függvényt a következő módon $f_1(t) = 3 \cdot 1(t)$ azaz a konstanssal szorzott egységugrásként. Az $1(t)$ függvény biztosítja, hogy a függvény értéke a $t < 0$ tartományban 0 legyen. Ekkor az $F_1(s)$:

$$F_1(s) = \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty 3e^{-st}dt = \frac{3e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty = 0 - \frac{3}{-s} = \frac{3}{s} \qquad Re(s) > 0$$

2. $f_2(t) = e^{-3t}; \quad F_2(s) = ?$

   Megoldás:
   Az előző példánál megadott indoklás szerint: $f_2(t) = e^{-3t} \cdot 1(t)$ vagy kössük ki, hogy a transzformálást $t \geq 0$ tartományon végezzük el:

$$F_2(s) = \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-3t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+3)t}dt =$$
$$= \frac{e^{-(s+3)t}}{-(s+3)}\Big|_0^\infty = 0 - \frac{1}{-(s+3)} = \frac{1}{s+3} \qquad Re(s) > -3$$

3. $f_3(t) = e^{j3t}; \quad F_3(s) = ?$

   Megoldás:

$$F_3(s) = \int_0^\infty f_3(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{j3t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-3j)t}dt =$$
$$= \frac{e^{-(s-3j)t}}{-(s-3)j}\Big|_0^\infty = 0 - \frac{1}{-(s-3j)} = \frac{1}{s-3j} = \frac{s+3j}{s^2+9} =$$
$$= \frac{s}{s^2+9} + j\frac{3}{s^2+9} \qquad Re(s) > 0$$

4. $f_4(t) = \cos 3t; \quad F_4(s) = ?$
   $f_5(t) = \sin 3t; \quad F_5(s) = ?$

   Megoldás:
   Az előző példa eredménye és komplex számok különböző formában felírt alakjai alapján a megoldás:

$$\alpha + j\beta = \varrho(\cos\varphi + j\sin\varphi) = \varrho e^{j\varphi}$$

$$F_4(s) = \mathcal{L}\{\cos 3t\} = Re(\mathcal{L}\{e^{j3t}\}) = \frac{s}{s^2+9}$$

$$F_5(s) = \mathcal{L}\{\sin 3t\} = Im(\mathcal{L}\{e^{j3t}\}) = \frac{3}{s^2+9}$$

5. $f_6(t) = \dfrac{d}{dt}(e^{-3t}1(t)) \qquad F_6(s) = ?$

Megoldás:
Először a deriválást végezzük el:

$$\frac{d}{dt}(e^{-3t}\cdot 1(t)) = -3e^{-3t}\cdot 1(t) + e^{-3t}\delta(t) = -3e^{-3t} + \delta(t)\ , \quad t \geq 0$$

mivel az $1(t)$ függvény értéke 1, ha $t \geq 0$, és a $\delta(t)$ függvény csak a $t = 0$ nem 0, az e^{-3t} értéke viszont ott 1. A Laplace-transzformációt elvégezve:

$$F_6(s) = -\mathcal{L}\{3e^{-3t}\} + \mathcal{L}\{\delta(t)\} = -3\mathcal{L}\{e^{-3t}\} + \mathcal{L}\{\delta(t)\} = -\frac{3}{s+3} + 1 = \frac{s}{s+3}\ , \qquad Re(s) > -3\ .$$

6. $F_7(s) = \dfrac{4s+5}{5s+4} \qquad f_7(t) = ?$

Megoldás:
Az inverz transzformáció elvégzéséhez hozzuk az alábbi alakra a kifejezést:

$$F_7(s) = \frac{4s+5}{5s+4} = \frac{0,8(5s+4)}{5s+4} + \frac{5-3,2}{5s+4} = 0,8 + \frac{1,8}{5s+4} = 0,8 + \frac{0,36}{s+0,8}\ .$$

A kapott kifejezésben szereplő tagok inverz Laplace-transzformációja a 9.2 táblázat alapján elvégezhető:

$$f_7(t) = \mathcal{L}^{-1}\{0,8\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0,36}{s+0,8}\right\} = 0,8\delta(t) + 0,36e^{-0,8t}\cdot 1(t)$$

7. $F_8(s) = \dfrac{4s+5}{s^2} \qquad f_8(t) = ?$

Megoldás:
Az inverz transzformációt a 6. példához hasonlóan végezhetjük el:

$$F_8(s) = \frac{4s+5}{s^2} = \frac{4}{s} + \frac{5}{s^2}\ ,$$

$$f_8(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2}\right\} = 4\cdot 1(t) + 5\cdot t\cdot 1(t)\ .$$

8. $F_9(s) = \dfrac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)(s+3)} \qquad f_9(t) = ?$

Megoldás:
Az inverz Laplace-transzformáció elvégzéséhez elsõ lépésként bontsuk parciális törtekre a kifejezést:

$$\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$$s^2+2s+2 = A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2)$$

$$A+B+C = 1 \qquad 5A+4B+3C = 2 \qquad 6A+3B+2C = 2$$

A kapott három ismeretlenes egyenletrendszert megoldva az együtthatók:

$$A = 0,5 \qquad B = -2 \qquad C = 2,5$$

Így

$$\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{0,5}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{2,5}{s+3}\ .$$

A kapott kifejezést már tagonként visszatranszformálhatjuk időtartományra a 9.2 táblázat segítségével:

$$f_9(t) = 0,5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 2,5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = 0,5e^{-t} - 2e^{-2t} + 2,5e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

9. $F_{10}(s) = \dfrac{5s^2+3s+1}{(s+2)^2(s+4)} \qquad f_{10}(t) = ?$

Megoldás:
Az inverz Laplace-transzformáció elvégzéséhez először ebben az esetben is végezzük el a kifejezés parciális törtekre bontását:

$$\frac{5s^2+3s+1}{(s+2)^2(s+4)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} \ ,$$

$$5s^2+3s+1 = A(s+2)^2 + B(s+2)(s+4) + C(s+4) \ .$$

Az együtthatók meghatározását ebben az esetben végezzük el úgy, hogy a kapott egyenletnek teljesülnie kell s tetszőleges értékére, így a pólusokra is. Ezt felhasználva:

$$A = \left.\frac{5s^2+3s+1}{(s+2)^2}\right|_{s=-4} = \frac{5\cdot 16 + 3\cdot(-4)+1}{(-4+2)^2} = 19,75 \ ,$$

$$C = \left.\frac{5s^2+3s+1}{s+4}\right|_{s=-2} = \frac{5\cdot 4 + 3\cdot(-2)+1}{-2+4} = 7,5 \ .$$

A B együttható esetében ez a megoldás közvetlenül nem használható, de ha beírjuk az A-ra és C-re kapott értékeket:

$$\frac{5s^2+3s+1}{(s+2)^2(s+4)} = \frac{19,75}{s+4} + \frac{B}{s+2} + \frac{7,5}{(s+2)^2} \ ,$$

akkor a kapott egyenletnek továbbra is tetszőleges s-re igaznak kell lennie, de most legyen $s = 0$:

$$\frac{1}{16} = \frac{19,75}{4} + \frac{B}{2} + \frac{7,5}{4} \qquad \Rightarrow \qquad B = -12$$

Tehát a felbontás eredményeként a következő alakot kapjuk:

$$\frac{5s^2+3s+1}{(s+2)^2(s+4)} = \frac{19,75}{s+4} + \frac{-12}{s+2} + \frac{7,5}{(s+2)^2} \ ,$$

melyet a 9.2 táblázat segítségével invertálhatunk:

$$f_{10}(t) = 19,75\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} - 12\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} + 7,5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = 19,75e^{-4t} - 12e^{-2t} + 7,5te^{-2t} \ , \quad t \geq 0.$$

1.3. Gyakorló feladatok a Laplace- és az inverz Laplace-transzformáció témaköréből

1.3.1. Feladatok

1. Határozza meg a következő időfüggvények Laplace-transzformáltját a 1.2 definiáló összefüggés alapján!
   (a) $f_1(t) = 5$
   (b) $f_2(t) = 5e^{-4t}$

(c) $f_3(t) = 3e^{2t}$

(d) $f_4(t) = e^{4jt}$

(e) $f_5(t) = \cos 2t$

(f) $f_6(t) = \sin 6t$

(g) $f_7(t) = \dfrac{d}{dt}(3e^{-5t}1(t))$

(h) $f_8(t) = \dfrac{d}{dt}(3e^{-5t})$

(i) $f_9(t) = \dfrac{1}{4}(e^{-4t} - e^{-6t})$

2. Végezze el a következő időfüggvények transzformálását a 9.1-9.2 Laplace-transzformációs táblázatok segítségével a $t \geq 0$ tartományon!

(a) $f_1(t) = 4e^{-2t} + 2e^{-4t}$

(b) $f_2(t) = \dfrac{1}{4}(e^{-4t} - e^{-6t})$

(c) A Laplace-transzformáltak valamint a kezdeti és végérték tétel segítségével vizsgálja meg az $f_1(t)$ és az $f_2(t)$ függvényeket!

(d) $f_3(t) = (t-3)1(t-3)$

(e) $f_4(t) = t1(t-3)$

(f) $f_5(t) = e^{-2t}1(t-3)$

(g) $f_6(t) = te^{-2t}$

(h) $f_7(t) = e^{-t}\cos 2t$

(i) $f_8(t) = e^{-t}\sin 2t$

3. Határozza meg a következő kifejezések időtartománybeli megfelelőjét!

(a) $F_1(s) = \dfrac{3}{4s+5}$

(b) $F_2(s) = \dfrac{5}{s^2+4s+4}$

(c) $F_3(s) = \dfrac{4}{s^2+4s+3}$

(d) $F_4(s) = \dfrac{2}{s^2+4s}$

(e) $F_5(s) = \dfrac{10}{s^2+25}$

(f) $F_6(s) = \dfrac{14s}{2s^2+18}$

(g) $F_7(s) = \dfrac{2s+3}{4s+5}$

(h) $F_8(s) = \dfrac{4s+8}{2s^2}$

(i) $F_9(s) = \dfrac{2s+8}{s^2+16}$

(j) $F_{10}(s) = \dfrac{s^2+4s+4}{(s+1)(s+3)(s+5)}$

(k) $F_{11}(s) = \dfrac{2s+4}{(s+1)(s^2+9)}$

(l) $F_{12}(s) = \dfrac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s+3)}$

1.3.2. Megoldások

1. (a) $F_1(s) = \dfrac{5}{s}$, $\quad Re(s) > 0$

   (b) $F_2(s) = \dfrac{5}{s+4}$, $\quad Re(s) > -4$

   (c) $F_3(s) = \dfrac{3}{s-2}$, $\quad Re(s) > 2$

   (d) $F_4(s) = \dfrac{s+4j}{s^2+16}$, $\quad Re(s) > 0$

   (e) $F_5(s) = \dfrac{s}{s^2+4}$, $\quad Re(s) > 0$

   (f) $F_6(s) = \dfrac{6}{s^2+36}$, $\quad Re(s) > 0$

   (g) $F_7(s) = \dfrac{3s}{s+5}$, $\quad Re(s) > -5$

   (h) $F_8(s) = -\dfrac{15}{s+5}$, $\quad Re(s) > -5$

2. (a) $F_1(s) = \dfrac{6s+20}{s^2+6s+8}$,

   (b) $F_2(s) = \dfrac{0,5}{s^2+10s+24}$,

   (c) $f_1(0) = 6$, $\quad f_1(\infty) = 0$, $\quad f_2(0) = 0$, $\quad f_2(\infty) = 0$

   (d) $F_3(s) = e^{-3s}\dfrac{1}{s^2}$,

   (e) $F_4(s) = e^{-3s}\dfrac{3s+1}{s^2}$,

   (f) $F_5(s) = e^{-3s}\left(e^{-6}\dfrac{1}{s+2}\right)$,

   (g) $F_6(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2}$,

   (h) $F_7(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$,

   (i) $F_8(s) = \dfrac{2}{s^2+2s+5}$,

3. (a) $f_1(t) = \dfrac{3}{4}e^{-1,25t}1(t)$,

   (b) $f_2(t) = 5te^{-2t}1(t)$,

   (c) $f_3(t) = 2(e^{-t} - e^{-3t})1(t)$,

   (d) $f_4(t) = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-4t})1(t)$,

   (e) $f_5(t) = 2\sin(5t)1(t)$,

(f) $f_6(t) = 7\cos(3t)1(t)$,

(g) $f_7(t) = 0,5\delta(t) + 0,125e^{-1,25t}1(t)$,

(h) $f_8(t) = 2(1 + 2t)1(t)$,

(i) $f_9(t) = 2(\cos 4t + \sin 4t)1(t)$,

(j) $f_{10}(t) = \left(\frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{9}{8}e^{-5t}\right)1(t)$,

(k) $f_{11}(t) = (0.2e^{-t} - 0,2\cos 3t + 0,73\sin 3t)1(t)$,

(l) $f_{12}(t) = \left(\frac{7}{4}e^{-3t} - \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}\right)1(t)$,

2. fejezet

Hatásvázlatok átalakítása

2.1. Áttekintés

A hatásvázlat az irányítástechnikai rendszer vázlat formájában történõ megjelenítésre szolgáló grafikus leírási mód. Összetett rendszerek esetében a hatásvázlatok egyenértékû átalakításával és az egyes részek eredõ átviteli függvényeinek meghatározásával a teljes rendszer eredõ átviteli függvénye meghatározható.

A következõkben röviden összefoglaljuk az alapkapcsolások eredõ átviteli függvényeit és a fontosabb helyettesítõ kapcsolásokat.

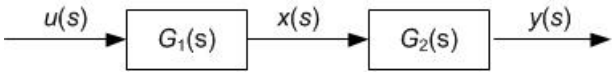
2.1.1. Alapkapcsolások eredõ átviteli függvénye

Egy tag



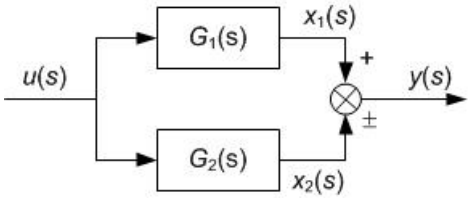
$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$$

Sorosan kapcsolt tagok



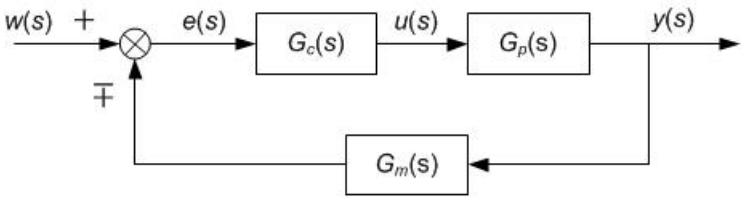
$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

Párhuzamosan kapcsolt tagok



$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = G_1(s) \pm G_2(s)$$

Visszacsatolt kör

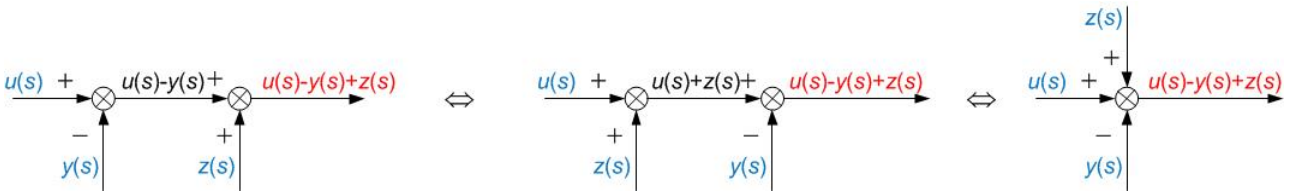


$$G(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 \mp G_c(s)G_p(s)G_m(s)}$$

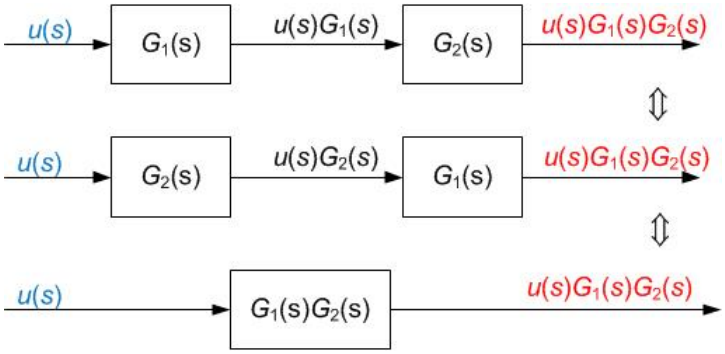
2.1.2. Helyettesítõ kapcsolások

A helyettesítõ kapcsolások alkalmazásakor az átalakítás elõtt és után a módosított tagcsoport bemenetein és kimenetein ugyanazoknak a jeleknek kell megjelenniük.

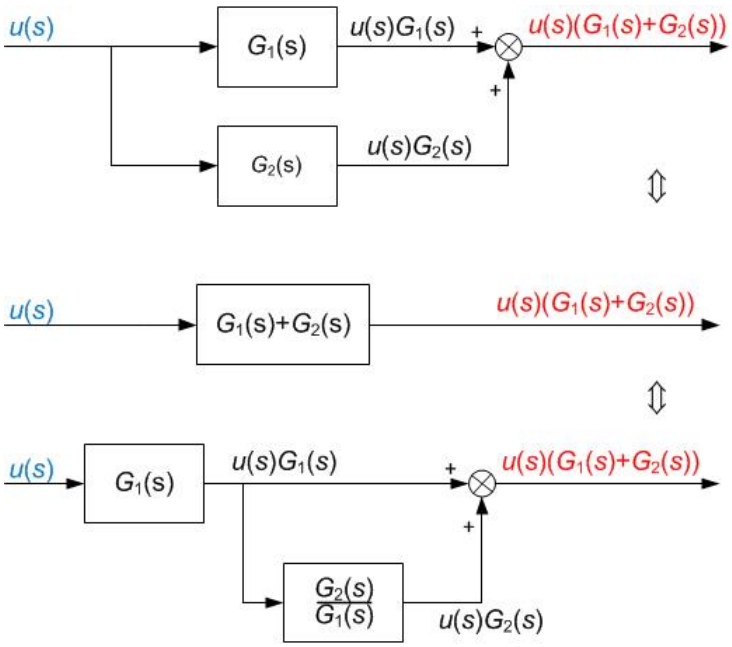
Összegzõk felcserélése, összevonása, szétbontása



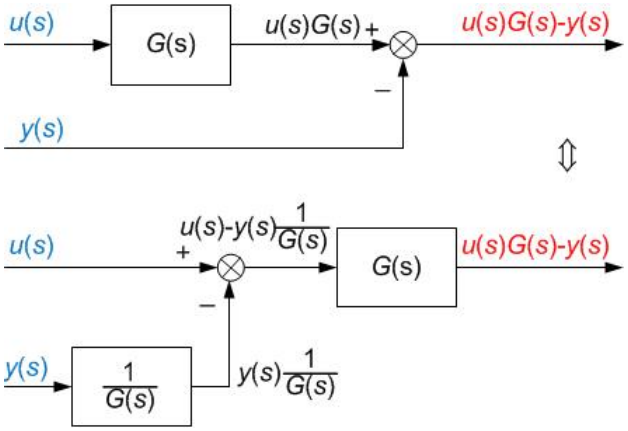
Sorosan kapcsolt tagok felcserélése, összevonása, szétbontása



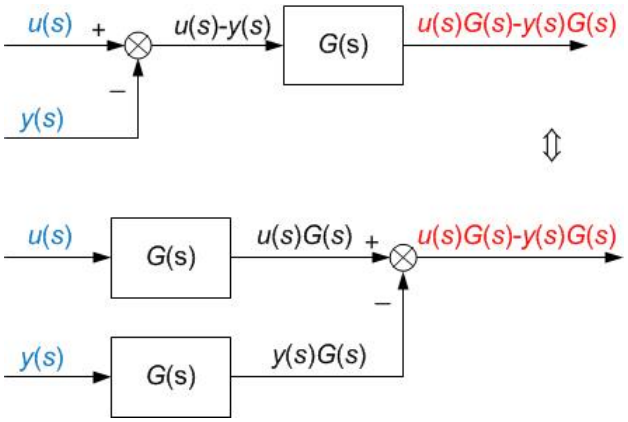
Párhuzamosan kapcsolt tagok átalakítása



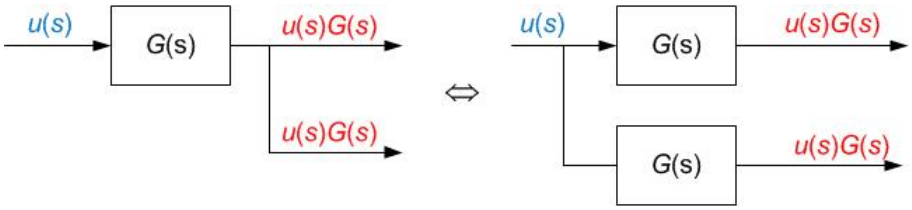
Tag és összegzõ felcserélése



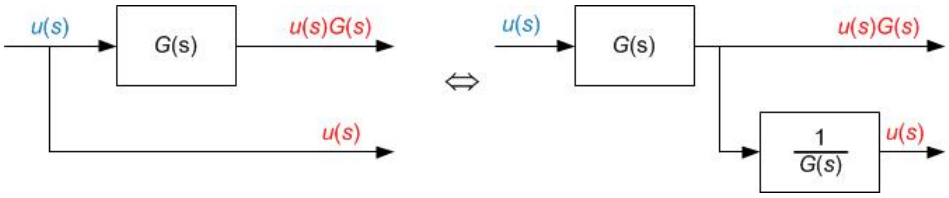
Összegzõ és tag felcserélése



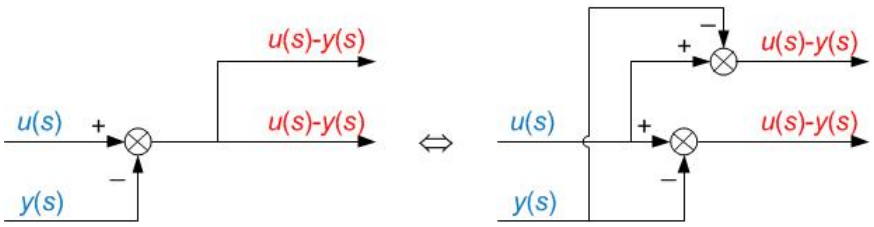
Tag és elágazás felcserélése



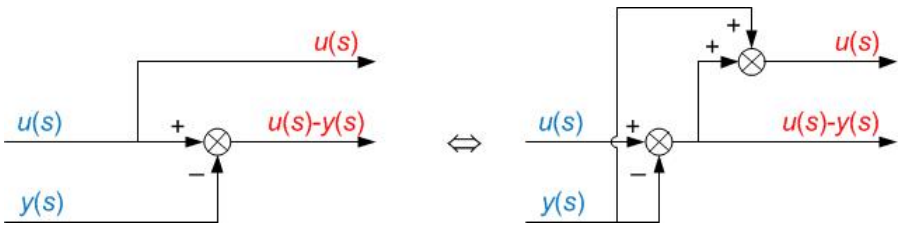
Elágazás és tag felcserélése



Összegzõ és elágazás felcserélése



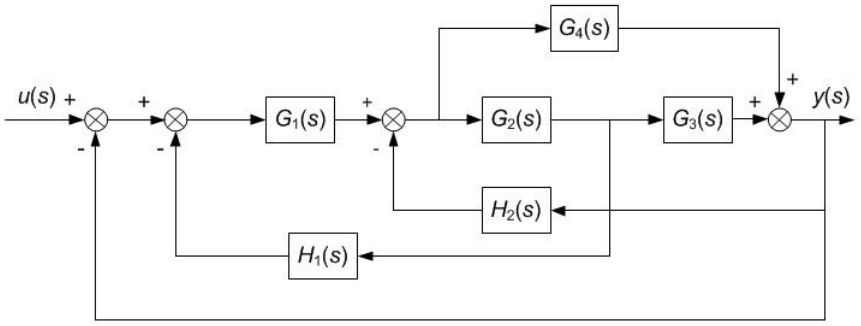
Elágazás és összegzõ felcserélése



Megjegyezzük, hogy az utolsó két átalakítási lépés, azaz az elágazás és összegzõ felcserélésének alkalmazása lehetõség szerint kerülendõ, mivel jelentõsen byonyolítja a hatásvázlatot.

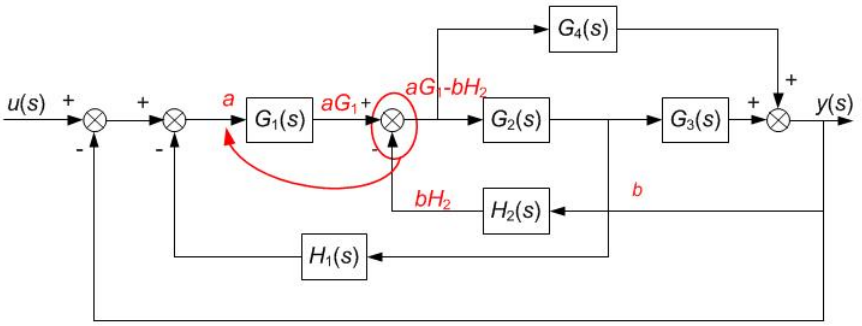
2.2. Kidolgozott feladatok

1. Határozza meg az alábbi rendszer eredõ átviteli függvényét!

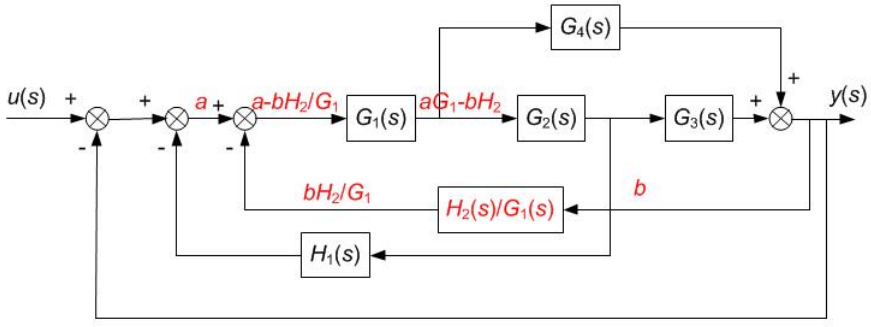


A feladat megoldásához az egymásba átlapolódó két, H_1 és H_2 taggokkal való visszacsatolást és a G_4 taggal történõ elõrecsatolást kell szétválasztani. A harmadik visszacsatolás, melynél nincsen jelformáló tag, nem lapolódik át más kapcsolásokkal, így csak a legvégén kell figyelembe venni. A megoldás menete, azaz milyen sorrendben és mely hatáspontok áthelyezésével csatoljuk szét a köröket, tetszõleges. A végeredményként meghatározandó eredõ átviteli függvénynek a levezetés menetétõl függetlenül ugyanannak kell lennie. Azonban azt a gyakorlati szabályt, mely szerint összegzõt és elágazást nem cserélünk fel, érdemes betartani. Az áttekinthetõbb jelölés érdekében az átalakítást magyarázó, piros színnel jelölt lépéseknél az s argumentum nem került feltüntetésre.

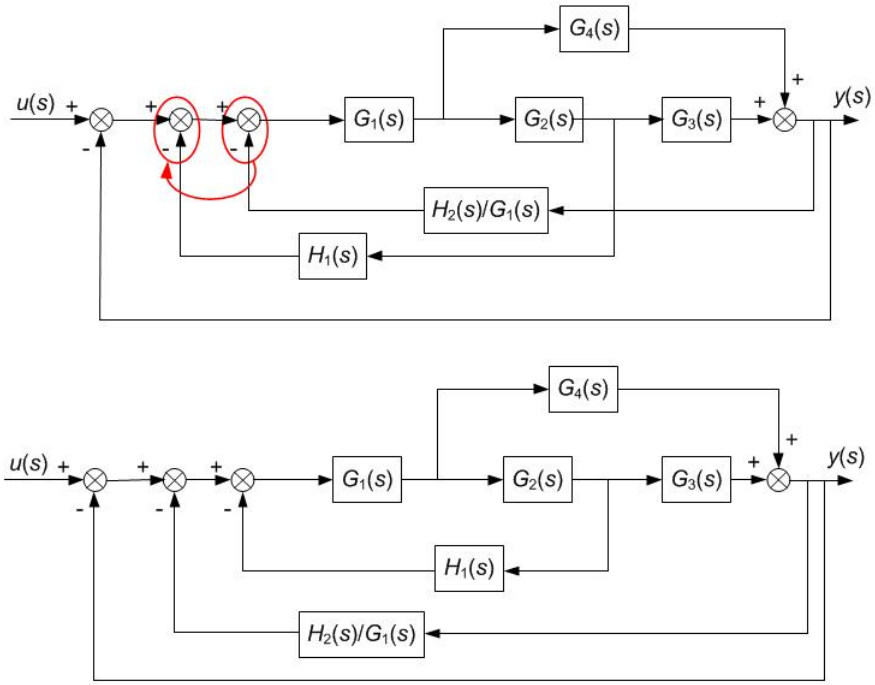
Legyen az elsõ lépés a pirossal bekarikázott összegzõ áthelyezése a G_1 tag elé.



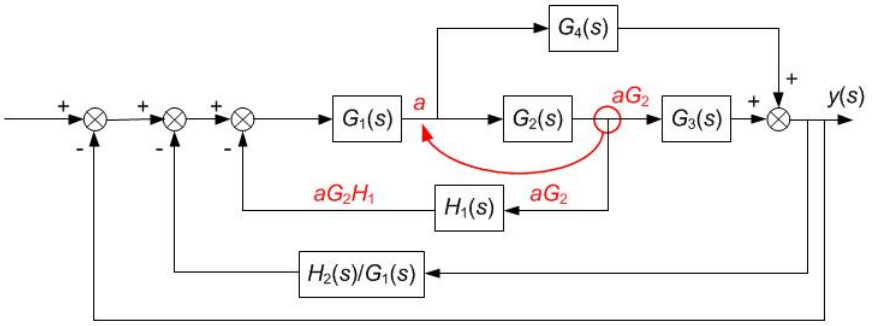
Az átalakítás során megváltoztatandó átviteli függvény meghatározásához jelöljük a változtatással érintett rész bemenõ jeleit a-val és b-vel, majd követve a jeleket, a rész kimenete $aG_1 - bH_2$ lesz. Az átalakítás után ugyanezeket a bemeneteket és kimenetet kell kapnunk ennél a tagcsoportnál. Felhasználva ezt, és visszafelé következtetve a kimeneti jelbõl, könnyen belátható, hogy az átalakítás elõtt a H_2 átviteli függvénnyel jellemzett tagot kell H_2/G_1-re módosítani.



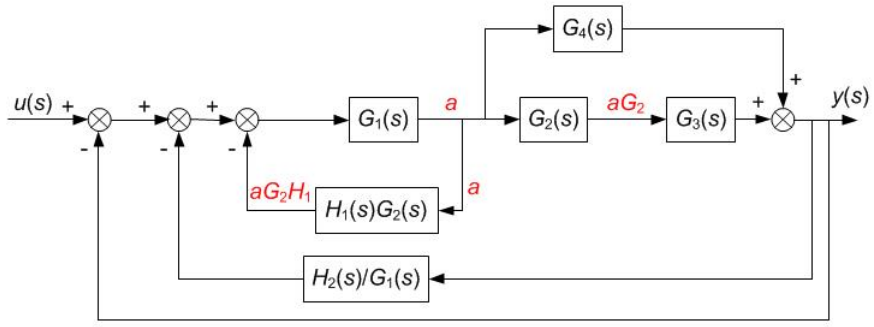
Következõ lépésként cseréljük neg a második és harmadik összegzõt, mely a helyettesítõ kapcsolásoknál levezetetteknek megfelelõen, nem igényel módosítást.



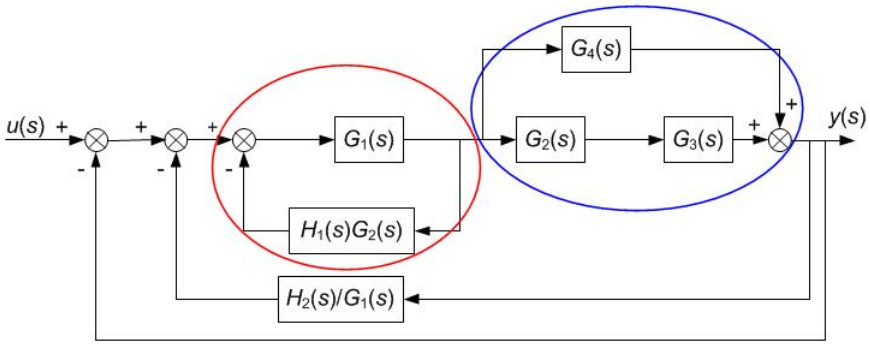
Az átlapolások szétcsatolásának utolsó lépéseként bontsuk szét a H_1 tagot tartalmazó legbelsõ visszacsatolást és a G_4 tagot tartalmazó elõrecsatolást. Ebben az esetben is szabadon megválasztható, hogy melyik hatáspont helyét módosítjuk. Helyezzük át a visszacsatolás hatáspontját az elõrecsatolás hatáspontja elé az alábbi ábrának megfelelõen:



Mint az az ábráról leolvasható, az átalakítandó tagcsoport bemenete az a jel, kimenetei pedig az aG_2 és az aG_2H_1 jelek. A módosítandó átviteli függvényt ebben az esetben is a változatlanul maradó kimenetekbõl vezethetjük le. Belátható, hogy a visszacsatolásban lévõ tag átviteli függvényét kell H_1G_2-re módosítani:



Az így kapott hatásvázlat már nem tartalmaz átlapolásokat, így a visszacsatolásokra és az elõrecsatolásra alkalmazhatjuk az eredõjük meghatározására levezetett képleteket. Írjuk fel a legbelsõ visszacsatolás (piros kör, bal oldalt) és az elõrecsatolás (kék kör, jobb oldalt) eredõjét:



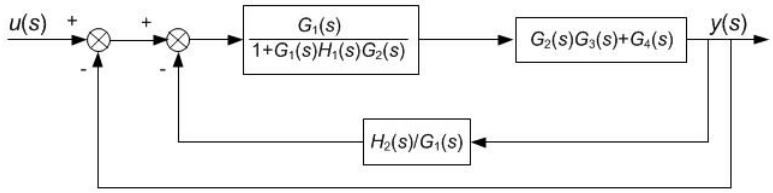
A visszacsatolás eredõje:

$$G_{v1}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)} \quad ,$$

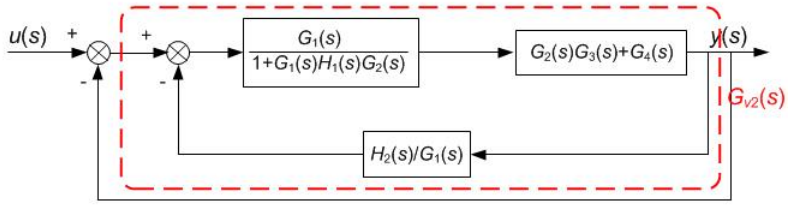
az elõrecsatolás eredõje:

$$G_e(s) = G_2(s)G_3(s) + G_4(s) \quad ,$$

az egyszerûsített hatásvázlat:



Az utolsó két lépés a két visszacsatolás eredõjének meghatározása. Legyen $G_{v2}(s)$ a belsõ visszacsatolás eredõje:



$$G_{v2}(s) = \frac{\frac{G_1(s)(G_2(s)G_3(s)+G_4(s))}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}}{1 + \frac{G_1(s)(G_2(s)G_3(s)+G_4(s))}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}\frac{H_2(s)}{G_1(s)}} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s) + G_4(s)H_2(s)}$$

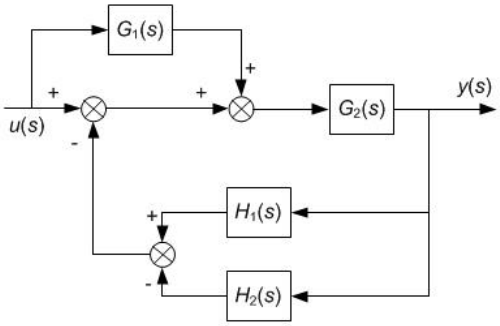
A teljes rendszer eredõ átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_4(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)+G_2(s)G_3(s)H_2(s)+G_4(s)H_2(s)}}{1 + \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_4(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)+G_2(s)G_3(s)H_2(s)+G_4(s)H_2(s)}} =$$

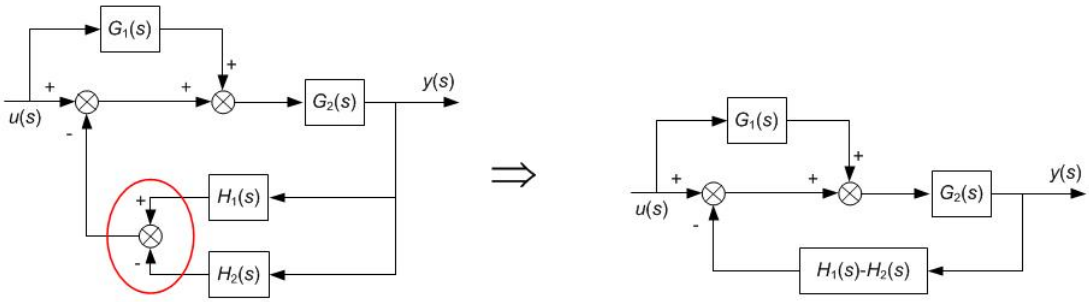
$$= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_1(s)G_4(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s) + G_4(s)H_2(s)}$$

A kiindulási ábra és a kapott eredõ átviteli függvény összehasonlításával leellenõrizhetjük a kapott eredményt. A számlálóban az elõremenõ ágak eredõje szerepel, míg a nevezõben az egyes elõremenõ ágak és visszatérõ ágak eredõ átviteli függvényeinek összegei.

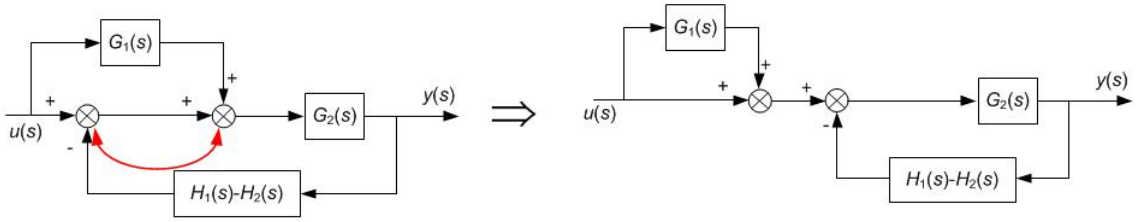
2. Határozzuk meg az alábbi tagcsoport eredõ átviteli függvényét!



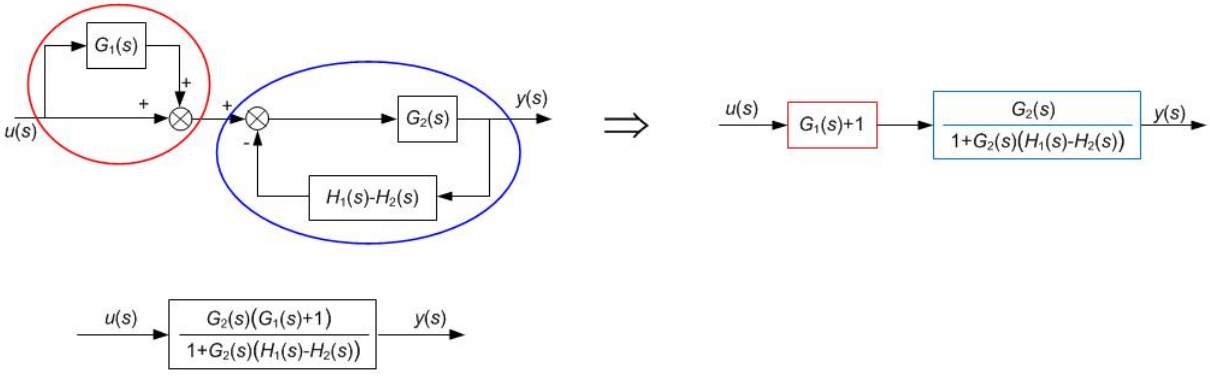
Elsõ lépésként végezzük el a párhuzamosan visszacsatolt ágak összegzését:



Majd cseréljük meg az összegzõket:



Így megszüntettük az elõrecsatolás és a visszacsatolás átlapolását, és felírhatjuk elõbb ezek eredõjét, majd a teljes tagcsoport eredõ átviteli függvényét:

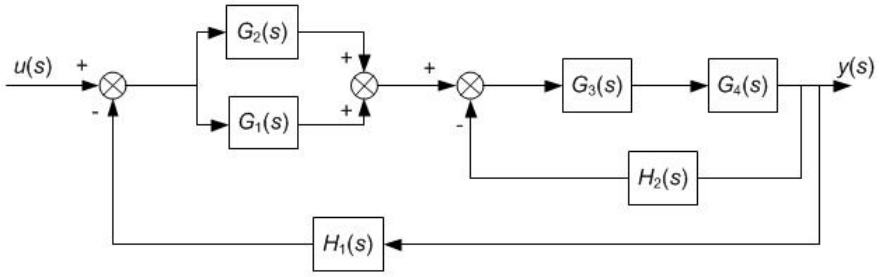


azaz az eredõ átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{G_2(s) + G_2(s)G_1(s)}{1 + G_2(s)H_1(s) - G_2(s)H_2(s)} \ ,$$

amely könnyen értelmezhetõ a kiindulási ábra alapján.

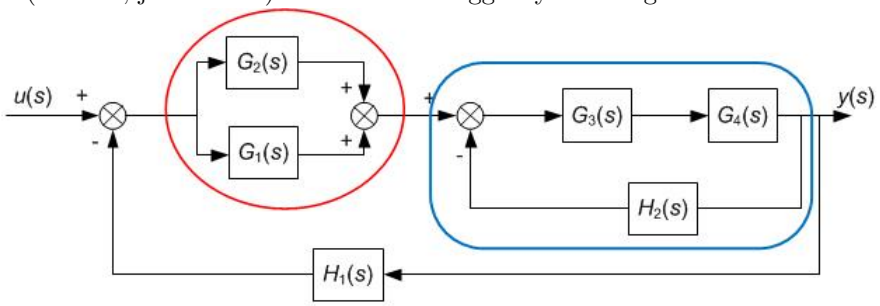
3. Határozzuk meg az alábbi tagcsoport eredõ átviteli függvényét

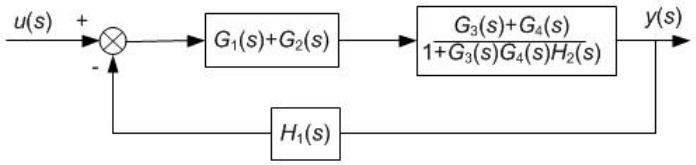


ha

$$G_1(s) = 2, \quad G_2(s) = \frac{1}{4s}, \quad G_3(s) = 3, \quad G_4(s) = \frac{2}{5s+1}, \quad H_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H_2(s) = \frac{1}{2s+1} \ !$$

Végezzük el elõször a párhuzamosan kapcsolt G_1 és G_2 tagok (piros kör, bal oldalt), valamint belsõ kör (kék kör, jobb oldalt) eredõ átviteli függvényének meghatározását:





ahol

$$G_p(s) = G_1(s) + G_2(s) = 2 + \frac{1}{4s} = \frac{8s+1}{4s}$$

$$G_b(s) = \frac{G_3(s)G_4(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)H_2(s)} = \frac{3\frac{2}{5s+1}}{1 + 3\frac{2}{5s+1}\frac{1}{2s+1}} = \frac{12s+6}{10s^2+7s+7}$$

Az eredõ átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{G_p(s)G_b(s)}{1 + G_p(s)G_b(s)H_1(s)} = \frac{(G_1(s)+G_2(s))G_3(s)G_4(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)H_2(s) + (G_1(s)+G_2(s))G_3(s)G_4(s)H_1(s)}$$

Behelyettesítés után az eredõ átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{\frac{12s+6}{10s^2+7s+7}\frac{8s+1}{4s}}{1 + \frac{12s+6}{10s^2+7s+7}\frac{8s+1}{4s}\frac{1}{s+1}} = \frac{\frac{12s+6}{10s^2+7s+7}\frac{8s+1}{4s}\frac{1}{s+1}}{\frac{10s^2+7s+7}{10s^2+7s+7}\frac{4s}{4s}\frac{s+1}{s+1} + \frac{12s+6}{10s^2+7s+7}\frac{8s+1}{4s}\frac{1}{s+1}} =$$

$$= \frac{\frac{(12s+6)(8s+1)}{(10s^2+7s+7)4s(s+1)}}{\frac{(10s^2+7s+7)4s(s+1)}{(10s^2+7s+7)4s(s+1)} + \frac{(12s+6)(8s+1)}{(10s^2+7s+7)4s(s+1)}} = \frac{(12s+6)(8s+1)}{(10s^2+7s+7)4s(s+1) + (12s+6)(8s+1)} =$$

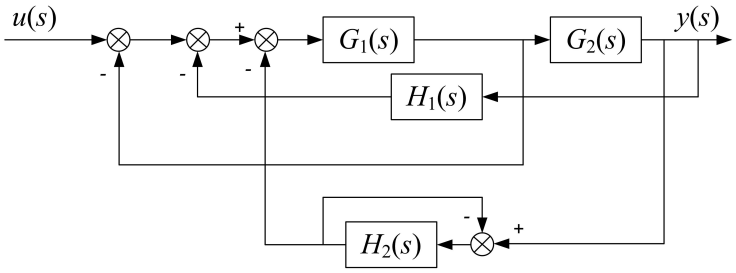
$$= \frac{96s^3 + 156s^2 + 66s + 6}{40s^4 + 68s^3 + 152s^2 + 88s + 6}$$

2.3. Gyakorló feladatok hatásvázlatok átalakítása témaköréből

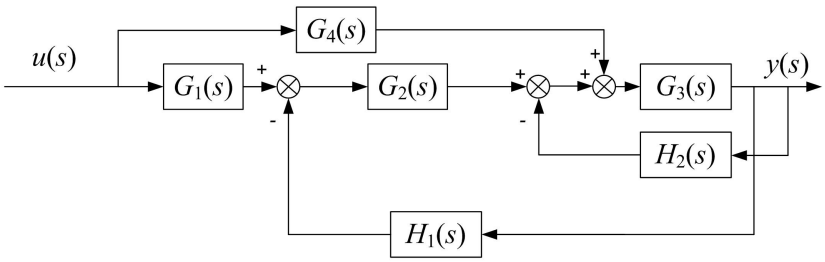
2.3.1. Feladatok

1. Határozza meg az eredõ átviteli függvényt az alábbi esetekben!

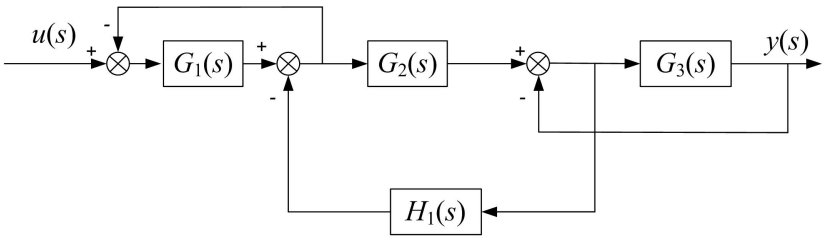
(a)



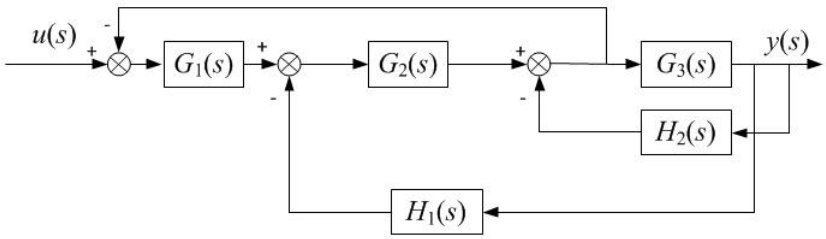
(b)



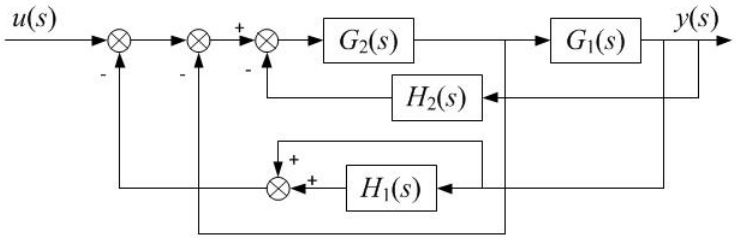
(c)



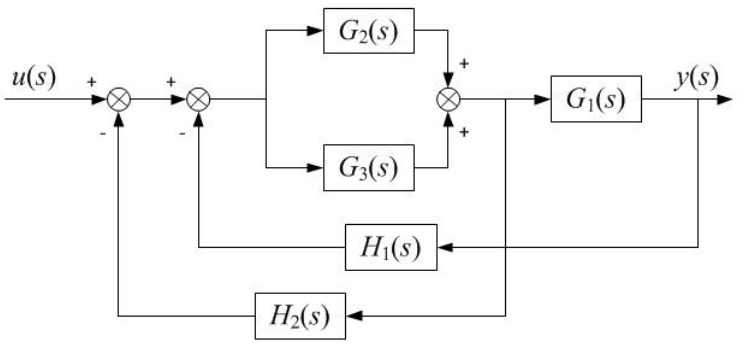
(d)



(e)

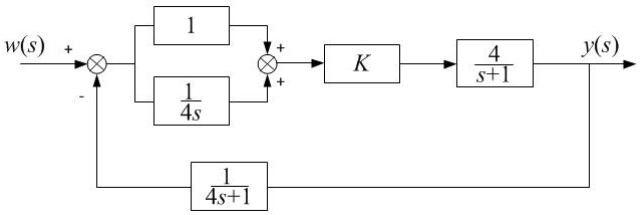


(f)

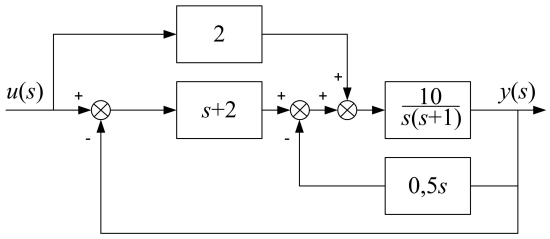


2. Határozza meg az eredõ erõsítést az alábbi esetben!

(a)

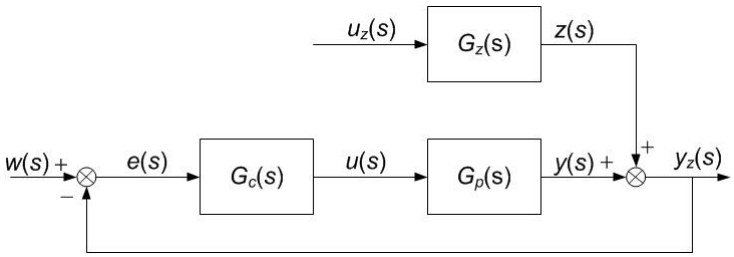


(b)

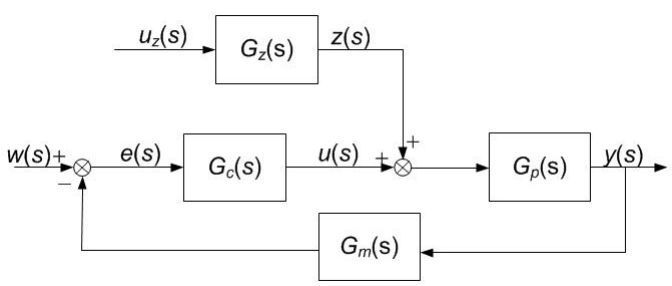


3. Határozza meg, hogy az alábbi visszacsatolt rendszerekben hogyan függ az (a) példánál az $y_z(s)$ kimenet a (b) példánál az $y(s)$ kimenet a $w(s)$ és $u_z(s)$ bemenetektõl!

(a)



(b)



2.3.2. Megoldások

1. (a)

$$G_e(s) = \frac{G_1(s)G_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_2(s)}{1 + G_1(s) + G_1(s)G_2(s)H_1(s) + H_2(s) + G_1(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_2(s)}$$

(b) $G_e(s) = \dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_3(s)G_4(s)}{1 + G_3(s)H_2(s) + G_2(s)G_3(s)H_1(s)}$

(c) $G_e(s) = \dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s) + G_3(s) + G_1(s)G_3(s) + G_2(s)H_1(s)}$

(d) $G_e(s) = \dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_3(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s) + G_2(s)G_3(s)H_1(s)}$

(e) $G_e(s) = \dfrac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_2(s) + G_2(s) + G_1(s)G_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$

(f) $G_e(s) = \dfrac{G_1(s)G_2(s) + G_1(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_2(s) + G_1(s)G_3(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_1(s)G_3(s)H_1(s)}$

2. (a) $G_e(s) = \dfrac{4Ks + K}{s^2 + s + K}$

(b) $G_e(s) = \dfrac{10s + 40}{s^2 + 16s + 20}$

3. (a) $y_z(s) = \dfrac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}w(s) + \dfrac{G_z(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}u_z(s)$

(b) $y(s) = \dfrac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)G_m(s)}w(s) + \dfrac{G_z(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)G_m(s)}u_z(s)$

3. fejezet

Dinamikus tagok

3.1. Elméleti áttekintés

3.1.1. Bemenet-kimenet modell, átviteli függvény

Az irányítástechnikai rendszerekben elõforduló elemeket - lineáris viselkedést feltételezve - lineáris differenciálegyenlet formájú modellekkel írhatjuk le. Amennyiben nincs lehetõség a vizsgált tag belsõ összefüggéseinek megadására, akkor a bemenetek és a kimenetek közötti összefüggések segítségével írjuk le a tag viselkedését.

Az egy-bemenetű, egy-kimenetû, lineáris mûködésû, holtidõ mentes tag modellje a következõ alakban adható meg:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_0 u(t)$$

ahol

$y(t)$ - a kimenõ jel,

$u(t)$ - a bemenõ jel,

$x^{(i)}(t) = \dfrac{d^i x(t)}{dt^i}, \quad x = y$ vagy $u, \quad i = 1, \ldots, n,$

a_i, b_j - konstans együtthatók.

Erre az egyenletre a továbbiakban *bemenet-kimenet modell*ként - rövidítve I/O modell - fogunk hivatkozni.

Az *átviteli függvény* a dinamikus tag operátor tartománybeli modellje. Meghatározásához elsõ lépésként Laplace-transzformáljuk a bemenet-kimenet modell általános alakját zérus kezdeti feltételek mellett, majd fejezzük ki ebbõl a kimenetek és a bemenetek közötti kapcsolatot.

$$G(s) = \left.\frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(u(t))}\right|_{z.k.f.} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Az átviteli függvény szokásos jelölései:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{z(s)}{p(s)}$$

A felsorolás második alakja a bemenet-kimenet modell együtthatóival felírt racionális törtfüggvényre, míg a harmadik a számláló illetve nevezõbeli polinomok gyöktényezõs alakban történõ megadására utal. Irányítástechnikában a nevezõ polinomjának gyökeit *pólus*oknak, a számláló polinomjának gyökeit *zérushely*eknek nevezzük.

Belátható, hogy egy dinamikus tag átviteli függvénye ($G(s)$) és súlyfüggvénye ($h(t)$) között az alábbi összefüggés van

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) \Leftrightarrow G(s) = \mathcal{L}(h(t))$$

Belátható, hogy a bemenõ jelek közötti összefüggés következtében lineáris rendszereknél az alábbi összefüggések adhatók meg az átmeneti függvény, a súlyfüggvény és az átviteli függvény között:

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \int_0^t h(\tau)d\tau$$

A megadott összefüggések ismeretében is fontos még egyszer kiemelni, hogy az átviteli függvény a tag operátor tartománybeli modellje, a súlyfüggvény és az átmeneti függvény a jelformáló tagnak, egy-egy speciális bemenetre (egységimpulzusra, illetve egységugrásra) adott idõtartománybeli válaszfüggvényei. Azonban az átviteli függvény és a súlyfüggvény között, a Laplace- és az inverz Laplace-transzformáció segítségével értelmezett szoros kapcsolat miatt, szokás a súlyfüggvényt, mint idõtartománybeli modellt is használni.

3.1.2. Dinamikus tagok

A bemenet-kimenet modell általános alakjából kiindulva, a figyelembe vett deriváltak alapján különbözõ viselkedésû dinamikus tagokat határozhatunk meg, melyeket a következõkben foglalunk össze.

Legyen a bemenet-kimenet modell az alábbi egyszerûsített alakú:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

Tegyük fel, hogy itt és a következõkben tárgyalt valamennyi differenciál egyenlet modellel leírható tag esetében a kezdeti feltételek zérussal egyenlõek. Ekkor az átviteli függvény a következõ lesz:

$$G(s) = \frac{b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

A tagok csoportosítását a viselkedésük jellege és a nevezõ deriválási fokszámának, n-nek az értéke alapján végezzük el.

Arányos viselkedésû tagok

Nulladrendû tag

I/O modell: $a_0 y(t) = b_0 u(t)$

Legyen $a_0, b_0 \neq 0$ ekkor $y(t) = Ku(t)$, ahol $K = \dfrac{b_0}{a_0}$

Átviteli függvény: $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = K$

A tagnak egy paramétere van: az *erõsítés*, K, mely a válaszfüggvénynek valamely jellemzõjét (pl. területét, amplitúdóját, meredekségét) határozza meg.

Elsõrendû tag

I/O modell: $a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$.

Legyen $a_1, a_0, b_0 \neq 0$ ekkor $\tau y^{(1)}(t) + y(t) = Ku(t)$, ahol $K = \dfrac{b_0}{a_0}$, $\tau = \dfrac{a_1}{a_0}$

Átviteli függvény: $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{K}{\tau s + 1}$

A tagnak két paramétere van: a nulladrendû tagnál bevezetett K erõsítés, és a tag dinamikai viselkedését meghatározó τ *idõállandó*.

Másodrendû tag

I/O modell: $a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$.

Legyen $a_2, a_1, a_0, b_0 \neq 0$ ekkor

$T^2 y^{(1)}(t) + 2\xi T y^{(1)}(t) + y(t) = Ku(t)$, ahol $K = \dfrac{b_0}{a_0}$, $T = \sqrt{\dfrac{a_2}{a_0}}$, $2\xi T = \dfrac{a_1}{a_0}$.

Átviteli függvény: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
A tagnak három paramétere van: az erõsítés (K), az idõállandó (T) és a tag tranziensének jellegét (simuló vagy lengõ) meghatározó *csillapítási tényezõ*, melynek jele ξ. Az idõállandó helyett gyakran annak reciprokát használjuk, melyet *természetes frekvenciá*nak nevezünk és ω_n-nel jelölünk.

Integráló jellegû tagok

Tiszta integráló tag

I/O modell: $a_1 y^{(1)}(t) = b_0 u(t)$.
Legyen $a_1, b_0 \neq 0$ ekkor $y^{(1)}(t) = \frac{1}{T_I} u(t)$, ahol $T_I = \frac{a_1}{b_0}$
Átviteli függvény: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{T_I s} = \frac{K_I}{s}$
A tagnak egy paramétere van: az *integrálási idõállandó*, T_I, melynek reciprokát véve értelmezhetjük az *integrálási erõsítést*: $K_I = \frac{1}{T_I}$.

Egytárolós integráló tag

I/O modell: $a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) = b_0 u(t)$.
Legyen $a_2, a_1, b_0 \neq 0$ ekkor $T_2^2 y^{(2)}(t) + T_1 y^{(1)}(t) = u(t)$, ahol $T_1 = \frac{a_1}{b_0}, T_2 = \sqrt{\frac{a_2}{b_0}}$.
Átviteli függvény: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{T_2^2 s^2 + T_1 s} = \frac{1}{T_I s} \frac{1}{(Ts + 1)}$
ahol $T_I = T_1$, $T = \frac{T_2^2}{T_1}$.
Az egytárolós integráló tagot tehát egy tiszta integráló és egy elsõrendû tag sorbakapcsolásával állíthatjuk elõ, és ennek megfelelõen értelmezzük a paramétereit.

Az egytárolós integráló tag általánosításával értelmezhetjük a magasabb rendû integráló jellegû tagokat.

Deriváló jellegû tagok

Tiszta deriváló tag

I/O modell: $a_0 y(t) = b_1 u^{(1)}(t)$.
Legyen $a_0, b_1 \neq 0$ ekkor $y(t) = T_D u^{(1)}(t)$, ahol $T_D = \frac{b_1}{a_0}$
Átviteli függvény: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = T_D s$
A tagnak egy paramétere van: a T_D *deriválási idõállandó.*

A tag nem felel meg az oksági szabálynak, így csak elméleti jellegû vizsgálatokhoz használható.

Egytárolós deriváló tag

I/O modell: $a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_1 u^{(1)}(t)$.
Legyen $a_1, a_0, b_1 \neq 0$ ekkor $T y^{(1)}(t) + y(t) = T_D u^{(1)}(t)$, ahol $T_D = \frac{b_1}{a_0}$, $T = \frac{a_1}{a_0}$
Átviteli függvény: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{T_D s}{Ts + 1}$
Az egytároló deriváló tagot tehát egy tiszta deriváló és egy elsõrendû tag sorbakapcsolásával állíthatjuk elõ, és ennek megfelelõen értelmezzük a paramétereit. Belátható, hogy a $\frac{T_D}{T}$ arány növelésével a tag közelíti a tiszta deriváló tag viselkedését.

3.2. Kidolgozott feladatok

1. Határozza meg az alábbi bemenet - kimenet modellel jellemzett tag paramétereit és adja meg az átmeneti függvényét!

   $$6y^{(1)}(t) + 2y(t) = 4u(t)$$

   A megoldás menete:

   Az átviteli függvény:

   $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{6s+2} = \frac{2}{3s+1} \left(= \frac{K}{\tau s + 1} \right)$$

   A tag paraméterei erõsítés $K = 2$, idõállandó $\tau = 3s$.
   Átmeneti függyvény esetén a bemenõ jel $u(t) = 1(t)$. A kimenet meghatározása:

   $$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{3s+1}\frac{1}{s} = \frac{2}{s(3s+1)}$$

   $$Y(s) = \frac{2}{s(3s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{3s+1}$$

   $$2 = A(3s+1) + Bs \quad \Rightarrow \quad A = 2,\ B = -6$$

   $$Y(s) = 2\frac{1}{s} - 6\frac{1}{3s+1} = 2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/3}\right)$$

   $$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2\left(1(t) - e^{-\frac{t}{3}}\right) \ , \quad t \geq 0$$

   Az átmeneti függvény viselkedésének vizsgálata:

   $$t = 0 \quad y(0) = 1 - 1 = 0$$

   $$t \to \infty \quad y(\infty) = 2(1-0) = 2 \quad (= K)$$

   $$\frac{dy(t)}{dt} = 2 \cdot \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 2 \cdot \frac{1}{3} \quad \left(= K\frac{1}{\tau} \right)$$

2. Legyen az elsõrendû tag átviteli függvénye: $G(s) = \dfrac{4}{s+2}$.
   Határozza meg a tag paramétereit!
   Csatolja vissza negatívan a tagot, és adja meg a visszacsatolt rendszer paramétereit és határozza meg a súlyfüggvényét!

   A megoldás menete:
   A tag paraméterei:

   $$G(s) = \frac{4}{s+2} = \frac{2}{0,5s+1} \left(= \frac{K}{\tau s + 1} \right)$$

   tehát az erõsítés, $K = 2$ és az idõállandó $\tau = 0,5$.
   A visszacsatolt tag eredõ átviteli függvénye:

   $$G_e(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{2}{0,5s+1}}{1 + \frac{2}{0,5s+1}} = \frac{2}{0,5s+3}$$

azaz az eredõ erõsítés, vagyis a hurok átviteli tényezõ: $K_e = \frac{2}{3} = 0,67$, a visszacsatolt rendszer idõállandója $\tau_e = \frac{0,5}{3} = 0,167s$.
A visszacsatolt rendszer válasza Dirac-impulzus bemenetre, vagyis a súlyfüggvény meghatározása:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{0,5s+3} \cdot 1$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{0,5s+3}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+6}\right\} = 4e^{-6t}$$

3. Legyen adott két elsõrendû tag az alábbi átviteli függvénnyel:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1} \qquad G_2(s) = \frac{2}{4s+1}$$

Csatolja párhuzamosan a két tagot és adja meg a kapott tagcsoport bemenet - kimenet modelljét, paramétereit és átmeneti függvényét!

A megoldás menete:
A párhuzamosan csatolt rendszer eredõ átviteli függvénye:

$$G_e(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{4s+1} = \frac{6s+3}{4s^2+5s+1}$$

A tagcsoport eredõ bemenet - kimenet modellje:

$$G_e(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6s+3}{4s^2+5s+1}$$

$$4s^2Y(s) + 5sY(s) + Y(s) = 6sU(s) + 3U(s)$$
$$4y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(s) + y(t) = 6u^{(1)}(t) + 3u(t)$$

A párhuzamosan csatolt elsõrendû rendszerek eredõjeként tehát olyan másodrendû rendszer alakult ki, melynek a számlálójában elsõfokú polinom szerepel. Az eredõ tagcsoport paraméterei:

$$G_e(s) = \frac{3(2s+1)}{4s^2+5s+1} \qquad K_e = 3, \quad T_e = 2, \quad \xi = 1,25\ , \quad T_{sz} = 2$$

A átmeneti függvény:

$$Y(s) = G_e(s)U(s) = \frac{6s+3}{4s^2+5s+1} \cdot \frac{1}{s}$$

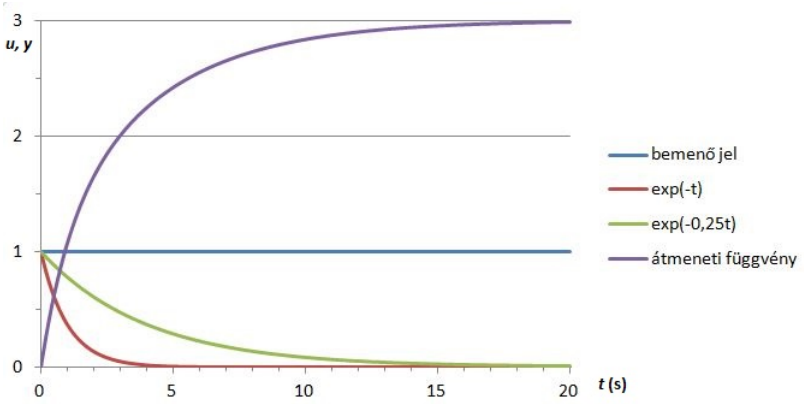
Parciális törtekre bontás az inverz-Laplace transzformációhoz:

$$\frac{6s+3}{s(s+1)(4s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{4s+1}$$

$$6s+3 = A(s+1)(4s+1) + Bs(4s+1) + Cs(s+1)$$
$$A = \left.\frac{6s+3}{(s+1)(4s+1)}\right|_{s=0} = 3 \qquad B = \left.\frac{6s+3}{s(4s+1)}\right|_{s=-1} = -1 \qquad C = \left.\frac{6s+3}{s(s+1)}\right|_{s=-0,25} = -8$$
$$Y(s) = \frac{3}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{-8}{4s+1} = 3\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{s+0,25}\right)$$

Az átmeneti függvény:

$$y(t) = 3\left(1(t) - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-0,25t}\right) = 3 - e^{-t} - 2e^{-0,25t} \qquad t \geq 0$$



4. Legyen adott két elsõrendû tag az alábbi átviteli függvénnyel:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad G_2(s) = \frac{2}{4s+1}$$

Csatolja sorosan a két tagot és adja meg a kapott tagcsoport bemenet - kimenet modelljét, paramétereit és a súlyfüggvényét!

A megoldás menete:
A sorosan csatolt rendszer eredõ átviteli függvénye:

$$G_e(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{2}{4s+1} = \frac{2}{4s^2+5s+1}$$

A tagcsoport eredõ bemenet - kimenet modellje:

$$G_e(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{4s^2+5s+1}$$

$$4s^2Y(s) + 5sY(s) + Y(s) = 2U(s)$$

$$4y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(s) + y(t) = 2u(t)$$

A sorosan csatolt elsõrendû rendszerek eredõjeként tehát olyan másodrendû rendszer alakult ki, melynek a számlálójában csak konstans szerepel. Az eredõ tagcsoport paraméterei:

$$G_e(s) = \frac{2}{4s^2+5s+1} \qquad K_e = 2, \quad T_e = 2, \quad \xi = 1,25$$

A súlyfüggvény:

$$Y(s) = G_e(s)U(s) = \frac{2}{4s^2+5s+1} \cdot 1$$

Parciális törtekre bontás az inverz-Laplace transzformációhoz:

$$\frac{0,5}{(s+1)(s+0,25)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+0,25}$$

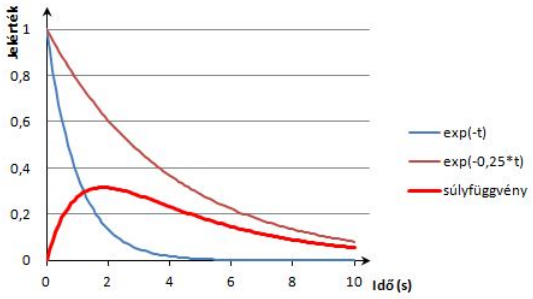
$$0,5 = A(s+0,25) + B(s+1)$$

$$A = \left.\frac{0,5}{s+0,25}\right|_{s=-1} = -\frac{2}{3} \qquad B = \left.\frac{0,5}{s+1}\right|_{s=-0,25} = \frac{2}{3}$$

$$Y(s) = -\frac{2}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{s+0,25}$$

A súlyfüggvény:

$$y(t) = \frac{2}{3}(e^{-0,25t} - e^{-t}) \ , \quad t \geq 0$$



5. Határozza meg a $G(s) = \dfrac{4}{0,5s^2 + 2s + 1,5}$ tag paramétereit, átmeneti függvényét, súlyfüggvényét és sebességugrás-válasz függvényét!

   A megoldás menete:
   A paraméterek meghatározása az ω_n természetes frekvencia kifejezésével:

$$G(s) = \frac{4}{0,5s^2 + 2s + 1,5} = \frac{8}{s^2 + 4s + 3} = \frac{K\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

   innen:

$$\omega_n = \sqrt{3} = 1,73 \quad K = \frac{8}{3} = 2,67 \quad \xi = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1,15$$

   vagy a T idõállandóra rendezve:

$$G(s) = \frac{4}{0,5s^2 + 2s + 1,5} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{1}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + 1} = \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

   innen:

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58 \quad K = \frac{8}{3} = 2,67 \quad \xi = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1,15$$

   Átmeneti függvény:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{4}{0,5s^2 + 2s + 1,5} \cdot \frac{1}{s} = \frac{4}{(0,5s + 0,5)(s + 3)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{0,5s + 0,5} + \frac{C}{s + 3}$$

$$4 = A(0,5s + 0,5)(s + 3) + Bs(s + 3) + Cs(0,5s + 0,5)$$

$$A = \left.\frac{4}{(0,5s + 0,5)(s + 3)}\right|_{s=0} = \frac{4}{1,5} = \frac{8}{3}$$

$$B = \left.\frac{4}{s(s + 3)}\right|_{s=-1} = \frac{4}{(-1)(-1 + 3)} = -2$$

$$C = \left.\frac{4}{s(0,5s + 0,5)}\right|_{s=-3} = \frac{4}{(-3)(-1,5 + 0,5)} = \frac{4}{3}$$

$$Y(s) = \frac{8}{3}\frac{1}{s} - 2\frac{1}{0,5s + 0,5} + \frac{4}{3}\frac{1}{s + 3} = \frac{8}{3}\frac{1}{s} - 4\frac{1}{s + 1} + \frac{4}{3}\frac{1}{s + 3}$$

$$y(t) = \frac{8}{3}1(t) - 4e^{-t} + \frac{4}{3}e^{-3t}$$

Súlyfüggvény:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{4}{0,5s^2 + 2s + 1,5} \cdot 1 = \frac{4}{(0,5s + 0,5)(s + 3)} = \frac{A}{0,5s + 0,5} + \frac{B}{s + 3}$$

$$4 = A(s + 3) + B(0,5s + 0,5)$$

$$A = \frac{4}{s + 3}\bigg|_{s=-1} = \frac{4}{-1 + 3} = 2$$

$$B = \frac{4}{0,5s + 0,5}\bigg|_{s=-3} = \frac{4}{(-1,5 + 0,5)} = -4$$

$$Y(s) = 2\frac{1}{0,5s + 0,5} - 4\frac{1}{s + 3} = 4(\frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 3})$$

$$h(t) = 4(e^{-t} - e^{-3t})$$

Sebességugrás válaszfüggvény:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{4}{0,5s^2 + 2s + 1,5} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{4}{(0,5s + 0,5)(s + 3)s^2}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{0,5s + 0,5} + \frac{D}{s + 3}$$

$$4 = A(0,5s + 0,5)(s + 3) + Bs(0,5s + 0,5)(s + 3) + Cs^2(s + 3) + Ds^2(0,5s + 0,5)$$

$$A = \frac{4}{(0,5s + 0,5)(s + 3)}\bigg|_{s=0} = \frac{4}{1,5} = \frac{8}{3}$$

$$C = \frac{4}{s^2(s + 3)}\bigg|_{s=-1} = \frac{4}{1(-1 + 3)} = 2$$

$$D = \frac{4}{s^2(0,5s + 0,5)}\bigg|_{s=-3} = \frac{4}{9(-1,5 + 0,5)} = -\frac{4}{9}$$

$$4 = \frac{8}{3}(0,5s + 0,5)(s + 3) + Bs(0,5s + 0,5)(s + 3) + 2s^2(s + 3) - \frac{4}{9}s^2(0,5s + 0,5)$$

legyen $s = 1$

$$4 = \frac{32}{3} + 4B + 8 - \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{32}{9}$$

$$Y(s) = \frac{8}{3}\frac{1}{s^2} - \frac{32}{9}\frac{1}{s} + 2\frac{1}{0,5s + 0,5} - \frac{4}{9}\frac{1}{s + 3}$$

$$y(t) = \frac{8}{3}\left(t - \frac{4}{3}1(t) + 1,5e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}\right)$$

3.3. Feladatok az átmeneti függvény és a súlyfüggvény meghatározására

3.3.1. Feladatok

1. Legyen adott a $8y^{(1)}(t) + 16y(t) = 4u(t)$ bemenet-kimenet modellel jellemzett tag.
   (a) Határozza meg a tag paramétereit és ezek segítségével vázolja fel az átmeneti és súlyfüggvényét!
   (b) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag átmeneti függvényét!
   (c) A végértéktétel alapján mutassa meg, hogy hova tart az átmeneti függvény!
   (d) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag súlyfüggvényét!
   (e) A végértéktétel alapján mutassa meg, hogy hova tart a súlyfüggvény!
   (f) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag sebességugrás-válasz függvényét!
2. Legyen adott a $4y^{(1)}(t) - y(t) = 2u(t)$ bemenet-kimenet modellel jellemzett tag.
   (a) Határozza meg a tag paramétereit és ezek segítségével vázolja fel az átmeneti és súlyfüggvényét!
   (b) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag átmeneti függvényét!
   (c) A végértéktétel alapján mutassa meg, hogy hova tart az átmeneti függvény!
   (d) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag súlyfüggvényét!
   (e) A végértéktétel alapján mutassa meg, hogy hova tart a súlyfüggvény!
3. Legyen adott a $4y^{(1)}(t) + 2y(t) = -u(t)$ bemenet-kimenet modellel jellemzett tag.
   (a) Határozza meg a tag paramétereit és ezek segítségével vázolja fel az átmeneti és súlyfüggvényét!
   (b) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag átmeneti függvényét!
   (c) A végértéktétel alapján mutassa meg, hogy hova tart az átmeneti függvény!
   (d) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag súlyfüggvényét!
   (e) A végértéktétel alapján mutassa meg, hogy hova tart a súlyfüggvény!
   (f) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag sebességugrás-válasz függvényét!
4. Vesse össze az 1.-3. példákban szereplõ tagok paramétereit és átmeneti függvényeik menetét! Adjon magyarázatot a különbségre a paraméterek fizikai értelmezése alapján!
5. Legyen adott a $4y^{(1)}(t) + y(t) = 4u^{(1)}(t) + 2u(t)$ bemenet-kimenet modellel jellemzett tag.
   (a) Határozza meg a tag paramétereit és ezek segítségével vázolja fel az átmeneti és súlyfüggvényét!
   (b) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag átmeneti függvényét!
   (c) Adja meg az átmeneti függvénynek a $t = 0$ és a $t \to \infty$ felvett értékeit!
   (d) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag súlyfüggvényét!
   (e) Adja meg a súlyfüggvénynek a $t = 0$ és a $t \to \infty$ felvett értékeit!
   (f) Az átmeneti és a súlyfüggvényre kapott kifejezés alapján ellenõrizze az a) pontban felvázolt görbéket!
   (g) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag sebességugrás-válasz függvényét!
6. Legyen adott az $y^{(1)}(t) + 3y(t) = 3u^{(1)}(t) + 6u(t)$ bemenet-kimenet modellel jellemzett tag.
   (a) Határozza meg a tag paramétereit és ezek segítségével vázolja fel az átmeneti és súlyfüggvényét!
   (b) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag átmeneti függvényét!
   (c) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag súlyfüggvényét!
   (d) Az átmeneti és a súlyfüggvényre kapott kifejezés alapján ellenõrizze az a) pontban felvázolt görbéket!
   (e) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag sebességugrás-válasz függvényét!

7. Legyen adott az $5y^{(1)}(t) + 2y(t) = 9u^{(1)}(t) + 6u(t)$ bemenet-kimenet modellel jellemzett tag.
   (a) Határozza meg a tag paramétereit és ezek segítségével vázolja fel az átmeneti és súlyfüggvényét!
   (b) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag átmeneti függvényét!
   (c) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag súlyfüggvényét!
   (d) Az átmeneti és a súlyfüggvényre kapott kifejezés alapján ellenõrizze az a) pontban felvázolt görbéket!
   (e) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag sebességugrás-válasz függvényét!

8. Legyen adott $G(s) = \dfrac{s+2}{2s^2+5s+3}$ átviteli függvény.
   (a) Határozza meg a tag paramétereit és ezek segítségével vázolja fel az átmeneti és súlyfüggvényét!
   (b) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag átmeneti függvényét!
   (c) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag súlyfüggvényét!
   (d) Az átmeneti és a súlyfüggvényre kapott kifejezés alapján ellenõrizze az a) pontban felvázolt görbéket!
   (e) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag sebességugrás-válasz függvényét!

9. Legyen adott az $y^{(2)}(t) + 8y^{(1)}(t) + 16y(t) = 4u(t)$ bemenet-kimenet modellel jellemzett tag!
   (a) Határozza meg a tag paramétereit és ezek segítségével vázolja fel az átmeneti és súlyfüggvényét!
   (b) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag átmeneti függvényét!
   (c) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag súlyfüggvényét!
   (d) Az átmeneti és a súlyfüggvényre kapott kifejezés alapján ellenõrizze az a) pontban felvázolt görbéket!

10. Legyen adott az $2y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) + 2y(t) = 9u^{(1)}(t) + 6u(t)$ bemenet-kimenet modellel jellemzett tag.
    (a) Határozza meg a tag paramétereit és ezek segítségével vázolja fel az átmeneti és súlyfüggvényét!
    (b) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag átmeneti függvényét!
    (c) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag súlyfüggvényét!
    (d) Az átmeneti és a súlyfüggvényre kapott kifejezés alapján ellenõrizze az a) pontban felvázolt görbéket!
    (e) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag sebességugrás-válasz függvényét!

11. Legyen adott $G(s) = \dfrac{4}{s^2+4s+3}$ átviteli függvény.
    (a) Határozza meg a tag paramétereit és ezek segítségével vázolja fel az átmeneti és súlyfüggvényét!
    (b) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag átmeneti függvényét!
    (c) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag súlyfüggvényét!
    (d) Az átmeneti és a súlyfüggvényre kapott kifejezés alapján ellenõrizze az a) pontban felvázolt görbéket!
    (e) Laplace-transzformáció segítségével határozza meg a tag sebességugrás-válasz függvényét!

3.3.2. Megoldások

1. (a) Erõsítés $K = 0,25$, idõállandó $\tau = 0,5$
   (b) $y(t) = 0,25(1(t) - e^{-2t}) \quad t \geq 0$
   (c) $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0,25$ az erõsítés értékéhez tart.
   (d) $h(t) = 0,5e^{-2t} \quad t \geq 0$
   (e) $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$
   (f) $y(t) = 0,25(t - 0,5 \cdot 1(t) + 0,5e^{-2t}) \quad t \geq 0$

2. (a) Erõsítés $K = -2$, idõállandó $\tau = -4$
   (b) $y(t) = -2(1(t) + e^{-0,25t}) \quad t \geq 0$
   (c) $\lim_{t\to\infty} y(t)$ a végértéktétel nem alkalmazható a pozitív pólus miatt!
   (d) $h(t) = 0,5e^{0,25t} \quad t \geq 0$
   (e) $\lim_{t\to\infty} h(t)$ a végértéktétel nem alkalmazható a pozitív pólus miatt!

3. (a) Erõsítés $K = -0,5$, idõállandó $\tau = 2$
   (b) $y(t) = -0,5(1(t) - e^{-0,5t}) \quad t \geq 0$
   (c) $\lim_{t\to\infty} y(t) = -0,5$ az erõsítés értékéhez tart.
   (d) $h(t) = -0,25e^{-0,5t} \quad t \geq 0$
   (e) $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$
   (f) $y(t) = -0,5(t - 2 \cdot 1(t) + 2e^{-0,5t}) \quad t \geq 0$

4. 1. példa: $K = 0,25$, $\tau = 0,5$ az átmeneti függvény beáll az erõsítés értékéhez;
   2. példa: $K = -2$, $\tau = -4$ a negatív idõállandó miatt nem reális eset, de hatására és az ugyancsak negatív erõsítés miatt, az átmeneti függvény a $-\infty$ tart;
   3. példa: $K = -0,5$, $\tau = 0,5$ az átmeneti függvény a negatív erõsítés érték miatt -0,5-höz áll be.

5. (a) Erõsítés $K = 2$, idõállandó $\tau = 4$, számlálóhoz tartozó idõállandó $T = 2$
   (b) $y(t) = 2(1(t) - 0,5e^{-0,25t}) \quad t \geq 0$
   (c) $y(0) = 1(= K\frac{T}{\tau}), \quad y(\infty) = 2(= K)$
   (d) $h(t) = \delta(t) + 0,25e^{-0,25t} \quad t \geq 0$
   (e) $h(0) = \infty(= \delta(t)), \quad h(\infty) = 0$
   (f) (válaszgörbék ellenõrzése)
   (g) $y(t) = 2(t - 2 \cdot 1(t) + 2e^{-0,25t}) \quad t \geq 0$

6. (a) Erõsítés $K = 2$, idõállandó $\tau = 1/3$, számlálóhoz tartozó idõállandó $T = 0,5$
   (b) $y(t) = 2(1(t) - 0,5e^{-3t}) \quad t \geq 0$
   (c) $y(0) = 3(= K\frac{T}{\tau}), \quad y(\infty) = 2(= K)$
   (d) $h(t) = 3(\delta(t) - e^{-3t}) \quad t \geq 0$
   (e) $h(0) = \infty(= \delta(t)), \quad h(\infty) = 0$, de negatív értékekkel simul az x tengelyhez
   (f) (válaszgörbék ellenõrzése)

(g) $y(t) = 2(t - \frac{1}{6} \cdot 1(t) + \frac{1}{6}e^{-3t}) \quad t \geq 0$

7. (a) Erõsítés $K = 3$, idõállandó $\tau = 2,5$, számlálóhoz tartozó idõállandó $T = 1,5$
   (b) $y(t) = 3(1(t) - 0,4e^{-0,4t}) \quad t \geq 0$
   (c) $y(0) = 1,8(= K\frac{T}{\tau}), \quad y(\infty) = 3(= K)$
   (d) $h(t) = 1,8\delta(t) - 0,48e^{-3t} \quad t \geq 0$
   (e) $h(0) = \infty(= \delta(t)), \quad h(\infty) = 0$, de negatív értékekkel simul az x tengelyhez
   (f) (válaszgörbék ellenõrzése)
   (g) $y(t) = 3(t - 1(t) + e^{-0,4t}) \quad t \geq 0$

8. (a) Erõsítés $K = 0,667$, idõállandó $T = 0,816$, csillapítási tényezõ $\xi = 1,02$ számlálóhoz tartozó idõállandó $T = 0,5$
   (b) $y(t) = \frac{2}{3} \cdot 1(t) - e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-1,5t} \quad t \geq 0$
   (c) $h(t) = e^{-t} - 0,5e^{-1,5t} \quad t \geq 0$
   (d) (válaszgörbék ellenõrzése)
   (e) $y(t) = \frac{2}{3}t - \frac{7}{9} \cdot 1(t) + e^{-t} - \frac{2}{9}e^{-1,5t} \quad t \geq 0$

9. (a) Erõsítés $K = 0,25$, idõállandó $T = 0,25$, természetes frekvencia $\omega_n = 4$, csillapítási tényezõ $\xi = 1$
   (b) $y(t) = 0,25(1(t) - e^{-4t} - te^{-4t} \quad t \geq 0$
   (c) $h(t) = 4te^{-4t} \quad t \geq 0$
   (d) (válaszgörbék ellenõrzése)
   (e) $y(t) = \frac{2}{3}t - \frac{7}{9} \cdot 1(t) + e^{-t} - \frac{2}{9}e^{-1,5t} \quad t \geq 0$

10. (a) Erõsítés $K = 3$, idõállandó $T = 1$, természetes frekvencia $\omega_n = 1$, csillapítási tényezõ $\xi = 1,25$ számlálóhoz tartozó idõállandó $T = 1,5$
    (b) $y(t) = 3 \cdot 1(t) - e^{-0,5t} + 2e^{-2t} \quad t \geq 0$
    (c) $h(t) = 0,5e^{-0,5t} - 4e^{-2t} \quad t \geq 0$
    (d) $y(t) = 3t - 3 \cdot 1(t) + 2e^{-0,5t} + e^{-2t} \quad t \geq 0$
    (e) (válaszgörbék ellenõrzése)

11. (a) Erõsítés $K = 4/3$, idõállandó $T = 0,577$, természetes frekvencia $\omega_n = 1,732$, csillapítási tényezõ $\xi = 1,15$
    (b) $y(t) = \frac{4}{3} \cdot 1(t) - 2e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-3t} \quad t \geq 0$
    (c) $h(t) = 2e^{-t} - 2e^{-3t} \quad t \geq 0$
    (d) (válaszgörbék ellenõrzése)
    (e) $y(t) = \frac{4}{3}t - \frac{16}{9} \cdot 1(t) + 2e^{-t} - \frac{2}{9}e^{-3t} \quad t \geq 0$

4. fejezet

Frekvenciatartomány

4.1. Elméleti áttekintés

Az irányítástechnikai rendszerek vizsgálatát idõ- és operátortartomány mellett érdemes frekvenciatartományban is elvégezni. Ha ismerjük egy rendszer bemenõ és kimenõ jelének frekvenciafüggvényét, akkor az idõtartományba való visszatérés nélkül következtethetünk a rendszer idõbeli viselkedésére.

4.1.1. A frekvenciátviteli függvény

Legyen a bemenõ jel egy B amplitúdójú, ω_0 frekvenciájú és $\varphi_b = 0$ fázisú szinuszos jel:

$$u(t) = B \sin \omega_0 t \ .$$

Erre válaszként a kimeneten egy K amplitúdójú, szintén ω_0 frekvenciájú szinuszos jel jelenik meg, aminek a bemenõ jelhez képest φ_k fáziseltolása (késleltetése vagy siettetése) lesz:

$$y(t) = K \sin(\omega_0 t + \varphi_k).$$

Határozzuk meg a kimenetet frekvenciatartományban a bemenet és a jelformáló tag tulajdonságainak függvényében. Írjuk fel ehhez elõször a frekvenciafüggvényeket exponenciális alakban. A bemenõ jel:

$$u(t) = B \sin \omega_0 t = Im(B(\omega_0)e^{j\varphi_b(\omega_0)}e^{j\omega t}) = Im(U(j\omega)e^{j\omega t})$$

ahol

$B(\omega_0)$ a bemenõ jel amplitúdója, ami lehet konstans vagy a frekvenciafüggvényében változó;

$U(j\omega) = B(\omega_0)e^{j\varphi_b(\omega_0)}$ az amplitúdót és a kezdeti fáziseltolás szöget tartalmazó komplex kifejezés, a bemenõ jel $t = 0$ idõpillanathoz tartozó komplex vektora.

A kimenõ jel hasonló módon felírva:

$$y(t) = K \sin(\omega_0 t + \varphi_k) = Im(K(\omega_0)e^{j\varphi_k(\omega_0)}e^{j\omega t}) = Im(Y(j\omega)e^{j\omega t})$$

Operátortartományban az átviteli függvényt a következõ módon értelmeztük:

$$G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{z.k.f.}$$

Az átviteli függvény ismeretében a kimenetet a következõ módon lehet meghatározni:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Analóg módon képezzük a szinuszos kimenõ jel és bemenõ jel exponenciális alakban felírt hányadosát, és jelöljük ezt $G(j\omega)$-val:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)e^{j\omega t}}{U(j\omega)e^{j\omega t}} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

ahol

$A(\omega_0) = \dfrac{K(\omega_0)}{B(\omega_0)}$ a kimenõ és a bemenõ jelek amplitúdóviszonyát kifejezõ abszolút érték;

$\varphi(\omega_0) = \varphi_k(\omega_0) - \varphi_b(\omega_0)$ a fáziseltolások különbségét megadó fázisszög.

Az így bevezett $G(j\omega)$-t a jelformáló tag *frekvenciaátviteli függvényé*nek nevezzük és a frekvenciatartományban hasonlóan alkalmazhatjuk a jelátviteli tag jellemzésére, mint az átviteli függvényt az operátortartományban.

Vezessük be a következõ jelölést:

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)$$

ahol $|Y(j\omega)|$ a jel amplitúdója és $\angle Y(j\omega)$ a jel fázisa.

Legyen $G(s)$ a tag átviteli függvénye, ekkor a kimenetet a következõ módon tudjuk meghatározni:

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

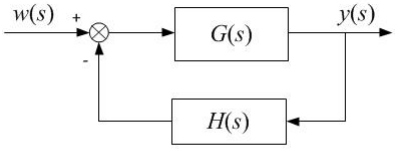
ahol a kimenõ jel amplitúdója:

$$|Y(j\omega)| = |G(j\omega)| \cdot |U(j\omega)|$$

fázisa:

$$\angle Y(j\omega) = \angle G(j\omega) + \angle U(j\omega)$$

Tételezzük fel az alábbi visszacsatolt kört:



Az eredõ átviteli függvény operátortartományban:

$$G_e(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Tételezzük fel, hogy a $w(t)$ alapjel bemenet szinuszos jellegû. A frekvenciatartományra való áttéréshez alkalmazzuk az $s = j\omega$ behelyettesítést:

$$G_e(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{W(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

Alkalmazva az eredõ frekvenciaátviteli függvényre az elõzõekben bevezetett jelölést:

$$G_e(j\omega) = |G_e(j\omega)|\angle G_e(j\omega)$$

ahol a zárt kör eredõ frekvenciaátviteli függvényének az amplitúdóviszont megadó abszolútértéke:

$$|G_e(j\omega)| = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \right| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)H(j\omega)|}$$

fáziseltolása:

$$\angle G_e(j\omega) = \varphi(j\omega) = \angle G(j\omega) - \angle(1 + G(j\omega)H(j\omega)) \ .$$

4.1.2. Frekvenciaátviteli függvények ábrázolása

Nyquist-diagram

Legyen adott egy jelformáló tag $G(j\omega)$ frekvenciaátviteli függvénye. Változtassuk a bemenõ jel frekvenciáját $0 \leq \omega < \infty$ tartományon, és a kapott kimenõ jel alapján határozzuk meg minden ω értékhez a jelformáló tag $A(\omega)$ abszolút értékét és $\varphi(\omega)$ fáziseltolását.

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\angle G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = Re(G(j\omega)) + jIm(G(j\omega))$$

Ha a kapott értékeket ábrázoljuk a komplex síkon, akkor megkapjuk a jelformáló tag *Nyquits-görbé*jét vagy más néven az *amplitúdó-fázis görbé*jét. Az origóból a görbe egy tetszõleges pontjába mutató vektor hossza a kimenõ és a bemenõ jel amplitúdója arányának, míg az irányszöge a fáziseltolásnak felel meg egy adott ω frekvencián.

Bode-diagram

Végezzük el a Nyquist-diagram esetében leírt vizsgálatot, de az ábrázolásnál vegyük fel külön diagramon az amplitúdóviszony logaritmusát és a fáziseltolást a frekvencia függvényében.

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\ln G(j\omega) = \ln|G(j\omega)| + j\varphi(\omega)$$

Az így kapott diagramokat *Bode-diagram*nak nevezzük. A gyakorlatban az amplitúdóviszonyt általában decibelben kifejezett értékként ábrázoljuk:

$$A(\omega)[\mathrm{dB}] = 20\lg|G(j\omega)|,$$

a frekvenciatengelyen pedig logaritmikus léptéket veszünk fel.

A Bode-diagramban történõ ábrázolás elõnye, hogy a jelformáló tagok tulajdonságai alapján könnyen szerkeszthetõek a jelleggörbéik, másrészt soros kapcsolásnál kapott szorzatfüggvények ábrázolása a logaritmizálás miatt összeadásra vezethetõ vissza:

$$20\lg(A_1e^{j\varphi_1} \cdot A_2e^{j\varphi_2}) = 20\lg A_1 + 20\lg A_2 + j(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot 20\lg e$$

4.2. Gyakorló feladatok frekvenciatartománybeli ábrázolásra

4.2.1. Feladatok

1. Vázolja fel annak az elsõrendû tagnak a Nyquist-diagramját, aminek az erõsítése 5!
2. Vázolja fel annak a másodrendû tagnak a Nyquist-diagramját, aminek az erõsítése 3 és a csillapítási tényezõje 2!
3. Vázolja fel annak a másodrendû tagnak a Nyquist-diagramját, aminek az erõsítése 2 és a csillapítási tényezõje 0,3!
4. Vázolja fel annak a harmadrendû tagnak a Nyquist-diagramját, aminek az erõsítése 1, és egy elsõ és 0.2 csillapítási tényezõjû másodrendû tagra bontható fel!
5. Vázolja fel egy kéttárolós integráló tagnak a Nyquist-diagramját!
6. Vázolja fel az alábbi tag Bode diagramját!

$$G(s) = \frac{2}{(s^2 + 0,1s)(s + 2)}$$

7. Vázolja fel az alábbi tag Bode-diagramját!

$$G(s) = \frac{0.8s}{(s^2 + s + 4)(s + 0.2)}$$

8. Vázolja fel az alábbi tag Bode-diagramját!

$$G(s) = \frac{20}{(s^2 + 2s)(2s + 1)}$$

9. Vázolja fel az alábbi tag Bode-diagramját!

$$G(s) = \frac{8s + 80}{8s^3 + 4s^2 + 8s}$$

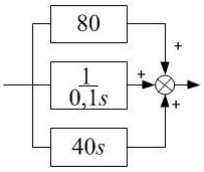
10. Vázolja fel az alábbi tag Bode-diagramját!

$$G(s) = \frac{1}{(4s^2 + 2s + 2)(s + 0.1)}$$

11. Vázolja fel az alábbi tag Bode-diagramját!

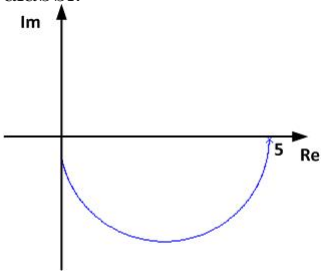
$$G(s) = \frac{8}{s(8s^2 + 12s + 8)(s + 10)}$$

12. Vázolja fel az alábbi tag Bode-diagramját!

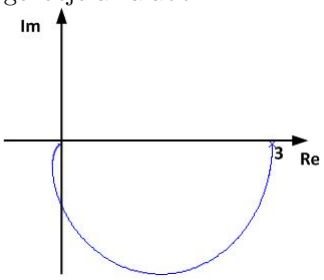


4.2.2. Megoldások

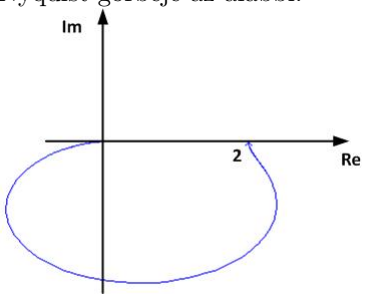
1. Legyen az átviteli függvény $G(s) = \frac{5}{4s + 1}$, azaz $K = 5,\ \tau = 4$. Ekkor a tag Nyquist görbéje az alábbi:



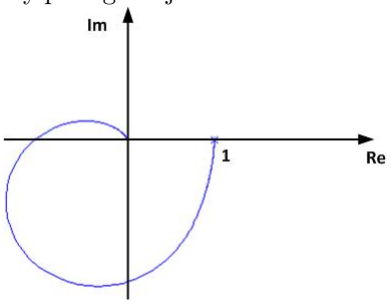
2. Legyen az átviteli függvény $G(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 1}$, azaz $K = 3,\ \xi = 2,\ T = 1$. Ekkor a tag Nyquist görbéje az alábbi:



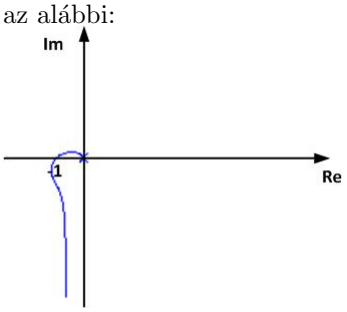
3. Legyen az átviteli függvény $G(s) = \dfrac{2}{s^2 + 0,6s + 1}$, azaz $K = 2,\ \xi = 0,3,\ T = 1$. Ekkor a tag Nyquist görbéje az alábbi:



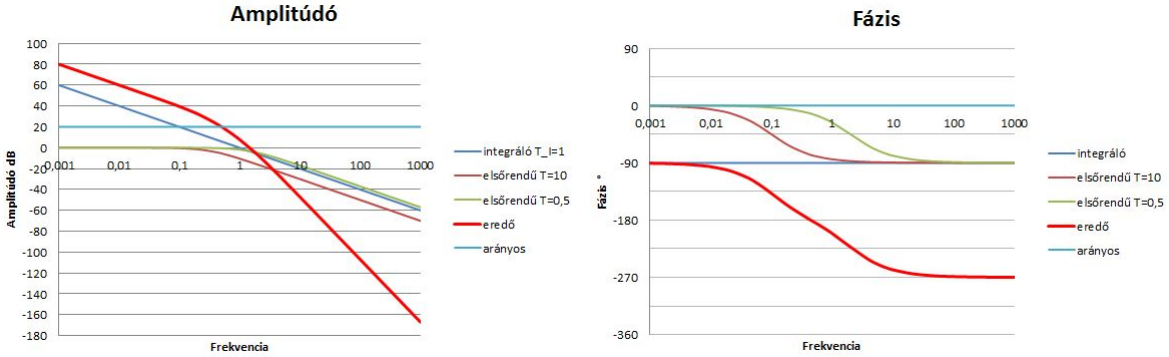
4. Legyen az átviteli függvény $G(s) = \dfrac{1}{(s^2 + 0,4s + 1)(s + 1)} = \dfrac{1}{s^3 + 1,4s^2 + 1,4s + 1}$. Ekkor a tag Nyquist görbéje az alábbi:



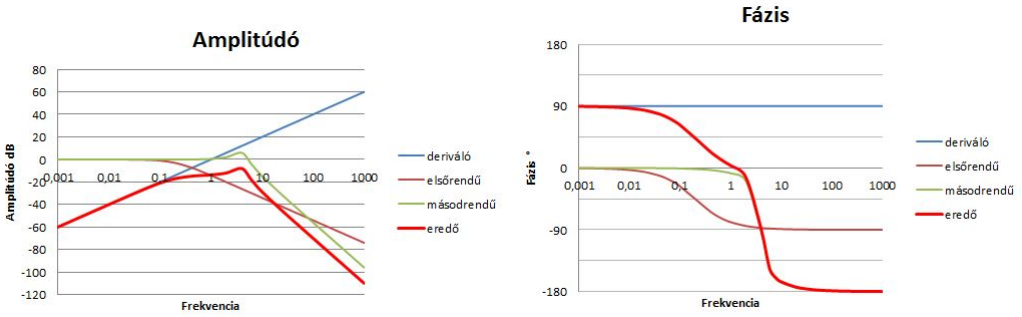
5. Legyen az átviteli függvény $G(s) = \dfrac{1}{s(s^2 + 0,8s + 1)} = \dfrac{1}{s^3 + 0,8s^2 + s}$. Ekkor a tag Nyquist görbéje az alábbi:



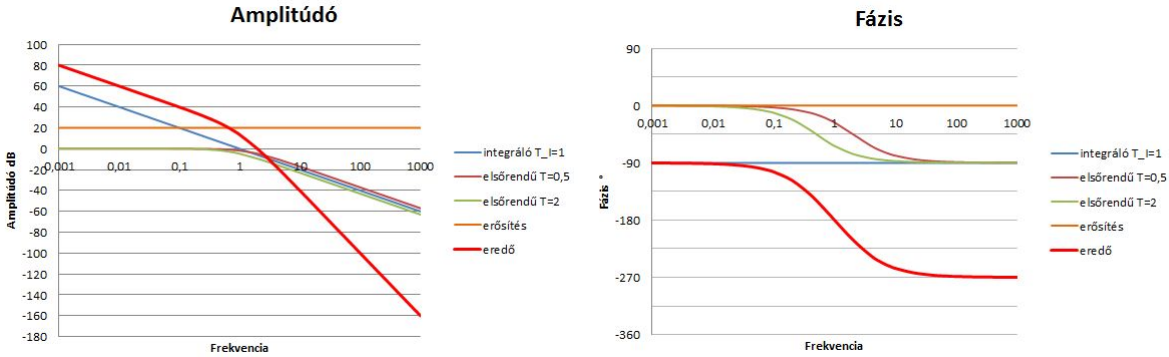
6. $G(s) = \dfrac{2}{(s^2 + 0,1s)(s + 2)} = 10 \cdot \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{1}{10s + 1} \cdot \dfrac{1}{0,5s + 1}$



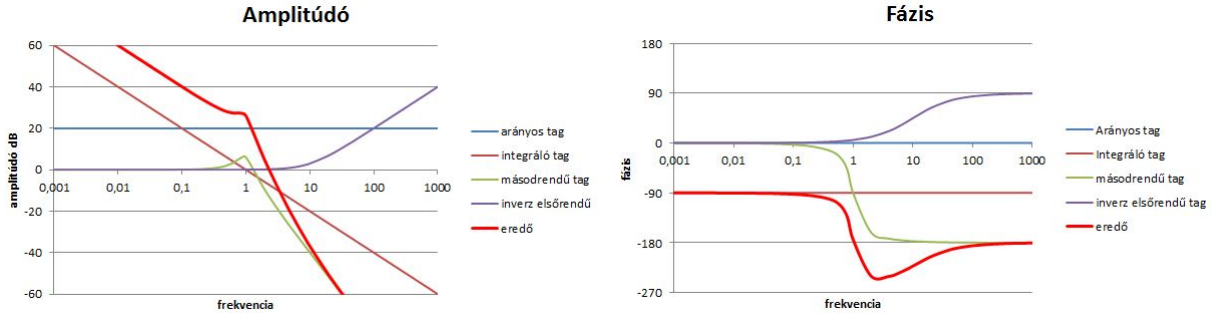
7. $G(s) = \dfrac{0.8s}{(s^2 + s + 4)(s + 0.2)} = s \cdot \dfrac{1}{5s + 1} \cdot \dfrac{1}{0,25s^2 + 0,25s + 1}$



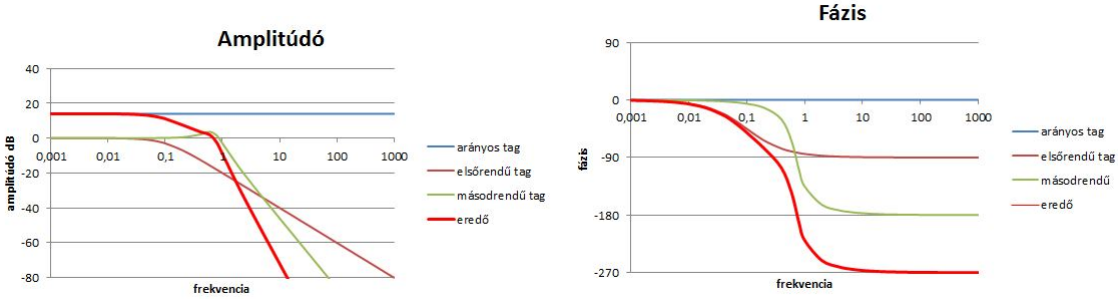
8. $G(s) = \dfrac{20}{(s^2+2s)(2s+1)} = 10 \cdot \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{1}{0,5s+1} \cdot \dfrac{1}{2s+1}$



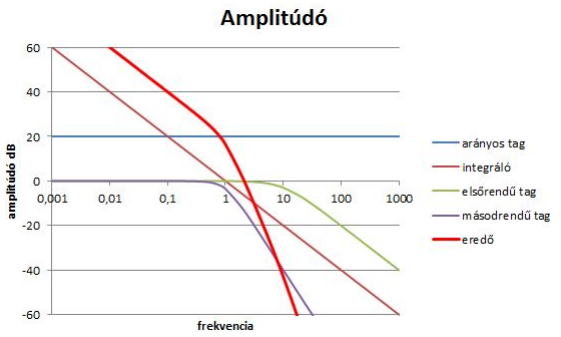
9. $G(s) = \dfrac{8s+80}{8s^3+4s^2+8s} = 10 \cdot \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{1}{s^2+0,5s+1} \cdot (0,1s+1)$

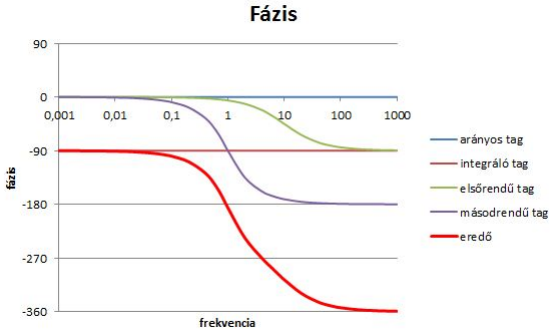


10. $G(s) = \dfrac{1}{(4s^2+2s+2)(s+0,1)} = 5 \cdot \dfrac{1}{10s+1} \cdot \dfrac{1}{2s^2+s+1}$

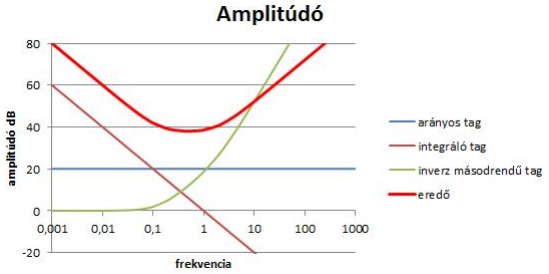


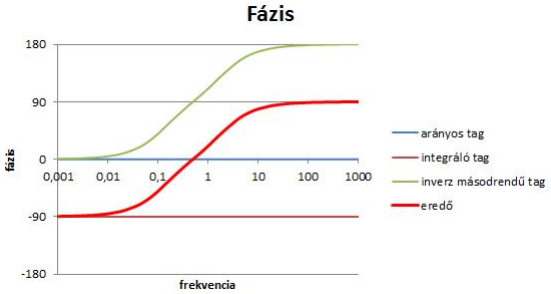
11. $G(s) = \dfrac{8}{s(8s^2+12s+8)(s+10)} = 10 \cdot \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{1}{0,1s+1} \cdot \dfrac{1}{s^2+1,5s+1}$





12. $G(s) = 80 + \dfrac{1}{0,1s} + 40s = 10 \cdot \dfrac{1}{s} \cdot (4s^2 + 8s + 1)$





5. fejezet

Folytonos idejû rendszerek stabilitása

5.1. Elméleti áttekintés

5.1.1. Stabilitás definíciók

BIBO stabilitás

Egy rendszert *korlátos bemenet - korlátos kimenet* (röviden *BIBO*) *stabil*nak nevezünk akkor, ha korlátos bemenõjelet alkalmazva egy tetszõleges vizsgálati idõintervallumban:

$$|u(t)| < M_1, \quad -\infty < t_0 \leq t < \infty,$$

a tag kimenetén megjelenõ jel is korlátos lesz:

$$|y(t)| < M_2, \quad t_0 \leq t < \infty,$$

ahol $M_1, M_2 < \infty$ tetszõleges pozitív értékek, és t_0 a kezdeti idõpont. A BIBO stabilitást szokás gerjesztés - válasz stabilitásnak is nevezni.

Aszimptotikus stabilitás

Egy lineáris, idõinvariáns rendszert tetszõleges, nem minden esetben zérus kezdeti feltételek esetén *aszimptotikusan stabil*nak nevezünk, ha a t_0 idõpontban magára hagyott, azaz $u(t) = 0, \quad t \geq t_0$ bemenettel jellemezhetõ rendszer esetében megválasztható a kezdeti értékek függvényében egy olyan M korlát, hogy a kimenet abszolút értéke ezt ne lépje át:

$$\exists M(y(t_0), y^1(t_0), ..., y^{n-1}(t_0)) > 0 \quad \Rightarrow \quad |y(t)| \leq M < \infty, \quad \forall t \geq t_0$$

és

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0 \quad .$$

Ha egy aszimptotikusan stabil rendszert zérus kezdeti feltételek mellett egységugrás bemenettel gerjesztünk, akkor a kimenetének az erõsítése által meghatározott értékhez kell tartania. Az aszimptotikus stabiltású rendszereket szokás nulla bementi stabilitású vagy röviden stabil rendszernek nevezni.

Egy tag vagy tagcsoport stabilitását a következõ tétel alapján lehet ellenõrizni.

- Ha a tag vagy tagcsoport eredõ átviteli függvényének csak baloldali pólusai vannak, azaz a pólusok mindegyikére igaz, hogy $Re(p_i) < 0$, akkor a vizsgált rendszer aszimptotikusan stabil. A BIBO stabilitás definíciójából következik, hogy az aszimptotikusan stabil rendszer BIBO stabil is.
- Ha a tag vagy tagcsoport eredõ átviteli függvényének pólusai között van nulla vagy nulla valós részû póluspár, akkor a vizsgált rendszer aszimptotikusan nem stabil, de BIBO stabil.

– Ha a tag vagy tagcsoport eredõ átviteli függvényének pólusai között van pozitív valós vagy pozitív valós részû póluspár, akkor a vizsgált rendszer sem aszimptotikus, sem BIBO értelemben nem stabil, tehát instabil vagy labilis.

Megjegyzés: a stabilitásvizsgálatot csak az oksági feltételeknek megfelelõ átviteli függvény esetén végezzük el. Így, ha a számlálóban szereplõ polinom fokszáma nagyobb, mint a nevezõben lévõé, akkor az ilyen tagot nem realizálhatónak tekintjük, és nem vizsgáljuk a stabilitását.

5.1.2. Stabilitásvizsgálati módszerek

Bár a stabilitás definíciókból következõen az átviteli függvény pólusai alapján egyértelmûen eldönthetõ egy tag vagy tagcsoport stabilitása, a pólusok meghatározása gyakorlatilag csak elsõ vagy másodrendû rendszer, illetve ezek tiszta soros kapcsolata esetén végezhetõ el közvetlenül. Magasabb rendû rendszerek esetében a következõ módszerek segítségével lehet a stabilitást eldönteni.

Hurwitz kritérium

Az alkalmazás menete:

1. Határozzuk meg a vizsgálni kívánt tagcsoport eredõ átviteli függvényét.
2. Legyen a nevezõ valamennyi együtthatója pozitív. Ha az ellenõrzést paraméteresen végezzük, akkor a fizikai megfontolások figyelembe vételével adjuk meg azt a tartományt, amelyre ez teljesül. Ha valamelyik együttható negatív, vagy nem adható meg olyan tartomány, amelyre ez teljesül, akkor a rendszer instabil.
3. A nevezõ együtthatóinak felhasználásával írjuk fel a következõ determinánst:

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

A rendszer stabilitásának másik feltétele, hogy az így kapott determináns fõátlójára támaszkodó aldeterminánsok mindegyikére pozitív értéket kell kapni. Ha az aldeterminánsok valamelyike negatív, akkor a vizsgálatot nem kell tovább végezni, mert a rendszer instabil lesz. Paraméteres vizsgálat esetén valamennyi részdeterminánsesetén meghatározzuk, hogy a kérdéses paraméter milyen értékei mellett lesz a vizsgált rendszer stabil, majd ezeket a tartományokat összevetve határozzuk meg azt a legszûkebb tartományt, amelyre az aszimptotikus stabilitás teljesül.

Nyquist-, Bode-féle kritérium

Mindkét módszer esetében az az alapelv, hogy az alkalmas helyen *felvágott* kör frekvenciatartománybeli vizsgálata alapján döntünk a *visszacsatolt* rendszer stabilitásáról.

Az egyszerûsített Nyquist-kritérium a következõ:

– Ha a felnyitott kör amplitúdó-fázis görbéje - miközben a frekvencia $0 \leq \omega < \infty$ tartományban változik - éppen áthalad a komplex számsík valós tengelyének a -1 pontján, azaz létezik olyan ω_0 frekvencia, melyre $G(j\omega_0) = -1$, akkor a visszacsatolt kör a stabilitás határán van.

– Ha a felnyitott kör amplitúdó-fázis görbéje nem metszi a valós tengelyt, vagy ez a metszéspont a -1 és 0 között van, akkor a visszacsatolt kör aszimptotikusan stabil.

– Ha a felnyitott kör amplitúdó-fázis görbéje a valós tengelyt a -1 ponttól balra metszi, akkor a visszacsatolt kör instabil.

A Bode-kritérium: Határozzuk meg, hogy az amplitúdóviszony lefutása milyen frekvenciaértéknél lesz pontosan 0 dB. Állapítsuk meg, hogy ehhez a frekvenciaértékhez milyen fázisszög tartozik. A kapott fázisszög értéke alapján a visszacsatolt rendszer stabilitásáról a következõ megállapításokat tehetjük:

– ha a fázisszög értéke nagyobb, mint $-180°$, akkor a visszacsatolt rendszer stabil;

– ha pontosan egyenlõ $-180°$-kal, akkor a stabilitáshatárán van;

– ha kisebb, mint $-180°$, akkor instabil lesz a rendszer viselkedése.

Gyökhelygörbe

A gyökhelygörbe a zárt rendszer pólusainak mértani helye a komplex síkon, miközben a rendszer valamely paraméterét nulla és végtelen között változtatjuk.

A gyökhelygörbe felvázolását és értelmezését a következõ tulajdonságok segítik:

1. A gyökhelygörbének annyi ága van, mint amennyi a zárt rendszer pólusainak száma.

2. A gyökhelygörbe mindig szimmetrikus a valós tengelyre nézve.

3. Legyen a pólusok száma n, a zérushelyek száma m a felnyitott körben, ekkor

   – ha $n > m$, akkor a gyökhelygörbe a felnyitott kör pólusaiból indul ki, és m számú ág a felnyitott kör zérushelyeibe, $n - m$ számú ág a végtelenbe tart;

   – ha $n = m$, akkor valamennyi ág a felnyitott kör zérushelyeibe tart (a gyökhelygörbe teljesen véges tartomámyban van);

   – ha $n < m$, akkor zárt kör pólusainak száma m, és $m - n$ számú ág a végtelenbõl indul ki, és valamennyi ág a felnyitott kör zérushelyeibe tart. (Megjegyzés: az ilyen rendszer fizikailag nem realizálható, viszont a gyökhelygörbe kiterjesztett alkalmazásánál felírandó ekvivalens kifejezések esetében kaphatunk ilyen átviteli függvényt.)

4. A valós tengelyen akkor és csak akkor lehetnek gyökhelygörbe szakaszok, ha a vizsgált ponttól jobbra a pólusok és a zérushelyek együttes száma páratlan.

5. A gyökhelygörbe aszimptótáinak irányszögét a következõ kifejezés segítségével lehet meghatározni:

$$\alpha = \frac{\pm l \cdot 180°}{n - m}, \qquad l = 1, 3, 5, \ldots, 2(n - m) - 1$$

6. A gyökhelygörbe aszimptótái a valós tengelyt az alábbi összefüggés által meghatározott ún. súlypontban metszik. Jelölje p_i a felnyitott kör i-edik pólusát, z_j a felnyitott kör j-edik zérushelyét. Ekkor a súlypont értéke:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n - m}$$

7. A gyökhelygörbe és a képzetes tengely metszéspontja, vagyis a stabilitás határát jelentõ erõsítési értékhez tartozó pólusok a korábban ismertetett Hurwitz kritérium segítségével határozhatók meg.

8. A gyökhelygörbe kilépése a valós tengelybõl - vagyis a valós tengelynek az az x pontja, ahol többszörös gyököket kapunk - a következõ egyenlet segítségével határozható meg:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - p_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{x - z_j} = 0$$

9. A gyökhelygörbe kilépése a komplex pólusokból a szögfeltétel segítségével határozható meg. Vegyünk egy pontot az egyik komplex pólushoz közel, és oldjuk meg arra nézve a szögfeltételt:

$$\sum_{i=1}^{m} \angle\gamma_k - \sum_{j=1}^{n} \angle\delta_i = l \cdot 180°, \qquad l = 1, 3, 5, \ldots, 2(n - m) - 1$$

A gyökhelygörbe módszert alapesetben az erõsítés értékétõl függõ stabiliásvizsgálatokra és tranziens tulajdonságok ellenõrzésére alkalmazzuk. Ahhoz, hogy az eljárást más paraméterek a stabilitásra hatását ellenõtizni tudjuk, sok esetben az átviteli függvényt át kell alakítanunk, úgy hogy a vizsgált paraméter az úgy nevezett ekvivalens tag számlálójában szerepeljen. Erre példaként végezzük el egy PI szabályozó irányított kör átalakítását úgy, hogy az integráló tag paraméterének a hatását tudjuk vizsgálni.

Legyenek adottak a szabályozó körben szereplõ tagok átviteli függvényei a következõ alakban:

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \frac{1}{s^2+s+1} && \text{a szabályozott objektum átviteli függvénye} \\ G_P(s) &= K_P && \text{a szabályozó arányos (P) tagjának átviteli függvénye} \\ G_I(s) &= \frac{K_I}{s} && \text{a szabályozó integráló (I) tagjának átviteli függvénye} \end{aligned}$$

A szabályozó eredõ átviteli függvénye a párhuzamos csatolás miatt:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} \ .$$

A visszacsatolt kör eredõ átviteli függvénye pedig:

$$G_e(s) = \frac{G_c(s)G_o(s)}{1+G_(s)G_o(s)} = \frac{(K_P+\frac{K_I}{s})\frac{1}{s^2+s+1}}{1+(K_P+\frac{K_I}{s})\frac{1}{s^2+s+1}} == \frac{K_p s+K_I}{s^3+s^2+(K_P+1)s+K_I}$$

A kapott alakban nem tudjuk az integráló tag paraméterének, K_I-nek a hatását közvetlenül vizsgálni, ezért alakítsuk át a következõ módon:

$$G_e(s) = \frac{K_p s+K_I}{s^3+s^2+(K_P+1)s+K_I} = \frac{\frac{K_p s+K_I}{s^3+s^2+(K_P+1)s}}{1+\frac{K_I}{s^3+s^2+(K_P+1)s}}$$

Az így kapott alak nevezõjében szereplõ kifejezést nevezzük ekvivalens tagnak, mivel ennek visszacsatolása esetén kapott kifejezés nevezõje megegyezik az eredeti visszacsatolt tag nevezõjével, tehát alkalmas K_I hatásának vizsgálatára:

$$G_{ekv}^{K_P}(s) = \frac{K_I}{s^3+s^2+(K_P+1)s}$$

A vizsgálathoz természetesen K_P értékét rögzíteni kell, ezt jelzi a felsõ indexben szereplõ kifejezés.
A vizsgálat menete a kiterjesztett gyökhelygörbe módszer esetében a következõ:

1. Elsõ lépésként általában az erõsítés hatásának vizsgálatát végezzük el. Ehhez a többi vizsgálandó paraméter hatását lehetõség szerint ki kell iktatni, vagy egy meghatározott alapértékre kell állítani. Például, ha PID szabályozónál az erõsítés mellett az integráló és a deriváló tag paraméterének a hatását is vizsgálni akarjuk, akkor ezeket hagyjuk figyelmen kívül az eredõ átviteli függvény felírásakor. Ha az szabályozott objektum valamely paraméterének, például idõállandójának vagy csillapítási tényezõjének a hatását teszteljük, akkor ezeket állítsuk a technológia által meghatározott minimum értékre. Írjuk fel az eredõ átviteli függvényt, majd végezzük el a gyökhelygörbe felvázolását a leírt módon.

2. A kapott gyökhelygörbén válasszuk ki azt az erõsítési értéket, amely a technológia mûködtetése szempontjából megfelelõ. A választott erõsítésnek megfelelõ pólusokat jelöljük meg a gyökhelygörbe valamennyi ágán. Ezek a pontok lesznek a következõ lépés kiinduló pontjai.

3. A következõ vizsgálandó paraméter hatásának figyelembe vételéhez írjuk fel az eredõ átviteli függvényt úgy, hogy ezt a paramétert is tartalmazó tagot is figyelembe vesszük az eredõ átviteli függvény felírásánál. Végezzük el az átviteli függvény ekvivalens alakra történõ átalakítását a fentiekben leírt módon. A kapott ekvivalnes tagra végezzük el a gyökhelygörbe vizsgálatot ismét.

4. Ha van további vizsgálandó paraméter, akkor a 2.-3. pontot megismételjük.

5.2. Kidolgozott feladatok

5.2.1. Stabilitás meghatározása pólusok közvetlen meghatározása alapján

1. Döntse el az alábbi tagokról, hogy stabilak-e aszimptotikus, illetve BIBO értelemben!

   (a) $G_1(s) = \dfrac{2s^2 - 1}{4s^2 - 8}$
   A megoldás menete:
   Az átviteli függvény nevezõje alapján a pólusok:
   $p_{1,2} = \pm\sqrt{2}$
   Miután az egyik pólus nagyobb nullánál, így a tag instabil.

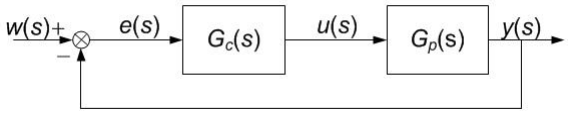
   (b) $G_2(s) = \dfrac{2s + 1}{4s^2 + 2s + 6}$
   A megoldás menete:
   Az átviteli függvény nevezõje alapján a pólusok:
   $p_{1,2} = -\dfrac{1}{4} \pm j\dfrac{\sqrt{23}}{4}$
   Miután a pólusok valós része negatív, így a tag aszimptotikusan stabil és így BIBO stabil is.

   (c) $G_3(s) = \dfrac{(s + 1)^3}{4s^2 + s + 2}$
   A megoldás menete:
   Miután az átviteli függvény számlálójának a fokszáma nagyobb, mint a nevezőé, így a tag nem realizálható, azaz nem felel meg valós fizikai rendszer átviteli függvényének.

   (d) $G_4(s) = \dfrac{4}{s^2 + 9}$
   A megoldás menete:
   Az átviteli függvény nevezõje alapján a pólusok:
   $p_{1,2} = \pm j3$
   Miután a pólusok valós része 0, így a tag a stabilitás határán van, azaz BIBO stabil, de nem aszimptotikusan stabil.

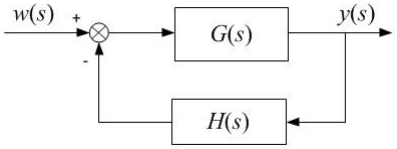
2. Határozza meg az alábbi tagcsoportok stabilitását!

   (a) .

   $G_c(s) = 1 + \dfrac{1}{s} \quad G_c(s) = \dfrac{1}{2s + 1}$
   A megoldás menete:
   A visszacsatolt kör eredõ átviteli függvénye:
   $G_e(s) = \dfrac{s + 1}{2s^2 + 2s + 1}$
   Az eredõ átviteli függvény nevezõje alapján a pólusok:
   $p_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm j\dfrac{1}{2}$
   Miután a pólusok valós része negatív, így a visszacsatolt kör aszimptótikusan stabil és így BIBO stabil.

   (b) .

   $G(s) = 1 + \dfrac{1}{s} \quad H(s) = \dfrac{1}{2s + 1}$

A megoldás menete:
A visszacsatolt kör eredõ átviteli függvénye:
$G_e(s) = \dfrac{2s^2+2s+1}{2s^2+2s+1}$
Az eredõ átviteli függvény nevezõje alapján a pólusok:
$p_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm j\dfrac{1}{2}$
Miután a pólusok valós része negatív, így a visszacsatolt kör aszimptótikusan stabil és így BIBO stabil.

5.2.2. Stabilitás meghatározása Hurwitz-kritérium alapján

1. Döntse el az alábbi tagról, hogy aszimptotikus stabil-e!
$G(s) = \dfrac{4}{s^3+2s^2+3s+4}$
A megoldás menete:
I. felétel, a nevezõben szereplõ együtthatók elõjelének ellenõrzése:
$\forall a_i > 0, \quad i = 0,1,2,3$ teljesül.
II. feltétel, a Hurwitz determináns ellenõrzése:
A Hurwitz determináns a feladatnak megfelelõen felírva

$$H_{3\times 3} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

A fõátlóhoz tartozó aldeterminánsok ellenõrzése:
$\triangle_1 = |a_2| = 2 > 0$,

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2a_1 - a_0a_3$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 4\cdot 1 = 2 > 0 \ ,$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} - a_0 \begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_2(a_1a_0 - a_20) - a_0(a_3a_0 - 0) + 0(a_3a_2 - a_10) = a_0(a_2a_1 - a_0a_3)$$

így
$\triangle_3 = 4(2\cdot 3 - 4\cdot 1) = 8 > 0$
Tehát a Hurwitz kritérium mindkét feltétele teljesült, azaz minden együttható pozitív és a fõátlóhoz tartozó valamennyi aldeterminány (beleértve a teljes mátrix determinánsát) pozitív, így a tag aszimptotikusan stabil és ebbõl következõen BIBO értelemben is stabil. (Megjegyzés: Belátható, hogy 3×3 mátrix esetében elegendõ csak a $\triangle_2$ 2×2 aldeterminánst ellenõrizni.)

2. Csatolja vissza negatívan az alábbi tagot és döntse el, hogy a kapott rendszer aszimptotikus stabil-e!
$G(s) = \dfrac{4}{s^3+2s^2+3s+4}$
A megoldás menete:
A visszacsatolás után kapott zárt kör eredõ átviteli függvénye:
$G_e(s) = \dfrac{G(s)}{1+G(s)} = \dfrac{\frac{4}{s^3+2s^2+3s+4}}{1+\frac{4}{s^3+2s^2+3s+4}} = \dfrac{4}{s^3+2s^2+3s+8}$
Hurwitz kritérium alapján:
I. feltétel: a nevezõ minden együtthatója pozitív, $\forall a_i > 0, \quad i = 0,1,2,3$ teljesül.
II. feltétel, a Hurwitz determináns ellenõrzése: A Hurwitz determináns:

$$H_{3\times 3} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

A főátlóhoz tartozó 2. aldeterminánsellenőrzése (az előző feladat végén tett megjegyzésének megfelelően):

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 a_3$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 8 \cdot 1 = -2 \not> 0$$

Miután a $\triangle_2$ aldeterminánsra nem teljesül az előírt feltétel, ezért a visszacsatolt kör nem lesz aszimptotikusan stabil.

3. Csatolja vissza negatívan az alábbi tagot K erősítéssel, és döntse el, hogy a kapott rendszer milyen K erősítés mellett lesz aszimptotikus stabil!
$G(s) = \dfrac{4}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$
A megoldás menete:
A visszacsatolás után kapott zárt kör eredő átviteli függvénye:
$G_e(s) = \dfrac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \dfrac{K\frac{4}{s^3+2s^2+3s+4}}{1 + K\frac{4}{s^3+2s^2+3s+4}} = \dfrac{4}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4 + 4K}$
Hurwitz kritérium alapján:
I. feltétel: a nevező a_3, a_2, a_1 együtthatója pozitív, az a_0 együttható esetén $4+4K > 0$ azaz $K > -1$ feltételt kell előírni. Azonban a negatív erősítést mellőzve, a feltétel legyen $K > 0$.
II. feltétel, a Hurwitz determináns ellenőrzése: A Hurwitz determináns:

$$H_{3\times 3} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4+4K & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4+4K \end{vmatrix}$$

A főátlóhoz tartozó 2. aldeterminánsellenőrzése:

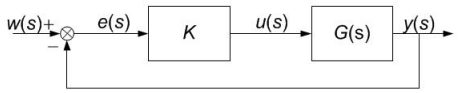
$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 a_3$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4+4K \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (4+4K) = 2 - 4K > 0 \quad ,$$

innen $K < 0,5$. (Belátható, hogy ebben az esetben is elhagyható a $\triangle_1$ és $\triangle_3$ aldeterminánsok ellenőrzése.)
Azaz a visszacsatolt rendszer akkor lesz stabil, ha az erősítés értéke $0 < K < 0,5$ között lesz.

5.2.3. Stabilitásvizsgálat gyökhelygörbe segítségével

1. Határozza meg az alábbi visszacsatolt kör gyökhelygörbéjét és ennek alapján válaszolja meg a további kérédéseket!



$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 4}$$

- Határozza meg a kritikus csillapításhoz tartozó K erősítés értékét!
- Milyen K értéknél lesz az eredő erősítés $K_e = 1$?
- Milyen K értéknél lesz az átmeneti függvény esetén a kimenet eltérése a bemenettől legfeljebb 5%?
- Határozza meg az előző pontban kapott K értéknél a visszacsatolt kör további paramétereit!

A megoldás menete:

(a) A visszacsatolt kör gyökhelygörbéje

- A visszacsatolt kör eredõ átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{2K}{s^2 + 5s + 4 + 2K}$$

- A visszacsatolt kör nevezõje másodfokú polinom, így két pólusa van, és a gyökhelygörbének is két ága lesz.
- Az átviteli függvény nevezõje alapján a felnyitott kör pólusai:

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -4 \ .$$

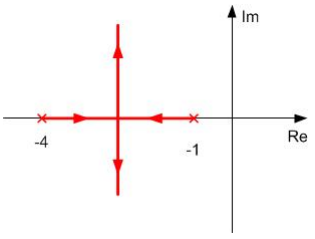
  A gyökhelygörbe két ága a felnyitott kör pólusaiból indul ki, és miután nincs zérushely, ezért mindkét ág a végtelenbe tart.
- A valós tengelyen a $[-4, -1]$ intervallumban lesz gyökhelygörbe szakasz.
- A gyökhelygörbe végtelenbe tartó ágaihoz tartozó érintõk a valós tengellyel

$$\alpha_1 = \frac{1 \cdot 180^\circ}{2} = 90^\circ \text{és} \alpha_2 = \frac{3 \cdot 180^\circ}{2} = 270^\circ$$

  szöget zárnak be.
- A végtelenbe tartó ágak érintõi az

$$S = \frac{(-4) + (-1)}{2} = -2,5$$

  súlypontban metszik egymást.
- Miután a végtelenbe tartó ágak párhuzamosak a képzetes tengellyel, így a tag tetszõleges erõsítés mellett aszimptotikusan stabil marad.



(b) Határozza meg a kritikus csillapításhoz tartozó K erõsítés értékét!
Kritikus csillapítása ott lesz a rendszernek, ahol a visszacsatolt kör ξ_e eredõ csillapítási tényezõjének az értéke 1. A gyökhelygörbén ez a pont ott található, ahol a két pólus egybeesik, azaz kétszeres gyököt kapunk, vagyis ahol a gyökhelygörbe kilép a valós tengelybõl. Ebben a pontban a pólusokat meghatározó képletben a diszkrimináns értéke 0 lesz, amibõl K értéke meghatározható:

$$p_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(4 + 2K)}}{2}$$

$$25 - 4(4 + 2K) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 1,125$$

Ekkor a visszacsatolt rendszer eredõ erõsítése, vagyis a hurok átviteli tényezõ értéke:

$$G_e(s) = \frac{2 \cdot 1,125}{s^2 + 5s + 4 + 2 \cdot 1,125} \quad \Rightarrow \quad K_e = 0,36 \ .$$

(c) Milyen K értéknél lesz az eredõ erõsítés $K_e = 1$?
Ha a visszacsatolt kör eredõ erõsítése, azaz hurok átviteli tényezõje 1, akkor az átmeneti függvényének 1-hez kell tartania. A végértéktétel alapján:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)U(s) \ .$$

Kihasználva, hogy ha $u(t) = 1(t)$, akkor $U(s) = \frac{1}{s}$:

$$\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2K}{s^2 + 5s + 4 + 2K} \ .$$

A gyökhelygörbe vizsgálata során beláttuk, hogy a visszacsatolt rendszer tetszõleges K erõsítés esetén stabil, így a határérték meghatározása elvégezhetõ:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = ... = \lim_{s\to 0} \frac{2K}{s^2 + 5s + 4 + 2K} = \frac{K}{2 + K} \ .$$

Az $y(t)$ kimenet csak akkor tart 1-hez, ha a visszacsatolt körben szereplõ erõsítés értéke $K \to \infty$.

(d) Milyen K értéknél lesz az átmeneti függvény esetén a kimenet eltérése a bemenettõl legfeljebb 5%?
Ahhoz, hogy egységugrás bemenet esetén a kimenet legalább 0,95-ös értéket vegyen fel, az eredõ erõsítésnek az elõzõ kérdésnél levezetetteknek megfelelõen legalább 0,95-nek kell lennie. Így

$$K_e = 0,95 = \frac{2}{4 + 2K} \quad \Rightarrow \quad K = 38 \ .$$

(e) Határozza meg az elõzõ pontban kapott K értéknél a visszacsatolt kör további paramétereit!
A visszacsatolt kör átviteli függvénye $K = 38$ esetén

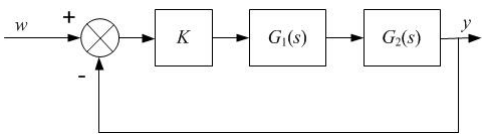
$$G_e(s) = \frac{76}{s^2 + 5s + 80} = \frac{K_e\omega_{n,e}^2}{s^2 + 2\xi_e\omega_{n,e}s + \omega_{n,e}^2}$$

Innen

$$\omega_{n,e} = 8,94, \quad \xi_e = 0,28 \ ,$$

tehát a tag a kicsi eredõ csillapítási tényezõ miatt jelentõs túllendüléssel, de a nagy természetes frekvencia miatt viszonylag gyorsan beáll az erõsítés által meghatározott végértékre.

2. Határozza meg az alábbi visszacsatolt kör gyökhelygörbéjét!



$$G_1(s) = 1 + \frac{1}{s} \ , \quad G_2(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

– Határozza meg a kritikus csillapításhoz tartozó K erõsítés értékét!
– Milyen K értéknél lesz az eredõ erõsítés $K_e = 1$?

A megoldás menete:

(a) A visszacsatolt kör gyökhelygörbéje

– A visszacsatolt kör eredõ átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{K(s+1)}{2s^2 + (K+1)s + K}$$

– A visszacsatolt kör nevezõje másodfokú polinom, így két pólusa van, és a gyökhelygörbének is két ága lesz.

– Az átviteli függvény nevezõje alapján a felnyitott kör pólusai:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -\frac{1}{2} .$$

A számláló polinomja alapján a visszacsatolt kör zérushelye:

$$z_1 = -1$$

A visszacsatolt kör pólusai K függvényében:

$$p_{v;1,2} = \frac{-(K+1) \pm \sqrt{(K+1)^2 - 8K}}{4}$$

A gyökhelygörbének tehát két ága lesz, melyek a felnyitott kör pólusaiból indulnak ki. Az erõsítés növelésével az egyik ág a $-\infty$-be, a másik a felnyitott kör zérushelyébe tart.

– A valós tengelyen a $]-\infty, -1]$ és $[-0,5, 0]$ intervallumokban lesznek gyökhelygörbe szakaszok.

– A gyökhelygörbe végtelenbe tartó ágához tartozó érintõ a valós tengellyel

$$\alpha_1 = \frac{1 \cdot 180^\circ}{1} = 180^\circ$$

szöget zár be, azaz a végtelenbe tartó ág a valós tengely mentén haladva tart a $-\infty$-be.

– Az egy végtelenbe tartó ág miatt nem lesz súlypont.

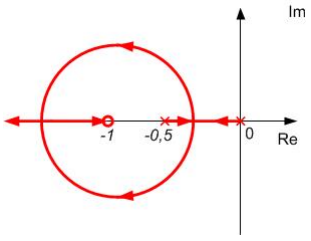
– A visszacsatolt pólusokat meghatározó képlet alapján belátható, hogy tetszõleges pozitív K erõsítés esetén a visszacsatolt körnek negatív valós vagy negatív valós részû gyökei vannak, így a visszacsatolt rendszer aszimptotikusan stabil.

– A gyökhelygörbe ott kilép a valós tengelybõl, ahol a pólusokat meghatározó képlet diszkriminánsa zérus:

$$K^2 - 6K + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 0,17 \;\text{ és }\; K_2 = 5,83$$

. A valós tengelyen meghatározott gyökhelygörbe szakaszok alapján K_1 kilépési pont lesz, míg a K_2 visszatérési pont. A pontok koordinátái:

$$s_1 = -0,29 \;\text{ és }\; s_2 = -1,71 .$$



(b) Határozza meg a kritikus csillapításhoz tartozó K erõsítés értékét!
Kritikus csillapítása ott lesz a rendszernek, ahol a visszacsatolt kör ξ_e eredõ csillapítási tényezõjének az értéke 1. A gyökhelygörbén ez a pont ott található, ahol a két pólus egybeesik, azaz kétszeres gyököt kapunk, vagyis ahol a gyökhelygörbe kilép a valós tengelybõl. Ezek pontok a gyökhelygörbe tulajdonságainál levezetetteknek megfelelõen $K_1 = 0,17$ erõsítésnél az $s_1 = -0,2$ pont és a $K_2 = 5,83$ erõsítésnél a $s_2 = -1,71$ pont.

(c) Milyen K értéknél lesz az eredõ erõsítés $K_e = 1$?
A visszacsatolt kör eredõ átviteli függvény alapján belátható, hogy tetszõleg $K > 0$ értéknél a hurok átviteli tényezõ, vagyis az eredõ erõsítés értéke 1.

3. Végezze el a kiterjesztett gyökhelygörbe vizsgálatot az alábbi szabályozó körre!

$$\begin{aligned} G_P(s) &= K_P \\ G_I(s) &= \frac{K_I}{s} \\ G_o(s) &= \frac{1}{s^2+3s+2} \end{aligned}$$

Az integráló tag vizsgálatához válasszon olyan erõsítést, ahol a visszacsatolt kör csillapítási tényezõje 0,5!

A megoldás menete:

(a) Elsõ lépésként határozzuk meg a szabályozott objektum paramétereit:

$$G_o(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{0,5}{0,5s^2+1,5s+1}$$

azaz az objektum erõsítése $K_o = 0,5$, idõállandója $T_o = \sqrt{0,5} = 0,707$ és csillapítási tényezõje $\xi_o = 1,06$.
Ha csak a szabályozó erõsítõ tagjának a hatását kívánjuk vizsgálni, akkor írjuk fel az eredõ átviteli függvényt az integráló tag figyelembe vétele nélkül:

$$G_e^1(s) = \frac{G_P(s)G_o(s)}{1+G_P(s)G_o(s)} = \frac{K_P}{s^2+3s+2+K_P}$$

A gyökhelygörbe felvázolását végezzük el a tulajdonságai alapján:

i. A gyökhelygörbének két ága lesz, mivel a visszacsatolt rendszer nevezõjében másodfokú polinom szerepel.
ii. (szimmetria a valós tengelyre)
iii. A felnyitott kör pólusainak száma $n = 2$; melyek a $p_1 = -1$ és $p_2 = -2$ pontokban találhatók, és nincs zérusa, azaz $m = 0$. Ennek megfelelõen gyökhelygörbe mindkét ága a felnyitott kör pólusaiból fog kiindulni és a végtelenbe fognak tartani.
iv. A valós tengelyen csak a $[-2,-1]$ intervallumban lesz gyökhelygörbe szakasz, mivel csak itt teljesül, hogy a valós tengely egy adott pontjától jobbra a pólusok és zérusok együttes száma páratlan.
v. A végtelenbe tartó ágak iránytangenseinek meghatározása:

$$\alpha_i = \frac{l \cdot 180^\circ}{n-m}, \quad \text{ahol} l = 1,3,\ldots,2(n-m)-1$$

általános képlet alapján:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1 \cdot 180^\circ}{2} = 90^\circ \\ \alpha_2 &= \frac{3 \cdot 180^\circ}{2} = 270^\circ \end{aligned}$$

azaz a gyökhelygörbe két ága párhuzamos lesz a képzetes tengellyel.
vi. A végtelenbe tartó ágak érintõi a súlypontban metszik egymást. Ennek meghatározás az általános képlet alapján:

$$S = \frac{\sum \mathrm{Re}p_i - \sum \mathrm{Re}z_i}{n-m} = \frac{(-1)+(-2)}{2} = -1,5$$

vii. A gyökhelygörbe ágak és a képzetes tengely metszéspontjának meghatározására, azaz Hurwitz-kritériummal történõ stabilitásvizsgálatra ebben a rendszerben nincs szükség.

viii. A gyökhelygörbe valós tengelybõl való kilépési pontjának meghatározása:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-p_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{x-z_j} = 0$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0$$

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x+3} = 0, \quad \Rightarrow x = 1,5.$$

A tag másodrendû jellege miatt a súlypont és a kilépési pont megegyezik, és ehhez a ponthoz tartozik a kritikus csillapítási tényezõ is, azaz itt lesz az visszacsatolt kör csillapítási tényezõjének értéke $\xi_e = 1$. Az ehhez tartozó erõsítési érték meghatározása:

– A visszacsatolt kör karakterisztikus egyenlete:

$$s^2 + 3s + 2 + K_P = 0$$

– A kilépési pontban kétszeres valós gyököket kapunk, ezért a gyökökre felírt megoldó képlet diszkriminánsának zérusnak kell lennie:

$$p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2+K_P)}}{2}$$

$$9 - 4(2+K_P) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_P = 0,25$$

– Ugyanezt az értéket kapjuk, ha a visszacsatolt kör paramétereinek a meghatározásából indulunk ki:

$$G_e(s) = \frac{K_P}{s^2 + 3s + 2 + K_P} = \frac{\frac{K_P}{2+K_P}}{\frac{1}{2+K_P}s^2 + \frac{3}{2+K_P}s + 1}$$

Innen az eredõ csillapítási tényezõ:

$$2T_e\xi_e = \frac{3}{2+K_P}$$

Behelyettesítve az idõállandót és $\xi_e = 1$ értéket:

$$2\frac{1}{\sqrt{2+K_P}} = \frac{3}{2+K_P}$$

$$\sqrt{2+K_P} = 1,5 \quad \Rightarrow \quad K_P = 0,25$$

ix. A kiindulási pólusok között nincs komplex, így a kilépési szöget nem kell meghatározni.

(b) Határozzuk meg azt az erõsítést, amelynék a visszacsatolt kör csillapítás $\xi_e = 0,5$! A megoldás megegyezik az elõzõekkben bemutatott $\xi_e = 1$ értékhez tartozó erõsítés meghatározásának menetével:

$$G_e(s) = \frac{K_P}{s^2 + 3s + 2 + K_P} = \frac{\frac{K_P}{2+K_P}}{\frac{1}{2+K_P}s^2 + \frac{3}{2+K_P}s + 1}$$

Innen az eredõ csillapítási tényezõ:

$$2T_e\xi_e = \frac{3}{2+K_P}$$

Behelyettesítve az idõállandót és $\xi_e = 0,5$ értéket:

$$\frac{1}{\sqrt{2+K_P}} = \frac{3}{2+K_P}$$

$$\sqrt{2+K_P}=3 \quad \Rightarrow \quad K_P=7$$

A kiszámolt erõsítési értékhez tartozó gyökhelygörbe pontok, azaz a visszacstolt kör pólusai $K_P=7$ esetén:

$$s^2+3s+2+K_P=s^2+3s+7=0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2}=-1,5\pm j1,5\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) Az integráló tag paraméterének vizsgálatához írjuk fel a visszacsatolt szabályozási kör eredõ átviteli függvényét valamennyi tag figyelembe vételével:

$$G_e(s)=\frac{(G_P(s)+G_I(s))G_o(s)}{1+(G_P(s)+G_I(s))G_o(s)}=\frac{(K_P+\frac{K_I}{s})}{\frac{1}{s^2+3s+2}}=\frac{K_Ps+K_I}{s^3+3s^2+(2+K_P)s+K_I}$$

Behelyettesítve az elõzõ pontban kiszámolt $K_P=7$ értéket, a gyökhelygörbe vizsgálatot az alábbi átviteli függvényre kell elvégezni:

$$G_e(s)=\frac{7s+K_I}{s^3+3s^2+9s+K_I}$$

Rendezzük át ezt az átviteli függvényt az összefoglaló részben leírt módon ekvivalens alakra K_I vizsgálatához:

$$G_e(s)=\frac{\frac{7s+K_I}{s^3+3s^2+9s}}{1+\frac{K_I}{s^3+3s^2+9s}}$$

innen az ekvivalens tag:

$$G_{ekv}^{K_P=7}=\frac{K_I}{s(s^2+3s+9)}$$

Az ekvivalens tag meghatározása után következhet a gyökhelygörbe felvázolása tulajdonságai segítségével:

i. A kiterjesztett gyökhelygörbének három ága lesz, mivel az integráló tag hatására egy, az origóban elhelyezkedõ pólus jelenik meg visszacsatolt rendszer nevezõjében.

ii. (szimmetria a valós tengelyre)

iii. A felnyitott kör pólusainak száma $n=3$; melyek a $p_1=0$ és $p_{2,3}=-1,5\pm j2,6$ pontokban találhatók, $p_{2,3}$ az erõsítés alapján felvett gyökhelygörbe ágain. Zérus nincs, azaz $m=0$. Ennek megfelelõen gyökhelygörbe mindhárom ága a felnyitott kör pólusaiból fog kiindulni és a végtelenbe fognak tartani.

iv. A valós tengelyen a $]-\infty,0]$ intervallumban lesz gyökhelygörbe szakasz, mivel csak itt teljesül, hogy a valós tengely egy adott pontjától jobbra a pólusok és zérusok együttes száma páratlan.

v. A végtelenbe tartó ágak iránytangenseinek meghatározása:

$$\alpha_i=\frac{l\cdot 180^\circ}{n-m}, \quad \text{ahol} l=1,3,\ldots,2(n-m)-1$$

általános képlet alapján:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1\cdot 180^\circ}{3}=60^\circ\\ \alpha_2 &= \frac{3\cdot 180^\circ}{3}=180^\circ\\ \alpha_3 &= \frac{5\cdot 180^\circ}{3}=300^\circ\end{aligned}$$

azaz a gyökhelygörbe második ága a valós tengely mentén tart a $-\infty$-be, míg a másik két a képzetes tengelyt metszve tart szintén a végtelenbe.

vi. A végtelenbe tartó ágak érintõi a súlypontban metszik egymást. Ennek meghatározás az általános képlet alapján:

$$S = \frac{\sum \mathrm{Re} p_i - \sum \mathrm{Re} z_i}{n-m} = \frac{0 + (-1) + (-2)}{3} = -1$$

vii. A stabilitásvizsgálathoz induljunk ki az eredeti, tehát az ekvivalens átalakítás elötti átviteli függvény nevezõjébõl.

$$s^3 + 3s^2 + 9s + K_I = 0$$

Hurwitz-kritérium elsõ feltétele, hogy a karakterisztikus polinom minden együthatója legyen pozitív, itt csak a konstans esetében kell kikötni: $K_I > 0$, de figyelembe véve a gyakorlat adta feltételeket, ez triviálisan teljesül, hiszen az idõállandó nem lehet negatív mennyiség. A második feltétel a determináns felírása és ellenõrzése:

$$H_{3\times 3} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & K_I & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & K_I \end{vmatrix}$$

A fõátlóhoz tartozó 2. aldeterminánsellenõrzése:

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 a_3$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 3 & K_I \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot -1 \cdot K_I > 0$$

Innen $K_I < 27$.

viii. A gyökhelygörbe nem lép ki valós tengelybõl, így nincs szükség a kilépési pontok meghatározására.

ix. A kiindulási pólusok között van egy konjugélt komplex gyökpár, így ezek kilépési szögének meghatározás:

$$\delta_1 = 120^\circ, \quad \delta_2 = \text{a keresett kilépési szög}, \quad \delta_3 = 90^\circ$$

$$-(120^\circ + \delta_2 + 90^\circ) = -3 \cdot 180^\circ \quad \Rightarrow \delta_2 = 330^\circ$$

Az 5.1 ábra tartalmazza a vizsgálat eredményét: barna színnel látható a csak erõsítés esetén felvázolt gyökhelygörbe, míg kék görbék a kiterjesztett gyökhelygörbe menetét mutatják.

5.3. Gyakorló feladatok

5.3.1. Stabilitás meghatározása pólusok közvetlen meghatározása alapján

1. Határozza meg az alábbi tagok stabilitását mindkét stabilitási definíciónak megfelelõen!

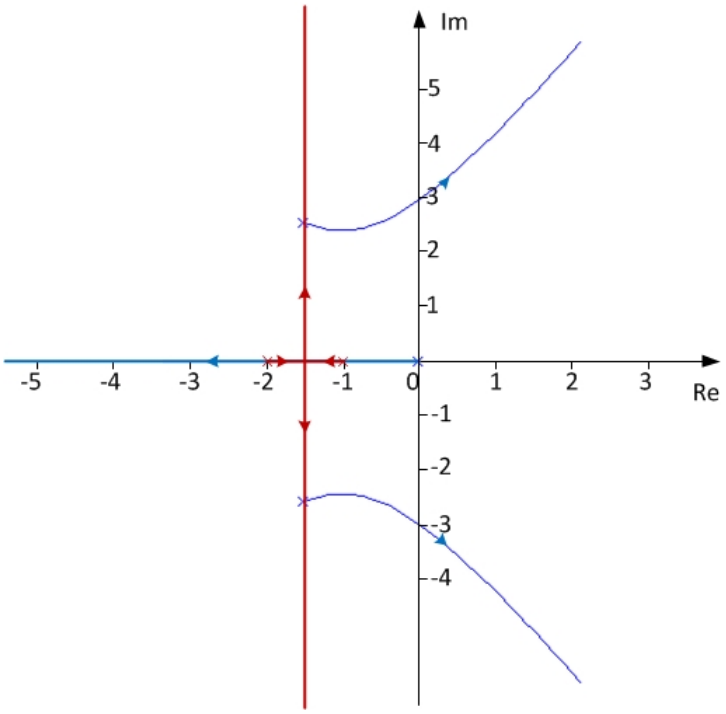
(a) $G_1(s) = \dfrac{2s^2 - 3}{s^2 - 4}$

(b) $G_2(s) = \dfrac{2s - 3}{s^2 + 4s + 6}$

(c) $G_3(s) = \dfrac{2s}{4s^2 + 2s}$

(d) $G_4(s) = \dfrac{2s^3 - 3}{4s^2 + 2s + 3}$

(e) $G_5(s) = \dfrac{2s + 1}{4s^2 + 2}$



5.1. ábra. Kiterjesztett gyökhelygörbe

(f) $G_6(s) = \dfrac{3}{4s^2 - 2s + 2}$

(g) $G_7(s) = \dfrac{2}{4s^3 + 3s^2 + 2s}$

(h) $G_8(s) = \dfrac{6s}{8s^2 - 2}$

2. Határozza meg a $8y^{(2)}(t) + 10y^{(1)}(t) + 2y(t) = 6u^{(2)}(t) + 4u^{(1)}(t) + 6u(t)$ bemenet/kimenet modellel jellemzett rendszer stabilitását!

3. Határozza meg az alábbi tagok stabilitását!

$$G_1(s) = \frac{1}{2s}, \qquad G_2(s) = \frac{3}{2s+1}$$

Csatolja sorba a két tagot, majd a kapott tagcsoportot csatolja vissza negatívan, és határozza meg a zárt kör stabilitását!

4. Határozza meg a $4y^{(2)}(t) + 16y^{(1)} + y(t) = u^{(1)} + 5u(t)$ bemenet/kiemenet modellel jellemzett rendszer stabiltását! Határozza meg erõsítését, csillapítási tényezõjét, természetes frekvenciáját, és vázolja fel a súlyfüggvényét!

5. Határozza meg a $2y^{(2)}(t) + 8y^{(1)} + 32y(t) = 6,4u(t)$ bemenet/kiemenet modellel jellemzett rendszer stabiltását! Határozza meg erõsítését, csillapítási tényezõjét, természetes frekvenciáját, és vázolja fel az átmeneti függvényét!

5.3.2. Stabilitás meghatározása Hurwitz kritérium alkalmazásával

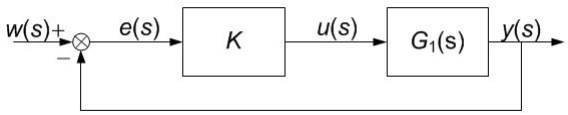
Határozza meg az alábbi tagok stabilitását a Hurwitz kritérium segítségével!

1. (a) Határozza meg az alábbi tag stabilitását!

$$G_1(s) = \frac{4}{4s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

(b) Csatolja vissza negatívan a tagot, és határozza meg így is a stabilitást!

(c) Csatolja vissza a tagot K erõsítéssel az alábbi ábrának megfelelõen, és határozza meg, hogy milyen erõsítési tartományban lesz stabil a visszacsatolt kör!



2. (a) Határozza meg az alábbi tag stabilitását:

$$G_2(s) = \frac{4s+1}{4s^3+3s^2+2s+1}$$

(b) Csatolja vissza negatívan a tagot, és határozza meg így is a stabilitást!

(c) Csatolja vissza a tagot K erõsítéssel az 1. példabeli ábrának megfelelõen, és határozza meg, hogy milyen erõsítési tartományban lesz stabil a visszacsatolt kör!

3. (a) Határozza meg az alábbi tag stabilitását:

$$G_3(s) = \frac{4s+2}{2s^4+4s^3+3s^2+2s+1}$$

(b) Csatolja vissza negatívan a tagot, és határozza meg így is a stabilitást!

(c) Csatolja vissza a tagot K erõsítéssel az 1. példabeli ábrának megfelelõen, és határozza meg, hogy milyen $-\infty < K < \infty$ erõsítési tartományban lesz stabil a visszacsatolt kör!

4. (a) Határozza meg az alábbi tagok stabilitását!

$$G_1(s) = \frac{3}{6s}, \quad G_2(s) = \frac{3}{4s^2+2s+1}$$

(b) Csatolja sorba a két tagot, majd a kapott tagcsoportot csatolja vissza negatívan, és határozza meg a zárt kör stabilitását!

(c) Legyen a G_1 tag átviteli függvénye:

$$G_1(s) = \frac{1}{T_I s},$$

és határozza meg milyen T_I értékre lesz stabil a rendszer!

5. (a) Csatolja *párhuzamosan* a két tagot, majd a kapott tagcsoportot csatolja vissza negatívan, és határozza meg a zárt kör stabilitását!

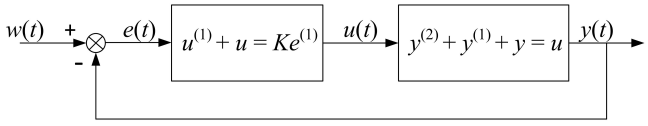
$$G_1(s) = \frac{3}{6s}, \quad G_2(s) = \frac{3}{4s^2+2s+1}$$

(b) Tegyen a visszacsatolt kör elõremenõ ágába egy K erõsítõ tagot, és határozza meg, hogy milyen értékeire lesz a rendszer stabil!

6. Mekkora lesz az alábbi tagnál a stabilitás határán a k értéke?

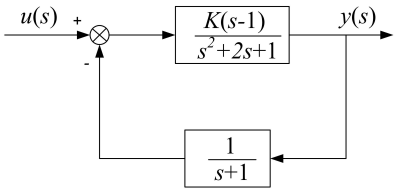
$$G_1(s) = \frac{4}{4s^3+3s^2+2s+k}$$

7. Tekintse az alábbi rendszert:



Adja meg, hogy milyen K értékre lesz a rendszer aszimptotikusan stabil!

8. Adja meg, hogy az alábbi kör milyen erõsítés érték esetén lesz a csillapítás határán!



5.3.3. Stabilitás meghatározása gyökhelygörbe alapján

1. Vázolja fel a $8y^{(2)}(t) + 10y^{(1)}(t) + 2y(t) = 6u(t)$ bemenet/kiemenet modellel jellemzett rendszer átmeneti függvényét és gyökhelygörbéjét!

2. Rajzolja fel annak a tagnak a gyökhelygörbéjét, amelynek a felnyitott kör pólusai -1 és -3-ban, zérushelye pedig -2-ben van! Adja meg az átviteli függvényt is!

3. Vázolja fel az alábbi tag gyökhelygörbéjét!

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s^2+s+1)}$$

   Mit tud mondani a visszacsatolt tag stabilitásáról?

4. Vázolja fel az alábbi tag gyökhelygörbéjét! Mit tud megállapítani a zárt kör stabilitásáról?

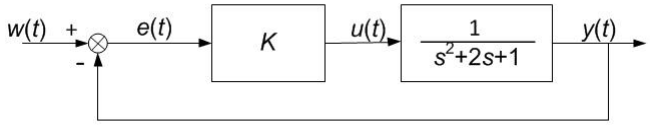
$$G(s) = \frac{0.8s}{(s^2+s+4)(s+0.2)}$$

5. (a) Adja meg annak a tagnak az I/O modelljét, amelyiknek a pólusai $-2 \pm j$-ben, zérushelyei pedig -1-ben és -2-ben vannak!

   (b) Rajzolja fel a tag gyökhelygörbéjét!

   (c) Adja meg a kritikus csillapításnál az erõsítés és a pólusok értékét!

6. Tekintse az alábbi rendszert!



   (a) Rajzolja fel a rendszer gyökhelygörbéjét!

   (b) Mennyi K értéke, ha a zárt kör pólusai $-1 \pm j2$?

7. Vázolja fel annak a rendszernek a gyökhelygörbéjét, amelynél a felnyitott kör pólusai $-4 \pm j$-ben, zérushelye pedig -2-ben van! Adja meg a tag I/O modelljét!

8. Vázolja fel az alábbi tag gyökhelygörbéjét! Mit tud megállapítani a zárt kör stabilitásáról?

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

5.3.4. Megoldások

Stabilitás meghatározása pólusok közvetlen meghatározása alapján

1. (a) $p_{1,2} = \pm 2 \;\rightarrow$ egyik gyök pozitív valós, a tag instabil.

   (b) $p_{1,2} = -2 \pm j\frac{\sqrt{10}}{2} \;\rightarrow$ negatív valós részû komplex gyökpár, a tag aszimptotikusan stabil, és így BIBO stabil is.

   (c) $p_{1,2} = -\frac{1}{2} \;\rightarrow$ negativ valós gyök, a tag aszimptotikusan stabil, és így BIBO stabil is.

   (d) A számláló fokszáma nagyobb, mint a nevezõé, ezért a tag nem realizálható.

   (e) $p_{1,2} = \pm j\frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow$ nulla valós részû komplex gyökpár, a tag aszimptotikusan nem stabil, de BIBO stabil.

   (f) $p_{1,2} = \frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{28}}{2} \;\rightarrow$ pozitív valós részû komplex gyökpár, a tag instabil.

   (g) $p_{1,2} = -\frac{3}{8} \pm j\frac{\sqrt{23}}{8} \;\rightarrow$ negatív valós részû komplex gyökpár, a tag aszimptotikusan stabil, és így BIBO stabil is.

   (h) $p_{1,2} = \pm\frac{1}{2} \;\rightarrow$ egyik gyök pozitív valós, a tag instabil.

2. $p_1 = -\frac{1}{2}, \quad p_2 = -\frac{3}{4} \;\rightarrow$ két negativ valós gyök, a tag aszimptotikusan stabil, és így BIBO stabil is.

3. $p_{G_1} = 0 \;\rightarrow$ 0 gyök, a tag BIBO stabil, de aszimptotikusan nem stabil.
   $p_{G_2} = -\frac{1}{2} \;\rightarrow$ negativ valós gyök, a tag aszimptotikusan stabil, és így BIBO stabil is.

   $$G_e(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{3}{4s^2 + 2s + 3}$$

   $p_{\text{eredõ},1,2} = -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{11}}{2} \;\rightarrow$ negatív valós részû komplex gyökpár, a visszacsatolt rendszer aszimptotikusan stabil, és így BIBO stabil is.

4. $G(s) = \frac{s+5}{4s^2 + 16s + 1}$, $\quad K = 5, \;\; T = 2 \;/\; \omega_n = \frac{1}{2}$, $\quad \xi = 4, \quad T_{sz} = 0,2$
   Pólusok: $p_1 = -3,936; \;\; p_2 = -0,064 \;\rightarrow$ két negatív valós pólus, a tag aszimptotikusan stabil, és így BIBO stabil is.
   A súlyfüggvény lefutása az elsõrendû tagokéhoz hasonló a számláló zérusa miatt.

5. $G(s) = \frac{6,4}{2s^2 + 8s + 32} = \frac{3,2}{s^2 + 4s + 16}$, $\quad K = 0,5, \;\; T = \frac{1}{4} \;/\; \omega_n = 4$, $\quad \xi = 0,5$
   Pólusok: $p_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3}; \;\; \rightarrow$ negatív valós részû komplex gyökpár a pólus, a tag aszimptotikusan stabil, és így BIBO stabil is.
   Az átmeneti függvény lefutása: felfutási szakaszon van inflexiós pont, és túllendüléssel áll be az erősítés által meghatározott értékhez.

Stabilitás meghatározása Hurwitz kritérium alkalmazásával

1. (a) A tag aszimptotikusan stabil.

   (b) A visszacsatolt kör instabil.

   (c) $0 < K < \frac{1}{8}$ értékekre lesz a visszacsatolt kör szimptotikusan stabil.

2. (a) A tag aszimptotikusan stabil.

   (b) A visszacsatolt kör aszimptotikusan stabil.

   (c) $0 < K < 2$ értékekre lesz a visszacsatolt kör szimptotikusan stabil.

3. (a) A tag BIBO stabil.
   (b) A visszacsatolt kör instabil.
   (c) Nincs olyan $K > 0$ érték, amire a visszacsatolt kör stabil lenne, de $-0,5 < K < 0$-ra igen.

4. (a) A G_1 tag BIBO stabil, a G_2 tag aszimptotikusan stabil.
   (b) A visszacsatolt kör instabil.
   (c) $T_I > 6$ értékekre lesz a visszacsatolt kör aszimptotikusan stabil.

5. (a) A visszacsatolt kör stabil.
   (b) Tetszõleges $K > 0$ értékre a visszacsatolt kör aszimptotikusan stabil.

6. A tag $0 < k < 1,5$ értékek esetén stabil.

7. A visszacsatolt kör eredõ átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{Ks}{s^3 + 2s^2 + (2+K)s + 1}$$

   A kör tetszõleges K érték esetén stabil.

8. A visszacsatolt kör eredõ átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{Ks + K}{s^3 + 3s^2 + (3+K)s + 1 + K}$$

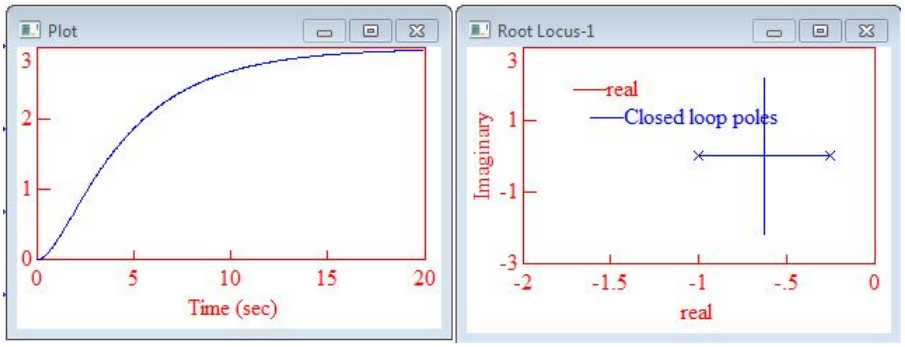
   A kör tetszõleges K érték esetén stabil.

Stabilitás meghatározása gyökhelygörbe alapján

1. Az ábrázolandó átviteli függvény:

$$G(s) = \frac{3}{(4s+1)(s+1)}$$

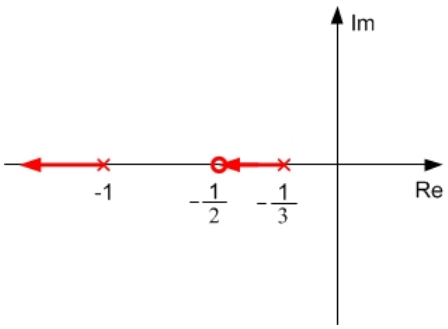
   A tag paraméterei $K = 3,\ T = 2,\ \xi = 1,25$, pólusai $p_1 = -0,25,\ p_2 = -1$. Az átmeneti függvény és a gyökhelygörbe:



2. Az ábrázolandó átviteli függvény:

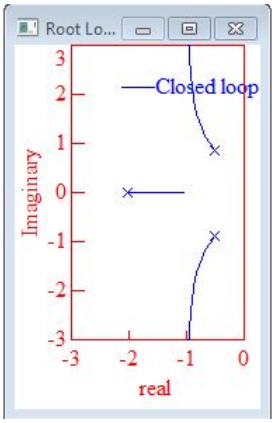
$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

   A tag gyökhelygörbéje:



3. – A tag zérusa: $z = -1$, pólusai: $p_1 = -2, p_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   – A gyökhelygörbe a felnyitott kör pólusaiból indul ki, és egy ág a zérusba, két ág a végtelenbe tart.
   – A valós tengelyen csak a $[-2, -1]$ tartományban van gyökhelygörbe szakasz.
   – A végtelenbe tartó ágak érintõinek meredeksége 90° és 270°.
   – A gyökhelygörbe súlypontja (a végtelenbe tartó ágak érintõinek metszéspontja): -1.
   – A gyökhelygörbe nem metszi a képzetes tengelyt, így nincs kritikus erõsítés.
   – A gyökhelygörbének nincs kilépési pontja.
   – A komplex pólusokból kiinduló ágak kilépési szöge: 120°, illetve 240°.

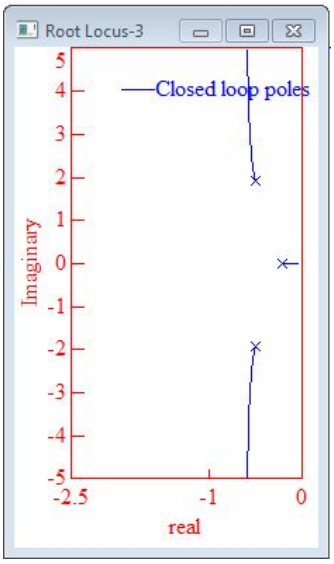
   A tag gyökhelygörbéje:



   A visszacsatolt rendszer tetszõleges pozitív erõsítés érték mellett stabil marad.

4. – A tag zérusa: $z = 0$, pólusai: $p_1 = -0,2, p_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{15}}{2}$.
   – A gyökhelygörbe a felnyitott kör pólusaiból indul ki, és egy ág a zérusba, két ág a végtelenbe tart.
   – A valós tengelyen csak a $[-0, 2, 0]$ tartományban van gyökhelygörbe szakasz.
   – A végtelenbe tartó ágak érintõinek meredeksége 90° és 270°.
   – A gyökhelygörbe súlypontja (a végtelenbe tartó ágak érintõinek metszéspontja): -0,6.
   – A gyökhelygörbe nem metszi a képzetes tengelyt, így nincs kritikus erõsítés.
   – A gyökhelygörbének nincs kilépési pontja.
   – A komplex pólusokból kiinduló ágak kilépési szöge: 96°, illetve 264°.

   A tag gyökhelygörbéje:



A visszacsatolt rendszer $K \to \infty$ esetén BIBO stabil lesz, egyébként aszimptótikusan stabil.

5. A vizsgálandó tag átviteli függvénye és I/O modellje:

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+2+j)(s+2-j)} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+5}$$

$$y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t) + 5y(t) = u^{(2)}(t) + 3u^{(1)}(t) + 2u(t)$$

A tag zérusai: $z_1 = -1,\ z_2 = -2$, pólusai: $p_{1,2} = -2 \pm j$.

– A gyökhelygörbe a felnyitott kör pólusaiból indul ki, és mind a két ág a felnyitott kör zérusaiba tart.

– A valós tengelyen csak a $[-2, -1]$ tartományban van gyökhelygörbe szakasz.

– A végtelenbe tartó ágak érintõinek meredeksége: nincs végtelenbe tartó ág.

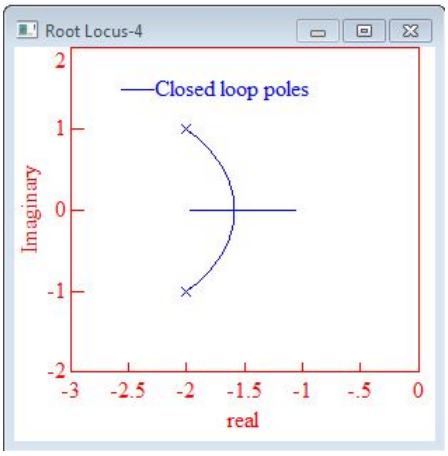
– A gyökhelygörbének nincs súlypontja.

– A gyökhelygörbe nem metszi a képzetes tengelyt, így nincs kritikus erõsítés.

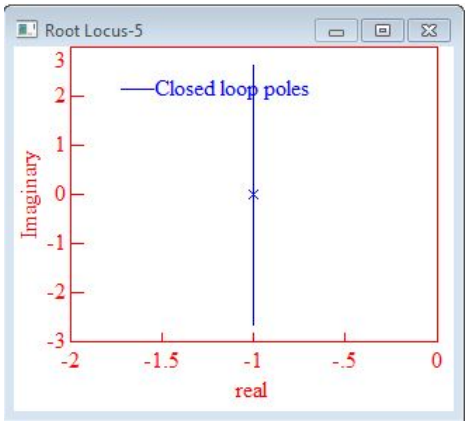
– A gyökhelygörbének kilépési pontja visszatérési pont, $K \geq 4,82$ esetén negatív valós gyököket kapunk, azaz a csillapítási tényezõ értéke nagyobb lesz 1-nél. A pólusok értéke itt -1,6.

– A komplex pólusokból kiinduló ágak kilépési szöge: 297°, illetve 63°.

A tag gyökhelygörbéje:



6. A tag gyökhelygörbéje:



A megadott pólusnál az erõsítés értéke: $K = 4$

7. A vizsgálandó tag átviteli függvénye és I/O modellje:

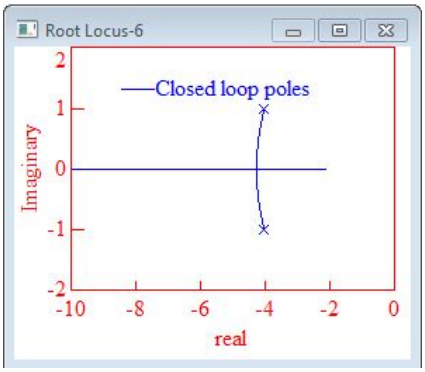
$$G(s) = \frac{s+2}{(s+4+j)(s+4-j)} = \frac{s+2}{s^2+8s+17}$$

$$y^{(2)}(t) + 8y^{(1)}(t) + 17y(t) = u^{(1)}(t) + 2u(t)$$

A tag zérusa: $z = -2$, pólusai: $p_{1,2} = -4 \pm j$.

- A gyökhelygörbe a felnyitott kör pólusaiból indul ki, és az egyik ág a felnyitott kör zérusába, a másik a végtelenbe tart.
- A valós tengelyen a $]-\infty, -2]$ tartományban van gyökhelygörbe szakasz.
- A végtelenbe tartó ág érintõjének meredeksége: 180°.
- A gyökhelygörbének nincs súlypontja.
- A gyökhelygörbe nem metszi a képzetes tengelyt, így nincs kritikus erõsítés.
- A gyökhelygörbének kilépési pontja visszatérési pont, $K \geq 0,47$ esetén negatív valós gyököket kapunk, azaz a csillapítási tényezõ értéke nagyobb lesz 1-nél. A pólusok értéke itt -4,2.
- A komplex pólusokból kiinduló ágak kilépési szöge: $243,5°$, illetve $116,5°$.

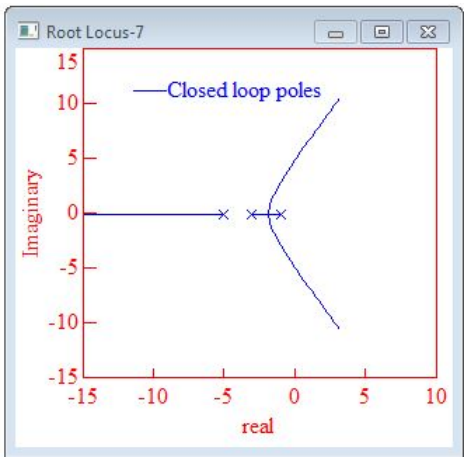
A tag gyökhelygörbéje:



8.
- A tagnak nincs zérusa, pólusai: $p_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = -3$.
- A gyökhelygörbe a felnyitott kör pólusaiból indul ki, és min a három ág a végtelenbe tart.
- A valós tengelyen a $]-\infty, -5]$ és a $[-3, -1]$ intervallumokban vannak gyökhelygörbe szakaszok.
- A végtelenbe tartó ágak érintõinek meredeksége 60°, 180° és 300°.
- A gyökhelygörbe súlypontja (a végtelenbe tartó ágak érintõinek metszéspontja): -3.

- A gyökhelygörbe metszi a képzetes tengelyt, a kritikus erősítés értéke, vagyis ahol a visszacsatolt kör a stabilitás határán van: $K = 192$.
- A gyökhelygörbének egy kilépési pontja van, melynek koordinátája $x = -1,84$.
- A gyökhelygörbének nincs komplex pólusa.

A tag gyökhelygörbéje:



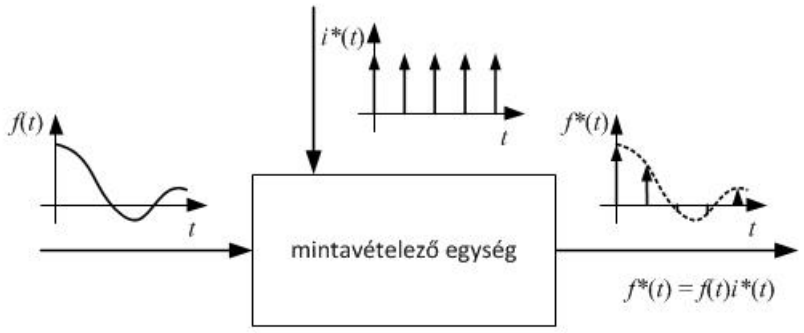
6. fejezet

A z-transzformáció és a diszkrét bemenet-kimenet modell

6.1. Elméleti áttekintés

6.1.1. A z-transzformációra vonatkozó fontosabb összefüggések

Tekintsük az alábbi ábrán látható mintavételezési eljárást.



A mintavételező egység egyik bemenete a mintavételezendő $f(t)$ folytonos-folyamatos jel:

$$f(t), \quad f(t) = 0, \text{ ha } t < 0 \ ,$$

míg a másik a mintavételezést végző $i^*(t)$ egységimpulzus sorozat:

$$i^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_0) \ .$$

A mintavételező egység kimenetén a mintavételezett jel, $f^*(t)$, mint modulált impulzussorozat jelenik meg:

$$f^*(t) = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_0) \ .$$

Átalakítva, majd Laplace-transzformálva ezt a kifejezést megkapjuk az $f(t)$ függvény *diszkrét Laplace-transzformáltját* definiáló alakot:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) e^{-nT_0 s} \ .$$

A $z = e^{sT_0}$ kifejezést bevezetve megkapjuk a mintavételezett függvény z-transzformáltját:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0)z^{-n} \ .$$

A fenti levezetés eredményeként kapott képlet végtelen sort tartalmaz, és az összegképlet felírása nem minden esetben egyszerű. A szakirodalomban megtalálható a z-transzformáció definíciójának általános esetre alkalmazható képlete. Itt csak az alábbi, csak *egyszeres pólusok* esetén alkalmazható képletet adjuk meg:

$$F(z) = \sum_{i=1}^{P} \frac{F_z(p_i)}{F'_p(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{p_i T_0}} \ ,$$

ahol

- $F(s) = \frac{F_z(s)}{F_p(s)}$ a jel Laplace-transzformáltja racionális tört alakban;
- P a pólusok száma;
- p_i az i-dik pólus ($i = 1, 2, \ldots, P$);
- $F_z(p_i) = F_z(s)|_{s=p_i}$ a számláló polinomjának értéke az $s = p_i$ helyen;
- $F'_z(p_i) = \frac{dF_p(s)}{ds}|_{s=p_i}$ a nevezõ polinom s-szerinti deriváltjának értéke az $s = p_i$ helyen.

Fontos megjegyezni, hogy a z-transzformáció elvégzéséhez felhasznált definiáló képlettől függetlenül, a kapott összefüggés csak a mintavételezési időpontokban van kapcsolatban az időtartományban felírt függvénnyel. Ennek következményeként egyrészt a mintavételezési időpontokban azonos értéket felvevő függvényeknek azonos lesz a z-transzformáltja, másrészt az inverz z-transzformáció *csak a mintavételezési időpontokhoz* tartozó értékeket adja vissza.

Az időtartományba való visszatéréshez tehát az inverz z-transzformációt alkalmazható. Ennek általános képlete:

$$f(nT_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz \ ,$$

azaz az inverz transzformáció **csak a mintavételezési időpontokbeli jelértékeket** adja vissza. A gyakorlatban az invertálást a következő módokon hajthatjuk végre:

- Az invertálandó függvényt olyan egyszerű alakokra, részlettörtekre bontjuk fel, amelyeknek az inverzét már megtaláljuk 9.4 táblázatban. A módszer előnye, hogy zárt alakú képletet szolgáltat, így tetszőleges mintavételezési időponthoz tartozó érték azonnal meghatározható. Hátránya, hogy a megfelelő parciális törtfüggvény alakra hozás nem mindig végezhető el.
- A jel z-transzformáltjaként kapott racionális törtfüggvény negatív kitevős hatványsorba fejtése polinomosztással. Ha felírjuk a mintavételező egység kimenetén megjelenő impulzussorozatot:

  $$f^*(t) = f(0T_0)\delta(t - 0T_0) + f(1T_0)\delta(t - 1T_0) + f(2T_0)\delta(t - 2T_0) + \ldots + f(nT_0)\delta(t - nT_0) + \ldots$$

  és a jel negatív kitevős hatványsorba fejtett z-transzformáltját:

  $$F(z) = a_0 z^0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n} + \ldots \ ,$$

  akkor a Dirac δ időbeli eltolására vonatkozó z-transzformált alapján belátható, hogy a hatványsor együtthatói az f függvény mintavételezési időpontokban felvett értékeit szolgáltatják, a kitevő pedig a mintavételezés időpont sorszámát adja meg. A módszer előnye az egyszerű elvégezhetőség, hátránya, hogy a kérdéses időpont előtti valamennyi értéket ki kell számolni.

A z-transzformáció elvégzése során, a Laplace-transzformációhoz hasonlóan, különböző tételeket kell figyelembe venni. Ezeket a szabályokat, valamint a z-transzformáció során alkalmazható képleteket a 9.3 táblázatban foglaltuk össze. A 9.4 táblázat a fontosabb függvények folytonos és diszkrét idejű alakjait, illetve Laplace- és z-transzformáltjait tartalmazza. A táblázat alkalmazása kapcsán felhívjuk a figyelmet, hogy a folytonos idejű alakhoz meghatározhatjuk a megfelelő z-transzformált alakot, viszont a z-transzformált alakból kiindulva csak a diszkrét idejű függvény írható fel az inverz z-transzformációnál leírtak miatt.

6.1.2. Diszkrét bemenet-kimenet modell

A folytonos idejű rendszerek esetében alkalmazott lineáris differenciálegyenlet alakú bemenet-kimenet modellt:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_0 u(t)$$

a diszkrét időtartományban való alkalmazáshoz differenciaegyenlet formára kell hozni. Ezért a differenciálhányadost differenciahányadossal, vagyis a deriváltak értékeit a mintavételezési időpontokban mért értékek különbségével kell közelíteni:

$$\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{\Delta x}{T_0} \ .$$

Írjuk fel a differenciálhányados definícióját a következő módokon:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t} \ .$$

Az első definiáló képletet alkalmazva az úgynevezett *előrefelé vett differenciák*at kapjuk:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+T_0) - x(t)}{T_0} = \frac{x((k+1)T_0) - x(kT_0)}{T_0} \ .$$

A differenciálhányados Laplace-transzformált alakjából és a kapott diszkrét idejű, közelítő képlet z-transzformált alakjából levezethető, hogy a két operátortartomány közötti áttérés a következő képletekkel végezhető el:

$$s \to \frac{z-1}{T_0} \ , \qquad (z \to 1 + T_0 s) \ .$$

Megjegyzés: z-síkról s-síkra való áttérés csak algebrailag igaz, a korábban elmondottak miatt nem lehet a mintavételezési időpontokhoz tartozó jelértékekből a jelet a teljes folytonos időtartományra rekonstruálni.

Ha a közelítést a differenciálhányados másik definiáló képletével végezzük el, akkor az ún. *visszafelé vett differenciák*at kapjuk meg:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t-T_0)}{T_0} = \frac{x(kT_0) - x((k-1)T_0)}{T_0} \ ,$$

és az operátortartományok közötti áttérés az alábbi képletekkel végezhető el közelítő módon:

$$s \to \frac{z-1}{T_0 z} \qquad (z \to \frac{1}{1 - T_0 s}) \ .$$

Egy harmadik lehetőséget jelent a diszkretizálásra a numerikus integrálás trapéz módszerén alapuló *Tustin-módszer* alkalmazása. Ebben az esetben az alábbi közelítő képletek alkalmazhatók a tartományok közötti áttérésre:

$$s \to \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1} \ , \qquad (z \to \frac{1 + \frac{T_0 s}{2}}{1 - \frac{T_0 s}{2}}) \ .$$

Az átalakítás után kapott differenciaegyenlet alakú modellt kétféle alakban adhatjuk meg. A két felírás közti különbség a jelent szimbolizáló kT_0 mintavételezési időpont és a további időpontok viszonyán alapul. Ha a többi jelérték a jelenhez képest *későbbi* mintavételezési időpontokból származik, akkor az ún. *előrefelé vett differenciaegyenletet* kapjuk:

$$\begin{aligned} a_n y((k+n)T_0) + a_{n-1} y((k+n-1)T_0) + \cdots + a_1 y((k+1)T_0) + a_0 y(kT_0) = \\ = b_m u((k+m)T_0) + \cdots + b_0 u(kT_0) \end{aligned}$$

Az ilyen típusú egyenlet a mérnöki gyakorlatban csak a megfigyelések elvégzése után, vagyis a mért kimeneti és bementi értékek ismeretében alkalmazható például az egyenlet együtthatóinak a meghatározására.

Ha a többi jelérték a jelenhez képest *korábbi* mintavételezési időpontokból származik, akkor az ún. *visszafelé vett differenciaegyenletet* kapjuk:

$$a_0 y(kT_0) + a_1 y((k-1)T_0) + \cdots + a_{n-1} y((k-n+1)T_0) + a_n y((k-n)T_0) = \\ = b_0 u((k-d)T_0) + \cdots + b_m u((k-d-m)T_0)$$

Ez az egyenlet, az együtthatók ismeretében, már a modellezett rendszer működése során is alkalmazható a legfrissebb időponthoz tartozó kimeneti érték becslésére. Megjegyezzük, hogy az átírás során az együtthatók értékei illetve a bemeneti oldal fokszáma megváltozhat. A két egyenlet közül elsősorban a visszafelé vett formát lehet a differenciaegyenletek iteratív megoldásánál alkalmazni.

Amennyiben a kapott differenciaegyenlet egy tag vagy rendszer kimenő jelének viselkedését írja le a kezdőállapot és a bemenő jel függvényében, akkor a következő megoldási lehetőségeket alkalmazhatjuk.

- A differenciaegyenlet *analitikus megoldása.* Ezzel a lehetőséggel itt nem foglalkozunk.
- A differenciaegyenlet *iteratív megoldása* időtartományban. Ebben az esetben a visszafelé vett differenciaegyenletet $y(kT_0)$-ra rendezzük, majd a bemenet adott mintavételi időpontokban felvett értékeinek és a kezdeti feltételek ismeretében lépésről lépésre megoldjuk az egyenletet a keresett időponthoz tartozó kimeneti értékig.
- A differenciaegyenlet megoldható a z-transzformáció segítségével. Első lépésként az időtartománybeli modellt a kezdeti feltételek és bemenő jel figyelembevételével z-transzformáljuk, majd a kapott kifejezést $Y(z)$-re rendezzük. Az így előálló racionális törtfüggvényt az inverz z-transzformációnál tanult módon vagy parciális törtekre bontás után táblázat segítségével visszatranszformáljuk időtartományba, vagy polinomosztással meghatározzuk az egyes mintavételi pontokhoz tartozó értékeket. A táblázat segítségével történő visszaírás előnye, hogy a kapott egyenletbe behelyettesítve a keresett mintavételezési időpont értékét, a hozzátartozó jelérték egy lépésben meghatározható. Hátránya azonban, hogy a parciális törtekre való felbontás nem mindig végezhető el. Polinomosztás alkalmazása esetén nincs szükség a felbontás elvégzésére, viszont az osztást a keresett időponthoz tartozó érték eléréséig el kell végezni.

6.2. Kidolgozott feladatok

1. Határozza meg a következő függvények z-transzformáltjait!

   (a) $f_1(t) = 1(t)$

   I. megoldás Mivel $f_1(t) = 1$, ha $t \geq 0$, ezért az $f^*(t)$ függvény megegyezik az $i^*(t)$ impulzussorozattal:

   $$f_1^*(t) = i^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_0) \ .$$

   Így a diszkrét Laplace transzformált

   $$F_1^*(s) = I^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT_0 s} \ ,$$

   a z-transzformált:

   $$F_1(z) = I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \ .$$

   A kapott geometriai sor összegezhető, ha

   $$|e^{-T_0 s}| = |z^{-1}| < 1 \ ,$$

   ekkor

   $$I^*(s) = \frac{1}{1 - e^{T_0 s}} \qquad I(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \ .$$

II. megoldás Végezzük el a transzformációt az egyszeres pólusok esetén alkalmazható, zárt alakú kifejezést szolgáltató képlet alapján:

$$F(z) = \sum_{i=1}^{P} \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{T_0 p_i}} \ .$$

Az $1(t)$ függvény Laplace transzformáltja:

$$F_1(s) = \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s} \ .$$

A kifejezésnek
- egy pólusa van, $P = 1$, a $p_1 = 0$ helyen;
- a számláló polinomja $F_{1z}(s) = 1$, így $F_{1z}(p_1) = 1$,
- a nevező polinomja $F_{1p}(s) = s$, deriváltja $\frac{dF_{1_p}(s)}{ds} = 1$, így $F_{1_p}(p_1) = 1$,

tehát

$$F_1(z) = \sum_{i=1}^{P} \frac{F_{1_z}(p_i)}{F'_{1_p}(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{T_0 p_i}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{z}{z - e^{T_0 \cdot 0}} = \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1.$$

(b) $f_2(t) = e^{-at}$

I. megoldás A mintavételezett függvény:

$$f_2^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT_0} \cdot \delta(t - nT_0) \ .$$

Ebből a diszkrét Laplace transzformált:

$$F_2^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT_0} e^{-nT_0 s} \ ,$$

a z-transzformált:

$$F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT_0} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-aT_0} z^{-1})^n \ .$$

A kapott geometriai sor összegezhető, ha

$$|e^{-T_0 s}| = |z^{-1}| < e^{-aT_0} \ .$$

Ekkor

$$F_2^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-aT_0} e^{T_0 s}} \qquad F_2(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT_0} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_0}} \ .$$

II. megoldás Az e^{-at} függvény Laplace transzformáltja:

$$F_2(s) = \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s + a} \ .$$

A kifejezésnek
- egy pólusa van, $P = 1$, a $p_1 = -a$ helyen;
- a számláló polinomja $F_{2z}(s) = 1$, így $F_{2z}(p_1) = 1$;
- a nevező polinomja $F_{2p}(s) = s + a$, deriváltja $\frac{dF_{2p}(s)}{ds} = 1$, így $F'_{2p}(p_1) = 1$,

Elvégezve a transzformációt az egyszeres pólusok esetén alkalmazható, zárt alakú kifejezést szolgáltató képlet alapján:

$$F_2(z) = \sum_{i=1}^{P} \frac{F_{2z}(p_i)}{F'_{2p}(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{T_0 p_i}} = \frac{1}{1} \frac{z}{z - e^{T_0(-a)}} = \frac{z}{z - e^{-aT_0}} \qquad |z| > e^{-aT_0}.$$

(c) $f_3(t) = 4e^{-2t} + 2e^{-4t}$
Megoldás: Az $f_3(t)$ függvény Laplace-transzformáltja:

$$F_3(s) = 4\frac{1}{s+2} + 2\frac{1}{s+4}$$

Felhasználva a z-transzformáció tételeit (összeadás, konstanssal való szorzás) és 9.4 táblázat alapján a z-transzformált alak:

$$F_3(z) = 4\frac{z}{z - e^{-2T_0}} + 2\frac{z}{z - e^{-4T_0}}$$

Legyen a mintavételezési idő, $T_0 = 0,5s$:

$$F_3(z) = 4\frac{z}{z - e^{-1}} + 2\frac{z}{z - e^{-2}} = \frac{6z^2 - 0,64z}{z^2 - 0,5z + 0,05}$$

A folytonos függvény diszkretizált alakja a következő:

$$f_3(kT_0) = 4e^{-2kT_0} + 2e^{-4kT_0}$$

(d) $f_4(t) = 5\sin 4t - 4\cos 5t$
Megoldás:
A Laplace-transzformációs tételek és a táblázat alapját az $f_4(t)$ függvény Laplace-transzformáltja:

$$F_4(s) = 5\frac{4}{s^2 + 16} - 4\frac{s}{s^2 + 25}$$

A z-transzformált $T_0 \approx \pi$ esetén:

$$F_4(z) = 5\frac{z\sin 4T_0}{z^2 - 2z\cos 4T_0 + 1} - 4\frac{z^2 - z\cos 5T_0}{z^2 - 2z\cos 5T_0 + 1} = 5\frac{z\sin 4\pi}{z^2 - 2z\cos 4\pi + 1} - 4\frac{z^2 - z\cos 5\pi}{z^2 - 2z\cos 5\pi + 1}$$
$$= 0 - \frac{4z(z+1)}{z^2 + 2z + 1} = \frac{-4z}{z+1}$$

(e) $f_5(n) = 0,6^n$
Megoldás:

$$F_5(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_5(n)z^{-n} = 1 + 0,6z^{-1} + 0,6^2z^{-2} + 0,6^3z^{-3} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{1 - 0,6z^{-1}} = \frac{z}{z - 0,6} \qquad |z| > 0,6$$

(f) $f_6(n) = (-5)^n$
Megoldás:

$$F_6(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_6(n)z^{-n} = 1 + (-5)z^{-1} + (-5)^2z^{-2} + (-5)^3z^{-3} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{1 - (-5z^{-1})} = \frac{z}{z+5} \qquad |z| > 5$$

(g) $f_7(n) = 3 + 2(-5)^n$

Megoldás:

$$f_7(n) = 3 + 2(-5)^n = 3 \cdot 1(n) + 2(-5)^n$$

$$F_7(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(3 \cdot 1(n) + 2(-5)^n)z^{-n} = 3\frac{z}{z-1} + 2\frac{z}{z+5} = \frac{5z^2 + 13z}{z^2 + 4z - 5}$$

$$|z| > 1 \quad \bigcap \quad |z| > 5 \Rightarrow |z| > 5$$

2. Értelmezzük az eltolási tételt a differencia egyenletek kezdeti feltételeihez kapcsolódóan!

Megoldás:

Határozzuk meg az $f_8(kT_0)$ diszkrét idejű függvény z-transzformáltját, ha a függvényt egy mintavételezési idővel balra toljuk el és adott $f(-1T_0)$ függvényérték!

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{f((k-1)T_0)\} &= f(-1T_0)z^0 + f(0T_0)z^{-1} + f(1T_0)z^{-2} + \ldots + f(nT_0)z^{-n-1} + \ldots = \\ &= f(-1T_0) + z^{-1}\left(f(0T_0) + f(1T_0)z^{-1} + \ldots + f(nT_0)z^{-n} + \ldots\right) = \\ &= f(-1T_0) + z^{-1}F(z)\end{aligned}$$

Általánosítva:

$$\mathcal{Z}\{f((k-n)T_0)\} = z^{-n}F(z) + z^{-n+1}f(-1T_0) + z^{-n+2}f(-2T_0) + \ldots + f(-nT_0)$$

3. Oldjuk meg az alábbi differenciaegyenletet z-transzformációval illetve iteratív módon, ha $T_0 = 1s$!

$$y(kT_0) - 4y((k-1)T_0) + 3y((k-2)T_0) = 1(kT_0) \quad \text{ha} \quad y(-1) = 1, \quad y(-2) = 2$$

Megoldás:

z-transzformációval :

Figyelembe véve a mintavételezési időt:

$$y(k) - 4y(k-1) + 3y(k-2) = 1(k)$$

Elvégezve a z-transzformációt a kezdetei feltételek az előző feladatnak megfelelően figyelembe vételével:

$$Y(z) - 4\left(z^{-1}Y(z) + y(-1)\right) + 3\left(z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)\right) = \frac{z}{z-1}$$

Végezzük el az egyenlet rendezését!

$$\begin{aligned}Y(z) - 4\left(z^{-1}Y(z) + 1\right) + 3\left(z^{-2}Y(z) + z^{-1} + 2\right) &= \frac{z}{z-1} \\ Y(z) - 4z^{-1}Y(z) - 4 + 3z^{-2}Y(z) + 3z^{-1} + 6 &= \frac{z}{z-1} \\ z^2Y(z) - 4zY(z) - 4z^2 + 3Y(z) + 3z + 6z^2 &= \frac{z^2}{z-1} \\ (z^2 - 4z + 3)Y(z) &= \frac{z}{z-1} + 4z^2 - 3z - 6z^2 \\ (z^2 - 4z + 3)Y(z) &= \frac{-z^3 - z^2 + 3z}{z-1} \\ Y(z) &= \frac{-z^3 - z^2 + 3z}{(z-1)(z^2 - 4z + 3)}\end{aligned}$$

Az inverz z-transzformációhoz határozzuk meg a parciális törtek együtthatóit a következő alak alapján:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-z^2 - z + 3}{(z-3)(z-1)^2}$$
$$\frac{-z^2 - z + 3}{(z-3)(z-1)^2} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$
$$-z^2 - z + 3 = A(z-1)^2 + B(z-1)(z-3) + C(z-3)$$

Az A és C együtthatók:

$$A = \left.\frac{-z^2 - z + 3}{(z-1)^2}\right|_{z=3} = \frac{-9 - 3 + 3}{(3-1)^2} = -2,25$$
$$C = \left.\frac{-z^2 - z + 3}{z-3}\right|_{z=1} = \frac{-1 - 1 + 3}{1-3} = -0,5$$

A B együttható meghatározásához írjuk be az A és C együtthatók értékét, és helyettesítsünk be $z = 0$-t:

$$-z^2 - z + 3 = -2,25(z-1)^2 + B(z-1)(z-3) - 0,5(z-3)$$
$$3 = -2,25 + 3B + 1,5$$
$$B = 1,25$$

Így a parciális törtekre bontott kifejezés:

$$Y(z) = -2,25\frac{z}{z-3} + 1,25\frac{z}{z-1} - 0,5\frac{z}{(z-1)^2} \quad .$$

Elvégezve az inverz z-transzformációt:

$$y(k) = -2,25 \cdot 3^k \cdot 1(k) + 1,25 \cdot 1(k) - 0,5 \cdot k \cdot 1(k)$$

Határozzuk meg $y(k)$ értékét az első három mintavételezési pontban:

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad y(0) &= -2,25 \cdot 3^0 \cdot 1(0) + 1,25 \cdot 1(0) - 0,5 \cdot 0 \cdot 1(0) = \\
&= -2,25 + 1,25 - 0 = -1 \\
k = 1 \quad y(1) &= -2,25 \cdot 3^1 \cdot 1(1) + 1,25 \cdot 1(1) - 0,5 \cdot 1 \cdot 1(1) = \\
&= -2,25 \cdot 3 + 1,25 - 0,5 = -6 \\
k = 2 \quad y(2) &= -2,25 \cdot 3^2 \cdot 1(2) + 1,25 \cdot 1(2) - 0,5 \cdot 2 \cdot 1(2) = \\
&= -2,25 \cdot 9 + 1,25 - 0,5 \cdot 2 = -20 \\
&\vdots \\
k = 10 \quad y(10) &= -2,25 \cdot 3^10 \cdot 1(2) + 1,25 \cdot 1(2) - 0,5 \cdot 2 \cdot 1(2) = \\
&= -2,25 \cdot 59049 + 1,25 - 0,5 \cdot 2 = -132860,5
\end{aligned}$$

iteratív megoldás : A megoldandó egyenlet:

$$y(kT_0) - 4y((k-1)T_0) + 3y((k-2)T_0) = 1(kT_0) \quad \text{ha} \quad y(-1) = 1, \quad y(-2) = 2, \quad T_0 = 1s$$

Behelyettesítve a megfelelő értékeket a következő megoldásokat kapjuk a kérdéses időpontokban:

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad & y(0) = 4y(-1) - 3y(-2) + 1(0) = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 = -1 \\
k = 1 \quad & y(1) = 4y(0) - 3y(-1) + 1(1) = 4 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 1 = -6 \\
k = 2 \quad & y(2) = 4y(1) - 3y(0) + 1(2) = 4 \cdot (-6) - 3 \cdot (-1) + 1 = -20 \\
& \vdots \\
k = 10 \quad & y(10) = 4y(9) - 3y(8) + 1(10) = 4 \cdot (???) - 3 \cdot (???) + 1 =
\end{aligned}$$

Mint látható, ebben az esetben a megoldás lényeges egyszerűbb, de míg az egy adott időponthoz tartozó érték meghatározása a z-transzformáció alkalmazásával kapott megoldás esetén egyszerű behelyettesítéssel elvégezhető, addig az iteratív megoldásnál csak valamennyi korábbi időponthoz tartozó érték meghatározása után kapható meg.

6.3. Gyakorló feladatok

6.3.1. Feladatok a z- és inverz z-transzformáció témaköréből

1. Határozza meg a következő függvények z-transzformáltját!
   (a) $f_1(t) = 5 \cdot 1(t)$
   (b) $f_2(t) = 3 \cdot e^{-2t}$
   (c) $f_3(t) = 2 \cdot (1 - e^{2t})$
   (d) $f_4(t) = 0,5(t - 1(t))$
   (e) $f_5(t) = \delta(t - 2T_0) + 1(t - T_0)$

2. Határozza meg a következő függvények z-transzformáltját! (Ahol T_0 nincs megadva, ott maradjon paraméter!)
   (a) $F_1(s) = \dfrac{4}{s^2 + 2s}$
   (b) $F_2(s) = \dfrac{2}{s^2 + 4s + 3}$
   (c) $F_3(s) = \dfrac{1}{s(s^2 + 6s + 8)}$
   (d) $F_4(s) = \dfrac{26}{4s(13s + 1,8)}, \quad T_0 = 10$
   (e) $F_5(s) = \dfrac{6}{2s^2 + 8}$
   (f) $F_6(s) = \dfrac{4}{s(2s^2 + 18)}, \quad T_0 = 1,05$
   (g) $F_7(s) = \dfrac{3s + 3}{2s^2 + 2s + 2}, \quad T_0 = 0,1$

3. Határozza meg a következő függvények z-transzformáltját!
   (a) $f_1(nT_0) = 2^n$
   (b) $f_2(nT_0) = (-3)^n$
   (c) $f_3(nT_0) = 2 \cdot \delta(nT_0) - 4 \cdot \delta((n-2)T_0)$
   (d) $f_4(nT_0) = 2 + 5 \cdot (-3)^n$
   (e) $f_5(nT_0) = (n-3)1\left((n-4)T_0\right)$
   (Tipp: a transzformáció előtt lássa be, hogy $(n-3)1\left((n-4)T_0\right) = (n-4)1\left((n-4)T_0\right) + 1\left((n-4)T_0\right)$!)

4. Feladatok z-transzformáció a közelítő módszerekkel történő elvégzésére.
   (a) Legyen $F_1(s) = \dfrac{s+2}{s^2 + 3s + 4}$ az $f_1(t)$ Laplace-transzformáltja!
      i. Határozza meg, hogy hova tart a függvény $t \to \infty$-ben!
      ii. Határozza meg a függvény z-transzformáltjának közelítő alakját az előrefelé vett differenciák módszerével, és vizsgálja meg a kapott függvény határértékét!
      iii. Végezze el a közelítést a visszafelé vett differenciák módszerével, és vizsgálja meg ebben az esetben is a kapott függvény $t \to \infty$-ben felvett értékét!

iv. Alkalmazza a Tustin-módszert a közelítő alak meghatározására, és határozza meg a határértéket ebben az esetben is!

Megjegyzés: a mintavételezési idő $T_0 = 0,5s$ mindhárom esetben!

(b) Legyen $F_2(s) = \dfrac{2s+1}{0,5s^2 - 2s + 2,5}$ az $f_2(t)$ Laplace-transzformáltja!

i. Határozza meg, hogy hova tart a függvény $t \to \infty$-ben!

ii. Határozza meg a függvény z-transzformáltjának közelítő alakját az előrefelé vett differenciák módszerével, és vizsgálja meg a kapott függvény határértékét!

iii. Végezze el a közelítést a visszafelé vett differenciák módszerével, és vizsgálja meg ebben az esetben is a kapott függvény $t \to \infty$-ben felvett értékét!

iv. Alkalmazza a Tustin-módszert a közelítő alak meghatározására, és határozza meg a határértéket ebben az esetben is!

Megjegyzés: a mintavételezési idő $T_0 = 1s$ mindhárom esetben!

5. Határozza meg a következő függvények inverz z-transzformáltját a 9.4 táblázat segítségével!

(a) $F_1(z) = \dfrac{9z}{3z + 0,6}$

(b) $F_2(z) = \dfrac{5}{2z - 4}$

(c) $F_3(z) = \dfrac{2z+1}{4z - 0,8}$

(d) $F_4(z) = \dfrac{4z^2 + 2z}{z^2 - 1}$

(e) $F_5(z) = \dfrac{2z^2 + z}{z^2 + 0,75z + 0,125}$

6. Határozza meg polinomosztás segítségével a függvények értékeit a megadott mintavételezési időpontban!

(a) $F_1(z) = \dfrac{2z}{z^3 - 2,5z^2 + 2z - 0,5} \qquad f_1(4T_0) = ?$

(b) $F_2(z) = \dfrac{2z^2 + 4z}{0,5z^3 + z^2 + 2z + 3} \qquad f_2(5T_0) = ?$

(c) $F_3(z) = \dfrac{z^2 + z + 1}{z^3 + 0,2z^2 + 0,25z + 0,05} \qquad f_3(4T_0) = ?$

6.3.2. Megoldások

1. (a) $F_1(z) = \dfrac{5z}{z-1}$

(b) $F_2(z) = \dfrac{3z}{z - e^{-2T_0}}$

(c) $F_3(z) = \dfrac{2z(1 - e^{2T_0})}{(z-1)(z - e^{2T_0})}$

(d) $F_4(z) = \dfrac{0,5z(1 + T_0 - z)}{(z-1)^2}$

(e) $F_5(z) = \dfrac{1}{z^2 - z}$

2. (a) $F_1(z) = \dfrac{5z}{z-1}$

(b) $F_2(z) = \dfrac{3z}{z - e^{-2T_0}}$

(c) $F_3(z) = \frac{1}{8}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{2z}{z-e^{-2T_0}} + \frac{z}{z-e^{-4T_0}}\right) = \frac{1}{8}z\frac{(1-e^{-2T_0})z + e^{-2T_0} - e^{-4T_0} + e^{-6T_0}}{(z-1)(z-e^{-2T_0})(z-e^{-4T_0})}$

(d) $F_4(z) = \frac{0,375z}{z^2 - 1,25z + 0,25}$

(e) $F_5(z) = 1,5\frac{z\sin 2T_0}{z^2 - 2z\cos 2T_0 + 1}$

(f) $F_6(z) = \frac{4}{9}\frac{z}{z^2-1}$

(g) $F_7(z) = 3\frac{z^2 - 0,9z}{z^2 - 1,8z + 0,82}$

3. (a) $F_1(z) = \frac{z}{z-2}$

(b) $F_2(z) = \frac{z}{z+3}$

(c) $F_3(z) = \frac{2z^2-4}{z^2}$

(d) $F_4(z) = \frac{7z^2+z}{z^2+2z-3}$

(e) $F_5(z) = \frac{1}{z^2(z-1)^2}$

4. (a) A függvény $F_1(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+4}$

i. $\lim\limits_{t\to\infty} f_1(t) = 0$

ii. $F_{1_E}(z) = \frac{0,5z}{z^2 - 0,5z + 0,5}$, $\quad \lim\limits_{k\to\infty} f_{1_E}(kT_0) = 0$

iii. $F_{1_V}(z) = \frac{z^2 - 0,5z}{3,5z^2 - 3,5z + 1}$, $\quad \lim\limits_{k\to\infty} f_{1_V}(kT_0) = 0$

iv. $F_{1_T}(z) = \frac{3z^2+2z-1}{16z^2-12z+4}$, $\quad \lim\limits_{k\to\infty} f_{1_T}(kT_0) = 0$

(b) A függvény $F_2(s) = \frac{2s+1}{0,5s^2 - 2s + 2,5}$

i. $\lim_{t\to\infty} f_2(t) = \infty$, pozitív valós részű póluspár!

ii. $F_{2_E}(z) = \frac{2z-1}{0,5z^2 - 3z + 5}$, $\quad \lim\limits_{k\to\infty} f_{2_E}(kT_0) = \infty$, 1-nél nagyobb abszolút értékű pólusok!

iii. $F_{2_V}(z) = \frac{3z^2-2z}{z^2 - z + 0,5}$, $\quad \lim\limits_{k\to\infty} f_{2_V}(kT_0) = 0,4$, 1-nél kisebb abszolút értékű pólusok!

iv. $F_{2_T}(z) = \frac{5z^2+2z-3}{0,5z^2+z+8,5}$, $\quad \lim\limits_{k\to\infty} f_{2_T}(kT_0) = \infty$, 1-nél nagyobb abszolút értékű pólusok!

5. (a) $f_1(nT_0) = 3\cdot(-0,2)^n \cdot 1(nT_0)$

(b) $f_2(nT_0) = 2,5\cdot 2^{n-1}\cdot 1((n-1)T_0)$

(c) $f_3(nT_0) = 0,5\cdot 0,2^n\cdot 1(nT_0) + 0,25\cdot 0,2^{n-1}\cdot 1((n-1)T_0) = 0,5\cdot 1(0) + 1,75\cdot 0,2^n\cdot 1((n-1)T_0)$

(d) $f_4(nT_0) = (-1)^n\cdot 1(nT_0) + 3\cdot 1(nT_0)$

(e) $f_5(nT_0) = 2\cdot 0,25^n\cdot 1(nT_0)$

6. (a) $f_1(4T_0) = 8,5$

(b) $f_2(5T_0) = 48$

(c) $f_3(4T_0) = -0,368$

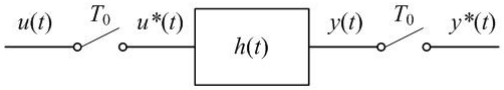
7. fejezet

Mintavételezett rendszerek

7.1. Elméleti áttekintés

7.1.1. Az impulzus-átviteli függvény

Tekintsük az alábbi mintavételezett tagot:



ahol

$u(t)$ - folyamatos idejû bemenõ jel;

$u^*(t)$ - minatvételezett (diszkrét idejû) bemenõ jel;

$h(t)$ - a folyamatos mûködésû tag súlyfüggvénye;

$y(t)$ - a tag folyamatos idejû kimenete;

$y^*(t)$ - a tag mintavételezett kimenete;

T_0 - a mintavételezési periódusidõ.

A mintavételezett tag mûködésének jellemzésére - folytonos idõtartományhoz hasonló módon - operátortartományb összefüggés vezethetõ le. Az *impulzus-átviteli függvény* definíciója a következõ:

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}(y^*(t))}{\mathcal{Z}(u^*(t))}\Bigg|_{z\acute{e}rus\ k.f.} = \frac{Y(z)}{U(z)}\Bigg|_{z.k.f.}$$

Az impulzus-átviteli függvény tehát a mintavételezett kimenet és bemenet z-transzformáltjainak hányadosa zérus kezdeti feltételek mellett. Az impulzus-átviteli függvény csak a mintavételezési idõpontokban lesz a rendszer modellje, miután csak ezekben a pontokban van kapcsolatban az eredeti folytonos idejû modellel.

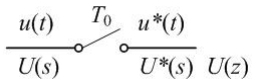
Hasonlóan az átviteli függvényhez, az impulzus-átviteli függvényt is racionális törtfüggvény alakban adhatjuk meg, de ahogy a bemenet - kimenet modellnél is felírtuk az elõre és visszafelé vett alakot, itt is használhatunk pozitív és negatív kitevõs polinomokat:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \\ = \frac{b_m z^{-d} + b_{m-1} z^{-d-1} + \cdots + b_1 z^{-m-d+1} + b_0 z^{-m-d}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}$$

7.1.2. Az eredõ impulzus-átviteli függvény meghatározása

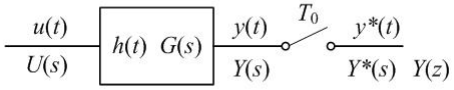
Tagcsoportot tartalmazó mintavételes rendszerek eredõ impulzus-átviteli függvényének meghatározásánál figyelembe kell venni, hogy a mintavételezõ szervek mely tagok között helyezkednek el. A jelformáló tagok és a mintavételezõk különbözõ sorrendû kapcsolása esetén az eredõ impulzus-átviteli függvény a következõ módon határozható meg.

– Mintavételezõ elõtti és utáni jelek:



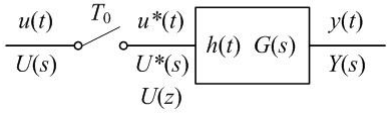
$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} \ , \quad U(z) = \mathcal{Z}\{u^*(t)\} \ .$$

– Mintavételezés csak a kimenõ jelnél:



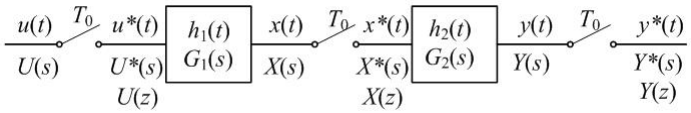
$$Y(s) = G(s)U(s) \ , \quad Y(z) = \mathcal{Z}\{G(s)U(s)\} \triangleq GU(z) \ .$$

– Mintavételezés csak a bemenõ jelnél:



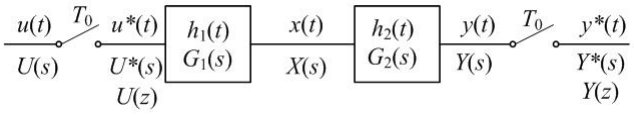
$$Y(s) = G(s)U^*(s) \ .$$

– Sorba kapcsolt tagok, de minden tag elõtt és után van mintavételezõ:



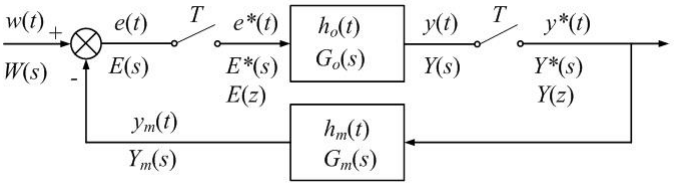
$$Y(z) = G_e(z)U(z) \ , \quad G_e(z) = G_1(z)G_2(z)$$

– Sorba kapcsolt tagok, de a tagok között nincs mintavételezõ:



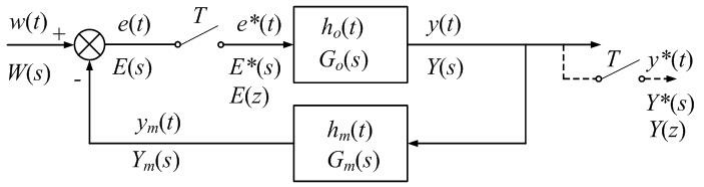
$$Y(z) = G_e(z)U(z) \ , \quad G_e(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\} \triangleq G_1G_2(z)$$

– Visszacsatolt kör, tagok elõtt és után mintavételezõvel:



$$Y(z) = G_e(z)W(z) \ , \quad G_e(z) = \frac{Y(z}{W(z)} = \frac{G_o(z)}{1 + G_o(z)G_m(z)}$$

– Visszacsatolt kör, de a visszacsatolásnál nincs mintavételezés:



$$Y(z) = G_e(z)W(z) \ , \quad G_e(z) = \frac{Y(z}{W(z)} = \frac{G_o(z)}{1 + \mathcal{Z}\{(G_o(s)G_m(s))\}} = \frac{G_o(z)}{1 + G_oG_m(z)}$$

7.1.3. Diszkrét idejû rendszerek erõsítésének meghatározása

Diszkrét idejû bemenet-kimenet modellel leírt rendszerek esetében az erõsítést a következõ összefüggés alapján határozhatjuk meg:

$$K = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i}{\sum_{j=0}^{n} a_i}$$

azaz diszkrét idejû rendszerek esetében az erõsítést a bemenet-kimenet modellben szereplõ polinomok együtthatói összegének hányadosaként lehet meghatározni.

Hasonló eredményre jutunk, ha a végérték-tételt alkalmazzuk. Legyen a bemenet az egységugrás függvény, ekkor:

$$u(t) = 1(t) \Rightarrow U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\lim_{k\to\infty} y(kT_0) = \lim_{k\to 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{k\to 1} \frac{z-1}{z} G(z)U(z) = \lim_{k\to 1} \frac{z-1}{z} G(z) =$$
$$= \lim_{k\to 1} \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = K$$

7.1.4. Nulladrendû tartószerv

A mintavételezés értelmezésénél leírtaknak megfelelõen a bemenõ jel impulzusok formájában kerül a jelformáló tag bemenetére. Ez a gyakorlatban azt jelentené, hogy egy szabályzási körben a szabályozó által meghatározott beavatkozó jel, mint impulzus kerül kiküldésre az irányított szakasz felé az adott mintavételi idõpontban. Ezután, a következõ mintavételi idõpontig nincs újabb információ a beavatkozó jel értékére, azaz a kiküldött jel értéke nulla. Sok esetben ez az impulzusok kiküldésén alapuló eljárás nem megfelelõ, ezért olyan egységet, *nulladrendû tartószervet* kell beépíteni, amely az elõzõ mintavételi idõponthoz tartozó információt megõrzi a következõ mintavételezési idõpontig.

A tartószerv bemenetére mintavételezett jel kerül, míg a kimenetén a tartott folytonos jel lép ki. Ennek alapján a nulladrendû tartószerv átviteli függvénye a következõ lesz:

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{T_0 s}}{s}$$

A teljes tagcsoport – mintavételezõ, nulladrendû tartó, objektum, mintavételezõ – eredõ impulzusátviteli függvényét a következõ módon határozhatjuk meg:

$$G_e(z) = \mathcal{Z}(G_{h0}(s)G_P(s)) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}(\frac{G_P(s)}{s})$$

7.2. Kidolgozott feladatok

1. Alkalmazzuk a definíció szerinti és a közelítõ módszereken alapuló átírást a következõ kifejezésre!

$$F_6(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}, \qquad T_0 = 0,5s$$

Definíció szerinti átírás :

I. megoldás

Miután a megadott Laplace-transzformált nevezõjében csak egyszeres gyökök találhatók, ezért végezzük el a transzformációt az erre az esetre alkalmazható, zárt alakú kifejezést szolgáltató képlet alapján!

A $F_6(s)$ függvény

- nevezõjében két pólus van, így $P = 2$, és a pólusok: $p_1 = -2$ és $p_2 = -4$;
- a számláló polinomja $F_z(s) = 1$, így $F_z(p_i) = 1, \quad i = 1, 2$;
- a nevezõ polinomja $F_p(s) = s^2 + 6s + 8$, deriváltja $\frac{dF_p(s)}{ds} = 2s + 6$, így

$$F_p^{'}(s)\Big|_{s=-2} = 2(-2) + 6 = 2$$

$$F_p^{'}(s)\Big|_{s=-4} = 2(-4) + 6 = -2 \ ;$$

tehát

$$F_{6_D}(z) = \sum_{i=1}^{P} \frac{F_z(p_i)}{F_p^{'}(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{T_0 p_i}} = \frac{1}{2}\frac{z}{z - e^{-2T_0}} - \frac{1}{2}\frac{z}{z - e^{-4T_0}} \quad ,$$

$$F_{6_D}(z) = \frac{1}{2}\frac{z(e^{-2T_0} - e^{-4T_0})}{z^2 - (e^{-2T_0} + e^{-4T_0})z + e^{-6T_0}} \quad ,$$

$$F_{6_D}(z) = \frac{1}{2}\frac{z(e^{-1} - e^{-2})}{z^2 - (e^{-1} + e^{-2})z + e^{-3}} = \frac{0,116z}{z^2 - 0,503z + 0,05}$$

II. megoldás

Bontsuk fel az $F_3(s)$ függvényt parciális törtekre, és végezzük el a transzformációt a z-transzformációs táblázat segítségével:

$$F_6(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+4}$$

$$1 = A(s+4) + B(s+2)$$

$$A = \frac{1}{s+4}\Big|_{s=-2} = \frac{1}{2} \qquad B = \frac{1}{s+2}\Big|_{s=-4} = -\frac{1}{2}$$

$$F_6(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+4}$$

$$F_{6_D}(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z - e^{-2T_0}} - \frac{1}{2}\frac{z}{z - e^{-4T_0}}$$

A kapott z-transzformált megegyezik az I. megoldás eredményével.

Elõrefelé vett differenciákon alapuló átírás :

Végezzük el a transzformációt a differenciálhányadosnak az elõrefelé vett differenciákon alapuló közelítésénél levezetett képlettel:

$$s \sim \frac{z-1}{T_0}$$

A transzformálandó függvény:

$$F_6(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{1}{s^2+6s+8}$$

Behelyettesítve a közelítõ képletet:

$$F_{6_E}(z) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{T_0}\right)^2 + 6\frac{z-1}{T_0} + 8} .$$

Behelyettesítve a mintavételezési idõ értékét és rendezve a képletet:

$$F_{6_E}(z) = \frac{1}{\frac{(z-1)^2}{0,25} + 6\frac{z-1}{0,5} + 8} = \frac{0,25}{z^2+z} .$$

Visszafelé vett differenciákon alapuló átírás :

Végezzük el a transzformációt a differenciálhányadosnak a visszafelé vett differenciákon alapuló közelítésénél levezetett képlettel:

$$s \sim \frac{z-1}{zT_0}$$

A transzformálandó függvény:

$$F_6(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{1}{s^2+6s+8}$$

Behelyettesítve a közelítõ képletet:

$$F_{6_V}(z) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{zT_0}\right)^2 + 6\frac{z-1}{zT_0} + 8} .$$

Behelyettesítve a mintavételezési idõ értékét és rendezve a képletet:

$$F_{6_V}(z) = \frac{1}{\frac{(z-1)^2}{0,25z^2} + 6\frac{z-1}{0,5z} + 8} = \frac{0,25z^2}{6z^2-5z+1} .$$

Tustin módszeren alapuló átírás :

A Tustin módszeren alapuló átírás közelítõ képlete:

$$s \sim \frac{2}{T_0}\,\frac{z-1}{z+1}$$

A transzformálandó függvény:

$$F_6(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{1}{s^2+6s+8}$$

Behelyettesítve a közelítõ képletet:

$$F_{6_T}(z) = \frac{1}{\left(\frac{2}{T_0}\,\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 6\frac{2}{T_0}\,\frac{z-1}{z+1} + 8} .$$

Behelyettesítve a mintavételezési idõ értékét és rendezve a képletet:

$$F_{6_T}(z) = \frac{1}{16\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + 24\frac{z-1}{z+1} + 8} = \frac{z^2+2z+1}{48z^2-16z} .$$

2. Tételezzük fel, hogy az elõzõ példában szereplõ $F_6(s)$ függvény egy folytonos idejû dinamikus tag átviteli függvénye! Vizsgáljuk a meg a megfelelõ végérték tétel segítségével, hogy hova tart a tag átmeneti függvénye folytonos idejû kimenetet feltételezve, illetve az átviteli függvény különbözõ módon elvégzett diszkrétizálása után mintavételezett kimenetet feltételezve!

Folytonos idejû kimenet :

Átmeneti függvény esetén a bemenõ jel az $1(t)$ függvény, így alkalmazva a Laplace-transzformációra vonatkozó végérték tételt:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sF_3(s)U(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2+6s+8}\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+6s+8} \quad .$$

A határértékszámítás elvégzése elõtt ellenõrizni kell, hogy a vizsgálandó kifejezés pólusai eleget tesznek-e a stabilitási feltételnek. Miután a két pólus $p_1 = -2$ és $p_2 = -4$, azaz mindkettõre igaz, hogy $Re(p_i) < 0$, így a határérték számítás elvégezhetõ:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \ldots = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+6s+8} = \frac{1}{8} \quad .$$

A kapott érték természetesen megfelel a tag erõsítésének.

Mintavételezett kimenet a definíció szerinti diszkretizálás esetén :

Átmeneti függvény esetén a bemenõ jel a diszkrét egységugrás függvény $1(kT_0)$, melynek z-transzformáltja $\frac{z}{z-1}$. Így alkalmazva a z-transzformációra vonatkozó végértéktételt:

$$\lim_{k\to\infty} y(kT_0) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}Y(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F_{6_D}(z)U(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\frac{0,116z}{z^2-0,503z+0,05}\frac{z-1}{z} =$$
$$= \lim_{z\to 1}\frac{0,116z}{z^2-0,503z+0,05} \quad .$$

A határértékszámítás elvégzése elõtt diszkrét idejû esetben is ellenõrizni kell, hogy a vizsgálandó kifejezés pólusai eleget tesznek-e a stabilitási feltételnek. A nevezõben szereplõ másodfokú polinom gyökei, azaz a két pólus $p_1 = 0,137$ és $p_2 = 0,367$. Diszkrét idejû rendszerek esetében 8 fejezetben tárgyalt tételnek megfelelõen, a pólusok abszolút értékének kell 1-nél kisebbnek lenniük a végérték tétel alkalmazhatóságához. Miután a konkrét esetben $|p_i| < 1; i = 1,2$ teljesül, így a határérték számítás elvégezhetõ:

$$\lim_{k\to\infty} y(kT_0) = \ldots = \lim_{z\to 1}\frac{0,116z}{z^2-0,503z+0,05} = 0,212 = \frac{1}{4,71} \quad .$$

A kapott érték természetesen ebben az esetben is megfelel a diszkretizált tag erõsítésének.

Mintavételezett kimenet az elõrefelé vett differenciák szerinti közelítés esetén :

Hasonlóan az elõzõ esethez a bemenet az $1(kT_0)$ függvény. Alkalmazva a z-transzformációra vonatkozó végértéktételt:

$$\lim_{k\to\infty} y(kT_0) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}Y(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F_{6_E}(z)U(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\frac{0,25}{z^2+z}\frac{z-1}{z} =$$
$$= \lim_{z\to 1}\frac{0,25}{z^2+z} \quad .$$

A definíció szerint átírt alak esetében leírtaknak megfelelõen itt is ellenõrizzük a pólusokat! Miután az elõrefelé vett differenciákon alapuló közelítõ képlet alkalmazásával kapott impulzus átviteli függvény pólusai $p_1 = 0$ és $p_2 = -1$, de $|p_2| \not< 1$, így a határérték számítás nem végezhetõ el!

Mintavételezett kimenet visszafelé vett differenciák szerinti közelítés esetén :

Hasonlóan az elõzõ esethez a bemenet az $1(kT_0)$ függvény. Alkalmazva a z-transzformációra vonatkozó végértéktételt:

$$\lim_{k\to\infty} y(kT_0) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}Y(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F_{6_V}(z)U(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\frac{0,25z^2}{6z^2-5z+1}\frac{z-1}{z} =$$
$$= \lim_{z\to 1}\frac{0,25z^2}{6z^2-5z+1} \quad .$$

A definíció szerint átírt alak esetében leírtaknak megfelelõen itt is ellenõrizzük a pólusokat! Az impulzus átviteli függvény pólusai ebben az esetben $p_1 = 0,333$ és $p_2 = 0,5$, és $|p_i| < 1; i = 1,2$ teljesül, így a határérték számítás elvégezhetõ:

$$\lim_{k\to\infty} y(kT_0) = \ldots = \lim_{z\to 1} \frac{0,25z^2}{6z^2 - 5z + 1} = \frac{1}{8} \quad .$$

Mintavételezett kimenet Tustin módszer szerinti közelítés esetén :

Az elõzõ esethez hasonlóan a bemenet az $1(kT_0)$ függvény. Alkalmazva a z-transzformációra vonatkozó végértéktételt:

$$\lim_{k\to\infty} y(kT_0) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} F_{6_T}(z)U(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \frac{z^2+2z+1}{48z^2-16z} \frac{z-1}{z} =$$
$$= \lim_{z\to 1} \frac{z^2+2z+1}{48z^2-16z} \quad .$$

A definíció szerint átírt alak esetében leírtaknak megfelelõen itt is ellenõrizzük a pólusokat! Az impulzus átviteli függvény pólusai ebben az esetben $p_1 = 0,333$ és $p_2 = 0,5$, és $|p_i| < 1; i = 1,2$ teljesül, így a határérték számítás elvégezhetõ:

$$\lim_{k\to\infty} y(kT_0) = \ldots = \lim_{z\to 1} \frac{z^2+2z+1}{48z^2-16z} = \frac{1}{8} \quad .$$

3. Vizsgáljuk meg a folytonos és a diszkretizált tagok átmeneti függvényeinek a menetét, azaz folytonos esetben adjuk meg az átmeneti függvényt idõtartományban, diszkrét esetben pedig alkalmazzuk a definíció szerinti (táblázat alapján), a differenciaegyenlet és a polinom osztáson alapuló módszereket a mintavételezési idõpontokbeli függvényértékek meghatározására.

Folytonos idejû kimenet :

Az átmeneti függvény:

$$Y(s) = F_3(s)U(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} \frac{1}{s} \quad .$$

Az idõtartománybeli válaszfüggvény a Laplace-transzformált alak $Y(s)$ invertálásával kapható meg. Ehhez írjuk fel $Y(s)$-t parciális tört alakban:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}$$

A együtthatók meghatározása:

$$1 = A(s+2)(s+4) + Bs(s+4) + Cs(s+2)$$

$$A = \left.\frac{1}{(s+2)(s+4)}\right|_{s=0} = \frac{1}{8} \qquad B = \left.\frac{1}{s(s+4)}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{4} \qquad C = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-4} = \frac{1}{8} \ ,$$

$$Y(s) = \frac{1}{8}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{8}\frac{1}{s+4} \quad .$$

A 9.4 táblázat alapján elvégezve az inverz Laplace-transzformációt az átmeneti függvény idõtartománybeli alakja:

$$y(t) = \frac{1}{8}1(t) - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{-4t} \quad .$$

A definíció alapján diszkretizált tag :

A z-transzformáció definíciója alapján elvégzett diszkretizálás eredményeként a következõ impulzus átviteli függvény állt elõ:

$$F_{3_D} = \frac{0,116z}{z^2 - 0,503z + 0,05} \quad ,$$

így az átmeneti függvény z-transzformált alakja:

$$Y(z) = F_{3_D}U(z) = \frac{0,116z}{z^2 - 0,503z + 0,05}\frac{z}{z-1} = \frac{0,116z^2}{z^3 - 1,503z^2 + 0,553z - 0,05} \quad .$$

Határozzuk meg a mintavételezési idõpontokban felvettfüggvényértékeket úgy, hogy írjuk át negatív kitevõs hatványsorba $Y(z)$-t! Ezt polinomosztás segítségével oldhatjuk meg.

$$\begin{array}{l}
0,116z^2 : z^3 - 1,503z^2 + 0,553z - 0,05 = 0z^0 + 0,116z^{-1} + 0,174z^{-2} + 0,198z^{-3} + 0,208z^{-4} + \ldots \\
\underline{0,116z^2 - 0,174z + 0,064 - 0,006z^{-1}} \\
\qquad\qquad 0,174z - 0,064 + 0,006z^{-1} \\
\qquad\quad \underline{-(0,174z - 0,262 + 0,096z^{-1} - 0,009z^{-2})} \\
\qquad\qquad\qquad 0,198 - 0,090z^{-1} + 0,009z^{-2} \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(0,198 - 0,298z^{-1} + 0,109z^{-2} - 0,01z^{-3})} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0,208z^{-1} - 0,100z^{-2} + 0,01z^{-3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots
\end{array}$$

A kapott hatványsor együtthatói alapján a diszkrét átmeneti függvény a következõ értékeket vette fel az egyes mintavételi idõpontokban:

$$y(0) = 0 \quad y(0,5) = 0,116 \quad y(1) = 0,174 \quad y(1,5) = 0,198 \quad y(2) = 0,208 \quad \ldots$$

Az elõrefelé vett differenciákon alalpuló közelítés alapján diszkretizált tag :

Az elõrefelé vett differenciákon alapján levezetett közelítõ képlettel elvégzett diszkretizálás eredményeként a következõ impulzus átviteli függvény állt elõ:

$$F_{6_E} = \frac{0,25}{z^2 + z} \quad .$$

A határértékvizsgálat részeként elvégzett pólus ellenõrzés jelezte, hogy az átmeneti függvény nem áll be egy véges értékhez. Vizsgáljuk meg a függvény menetét kétféle módon:

- táblázat segítségével elvégzett inverz z-transzformációval és
- differenciaegyenlet lépésenkénti megoldásával.

Az inverz z-transzformációhoz elsõ lépésként bontsuk parciális törtekre az átmeneti függvény z-transzformáltját:

$$Y(z) = \frac{0,25}{z^2 + z}\frac{z}{z-1} = \frac{0,25}{(z+1)(z-1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1}$$

Az együtthatók meghatározása:

$$0,25 = A(z-1) + B(z+1)$$

$$A = \left.\frac{0,25}{z-1}\right|_{z=-1} = -\frac{1}{8} \qquad B = \left.\frac{0,25}{z+1}\right|_{z=1} = \frac{1}{8},$$

Visszahelyettesítve az $Y(z)$ kifejezésébe és átalakítva azt az inverz z-transzformáció elvégzéséhez:

$$Y(z) = -\frac{1}{8}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{8}\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{8}\frac{z}{z-(-1)}z^{-1} + \frac{1}{8}\frac{z}{z-1}z^{-1} \quad ,$$

így az idõtartománybeli alak:

$$y(kT_0) = -\frac{1}{8}(-1)^{k-1}1((k-1)T_0) + \frac{1}{8}1((k-1)T_0) \quad .$$

Az egyes mintavételi idõpontokban kapott értékek:

$$\begin{aligned}
k=0 \qquad & y(0) = -\frac{1}{8}(-1)^{-1}1(-0,5) + \frac{1}{8}1(-0,5) = -\frac{1}{8}\cdot(-1)\cdot 0 + \frac{1}{8}\cdot 0 = 0 \\
k=1 \qquad & y(0,5) = -\frac{1}{8}(-1)^{0}1(0) + \frac{1}{8}1(0) = -\frac{1}{8}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 1 = 0 \\
k=2 \qquad & y(1) = -\frac{1}{8}(-1)^{1}1(0,5) + \frac{1}{8}1(0,5) = -\frac{1}{8}\cdot(-1)\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 1 = 0,25 \\
k=3 \qquad & y(1,5) = -\frac{1}{8}(-1)^{2}1(1) + \frac{1}{8}1(1) = -\frac{1}{8}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 1 = 0 \\
& \vdots \\
k=10 \qquad & y(5) = -\frac{1}{8}(-1)^{9}1(5) + \frac{1}{8}1(5) = -\frac{1}{8}\cdot(-1)\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 1 = 0,25 \\
k=11 \qquad & y(5,5) = -\frac{1}{8}(-1)^{10}1(5,5) + \frac{1}{8}1(5,5) = -\frac{1}{8}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 1 = 0 \\
& \vdots
\end{aligned}$$

A kapott eredmények alapján látható, hogy az egységugrásra kapott válasz a 0 és 0,25-ös értékek között végez csillapítatlan lengést.
Vizsgáljuk meg, hogy a visszafelé vett differenciaegyenlet lépésenkénti megoldásával milyen eredményt kapunk! Ebben az esetben az impulzus átviteli függvényből indulunk ki:

$$F_{6_E} = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,25}{z^2+z} \quad .$$

Elsõ lépésként írjuk fel az egyenletet pozitív hatványkitevõs alakban, majd írjuk negatív hatványkitevõs alakra és rendezzük $Y(z)$-re, hogy visszafelé vett differenciaegyenletet megkapjuk:

$$\begin{aligned}
& z^2Y(z) + zY(z) = 0,25U(z) \\
& Y(z) = -z^{-1}Y(z) + 0,25z^{-2}U(z) \\
& y(kT_0) = -y((k-1)T_0) + 0,25u((k-2)T_0) \quad .
\end{aligned}$$

A kapott egyenlet megoldásához tételezzük fel a zérus kezdeti feltételt ($y(-0,5) = 0$), majd az idõpontok és a bemenõ kimenõ jelek értékeinek behelyettesítésével oldjuk meg az egyenletet:

$$\begin{aligned}
k=0 \qquad & y(0) = -y(-0,5) + 0,25u(-1) = 0 + 0,25\cdot 0 = 0 \\
k=1 \qquad & y(0,5) = -y(0) + 0,25u(-0,5) = 0 + 0,25\cdot 0 = 0 \\
k=2 \qquad & y(1) = -y(0,5) + 0,25u(0) = 0 + 0,25\cdot 1 = 0,25 \\
k=3 \qquad & y(1,5) = -y(1) + 0,25u(0,5) = -0,25 + 0,25\cdot 1 = 0 \\
k=4 \qquad & y(2) = -y(1,5) + 0,25u(1) = 0 + 0,25\cdot 1 = 0,25 \\
& \vdots \\
k=10 \qquad & y(5) = -y(4,5) + 0,25u(4) = ??? + 0,25\cdot 1 = \\
k=11 \qquad & y(5,5) = -y(5) + 0,25u(4,5) = ??? + 0,25\cdot 1 =
\end{aligned}$$

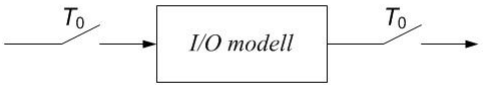
Mint látható, a két megoldás ugyanazt az eredményt szolgáltatja, de míg a táblázat segítségével elvégzett inverz z-transzformáció zárt alakú képletet kapunk, így tetszõleges idõpontra kiszámolható a kimenet értéke, addig a differenciaegyenlet lépésenkénti megoldása esetén csak valamennyi korábbi idõponthoz tartozó eredmény ismeretében lehet a kérdéses idõpontbeli értéket meghatározni.

7.3. Gyakorló feladatok és megoldások

7.3.1. Feladatok

1. Legyen egy tag átviteli függvénye $G(s) = \dfrac{2s+6}{3s^3+4s^2+2s+6}$. Határozza meg az impulzus-átviteli függvényt az *elõrefelé vett differenciák* közelítéssel, ha $T_0 = 1s$!

2. Tekintsük az alábbi mintavételezett tagot!

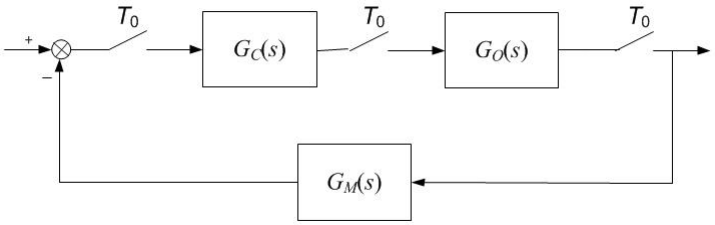


$$y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t) + 3y(t) = u^{(1)}(t) + 4u(t)$$

   (a) Végezze el a diszkretizálást 9.3-9.4 táblázatok segítségével!

   (b) Végezze el a diszkretizálást az elõrefelé vett differenciák módszerével!

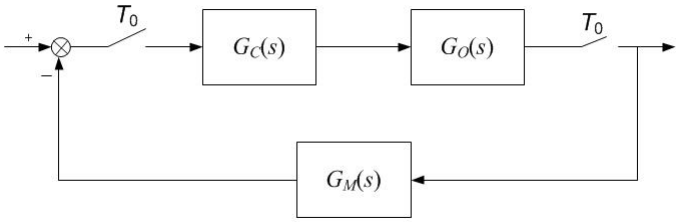
3. Tekintsük az alábbi visszacsatolt kört!



$$G_C(s) = \frac{1}{s} \quad G_O(s) = \frac{10}{s+10} \quad G_M(s) = \frac{4}{8s+2}$$

   Adja meg a zárt kör eredõ impulzus-átviteli függvényét, majd végezze el a diszkretizálást a *visszafelé vett differenciák* módszere szerinti közelítéssel, ha $T_0 = 2s$!

4. Tekintsük az alábbi visszacsatolt kört!



$$G_C(s) = \frac{2}{s} \quad G_O(s) = \frac{2}{4s+1} \quad G_M(s) = \frac{1}{0,1s+1}$$

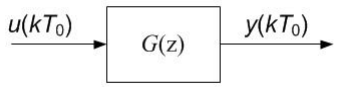
   A diszkretizálást a *visszafelé vett differenciák* módszere alapján végezve, adja meg a zárt kör eredõ impulzus-átviteli függvényét, ha $T_0 = 2s$!

5. Legyen $G(z) = \dfrac{z}{z+0,5}$ és $U(z) = \dfrac{z}{z-1}$. Adja meg $y(2)$ értékét, ha $T_0 = 0,5s$ és $y(-0,5) = 0$! (Megj.: A feladatot legalább három különbözõ módon meg lehet oldani!)

6. Adja meg a kimenet értékét a 4. mintavételezési idõpontban, ha adott a kimenõ jel z-transzformáltja, Y(z)!

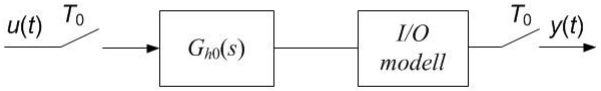
$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+1)}$$

7. Ábrázolja grafikonon az $y(kT_0)$ kimenetet a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ mintavételezési pontokra a következõ impulzus-átviteli függvénnyel rendelkezõ rendszer esetében! Adja meg a tag erõsítését is!



$$G(z) = \frac{z^2}{2z^2+1} \quad u(t) = \begin{cases} t & \text{, ha } 0 \le t < 3 \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases} , \qquad y(-2) = y(-4) = 0, \quad T_0 = 2s$$

8. Tekintsük az alábbi mintavételezett tagcsoportot!

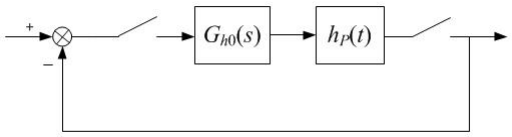


$$4y^{(1)}(t) + 5,544y(t) = 5.544u(t) \ , \quad G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{T_0 s}}{s}$$

Határozza meg a kimenet értékét a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ mintavételi pontokban, ha a bemenet:

$$u(t) = \begin{cases} t & \text{, ha } 0 \le t \le 3 \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases} , \qquad y(-1) = 0, \quad T_0 = 1s$$

9. Tekintsük az alábbi mintavételezett tagcsoportot!

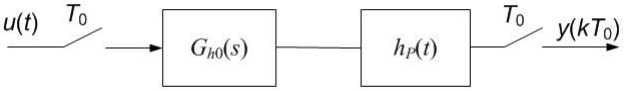


$$h_P(t) = 2t \quad G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{T_0 s}}{s}$$

Határozza meg a kimenet értékét a $k = 0, 1, 2, 3$ mintavételi pontokban, ha a bemenet:

$$u(t) = \begin{cases} t & \text{, ha } 0 \le t < 3 \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases} , \qquad y(-1) = y(-2) = 0, \quad T_0 = 1s$$

10. Tekintsük az alábbi mintavételezett tagcsoportot!

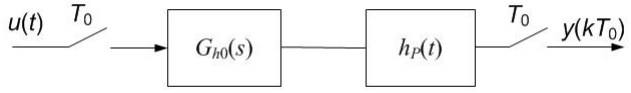


$$h_P(t) = e^{-0,693t} \ , \quad G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{T_0 s}}{s}$$

Határozza meg a kimenet értékét a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ mintavételi pontokban, ha a bemenet:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } 0 \le t < 4 \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases} , \qquad y(-2) = y(-4) = 0, \quad T_0 = 2s$$

11. Tekintsük az alábbi mintavételezett tagcsoportot!



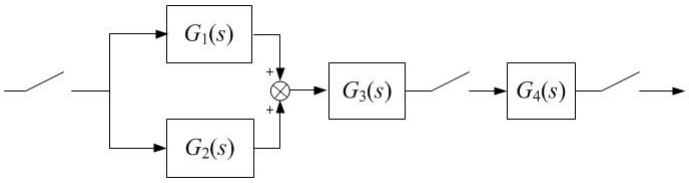
$$h_P(t) = e^{-0,25t} \ , \quad G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{T_0 s}}{s}$$

Határozza meg a kimenet értékét a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ mintavételi pontokban, ha a bemenet:

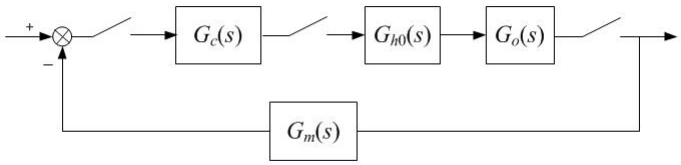
$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } 0 \le t < 4 \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases} \quad , \qquad y(-T_0) = 0, \qquad T_0 = 2,772s$$

12. Adja meg az alábbi rendszerek eredõ impulzus átviteli függvényét!

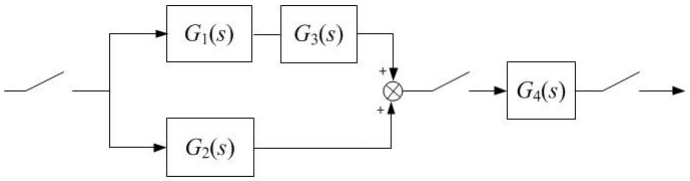
(a)



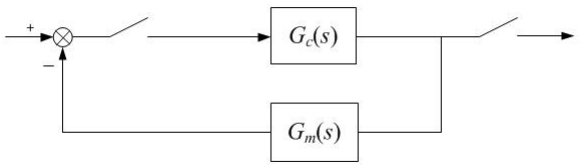
(b)



(c)



(d)



7.3.2. Megoldások

1. $G(z) = \dfrac{2z + 4}{3z^3 - 5z^2 + 3z + 5}$

2. (a) $G(z) = 1,5\dfrac{z}{z - e^{-T_0}} - 0,5\dfrac{z}{z - e^{-3T_0}}$

   (b) $G(z) = \dfrac{T_0 z + T_(4T_0 - 1)}{z^2 + 2(2T_0 - 1)z + 3T_0^2 - 4T_0 + 1}$

3. $G(z) = \dfrac{120z^3 - 80z^2}{143z^3 - 108z^2 + 47z - 2}$

4. $G(z) = \dfrac{8,4z^3 - 0,4z^2}{11,15z^3 - 5,4z^2 + 2,35z - 0,1}$

5. $y(2) = 0,6875$ A három módszer:
   - differencia egyenlet felírása és iteratív megoldása;
   - $Y(z)$ meghatározása, majd polinomosztással a keresett idõponthoz tartozó érték meghatározása;
   - $Y(z)$ meghatározása, majd inverz z-transzformációval kapott alakból a keresett idõponthoz tartozó érték meghatározása.

6. $y(3T_0) = 2$, meghatározható polinomosztással vagy inverz z-transzformációval.

7. - $y(0) = 0$;
   - $y(2) = 1$;
   - $y(4) = 0$;
   - $y(6) = -0,5$;
   - $y(8) = 0$;

   $K = \frac{1}{3}$

8. - $y(0) = 0$;
   - $y(1) = 0$;
   - $y(2) = 0,75$;
   - $y(3) = 1,6875$;
   - $y(4) = 2,672$;

9. - $y(0) = 0$;
   - $y(1) = 0$;
   - $y(2) = 0,5$;
   - $y(3) = 2,5$;
   - $y(4) = 5,5$;

10. - $y(0) = 0$;
    - $y(2) = 1,08$;
    - $y(4) = 1,35$;
    - $y(6) = 0,34$;
    - $y(8) = 0,08$;

11. - $y(0) = 0$;
    - $y(2,772) = 2$;
    - $y(5,544) = 3$;
    - $y(8,316) = 1,5$;
    - $y(11,088) = 0,75$;

12. (a) $G_e(z) = \mathcal{Z}\{(G_1(s) + G_2(s))G_3(s)\}\mathcal{Z}\{G_4(s)\} = (G_1G_3(z) + G_2G_3(z))G_4(z)$

    (b) $G_e(z) = \dfrac{\mathcal{Z}\{G_c(s)\}\mathcal{Z}\{G_{h0}(s)G_o(s)\}}{1 + \mathcal{Z}\{G_c(s)\}\mathcal{Z}\{G_{h0}(s)G_o(s)\}\mathcal{Z}\{G_m(s)\}} = \dfrac{G_c(z)G_{h0}G_o(z)}{1 + G_c(z)G_{h0}G_o(z)G_m(z)}$

    (c) $G_e(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)G_3(s) + G_2(s)\}\mathcal{Z}\{G_4(s)\} = (G_1G_3(z) + G_2(z))G_4(z)$

    (d) $G_e(z) = \dfrac{\mathcal{Z}\{G_c(s)\}}{1 + \mathcal{Z}\{G_c(s)G_m(s)\}} = \dfrac{G_c(z)}{1 + G_cG_m(z)}$

8. fejezet

Mintavételezett rendszerek stabilitása

8.1. Elméleti áttekintés

8.1.1. Diszkrét BIBO stabilitás

Egy lineáris mintavételezett rendszert korlátos bemenet - korlátos kimenet (BIBO) stabilitásúnak nevezünk, ha korlátos bemenõ impulzussorozat hatására keletkezõ kimenõ impulzussorozat is korlátos:

$$u(kT_0) < M_1 \ , \quad k_0 \leq k < \infty \quad \Rightarrow \quad y(kT_0) < M_2 \ , \quad k_0 \leq k < \infty \ , \quad M_1, M_2 < \infty$$

Belátható, hogy a lineáris mintavételezõ rendszer BIBO stabilitásának szükséges és elégséges feltétele:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(kT_0)| \leq M_2 < \infty \ ,$$

azaz a zárt rendszer súlyfüggvényének mintavételezési idõpontokban vett abszolút értékeibõl alkotott végtelen sor korlátos.

8.1.2. Aszimptotikus stabilitás

Egy lineáris mintavételezett rendszert *aszimptotikusan stabil*nak (vagy röviden *stabil*nak) nevezünk, ha $u(kT_0) = 0$ bemeneti impulzussorozat és $y(-1T_0),\ y(-2T_0),\ \ldots, y(-(n-1)T_0) \ \neq \ 0$ kezdeti feltételek esetén a kimeneti impulzussorozat zérushoz tart:

$$\lim_{n \to \infty} y(nT_0) = 0 \ .$$

A mintavételezett rendszerek esetében is az impulzus-átviteli függvény nevezõjének a gyökeit, vagyis a pólusokat meghatározva tudunk a stabilitásról dönteni a következõ tételeknek megfelelõen.

– Egy lienáris mintavételezett rendszer akkor és csak akkor *aszimptotikusan stabil*, ha az eredõ impulzus-átviteli függvényének *valamennyi* pólusa abszolút értékben 1-nél kisebb:

$$\textit{a rendszer aszimptotikusan stabil} \Leftrightarrow \forall p_i \ : \ |p_i| < 1, \quad i = 1, \ldots, n \quad .$$

A megadott feltételnek megfelelõen, ha a pólusokat a komplex síkon ábrázoljuk, valamennyi pólus az origó középpontú, egység sugarú körön belül található.

– Egy lienáris mintavételezett rendszer a *stabilitás határán* van, ha az eredõ impulzus-átviteli függvényének van, vagy vannak olyan pólusai, melyeknek az abszolút értéke egyenlõ 1-gyel, de ha vannak további pólusai, akkor azok abszolút értékben 1-nél kisebbek:

$$\textit{stabilitás határa} \Leftrightarrow \exists p_k \ : \ |p_k| = 1, \quad \forall p_{i \ (i \neq k)} \ : \ |p_i| \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

Geometriai szempontból ez a feltétel azt jelenti, hogy az impulzus-átviteli függvénynek van legalább egy olyan pólusa, vagy póluspárja, amely az egységsugarú kör ívén helyezkedik el, és az esetleges további pólusokra igaz, hogy azok nincsenek egység sugarú körön kívül. A stabilitás határán lévõ rendszer aszimptotikusan nem stabil, de BIBO stabil.

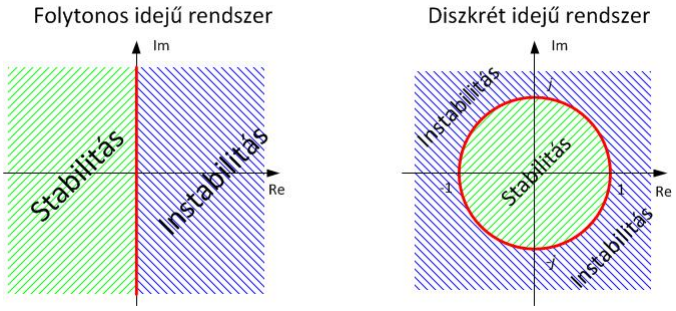
– Egy lineáris mintavételezett rendszer *instabil*, ha az eredõ impulzus-átviteli függvényének van legalább egy olyan gyöke vagy gyökpárja, melynek abszolút értéke nagyobb 1-nél:

$$a\ rendszer\ instabil \Leftrightarrow \exists p_i \ : \ |p_i| > 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

Instabil rendszer esetén, a komplex síkon ábrázolva a pólusokat, legalább egy pólus vagy póluspár az egységsugarú körön kívül van.

Diszkrét idejû rendszerek esetében is igaz, hogy az aszimptotikus stabil modellek egyben BIBO stabilak is, de a BIBO stabil modellek nem feltétlenül aszimptotikusan stabilak.

Belátható, hogy a folytonos idejû és a diszkrét idejû rendszerek stabilitási tartományai között a következõ ábrának megfelelõ összefüggés van:



de a stabilitási tartományok közötti megfeletetés a diszkretizáció folyamán nem egyértelmû.

A 6.1.2 fejezetben tárgyalt egyszerûsített diszkretizálási módszerek használata esetén a diszkretizált rendszer modelljének stabilitása megváltozhat a következõ módon:

– Az elõrefelé vett differenciák módszere esetén a folytonos idõtartományban instabil rendszerek modelljei diszkretizálás után is instabilak maradnak, de az eredetileg stabil modellekbõl kaphatunk stabil vagy instabil (esetleg stabilitás határán lévõ) diszkrét modellt.

– A visszafelé vett differenciák módszere esetén a folytonos idõtartományban stabil rendszerek modelljei diszkretizálás után is stabilak maradnak, de az eredetileg instabil modellekbõl kaphatunk stabil vagy instabil (esetleg stabilitás határán lévõ) diszkrét modellt.

– A Tustin módszer alkalmazása esetén sem a stabilitás, sem az instabilitás tartománya nem változik, de a pólusok helye a stabilitási tartományon belül változhat, így a tranziens viselkedés módosulhat.

8.1.3. Stabilitásvizsgálat diszkrét idõtartományban

Pólusok elhelyezkedése alapján

A folytonos idejû rendszerekhez hasonlóan, a diszkrét idejû rendszerek esetében is a stabilitásra vonatkozó tételek segítségével a pólusok ismeretében egyértelmûen eldönthetõ a vizsgált tag vagy tagcsoport modelljének stabilitása. Egyszerûbb esetben, ha az eredõ impulzus-átviteli függvény elsõ vagy másodfokú polinom vagy gyöktényezõs alakban megadott magasabb rendû polinom, akkor a pólusok alapján közvetlenül is eldönthetõ a stabilitás.

A vizsgált diszkrét idejû modell aszimptotikusan stabil, ha

$$\forall p_i \ : \ |p_i| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad p_i = Re(p_i) + Im(p_i) \quad Re(p_i)^2 + Im(p_i)^2 < 1 \ .$$

Jury-teszt

A Jury-teszt a vizsgálandó rendszer eredõ impulzus-átviteli függvénye nevezõjének együtthatói alapján határozza meg a stabilitást. Legyen az eredõ impulzus-átviteli függvény egy negyedrendû rendszer

esetében a következõ általános alakú:

$$G(z) = \frac{1}{a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z}$$

A nevezõ polinomja együtthatóinak felhasználásával készítsük el az alábbi táblázatot:

a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	
a'_4	a'_3	a'_2	a'_1		$a'_i = a_i - \alpha_4 a_{4-i} \quad i = 4,3,2,1 \quad \alpha_4 = \frac{a_0}{a_4}$
a'_1	a'_2	a'_3	a'_4		
a''_4	a''_3	a''_2			$a''_i = a'_i - \alpha_3 a'_{4-i} \quad i = 3,2,1 \quad \alpha_3 = \frac{a'_1}{a'_4}$
a''_2	a''_3	a''_4			
a'''_4	a'''_3				$a'''_i = a''_i - \alpha_2 a''_{4-i} \quad i = 2,1 \quad \alpha_2 = \frac{a''_2}{a''_4}$
a'''_3	a'''_4				
a''''_4					$a''''_i = a'''_i - \alpha_1 a'''_{4-i} \quad i = 1 \quad \alpha_1 = \frac{a'''_3}{a'''_4}$

A diszkrét idejû rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha a korrigált együtthatók közül a legnagyobb indexûek, tehát példánkban az

$$a_4 \quad a'_4 \quad a''_4 \quad a'''_4 \quad a''''_4$$

együtthatók mindegyike pozitív.

w-teszt

A w-teszt alkalmazásánál azt használjuk ki, hogy megfelelõ transzformációt alkalmazva a folytonos és diszkrét idõtartományok közötti konverzióra, a stabilitási tartomány nem torzul. Ennek megfelelõen, ha az eredõ impulzus-átviteli függvényt a

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

egyszerû képlet segítségével mintegy áttranszformáljuk folyamatos idõtartományba, akkor az ott tanult módszereket, így például a Hurwitz-kritériumot alkalmazhatjuk a stabilitás ellenõrzésére.

8.2. Kidolgozott feladatok

1. Vizsgálja meg a stabilitását mindkét stabilitási definíció szerint az alábbi tagoknak, és stabil esetben adja meg az erõsítést!

   (a) $G_1(z) = \dfrac{2z^2 + 4}{12z^2 + 15z + 3}$

   Megoldás:

   A tag pólusainak meghatározása:

   $$z_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 144}}{24} = \frac{-15 \pm 9}{24}$$

   azaz $z_1 = -0,25 \quad z_2 = -1$. Miután $|z_2| \not< 1$, de $|z_{1,2}| \not> 1$, így a tag aszimptotikusan nem stabil, de BIBO stabil.

   (b) $G_2(z) = \dfrac{2z^{-1} + 3}{0,25z^{-2} + 0,5z^{-1} + 0,5}$

   Megoldás:

Írjuk át az átviteli függvényt pozitív hatványkitevõs alakra, ehhez szorozzuk meg a tört számlálóját és nevezõjét a polinomokban szereplõ, abszolút értékben legnagyobb hatványkitevõjû z értékkel, ebben a példában z^2-tel:

$$G_2(z) = \frac{2z^{-1} + 3}{0,25z^{-2} + 0,5z^{-1} + 0,5} = \frac{2z + 3z^2}{0,25 + 0,5z + 0,5z^2} \ ,$$

majd határozzuk meg a tag pólusait:

$$z_{1,2} = \frac{-0,5 \pm \sqrt{0,25 - 0,5}}{1} = -0,5 \pm j0,5 \ .$$

Miután $|z_{1,2}| = 0,25 + 0,25 = 0,5 < 1$, így a tag aszimptotikusan stabil, és ebbõl következõen BIBO stabil is. (Megjegyzés: komplex póluspár esetén úgy ellenõrizzük, hogy annak abszolút értéke nem nagyobb-e 1-nél, hogy vesszük a valós rész négyzetének és a képzetes rész négyzetének az összegét, és ennek kisebbnek kell lennie 1-nél.) Az erõsítése:

$$K = \frac{2 + 3}{0,25 + 0,5 + 0,5} = 4$$

(c) $G_3(z) = \dfrac{(z + 2)(z + 1)z}{2z^2 + 3z - 1}$

Megoldás:

Elvégezve a számlálóban a kijelölt mûveleteket:

$$G_3(z) = \frac{(z + 2)(z + 1)z}{2z^2 + 3z - 1} = \frac{z^3 + 3z^2 + 2z}{2z^2 + 3z - 1}$$

látható, hogy a számlálóban szereplõ polinom fokszáma nagyobb, mint a nevezõbelié, így a tag nem realizálható (nem valósítható meg), azaz nincs értelme a stabilitásvizsgálatnak. (Megjegyzés: bár az elõzõ két példában a fokszám ellenõrzése kiemelve nem szerepelt, de ezt minden esetben el kell végezni.)

(d) $G_4(z) = \dfrac{2z^{-2} + z^{-3}}{z^{-2} + z^{-1} + 1}$

Megoldás:

Írjuk át az átviteli függvényt pozitív hatványkitevõs alakra, ehhez szorozzuk meg a tört számlálóját és nevezõjét z^3-nel:

$$G_4(z) = \frac{2z + 1}{z^3 + z^2 + z} = \frac{2z + 1}{z(z^2 + z + 1)} \ ,$$

majd határozzuk meg a tag pólusait:

$$z_1 = 0, \quad z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Miután $|z_1| < 1$, de $|z_{2,3}| = (\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$, így a tag aszimptotikusan nem stabil, de BIBO stabil.

(e) $G_5(z) = \dfrac{z^2 + z}{z^2 + 0,75z - 0,25}$

Megoldás:

Határozzuk meg a tag pólusait:

$$z_{1,2} = \frac{-0,75 \pm \sqrt{0,75^2 + 1}}{2} = \frac{-0,75 \pm 1,25}{2} \quad ,$$

azaz $z_1 = 0,25$ és $z_2 = -1$.
Írjuk át az impulzus átviteli függvényt gyöktényezõs alakba!

$$G_5(z) = \frac{z(z+1)}{(z-0,25)(z+1)}$$

Látható, hogy a számlálónak és a nevezõnek van közös gyöke, így a $z+1$ kifejezéssel egyszerûsíteni lehet, azaz a vizsgálandó impulzus átviteli függvény:

$$G_5(z) = \frac{z}{z-0,25} \ .$$

Az egyszerûsített impulzus átviteli függvénynek a $z = 0,25$ a pólusa, aminek abszolút értéke természetesen kisebb 1-nél, így a tag aszimptótikusan stabil és ebbõl következõen BIBO stabil is.
Ha ezt az egyszerûsítést nem végeztük volna el, akkor a $z = -1$ pólus miatt csak BIBO stabilnak tekinthettük volna a tagot.

(f) $G_6(z) = \dfrac{z^{-2} - 0,25z^{-3}}{2z^{-2} + 5z^{-1} + 2}$

Megoldás:

Elvégezve a pozitív hatványkitevõs alakra történõ átalakítást:

$$G_6(z) = \frac{z - 0,25}{2z + 5z^2 + 2z^3}$$

Határozzuk meg a tag pólusait:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -0,5 \ \text{ és } \ z_3 = -2 \ .$$

Miután $|z_3| > 1$, így a tag instabil.

2. Vizsgálja meg az alábbi tag stabilitását!

$$G(z) = \frac{2z^2 + 5}{4z^3 + 3z^2 + 5z + 1}$$

Megoldás:

A feladatot a Jury-teszt segítségével végezhetjük el. Ehhez a nevezõ polinomja együtthatóinak felhasználásával készítsük el elõször paraméteresen az eliminációs táblázatot:

a_3	a_2	a_1	a_0	
a_0	a_1	a_2	a_3	
a_3'	a_2'	a_1'		$\alpha_3 = \frac{a_0}{a_3} \quad a_i' = a_i - \alpha_3 a_{3-i} \quad i = 3,2,1$
a_1'	a_2'	a_3'		
a_3''	a_2''			$\alpha_2 = \frac{a_1'}{a_3'} \quad a_i'' = a_i' - \alpha_2 a_{3-i}' \quad i = 2,1$
a_2''	a_3''			
a_3'''				$\alpha_1 = \frac{a_2'}{a_3'} \quad a_i''' = a_i'' - \alpha_1 a_{3-i}' \quad i = 1$

A vizsgált rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha a korrigált együtthatók közül a legnagyobb indexûek, azaz példánkban az

$$a_3 \quad a_3' \quad a_3'' \quad a_3'''$$

együtthatók mindegyike pozitív.

Helyettesítsük be a megadott $G(z)$ átviteli függvény nevezõjében szereplõ együtthatókat:

4	3	5	1
1	5	3	4
3,75	1,75	4,25	
4,25	1,75	3,75	
−1,06	...		

$\alpha_3 = \frac{1}{4} \quad a'_3 = 4 - 0,25 \cdot 1 \quad a'_2 = 3 - 0,25 \cdot 5 \quad a'_1 = 5 - 0,25 \cdot 3$

$\alpha_2 = \frac{4,25}{3,75} \quad a''_3 = 3,75 - 1,13 \cdot 4,25 \quad ...$

Miután a''_3-re negatív érték jött ki, így a teszt stabilitási feltétele már biztosan nem fog teljesülni, azaz a tag instabil, ezért a további számolást nem kell elvégezni.

3. Vizsgálja meg az alábbi tag stabilitását!

$$G(z) = \frac{1,9z^3 - 1,27z^2}{28,6z^3 - 21,6z^2 + 9,4z - 0,4}$$

Megoldás:

Helyettesítsük be a megadott $G(z)$ átviteli függvény nevezõjében szereplõ együtthatókat az általanos alakba:

28,6	−21,6	9,4	−0,4
−0,4	9,4	−21,6	28,6
28,59	−21,47	9,1	
9,1	−24,47	28,59	
25,69	−14,6		
−14,6	25,69		
17,37			

$\alpha_3 = \frac{-0,4}{28,6} = -0,014 \quad a'_3 = 28,6 - 0,014 \cdot 0,4$

$a'_2 = -21,6 + 0,014 \cdot 9,4 \quad a'_1 = 9,4 - 0,014 \cdot 21,6$

$\alpha_2 = \frac{9,1}{28,59} = 0,318 \quad a''_3 = 28,59 - 0,318 \cdot 9,1 \quad a''_2 = -21,47 + 0,318 \cdot 21,47$

$\alpha_2 = \frac{-14,6}{25,69} = -0,57 \quad a'''_3 = 25,69 - 0,57 \cdot 14,6$

Miután a_3, a'_3, a''_3 és a'''_3 együttahtók mindegyikére pozitív érték jött ki, így a tag asimptotikus stabil.

8.3. Gyakorló feladatok és megoldások

8.3.1. Feladatok

1. Vizsgálja meg *mindkét* stabilitási definíció szempontjából az alábbi tagokat! Aszimptotikusan stabil tagok esetében adja meg az erõsítést!

   (a) $G_1(z) = \dfrac{2z^2 - 1}{12z^2 + 10z + 6}$

   (b) $G_2(z) = \dfrac{2z^{-1} + 4}{1,96z^{-2} + 0,4z^{-1} + 1}$

   (c) $G_3(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z^2 + z - 1}$

   (d) $G_4(z) = \dfrac{2z^3 + 1}{z^2 - 0,25z}$

   (e) $G_5(z) = \dfrac{4z^{-2}}{2z^{-2} - 0,216z^{-1}}$

   (f) $G_6(z) = \dfrac{z^{-1} + 5}{0,96z^{-2} + 0,4z^{-1} + 2}$

   (g) $G_7(z) = \dfrac{(z + 2)(z^2 + 1)}{z^2 + 1,5z - 1}$

   (h) $G_8(z) = \dfrac{2z^{-1} - 1}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$

2. Legyen egy tag átviteli függvénye a következõ:

$$G(s) = \frac{2s+6}{3s^3+4s^2+2s+6}$$

   (a) Határozza meg az impulzus-átviteli függvényt az elõrefelé vett differenciák közelítéssel, ha $T_0 = 1s$!

   (b) Hasonlítsa össze a folytonos és a diszkretizált tag stabilitását!

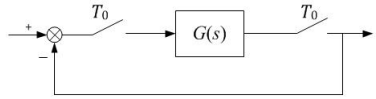
3. Határozza meg a végértéktétel segítségével, hogy hova tart az alábbi tag súlyfüggvénye!

$$G(z) = \frac{z+1}{10z^3+4z^2+8z+2}$$

4. Határozza meg a végértéktétel segítségével, hogy hova tart az alábbi tag átmeneti függvénye!

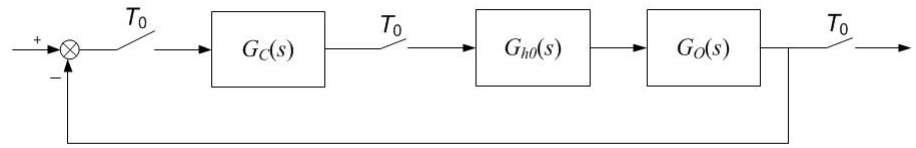
$$G(z) = \frac{2z+1}{5z^3+3z^2+4z+1}$$

5. Határozza meg a T_0 mintavételezési idõ értékét úgy, hogy a visszacsatolt kör a stabilitás határán legyen!



$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

6. Tekintsük az alábbi visszacsatolt kört!



$$G_C(s) = 5\left(1+\frac{1}{2s}\right) \qquad G_{h0}(s) = \frac{1-e^{T_0 s}}{s} \qquad G_O(s) = \frac{0,693}{s+0,693}$$

   (a) Adja meg a zárt kör eredõ impulzus-átviteli függvényét, ha $T_0 = 1$mp! A diszkretizálást definíció (9.3-9.4 táblázatok) szerint végezze!

   (b) Hova tart a rendszer átmeneti függvénye, ha $k \to \infty$?

8.3.2. Megoldások

1. (a) $G_1(z)$ pólusai $p_{1,2} = 0,42 \pm j0,57$, a pólusok abszolút értéke kisebb 1-nél, így a tag aszimptótikusan stabil és BIBO stabil is.

   (b) $G_2(z)$ pólusai $p_{1,2} = 0,2 \pm j1,39$, a pólusok abszolút értéke nagyobb 1-nél, így a tag instabil.

   (c) $G_3(z)$ pólusai $p_{1,2} = 0,5 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, egyik pólus abszolút értéke nagyobb 1-nél, így a tag instabil is.

   (d) $G_4(z)$ a számláló fokszáma nagyobb a nevezõénél, így a tag nem megvalósítható.

   (e) $G_5(z)$ pólusa $p_1 = 9,26$, azaz pólus értéke nagyobb 1-nél, így a tag instabil is.

   (f) $G_6(z)$ pólusai $p_{1,2} = -0,1 \pm j0,69$, a pólusok abszolút értéke kisebb 1-nél, így a tag aszimptótikusan stabil és BIBO stabil is.

   (g) $G_7(z)$ a számláló fokszáma nagyobb a nevezõénél, így a tag nem megvalósítható.

(h) $G_8(z)$ pólusai $p_{1,2} = 0,5 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, a pólusok abszolút értéke egyenlõ 1-gyel, így a tag aszimptótikusan instabil, de BIBO stabil.

2. $G(z) = \frac{2z+4}{3z^3 - 5z^2 + 3z + 5}$, instabil.

3. A tag aszimptótikusan stabil, így a súlyfüggvénye a 0-hoz tart.

4. A tag aszimptótikusan stabil, így az átmeneti függvénye az erõsítésének értékéhez, azaz $\frac{3}{13}$-hoz tart.

5. A megoldáshoz azt kell megvizsgálni, hogy mikor lesz az eredõ impulzus átviteli függvény nevezõjének értéke abszolút értékben egyenlõ 1-gyel. Ennek alapján a következõ megoldások lehetségesek:
   - $T_{0_1} = 0s$, a pólusok ekkor a $p_{1,2} = 1$ pontban – nem reális eset;
   - $T_{0_2} = 1s$, a pólusok ekkor a $p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ pontban;
   - $T_{0_3} = 2s$, a pólusok ekkor a $p_{1,2} = \pm j$ pontban;
   - $T_{0_4} = 4s$, a pólusok ekkor a $p_{1,2} = -1$ pontban.

6. $G_C(z) = \frac{7,5z - 5}{z - 1}$, $G_{h0}G_O(z) = \frac{0,5}{z - 0,5}$, $G_e(z) = \frac{3,75z - 2,5}{z^2 + 2,25z - 2}$, instabil.

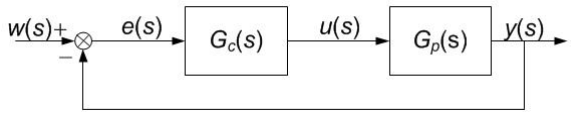
9. fejezet

Szabályozási algoritmusok

9.1. Elméleti áttekintés

9.1.1. Állandósult állapotbeli hiba

Tekintsük az alábbi zárt szabályozási kört:



A visszacsatolás alapvetõ célja a tényleges kimenet és az elõírt kimenet, vagyis az alapjel közötti eltérés minimalizálása. A szabályozási eltérés, azaz a hibajel $e(t)$ operátor tartományban a következõ módon adható meg:

$$E(s) = W(s) - Y(s) \ .$$

Állandósult állapotban a hibajel értékét a következõ összefüggésekkel lehet meghatározni:

$$E_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) \ .$$

A zárt kör felépítése alapján:

$$E(s) = W(s) - Y(s) = W(s) - G(s)E(s) \quad \Rightarrow \quad E(s) = \frac{W(s)}{1+G(s)} \ ,$$

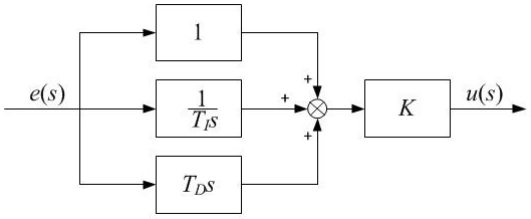
azaz

$$E_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{sW(s)}{1+G(s)} \ .$$

A hibát mind a bemenõ jel, mind a rendszer típusíóa befolyásolja.

9.1.2. Folytonos PID-szabályozó

A PID-szabályozó egy arányos, egy integráló és egy deriváló tag párhuzamos kapcsolásával kialakított, széles körben alkalmazott szabályozási módszer. Hatásvázlata a következõ ábrán látható:



Általában az arányos tag értékét 1-nek választják, és a három tag kimenetének összegét erõsítik. A bemenet-kimenet modellje az alábbi:

$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau + T_d\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}\right) ,$$

ahol K az erõsítés, T_I az integrálási, T_D a deriválási idõállandó. Átviteli függvénye:

$$G(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) ,$$

frekvenciafüggvénye átalakítva ábrázoláshoz:

$$G(j\omega) = K\left(1 + \frac{1}{T_I j\omega} + T_D j\omega\right) = K\frac{1}{T_I j\omega}\left(T^2(j\omega)^2 + 2\xi T j\omega + 1\right) ,$$

ahol

$$T = \sqrt{T_i T_D} , \quad \xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_I}{T_D}} .$$

9.1.3. Diszkrét PID-szabályozó

Diszkrét idõtartományban a folytonos PID algoritmus diszkretizált változatát alkalmazzuk. A diszkretizálás elvégezhetõ az idõtartománybeli modell alapján vagy az átviteli függvénybõl a z-transzformáció szabályai alapján.

Az idõtartománybeli modellbõl kiindulva a következõket kapjuk:

– arányos tag: $e(t) \to e(kT_0)$, azaz a hibajel értéke az adott mintavételezési pontban;

– integráló tag:

$$\frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \to \quad \frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k-1} e(iT_0) ,$$

azaz az integrálást a téglány szabály alapján közelítjük;

– deriváló tag:

$$T_D\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \quad \to \quad T_D\frac{e(kT_0) - e((k-1)T_0)}{T_0} ,$$

azaz a deriválást két pontos különbségképzéssel közelítjük.

Ennek alapján a diszkrét PID algoritmus I/O modellje:

$$u(kT_0) = K\left(e(kT_0) + \frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k-1} e(iT_0) + T_D\frac{e(kT_0) - e((k-1)T_0)}{T_0}\right) .$$

Az így kapott algoritmust *pozíció algoritmus*nak nevezzük, amelynek kimenete megadja a végrehajtószerv beállítandó helyzetét. Az impulzus-átviteli függvény elõállításához z-transzformálva a kifejezést a következõ alakot kapjuk:

$$U(z) = K\left(E(z) + \frac{T_0}{T_I}\frac{z}{z-1}E(z) + \frac{T_D}{T_0}(1 - z^{-1})E(z)\right) .$$

A diszkrét PID szabályozó impulzus-átviteli függvénye:

$$G_{DPID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K\left(1 + \frac{T_0}{T_I}\frac{z}{z-1} + \frac{T_D}{T_0}(1 - z^{-1})\right) .$$

Vannak olyan beavatkozó szervek, amelyek bemenetére a pillanatnyi helyzethez képesti megváltozást kell bemenõ adatként megadni. Ezt szolgáltatja a *sebesség algoritmus*. Levezetéshez írjuk fel a pozíció algoritmust a k-dik és $k-1$-dik mintavételezési idõpontra:

$$u(kT_0) = K\left(e(kT_0) + \frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k-1} e(iT_0) + T_D\frac{e(kT_0)-e((k-1)T_0)}{T_0}\right)$$

$$u((k-1)T_0) = K\left(e((k-1)T_0) + \frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k-2} e(iT_0) + T_D\frac{e((k-1)T_0)-e((k-2)T_0)}{T_0}\right) .$$

Kivonva egymásból a két egyenletet megkapjuk a beavatkozó jel megváltozását:

$$u(kT_0)-u((k-1)T_0) = K\left(e(kT_0)-e((k-1)T_0) + \frac{T_0}{T_I}e((k-1)T_0) + \frac{T_D}{T_0}\left(e(kT_0)-2e((k-1)T_0)+e((k-2)T_0)\right)\right) .$$

Az így származtatott sebességalgoritmust a következõ alakban szokás megadni:

$$u(kT_0) - u((k-1)T_0) = q_0e(kT_0) + q_1e((k-1)T_0) + q_2e((k-2)T_0) ,$$

ahol

$$q_0 = K\left(1+\frac{T_D}{T_0}\right) \qquad q_1 = -K\left(1-\frac{T_0}{T_I}+2\frac{T_D}{T_0}\right) \qquad q_2 = K\frac{T_D}{T_0} .$$

A sebesség algoritmus impulzus-átviteli függvénye:

$$G^s_{DPID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-z^{-1}} .$$

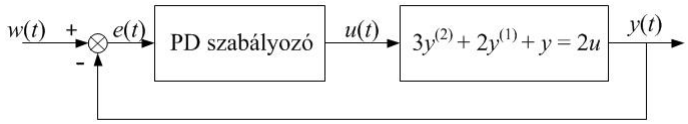
9.2. Gyakorló feladatok

1. Határozza meg a PD szabályzó erõsítését úgy, hogy egységugrás függvénynek megfelelõ alapjelváltás esetén a maradó szabályozási hiba 5% legyen, ha $T_D = 4s$ és a szabályozandó tag átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{2}{3s^2+2s+1}$$

2. Adja meg annak a PID szabályzónak a Bode-diagramját, melynél $K = 10,\ T_I = 4s$ és $T_D = 1s$!

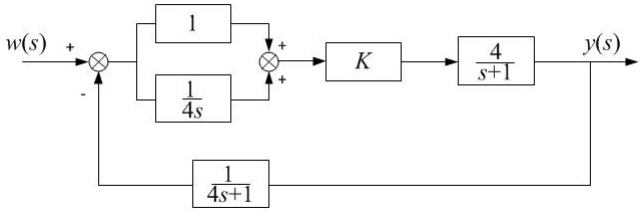
3. Tekintse az alábbi rendszer!



   (a) Adja meg, hogy milyen K értékre lesz a rendszer aszimptotikusan stabil, ha $T_d = 0,5s$!

   (b) Legyen $K = 1$. Végértéktétel segítségével adja meg, hogy hova tart a kimenet ($y(t)$), ha a bemenet $w(t) = 1(t)$! Mekkora lesz a maradó szabályozási hiba?

4. Határozza meg, hogy milyen K értékre lesz stabil az alábbi PI-szabályozót tartalmazó kör!



5. Diszkrét PID sebesség algoritmust alkalmazva, válasza meg az erõsítés (K) és az integrálási idõállandó (T_I) értékét úgy, hogy $e(k) = 1(k)$ bemenet esetén a $k = 0$ mintavételezési idõpontban a szabályzó kimenete $u(0) = 8$, a $k = 1$ mintavételezési idõpontban $u(1) = 12$ legyen, ha a mintavételezési idõállandó $T_0 = 1s$, a deriválási idõállandó $T_D = 1s$!

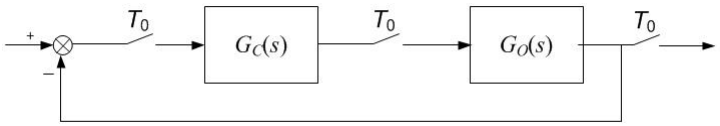
6. Határozza meg a diszkrét PID szabályzó erõsítését, integrálási és deriválási idõállandóját, ha $q_0 = 9, \quad q_1 = -3, q_0 = 3$ és $T_0 = 1s$!

7. Határozza meg a diszkrét PID szabályzó sebesség algoritmusának kimenetét a $k = 0, 1, 2, 3$ mintavételi pontokban a következõ adatok esetében!

$$q_0 = 1, \quad q_1 = -2, \quad q_2 = 0,5, \qquad u(-2) = 0, \quad T_0 = 2s$$

$$e(t) = \begin{cases} 2 & \text{, ha } 0 \leq t < 6s \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

8. (a) Diszkretizálja az alábbi szabályozó kört az alábbi ábrának megfelelõen, és határozza meg az eredõ impulzus-átviteli függvényt, ha $T_0 = 0,3465s$:



$$G_C(s) = \frac{1}{s} \quad G_o(s) = \frac{1}{s+2} \ .$$

(b) Módosítsa a szabályozó impulzus átviteli függvényét a következõ módon:

$$G_C(s) = K\frac{1}{s} \ ,$$

és vizsgálja meg, hogy a K értékének növelésével lehet-e a kört instabil állapotba hozni!

Melléklet

A következõ oldalakon találhatóak a Laplace- és z-transzformáció elvégzéséhez szükséges táblázatok.

T/I. Laplace-transzformáció azonosságai

Fogalom	Időfüggvény	Laplace-transzformált
Laplace-transzformáció értelmezése	$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
Inverz Laplace-transzformáció értelmezése	$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$	$F(s)$
Linearitás	$cf(t)$	$cF(s)$
Szuperpozíció	$c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$	$c_1F_1(s) + c_2F_2(s)$
Differenciálhányados	$f^{(1)}(t)$	$sF(s) - f(0)$
Laplace-	$f^{(2)}(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
transzformáltja	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - \sum_{p=0}^{n-1} s^{n-p-1}f^{(p)}(0)$
Integrálás Laplace-transzformációja	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
Eltolási tétel	$1(t-\tau)f(t-\tau)$	$e^{-s\tau}F(s)$
Csillapítási tétel	$f(t)e^{\mp\alpha t}$	$F(s \pm \alpha)$
Konvolúció tétel	$f_1(t) * f_2(t)t$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Kezdeti-érték tétel	$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$	
Végérték tétel	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$	

T/II. Nevezetes függvények Laplace-transzformáltja

Időfüggvény $f(t)$	Laplace-transzformált $F(s)$
Egységimpulzus $\delta(t)$	1
Egységugrás $1(t)$	$\frac{1}{s}$
Egység-sebességugrás $v(t)$	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
$t^n e^{-\alpha t}$ (n pozitív egész)	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})$ $(\alpha \neq \beta)$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
$\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta e^{-\beta t}-\alpha e^{-\alpha t})$ $(\alpha \neq \beta)$	$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
$\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$
$\frac{1}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha t}-\alpha t e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$
$\sin(\omega_n t)$	$\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}$
$\cos(\omega_n t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t)$ $(0<\xi<1)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$
$1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\cos^{-1}\xi)$ $(0<\xi<1)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$

T/III. z-transzformáció azonosságai

Fogalom	Időfüggvény	z-transzformált
z-transzformáció értelmezése	$f(nT_0)$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0)z^{-n}$
Egyszeres pólusok esetén	$f(nT_0)$	$F(z) = \sum_{i=1}^{P} \frac{F_z(p_i)}{F'_p(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{p_i T_0}}$
Inverz z-transzformáció értelmezése	$f(nT_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z)z^{n-1}dz$	$F(z)$
Áttérés az s- és z-sík között	$s \to \frac{1}{T_0} \ln z$	$z \to e^{sT_0}$
Előrefelé vett differenciák közelítéssel	$s \to \frac{z-1}{T_0}$	$z \to 1 + sT_0$
Visszafelé vett differenciák közelítéssel	$s \to \frac{z-1}{zT_0}$	$z \to \frac{1}{1-sT_0}$
Tustin-módszer közelítéssel	$s \to \frac{2}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z+1}$	$z \to \frac{1+sT_0/2}{1+-sT_0/2}$
Linearitás	$cf(nT_0)$	$cF(z)$
Szuperpozíció	$c_1 f_1(nT_0) + c_2 f_2(nT_0)$	$c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)$
Differenciahányados		
visszafelé vett	$\frac{f(nT_0) - f((n-1)T_0)}{T_0}$	$\frac{z-1}{zT_0}F(z)$
előrefelé vett	$\frac{f((n+1)T_0) - f(nT_0)}{T_0}$	$\frac{z-1}{T_0}F(z)$
Eltolási tétel	$f(kT_0 - nT_0)$	$z^{-n}F(z)$
	$f(kT_0 + mT_0)$	$z^m(F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f(iT_0)z^{-i})$
Kezdetiérték-tétel	$\lim_{k\to 0} f(kT_0) = \lim_{z\to\infty} \frac{z-1}{z}F(z)$	
Végérték-tétel	$\lim_{k\to\infty} f(kT_0) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}F(z)$	

T/IV. Nevezetes függvények Laplace- és z-transzformáltja

$f(t)$	$F(s)$	$f(nT_0)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	$1(n=0); 0(n\neq 0)$	1
$\delta(t-kT_0)$	e^{-kT_0}	$1(n=k); 0(n\neq k)$	$\frac{1}{z^k}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	1vagy$1(n)$	$\frac{z}{z-1}$
$v(t)$	$\frac{1}{s^2}$	nT_0	$\frac{zT_0}{(z-1)^2}$
$0,5t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{(nT_0)^2}{2}$	$\frac{(z+1)zT_0^2}{2(z-1)^3}$
$\frac{t^3}{6}$	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{(nT_0)^3}{6}$	$\frac{T_0^3}{6}\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$nT_0e^{-anT_0}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_0}}$
		a^n vagy $a^n1(n)$	$\frac{z}{z-a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$nT_0e^{-anT_0}$	$\frac{zT_0e^{-aT_0}}{(z-e^{-aT_0})^2}$
$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-anT_0}-e^{-bnT_0}}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}\cdot\frac{z(e^{-aT_0}-e^{-bT_0})}{(z-e^{-aT_0})(z-e^{-bT_0})}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-anT_0}$	$\frac{z(1-e^{-aT_0})}{(z-1)(z-e^{-aT_0})}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega nT_0$	$\frac{z\sin\omega T_0}{z^2-2z\cos\omega T_0+1}$
$\cos\omega_n t$	$\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$	$\cos\omega nT_0$	$\frac{z(z-\cos\omega T_0)}{z^2-2z\cos\omega T_0+1}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-anT_0}\sin\omega nT_0$	$\frac{ze^{-aT_0}\sin\omega T_0}{z^2-2e^{-aT_0}z\cos\omega T_0+e^{-2aT_0}}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-anT_0}\cos\omega nT_0$	$\frac{z^2-ze^{-aT_0}\cos\omega T_0}{z^2-2e^{-aT_0}z\cos\omega T_0+e^{-2aT_0}}$

Irodalomjegyzék

[1] O'Flynn, B., Moriarty, E. *Linear Systems*, John Wiley & Sons, New York, (1987)