TÁMOP-4.1.1. F -14/1/KONV-2015-0009
„A GÉPÉSZETI ÉS INFORMATIKAI ÁGAZATOK DUÁLIS ÉS MODULÁRIS KÉPZÉSEINEK KIALAKÍTÁSA A PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEMEN „

Gerzson Miklós

Méréselmélet példatár

Pécs
2015

A tananyag a TÁMOP-4.1.1.F-14/1/KONV-2015-0009 azonosító számú, "A gépészeti és informatikai ágazatok duális és moduláris képzéseinek kialakítása a Pécsi Tudományegyetemen" című projekt keretében valósul meg.

TÁMOP-4.1.1. F-14/1/KONV-2015-0009
„A GÉPÉSZETI ÉS INFORMATIKAI ÁGAZATOK DUÁLIS ÉS MODULÁRIS KÉPZÉSEINEK KIALAKÍTÁSA A PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEMEN„

Méréselmélet példatár

dr. Gerzson Miklós
Szakmai lektor: dr. Mihálykóné dr. Orbán Éva egyetemi docens
Nyelvi lektor: Veres Mária

Kiadó neve: Pécsi Tudományegyetem
Kiadó címe: Pécs, Vasvári Pál utca 4.

Felelős kiadó: Pécsi Tudományegyetem

ISBN szám: 978-963-429-023-0 (I. rész) 978-963-429-022-3 (II. rész)

Pécsi Tudományegyetem
Műszaki és Informatikai Kar
Pécs, 2015

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az elmúlt években szerzett oktatási tapasztalataink alapján úgy látjuk, hogy a hallgatók jelentős részének gondot okoz a méréselmélethez, mérési adatok feldolgozásához kapcsolódó kurzusokon hallgatott elméleti anyag alapján a gyakorlati feladatok megoldása. Ennek segítésére készült ez a példatár, melyben az áttekintett témakörök a mérési feladat általánosítása, rendsszermodellek és tulajdonságaik, mérési adatok elsődleges feldolgozása, csoportosítása és megjelenítése, mérési hibák típusai, felderítése, hatásuk a további számolásra, mérési adatok statisztikai feldolgozása paraméteres és nemparaméteres módszerek segítségével.

A példatár felépítése a következő: az egyes fejezetek elején a kapcsolódó elméleti háttér összefoglalása található meg, majd minden feladattípushoz kidolgozott példa következik. A harmadik alfejezet ellenőrző kérdéseket és önálló gyakorlásra szánt példákat tartalmaz megoldásokkal. A példatár függeléke a feladatok megoldásához szükséges táblázatokat tartalmazza.

A példatár a TÁMOP-4.1.1.F-14/1/KONV-2015-0009 azonosító számú, "A gépészeti és informatikai ágazatok duális és moduláris képzéseinek kialakítása a Pécsi Tudományegyetemen" című projekt keretében valósult meg, a szerző köszöni a jegyzet elkészítéséhez nyújtott támogatást. Ugyancsak köszönet illeti dr. Mihálykóné dr. Orbán Éva szakmai lektort, aki megjegyzéseivel, tanácsaival sokat segített a példatár színvonalának emelésében. Veres Mária nyelvi lektor alapos átnézésével, a hibák kijavításával és a javasolt módosításaival nagymértékben hozzájárult, hogy a példatár megfelelő színvonalon álljon a hallgatók részére – hálás köszönet érte.

Bár a kézirat leadásakor a jegyzetírás folyamatának egy lépése lezárul, de a szerző előre is köszöni a továbbfejlesztésre vonatkozó javaslatokat, és az esetleges hibákra, elírásokra vonatkozó visszajelzést.

Pécs, 2015. szeptember 30.

Gerzson Miklós
Pécsi Tudományegyetem
Műszaki és Informatikai Kar

Méréselmélet példatár I. rész

1. fejezet

Mérés általánosítása

1.1. Elméleti áttekintés

A mérés, a hagyományosnak tekinthető definíció szerint, valamely fizikai, kémiai vagy gazdasági mennyiség nagyságának jellemzése a választott mértékegységben kifejezett számértékkel. A mérési eredmény tehát egy szám és egy mértékegység együttese. A mérési hiba pedig a tényleges (valódi) érték és a mérés alapján kapott érték közötti különbség.

A mérésnek ez a definíciója jól illeszkedik a mérnöki gyakorlat nagyon sok megismerési feladatához, azonban számos esetben nem, vagy csak nehezen alkalmazható. Ilyen feladatok például a minőségellenőrzési eljárások, amikor egy terméket vagy folyamatot több szempont alapján kell egy adott kategóriának megfeleltetni (osztályba sorolási problémák), vagy ugyancsak több szempont alapján sorba rendezni (rendezési feladatok). Bizonyos esetekben az is célszerű lehet, ha nem számokat alkalmazunk a mennyiségek nagyságának jellemzésére. Az ilyen összetett mérési problémák megoldásához szükség van a mérés fogalmának általánosítására, melyet a modellezési folyamatban betöltött szerepe alapján végezhetünk el.

A modellezés célja, hogy a vizsgált jelenség tulajdonságait a modell típusa által meghatározott formában fejezze ki. A célkitűzés és az a priori információk alapján felállítható az előzetes modell, mely alapja lesz a mérési eljárás tervezésének. A mérés feladata tehát, hogy az adott modelltípus lehetséges változatai közül a keresett tulajdonságot legjobban kifejezőt kiválassza. Ehhez az kell, hogy a modell jellemzőinek lehetséges kimenetelei között különbség legyen, és ezt a különbséget méréssel ki lehessen fejezni, meg lehessen jeleníteni.

A mérés általánosított definíciója szerint a mérés a mért jellemzők közötti viszony kifejezése, szimbólumok közötti viszonnyal. A mérési eredmény tehát egy szimbólum és egy skálainformáció együttese lesz. A szimbólumok tetszőlegesek lehetnek, a skálainformáció pedig az adott méréshez kapcsolódó megállapodásokat jelenti. A mérési hiba az értékeléshez használt szimbólumhalmazon értelmezett távolság a valódi és a mérés alapján meghatározott, skálainformációval kifejezett értékek között.

A mérés így megfogalmazott művelete már alkalmas az osztályba sorolás, a sorba rendezés elvégzésére és a tetszőleges szimbólumok használatára.

A skálainformáció megalkotásához a következőket kell elvégezni:

- Meg kell állapítani a mért jellemzők lehetséges értékeit, kimeneteleit és a köztük lévő viszonyt.

- Meg kell határozni a mérési eredmény jellemzésére alkalmazandó szimbólumok halmazát és a köztük lévő viszonyt.

– Meg kell határozni a mért jellemzők és a szimbólumok közötti leképezés módját úgy, hogy a szimbólumok halmazán értelmezett viszony megfeleljen a mért jellemzők halmazán értelmezett viszonynak.

A mérés ennek alapján két feladatból áll: a mérendő jellemző és a szimbólumhalmaz közötti leképezés megvalósítása és a skálainformáció megalkotása. A leképezés jellegzetességeit tárgyalja a mérés jel- és rendszerelméleti szempontú vizsgálata, míg a skálához kapcsolódó kérdéseket a metrológia. A hagyományos fizikai, kémiai méréseknél a leképezést általában a mérőműszer valósítja meg, a skálainformációt pedig a választott mértékegységrendszerhez kötődő megállapodások jelentik. Általánosított mérés esetén sokszor a modellezést, megfigyelést tervezőnek kell a leképezés módját megoldani és a mérési eredmény kiértékeléséhez szükséges skálát megalkotni.

1.2. Kidolgozott feladat

Egy pályázat keretében villamosmérnök hallgatók képzésében használható áramkörtervező és -szimulátor programot kell beszerezni. A feladat egy olyan értékelési rendszer kialakítása, mely alapján eldönthető, hogy melyik programot vásároljuk meg.

Megoldás:

Az összefoglalóban leírtak szerint a mérés művelete két szakaszra osztható: mérendő jellemző és a szimbólumhalmaz közötti leképezés megvalósítása és a skálainformáció megalkotása. Ebben a példában először a leképezést, azaz itt az ajánlatok kiértékelését lehetővé tevő skálainformációt kell kialakítani, majd ezután következhet a ténylegesen beérkezett ajánlatoknak a kialakított szempontrendszer mint skálainformáció alapján történő besorolása és összehasonlítása. A skálainformáció megalkotásához szükség van az adott területen, ebben a példában az áramkörszimulátorok körében szerzett tapasztalatra, és a beszerzendő szoftverrel szembeni pontos igény felmérésére. Az ilyen típusú feladatoknál általában a számokat mint súlyokat és pontszámokat szokás szimbólumhalmazként alkalmazni, kihasználva, hogy egyszerű őket összegezni, és a kapott eredményeket összehasonlítani.

A skálainformáció megalkotása:

Az értékelést a két fő szempont: a *műszaki tartalom* és a *gazdasági szempontok* alapján végezzük el.

Első lépésként meghatározzuk, hogy e két terület milyen súllyal szerepeljen a döntésben. Legyen ebben a példában a műszaki tartalom súlya 70%, a gazdasági szempontoké pedig 30%.

Következő lépés, hogy meghatározzuk, milyen elemekből áll a megadott két fő értékelési szempont. Ezek a szempontok természetesen az adott feladattól függnek és bizonyos esetekben az értékelő személye is befolyásolhatja azokat.

A *műszaki tartalom* elemei legyenek a következők:

- Demóverzió menthetősége
- Könyvtári alkatrészek száma
- Szimulációs lehetőségek
- Külső programokhoz való illeszthetőség

Megjegyzés: mint a feladat megfogalmazásában szerepelt, a cél egy olyan program beszerzése, ami hallgatóknak is kiadható, hogy azon gyakorolhassanak és beadandó házi feladatokat készíthessenek el. Ennek megfelelően a műszaki tartalomban is ezek a szempontok kerültek előtérbe.

Következő lépésként a műszaki tartalom elemei között fel kell osztani az erre a területre eső 70%-os súlyt. A szétosztás természetesen az egyes területek fontossága alapján történik. Ebben az esetben a következő súlytényezőket határoztuk meg:

- Demóverzióban a mentés lehetősége	20%
- Könyvtári alkatrészek száma	20%
- Szimulációs lehetőségek	20%
- Külső programokhoz való illeszthetőség	10%

A műszaki tartalom megadott részszempontjainak kiértékeléséhez meg kell határoznunk lehetséges eseteket, illetve értékeket, és ezekhez pedig pontszámokat kell rendelnünk. Összegezve a súlytényezők és a pontszámok szorzatait, a kapott érték segítségével lehetséges az egyes ajánlatokat összehasonlítani. Példánkban a műszaki tartalomhoz tartozó szempontok lehetséges kimenetelei és a hozzájuk tartozó pontszámok legyenek a következők:

- Demóverzióban a mentés lehetősége	20%	
- igen		10 pont
- nem		0 pont
- Könyvtári alkatrészek száma	20%	
- legalább 15 alkatrész		10 pont
- kevesebb, mint 15 alkatrész		5 pont
- Szimulációs lehetőségek	20%	
- tranziens-, DC- és AC-analízis		6 pont
- tűréstechnikai, túlterhelés analízis, optimalizálás		6 pont
- fenti lehetőségek együttes teljesítése		10 pont
- Külső programokhoz való illeszthetőség	10%	
- NYÁK-tervezőbe való importálhatóság		6 pont
- MATLAB-ba való importálhatóság		4pont
- mindkét programba való importálhatóság		10 pont

Megjegyzés: A pontok hozzárendelésénél vigyázzunk arra, hogy ne változtassuk meg a súlytényezőkkel meghatározott fontossági arányokat, célszerűen az egyes szempontokra adható maximális pontszám egyezzen meg.

A *gazdasági szempontokat* leegyszerűsítve legyen most az egyetlen értékelési szempont a beszerzési ár. Természetesen a feladattól függően számos más tényezőt lehetne itt is figyelembe venni, például garanciát, verziókövetést, szállítási határidőt stb.

A beszerzési ár alapján a következő módon értékelhetjük ki az ajánlatokat:

– legolcsóbb ajánlat pontszáma 10 pont

– többi ajánlat pontszáma:

$$\frac{\text{legolcsóbb ajánlat beszerzési ára}}{\text{adott ajánlat beszerzési ára}} \times 10 \text{ pont}$$

A leképezés megvalósítása:

A leképezés megvalósításának bemutatására, azaz ebben a példában az összeállított kiértékelési rendszer alkalmazására legyen adott a következő két ajánlat:

A* ajánlat** esetében ne lehessen menteni a demóverzióban, legyen 20 beépített könyvtári alkatrész, tegye lehetővé mind a tranziens, mind a tűréstechnikai szimulációt, és legyenek az adatok átadhatóak mind NYÁK-tervező, mind MATLAB programba. Az ***A szoftver ára legyen 200 egység.

B **ajánlat** szoftverénél lehessen a demóverzióban menteni, a könyvtár tartalmazzon 12 beépített elemet, csak a tranziens analízis lehetséges, és az adatokat nem lehet külső programba exportálni. A ***B*** szoftver ára 100 egység.

Az ajánlatok kiértékelése:

	Súlytényező (%)	***A*** szoftver	***B*** szoftver
Műszaki tartalom:			
Demóverzióbeli mentés	20	0	10
Alkatrészek száma	20	10	5
Szimulációk	20	10	6
Külső programok	10	10	0
Gazdasági szempont:			
Ár	30	5	10

Ennek alapján az összpontszámok:

A ajánlat: $0,2 \times 0 + 0,2 \times 10 + 0,2 \times 10 + 0,1 \times 10 + 0,3 \times 5 = 6,5$ pont

B ajánlat: $0,2 \times 10 + 0,2 \times 5 + 0,2 \times 6 + 0,1 \times 0 + 0,3 \times 10 = 7,2$ pont

A magasabb kapott pontszám alapján a ***B*** ajánlatot kell választani.

1.3. Gyakorló feladatok

1.3.1. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse a mérés általánosított definícióját!
2. Az általánosítás alapján milyen feladatokra alkalmas a mérés?
3. Hogyan határozzuk meg az általánosított mérési hibát?
4. Ismertesse a skálainformáció megalkotásának lépéseit!
5. Mi a mérés két alapfeladata?
6. Mivel foglalkozik a metrológia?

1.3.2. Feladatok

1. Okostelefont kíván vásárolni. Állítson fel egy olyan szempontrendszert, amelyben az ár mellett legalább öt további paramétert is figyelembe vesz, valamint adja meg az értékeléshez a súly- és a pontszámokat is!
2. Munkahelyet keres. Állítson fel egy olyan szempontrendszert, amelyben a fizetés mellett legalább öt más paramétert is figyelembe vesz, valamint adja meg az értékeléshez a súly- és a pontszámokat is!
3. Használt gépkocsit kíván vásárolni. Állítson fel egy olyan szempontrendszert, amelyben az ár mellett legalább öt műszaki paramétert is figyelembe vesz, valamint adja meg az értékeléshez a súly- és a pontszámokat is!

1.3.3. Megoldások

1. Egy lehetséges megoldás:

Műszaki tartalom		**Σ60%**	
	- Kijelző mérete	20%	
	- 4" vagy kisebb		5 pont
	- 4,5" vagy nagyobb		10 pont
	- Operációs rendszer	15%	
	- Android 4.3 vagy újabb		10 pont
	- Android 4.3-nál régebbi		5 pont
	- Windows		5 pont
	- iOS		10 pont
	- Belső memória mérete	10%	
	- 16 GB-nál nagyobb (> 16 GB)		10 pont
	- 8 GB és 16 GB között (8 GB$\leq x \leq$16 GB)		6 pont
	- 8 GB-nál kisebb (< 8 GB)		4 pont
	- Processzor sebessége	15%	
	- 2 GHz-nél nagyobb		10 pont
	- 1,5 GHz és 2 GHz között		6 pont
	- 1,5 GHz-nél kisebb		4 pont
Gazdasági szempont		**Σ40%**	
	- Ár	30%	
	- 50 eFt-nál kevesebb		10 pont
	- 50 – 100eFt között		6 pont
	- 100 eFt-nál több		2 pont
	- Garanciaidő	10%	
	- 2 év		10 pont
	- 1 év		5 pont

2. Egy lehetséges megoldás:

Munkahelyi körülmények		**Σ50%**	
	- Rugalmas munkaidő	15%	
	- igen		10 pont
	- nem		5 pont
	- Munkahely távolsága	15%	
	- 20 percnél kevesebb		10 pont
	- 20 – 40 perc		6 pont
	- 40 percnél több		3 pont
	- Dolgozók száma	10%	
	- 20 főnél kevesebb		10 pont
	- 20 és 100 fő között		4 pont
	- 100 főnél több		6 pont
	- Munka jellege	10%	
	- irodai programfejlesztés		6 pont
	- megbízónál történő fejlesztés		10 pont
Jövedelmek		**Σ50%**	
	- Fizetés	40%	
	- 200 eFt-nál kevesebb		2 pont
	- 200 – 300 eFt között		6 pont
	- 300 eFt-nál több		10 pont
	- Cafeteria	10%	
	- van		10 pont
	- nincs		0 pont

3. Egy lehetséges megoldás:

Ár			**Σ50%**	
		- 1 mFt-nál kevesebb		4 pont
		- 1 – 2 mFt között		10 pont
		- 2 mFt-nál több		6 pont
Egyéb paraméterek			**Σ50%**	
	- Az autó kora		10%	
		- 10 évnél több		4 pont
		- 6 – 10 év		7 pont
		- 6 évnél fiatalabb		10 pont
	- Üzemanyag		10%	
		- benzin		5 pont
		- dízel		10 pont
		- benzin-gáz		8 pont
	- Futásteljesítmény		10%	
		- 100 ekm vagy kevesebb		10 pont
		- 100 és 200 ekm között		5 pont
		- 200 és 300 ekm között		3 pont
		- 300 ekm-nél több		0 pont
	- Gyártó cég nemzetisége		10%	
		- japán		10 pont
		- német		8 pont
		- egyéb		4 pont
	- Lökettérfogat		10%	
		- 1500 ccm alatt		3 pont
		- 1500 – 2000 ccm között		10 pont
		- 2000 ccm felett		6 pont

2. fejezet

Kálmán-féle rendszermodell

2.1. Elméleti áttekintés

Ebben a fejezetben áttekintjük a rendszerelméletben széles körben alkalmazott ún. Kálmán-féle rendszermodellt és annak legfontosabb, a rendszervizsgálatokhoz kapcsolódó tulajdonságait. A Kálmán-féle rendszermodell az ún. állapottérmodellek csoportjába tartozik, azaz a bemenetek és a kimenetek mellett a rendszer belső működését jellemző állapotváltozókat is figyelembe vesszük a vizsgált objektum leírásánál. Ennek megfelelően a modellek e csoportja a fehér doboz modellek közé tartozik, hiszen a rendszer belső állapotában és a kimeneten történő változásokat a rendszer belső összefüggései és bemenetei alapján határozzuk meg. A modell az elnevezését egyik megalkotójáról, a magyar származású Kálmán Rudolfról kapta.

Az általános megközelítésnek megfelelően, először megadjuk a definícióban szereplő elemeket és azok tulajdonságait, majd ezután ismertetjük a rendszerdefiníciót.

2.1.1. A Kálmán-féle rendszermodell elemei

Időhalmaz jele: T

A Kálmán-féle rendszermodell csak időben változó rendszerek leírásával foglalkozik, így az időhalmaz lényeges eleme a definíciónak. Az időhalmazt a leírt rendszernek megfelelően megadhatjuk folytonos halmazként vagy diszkrét – a mintavételezési időpontokat tartalmazó – halmazként. Ugyancsak a vizsgálat céljának megfelelően definiálhatjuk akár egyik, akár másik irányban véges vagy végtelen halmazként.

Belső állapotváltozók lehetséges értékeinek halmaza jele: X

A belső állapotváltozók a rendszer belső fizikai-kémiai tulajdonságait jellemző, a rendszerben bekövetkező változásokat magyarázó mennyiségek. Az állapotváltozóknak nem kell közvetlenül mérhetőnek lenniük, az is elég, ha a bemenetekből és az állapotváltozók egymás közti kölcsönhatásából meghatározható az értékük. Általában több állapotváltozó segítségével tudjuk jellemezni a rendszereinket, így a halmaz elemei vektorok lesznek.

Bemeneti változók lehetséges értékeinek halmaza jele: U

A vizsgált rendszer működését a környezete egy vagy több bemeneten keresztül befolyásolja. A lehetséges bemeneti értékek halmaza tartalmazza az egyes bemenetek által felvehető értékeket vagy értéktartományokat.

Kimeneti változók lehetséges értékeinek halmaza jele: Y

A rendszer a környezetét a kimenetein keresztül befolyásolja. Az ezeket a hatásokat leíró fizikai, kémiai mennyiségek lesznek a kimeneti változók. Kimeneti változóként célszerűen olyan mennyiséget adunk meg, amely közvetlenül meghatározható, mérhető.

Lehetséges bemenet–idő függvények halmaza jele: Ω

Az Ω halmaz tartalmazza a rendszer működése során értelmezhető, alkalmazható bemenet-idő függvényeket:

$$\Omega = \{\omega | \omega : T \to U\} \ .$$

A bemenet–idő függvényekre általában mint bemenő jelekre vagy bemenetekre szokás hivatkozni, és a műszaki gyakorlatban az ω helyett általában az $u(t)$ jelölést alkalmazzuk, ahol $u(t)$ a bemenő jel(ek) értéke a t időpontban. A bemenetek közé egyaránt tartozhatnak különböző típusú tesztjelek vagy zavaró jelek. A bemenetekkel szembeni követelmény, hogy jellegüknek megfelelően valamilyen formában megadhatók legyenek, így a tesztjeleket és a más, a modellező által alkalmazni kívánt jeleket determinisztikus függvényként, a zajokat pedig valamilyen sztochasztikus folyamat felhasználásával írjuk le.

Lehetséges kimenet–idő függvények halmaza jele: Γ

A Γ halmaz elemei a rendszer működése során lehetséges kimenet–idő függvények:

$$\Gamma = \{\gamma | \gamma : T \to Y\} \ .$$

A műszaki gyakorlatban általában a kimenő jelek vagy kimenetek elnevezést használjuk és a γ helyett általában az $y(t)$ jelölést alkalmazzuk, ahol $y(t)$ a kimenet(ek) értéke a t időpontban.

Állapotátmeneti függvény jele: φ

Az állapotátmeneti függvény írja le a rendszer működését, tehát azt, hogy hogyan kerül át a rendszer az egyik állapotából egy másik állapotába. Megadásához vezessük be a bemenetszegmensek és azok szétvághatóságának fogalmát.

Bemenetszegmens Legyen adott egy $(t_1, t_2] \subset T$ intervallum. A bemenetszegmens az $u(t)$ függvény leszűkítése erre az intervallumra: $u(t) \mid t \in (t_1, t_2]$ vagy $u(t)_{(t_1,t_2]}$.

Szétvághatóság Legyen adott $(t_1, t_2] \subset T$ intervallum és az erre leszűkített $u(t)_{(t_1,t_2]}$ bemenetszegmens. Vegyünk fel egy t' időpontot a $(t_1, t_2]$ intervallum belsejében: $t_1 < t' < t_2$. Ekkor az $u(t)$ bemenetszegmens a t' időpont alapján két részre bontható:

$$u_1(t) = u(t) \mid t \in (t_1, t']$$
$$u_2(t) = u(t) \mid t \in (t', t_2] \ .$$

Az időintervallum alulról nyílt, felülről zárt módon való megadásával a bemenetszegmens szétvágásakor egyértelműen eldönthető, hogy melyik végpont melyik új szegmens része lesz.

Az állapotátmeneti függvényt a következő módon definiáljuk:

$$\varphi : T \times T \times X \times \Omega \to X$$
$$x(t_2) = \varphi(t_2, t_1, x(t_1), u(t)_{(t_1,t_2]}) \ .$$

A definíciónak megfelelően az állapotátmeneti függvény megadja, hogy egy $x(t_1)$ állapotban $u(t)_{(t_1,t_2]}$ bemenetszegmenst alkalmazva, a t_1 kezdő időpont és a t_2 végidőpont figyelembevételével milyen $x(t_2)$ állapotba kerül át a rendszer.

Az állapotátmeneti függvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. *Okozatiság* Az állapotátmeneti függvény által az $x(t_1)$ és $x(t_2)$ állapotok között megadott kapcsolat csak $t_2 \geq t_1$ időpontokra igaz, azaz fizikai rendszer a múltját nem módosíthatja.
2. *Konzisztencia* Ha $t_2 = t_1$, azaz az időpontok megegyeznek, akkor a hozzájuk tartozó állapotoknak is meg kell egyezniük: $x(t_2) = x(t_1)$.
3. *Szakaszolhatóság* Ha t' az időintervallum egy köztes pontja, $t_1 < t' < t_2$, akkor a bemenetszegmens szétbontásával a t' pontból is ugyanazt a végállapotot érjük el: $x(t_2) = \varphi(t_2, t_1, x(t_1), u(t)_{(t_1,t_2]}) = \varphi(t_2, t', x(t'), u(t)_{(t',t_2]})$.
4. *Egyértelműség* Jelölje egy rendszer két lehetséges működését 1 és 2 index. Tételezzük fel, hogy egy adott t_1 időpontra igaz, hogy a kétféle működéshez tartozó állapotok megegyeznek: $x_1(t_1) = x_2(t_1)$, és a t_1 és t_2 időpontok között a működések bemenetei is megegyeznek: $u_1(t)_{(t_1,t_2]} = u_2(t)_{(t_1,t_2]}$. Ekkor a végállapotoknak meg kell egyezniük: $x_1(t_2) = x_2(t_2)$.

Kiolvasó (kimeneti) függvény jele: η

Megadható egy kiolvasó vagy más néven kimeneti függvény, mely a kimeneti változók értékeit határozza meg a pillanatnyi belső állapotok, bemenetek értékei és az időpont alapján, az alábbi képletnek megfelelően:

$$\eta : T \times X \times U \to Y$$
$$y(t_1) = \eta(t_1, x(t_1), u(t_1)) \ .$$

2.1.2. A Kálmán-féle rendszermodell definíciója

Az állapottérmodellek Kálmán szerinti definíciója a következő:

$$\Sigma = (T, X, U, Y, \Omega, \Gamma, \varphi, \eta) \ ,$$

ahol

T - az időhalmaz,

X - a belső állapotváltozók lehetséges értékeinek halmaza,

U - a bemeneti változók lehetséges értékeinek halmaza,

Y - a kimeneti változók lehetséges értékeinek halmaza,

Ω - a lehetséges bemenet–idő függvények halmaza,

Γ - a lehetséges kimenet–idő függvények halmaza,

φ - az állapotátmeneti függvény,

η - a kiolvasó függvény.

A definícióban felsorolt elemek a 2.1.1 részben leírt tulajdonságokkal jellemezhetők. A definícióhoz kapcsolódó néhány elnevezés:

- A $(t, x(t))$ párost *esemény*nek nevezzük.
- A $T \times X$ halmaz neve *eseménytér* vagy *fázistér*.
- A φ állapotátmeneti függvény az alkalmazási területnek megfelelően lehet *trajektória*, *pálya*, *folyam*, *megoldás*, *megoldási görbe*.
- Az $\omega/u(t)$ bemenet vagy beavatkozás a rendszert az $x(t_1)$ állapotából átviszi vagy áttranszformálja a $\varphi(t_2, t_1, x(t_1), u(t)_{(t_1,t_2]})$ által meghatározott $x(t_2)$ állapotba, azaz a *rendszer működik*, időben változtatja az állapotát.
- Ha az Ω halmaznak egy eleme van, akkor a Σ rendszert *szabad*nak nevezzük.
- Ha a φ függvény nemcsak $t_2 \geq t_1$ esetén értelmezhető, hanem tetszőleges t_2 és t_1 értékekre, akkor a rendszer *reverzibilis.* Természetesen a fizikai rendszerek nem reverzibilis módon működnek.

2.1.3. A rendszerek osztályozása

A vizsgált rendszerek modelljeit, a Kálmán-féle rendszerdefinícióban felsorolt halmazok és függvények adott rendszer esetében meghatározott tulajdonságai alapján, különböző osztályokba sorolhatjuk.

Folytonos idejű – diszkrét idejű rendszerek A T időhalmazt a rendszer vizsgálata során tekinthetjük folytonos intervallumnak vagy diszkrét időpontokat tartalmazó halmaznak. A fizikai rendszerek folytonos idejűek, tehát a jellemző értékeik a vizsgálat időtartományának tetszőleges pontjában meghatározhatóak. A mintavételezéses irányítási rendszerek esetében ez az információáram szaggatott, emiatt diszkrét idejűnek tekinthetjük az ilyen rendszereket.

Számszerű – nem számszerű rendszerek Fizikai rendszerek változói között lehetnek olyanok, melyekhez nem tudunk, vagy nem akarunk számszerű értéket rendelni, nagyságukat csak nyelvi változóval jellemezzük. Az ilyen rendszereket nevezzük nemszámszerű rendszereknek. A fuzzy szabályozási rendszerekben találkozhatunk ilyen nyelvi kifejezésekkel jellemzett változókkal. A definícióban szereplő X, U és Y halmazok elemei egyaránt tartalmazhatnak nem számszerű értékeket.

Véges állapotú – végtelen állapotú rendszerek Ha a vizsgált rendszernek csak véges sok különböző állapota lehet, akkor véges állapotúnak, ha nincs korlát az állapotok számára, akkor végtelen állapotúnak nevezzük. Véges állapotú rendszerek esetében az X halmaznak véges sok különböző eleme lehet, tehát véges halmaz, míg végtelen állapotú rendszereknél az X halmaz végtelen halmaz.

Lineáris – nemlineáris rendszerek Ha az X, U, Y, Ω és Γ halmazok lineáris terek, akkor lineáris rendszerről beszélünk. Legyen egy '1' jelű működés kezdő állapota $x_1(t_1)$, a bemenete $u_1(t)_{(t_1,t_2]}$, és a működés eredményeként jöjjön létre az $x_1(t_2)$ állapot és az $y_1(t_1)$ kimenet. Legyenek egy másik, '2' jelű működés esetében ezek a változók rendre $x_2(t_1)$, $u_2(t)_{(t_1,t_2]}$, $x_2(t_2)$ és $y_2(t_1)$. Lineáris rendszer esetében a két működéshez tartozó kezdő állapotok és

a beavatkozások lineáris kombinációjával előállított $x(t_1)$ kezdő állapot és $u(t)_{(t_1,t_2]}$ bemenetre kapott $x(t_2)$ végállapot és $y(t_1)$ kimenet megegyezik a két működés esetében kapott végállapotok és kimenetek lineáris kombinációjával:
$x(t_1) = \lambda_1 \cdot x_1(t_1) + \lambda_2 \cdot x_2(t_1)$
$u(t)_{(t_1,t_2]} = \lambda_1 \cdot u_1(t)_{(t_1,t_2]} + \lambda_2 \cdot u_2(t)_{(t_1,t_2]}$
$x(t_2) = \varphi(t_2, t_1, x(t_1), u(t)_{(t_1,t_2]} = \lambda_1 \cdot x_1(t_2) + \lambda_2 \cdot x_2(t_2)$
$y(t_1) = \eta(t_1, x(t_1), u(t_1)) = \lambda_1 \cdot y_1(t_1) + \lambda_2 \cdot y_2(t_1)$,
ahol λ_1 és λ_2 valós számok. A valós fizikai rendszerek általában csak egy szűk intervallumban tekinthetők lineárisnak.

Idővariáns és időinvariáns rendszerek Mind az idővariáns, mind az időinvariáns rendszerek esetében a belső állapotváltozók, a bemeneti és a kimeneti változók az idő függvényei. Az idővariancia a csillagászati időtől való függésre vagy annak látszatára utal. Az idővariáns rendszer esetében a végállapot és a kimenet értéke nemcsak a kezdő állapottól és a bemeneti szegmenstől függ, hanem a kísérlet időpontjától is. Ennek megfelelően egy idővariáns rendszer esetében különböző időpontokban elvégzett kísérletek eredményei, azaz a rendszer végállapota és kimenet eltérő lesz annak ellenére, hogy ugyanabból a kezdő állapotból indítva ugyanazzal a gerjesztéssel vizsgáltuk a rendszer működését. Az időinvariáns rendszerek esetében a végállapot és a kimenet csak a kezdő állapottól és a bemeneti szegmenstől függ, azaz, ha különböző időpontban, de ugyanabban a kezdő állapotban ugyanazt a gerjesztést alkalmazzuk, akkor ugyanazt a végállapot és kimeneti értékeket kell kapnunk. Az idővariancia általában a modellezés során elkövetett egyszerűsítési hiba következménye, vagyis amiatt lép fel, mert egy vagy több, a rendszer működését befolyásoló hatást nem vettünk figyelembe. Pontosabb modellezésnél a paramétertől (például hőmérséklettől) való függést alkalmazzuk.

Determinisztikus és sztochasztikus rendszerek Ha a változásokat létrehozó kölcsönhatások determinisztikus függvényekkel jellemezhetők, akkor determinisztikus rendszerről beszélünk. Valós rendszerek esetében a zajok, zavarások hatását általában csak valószínűségi változó segítségével tudjuk leírni, így ezeknek a rendszereknek a viselkedése véletlenszerűnek, azaz sztochasztikusnak tekinthető.

Véges és végtelen dimenziós rendszerek Bizonyos fizikai rendszerek esetében egyszerűsítésként feltételezhetjük, hogy egy, az állapotát leíró jellemző értéke a vizsgálati tér minden pontjában azonos, így elegendő egy jól megválasztott pontban meghatározni az értékét. Az ilyen modellek csak közönséges differenciálegyenleteket tartalmaznak, és azokat *koncentrált paraméterű rendszer*nek nevezzük. Ha ez a feltételezés nem teljesül, akkor meg kell vizsgálni, hogy a jellemző változását a tér hány koordinátája szerint kell figyelembe venni. Ilyenkor *elosztott paraméterű rendszer*ekről beszélünk, és parciális, azaz az időtől és a helytől függő differenciálegyenletekkel tudjuk leírni őket.

2.1.4. Az állapottérmodell jellemző alakjai

A következőkben megadjuk a Kálmán-féle rendszerdefinícióban szereplő állapotátmeneti függvény és kiolvasó függvény konkrét alakját néhány, előzőekben bemutatott modelltulajdonság esetében.

Az állapotátmeneti és a kiolvasó függvények általános alakja:

$$\begin{aligned} x(t_2) &= \varphi(t_2, t_1, x(t_1), u(t)_{(t_1,t_2]}) \ , \\ y(t_1) &= \eta(t_1, x(t_1), u(t_1)) \ . \end{aligned}$$

A nemlineáris, folytonos idejű, idővariáns rendszer modellje a következő általános alakban adható meg:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(t, x(t), u(t)) \ . \end{aligned}$$

A nemlineáris, folytonos idejű, időinvariáns rendszer modelljének általános alakja:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \ . \end{aligned}$$

A lineáris, folytonos idejű, idővariáns rendszer modellje:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \ . \end{aligned}$$

Idővariáns rendszerek esetében az A, B, C, D együttható mátrixok elemei között van legalább egy időtől függő. A lineáris, folytonos idejű, időinvariáns rendszer modellje:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \ . \end{aligned}$$

Az együttható mátrixok szokásos elnevezései:
A - állapotátviteli mátrix;
B - bemeneti mátrix;
C - kimeneti mátrix;
D - segédmátrix.

A lineáris, diszkrét idejű, időinvariáns rendszer állapottér modelljének az általános alakja:

$$\begin{aligned} x((k+1)T_0) &= \Phi x(kT_0) + \Gamma u(kT_0) \\ y(kT_0) &= Cx(kT_0) \ , \end{aligned}$$

ahol
Φ - a diszkrét állapoátviteli mátrix;
Γ - a diszkrét bemeneti mátrix;
C - a kimeneti mátrix;
T_0 - a mintavételezési periódusidő;
k - a mintavételezés sorszáma.
Egy folytonos idejű rendszer modelljének diszkrét időtartományra történő átalakítása során belátható, hogy a Φ és Γ mátrixok a folytonos idejű modellhez tartozó A és B mátrixokból származtathatóak.

2.1.5. A bemenet–kimenet modell

A Kálmán-féle rendszermodell általános alakjából kiindulva levezethetjük az ún. bemenet–kimenet modellt. Ezt a típusú modellt akkor alkalmazzuk, ha a vizsgált rendszer belső viszonyait nem tudjuk vagy nem akarjuk matematikai összefüggésekkel jellemezni, viszont a bemenetek és a kimenetek közötti összefüggés megfigyelhető és egy megfelelően megválasztott függvénnyel leírható.

Hagyjuk el az eredeti definícióból a belső állapotokra vonatkozó elemeket, így a belső állapotváltozók lehetséges értékeit tartalmazó X halmazt, a $\varphi(t)$ állapotátmeneti függvényt, és az $\eta(t)$ kiolvasó függvényt. Vezessük be az A indexhalmazt és az F függvénycsaládot a következő módon:

$$F = \{f_\alpha \mid f_\alpha : T \times \Omega \to Y, \alpha \in A\} \ .$$

Az F függvénycsalád tagjai azok az f_α bemenet–kimenet függvények, amelyek megadják a t időpillanatban az $u(t)$ bemenet hatására kialakuló $y(t)$ kimenetet az α kísérlet esetében:

$$y(t) = f_\alpha(t, u(t)) \ .$$

A bemenet–kimenet függvények a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

- *Az idő iránya* Létezik az $\iota : A \to T$ leképezés úgy, hogy az $f_\alpha(t, u(t))$ függvény definiált $\forall t \geq \iota(\alpha)$-ra.
- *Okozatiság* Legyen $\tau, t \in T$ és $\tau < t$. Ha $u(t), u'(t) \in \Omega$ és $u(t)_{(\tau,t]} = u'(t)_{(\tau,t]}$ akkor
  $f_\alpha(t, u(t)) = f_\alpha(t, u'(t))$
  $\forall\alpha$-ra úgy, hogy $\tau = \iota(\alpha)$.

A bemenet–kimenet modell definíciója:

$$\Sigma_{I/O} = (T, U, Y, \Omega, \Gamma, F) \ ,$$

ahol a szimbólumok megfelelnek egyrészt a Kálmán-féle rendszermodellben, másrészt az F definíciójában megadottaknak.

A bemenet–kimenet modell tehát a kísérletek során alkalmazott bemenetek és az azokra kapott válaszok összefoglalása. Az α paraméterrel megcímkézett kísérletek az ω vagy $u(t)$ bemenetből és az $y(t)$ megfigyelt kimenetből állnak.

Dinamikus rendszerek esetében az alábbi általános, differenciálegyenlet típusú modellt kapjuk:

$$f(y(t), y^{(1)}(t), ..., y^{(n)}(t), u(t), u^{(1)}(t), ..., u^{(m)}(t), t) = 0 \ ,$$

ahol a $y^{(i)}(t)$ a kimenet (ill. a bemenet) időszerinti i-dik deriváltjának rövidített jelölése:

$$y^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^i y(t)}{\mathrm{d}t^i} \ . \tag{2.1}$$

A lineáris, idővariáns, folytonos idejű bemenet–kimenet modell alakja:

$$\begin{aligned} a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y^{(1)}(t) + a_0(t)y(t) = \\ = b_m(t)u^{(m)}(t) + ... + b_0(t)u(t) \ . \end{aligned}$$

A lineáris, időinvariáns, folytonos idejű bemenet–kimenet modell általános alakja az alábbi n-ed rendű differenciálegyenlet:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + ... + b_0 u(t) \ ,$$

ahol
$u(t)$ – a bemenő jel,
$y(t)$ – a kimenő jel,
$a_n, ..., a_0, b_m, ..., b_0$ – paraméterek,
$x^{(i)} = \frac{\mathrm{d}^i x(t)}{\mathrm{d}t^i}$ ahol $x = u, y$ – a bemenet vagy kimenet i-dik differenciálhányadosát jelenti.

Diszkrét időtartományban kétféle modellt szokás alkalmazni: az előrefelé vett differenciákon és a visszafelé vett differenciákon alapuló modelleket. A lineáris, időinvariáns rendszerek előrefelé vett differenciaegyenleten alapuló modelljének általános alakja:

$$\begin{aligned} a_n y((k+n)T_0) + a_{n-1} y((k+n-1)T_0) + ... + a_1 y((k+1)T_0) + a_0 y(kT_0) = \\ = b_m u((k+m)T_0) + ... + b_0 u(kT_0) \ , \end{aligned}$$

a visszafelé vett differenciaegyenlet alapú modell:

$$\begin{aligned} a_0 y(kT_0) + a_1 y((k-1)T_0) + ... + a_{n-1} y((k-n+1)T_0) + a_n y((k-n)T_0) = \\ = b_0 u((k-d)T_0) + ... + b_m u((k-d-m)T_0) \ , \end{aligned}$$

ahol mindkét esetben az $y(kT_0)$ jelenti a meghatározandó, vagyis a jelenhez tartozó kimeneti értéket, és $d = n - m$.

2.1.6. Az állapottérmodell tulajdonságai

A lineáris, folytonos idejű, időinvariáns rendszer modellje a Kálmán-féle rendszerdefiníciónak megfelelően:

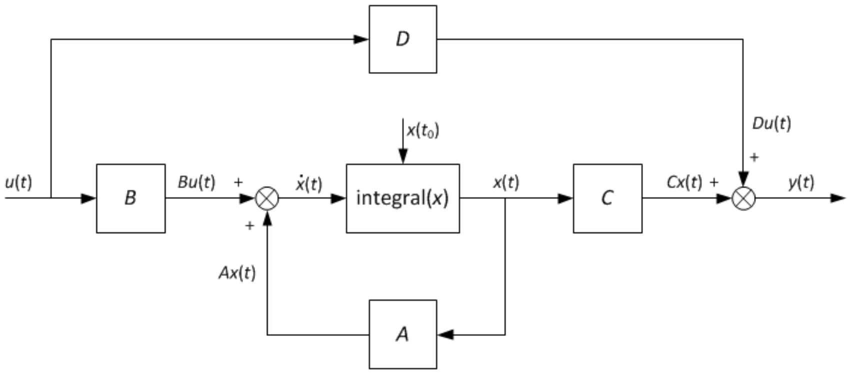
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \ . \end{aligned}$$

A továbbiakban, az állapottérmodell tulajdonságainak vizsgálata során mindig lineáris, időinvariáns folytonos idejű rendszermodellt tételezünk fel.

Az állapottérmodellben szereplő változók és együttható mátrixok dimenziói

A modellben szereplő mátrixok és vektorok dimenziója a modellezés során figyelembe vett állapotváltozók, bemenetek és kimenetek számától függ. Az állapotváltozók száma általában nagyobb egynél. A bemenetek, kimenetek száma alapján alapvetően két csoportra oszthatjuk a rendszereinket: ún. SISO vagy egybemenetű–egykimenetű, illetve MIMO, azaz többbemenetű–többkimenetű rendszerekre. E csoportosítás alapján a modell elemeinek dimenziói a következők:

	SISO	MIMO
$\dim(x)$	n	n
$\dim(u)$	1	p
$\dim(y)$	1	r
$\dim(A)$	$n \times n$	$n \times n$
$\dim(B)$	$n \times 1$	$n \times p$
$\dim(C)$	$1 \times n$	$r \times n$
$\dim(D)$	1×1	$r \times p$



2.1. ábra. Kálmán-féle rendszermodell blokkdiagramja

(*Megjegyzés*: a példatárban nem hivatkozunk az aláhúzással a vektorokra, kettős aláhúzással a mátrixokra, mivel ismerve a belső állapotváltozók, a bemenő változók és a kimenő változók számát, ezek dimenziói a fenti táblázat alapján egyértelműen eldönthetők.) Tehát, ha SISO rendszernek írjuk fel a modelljét, akkor B mátrixból b oszlopvektor, míg a C mátrixból c^T sorvektor, a D mátrix pedig a d skalár szám lesz.

Az állapottérmodell blokkdiagramja a 2.1 ábrán látható.

A diagramnak és a modellegyenleteknek megfelelően a rendszer működését az integrálblokk jeleníti meg, aminek a bemenete az integrálás eredményeként kapott és visszacsatolt állapotvektor ($x(t)$), a bemenő jel ($u(t)$) és az induló állapotot megadó $x(t_0)$ kezdeti feltétel. A kimenő jel ($y(t)$) az állapotvektor ($x(t)$) és a bemenő jel ($u(t)$) C és D mátrixokkal súlyozott összege. A D mátrix értéke akkor nem lesz nulla, ha a bemenet a rendszer belső működését megkerülve, közvetlenül is hat a kimenetre.

Állapotérmodell megoldása

Induljunk ki a rendszeregyenletből:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BU(t), \qquad x(0) = x_0 \ .$$

Laplace-transzformáljuk ezt az egyenletet x_0 kezdeti feltételek mellett:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \ ,$$

majd átrendezve:

$$\begin{aligned} sX(s) - AX(s) &= x_0 + BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= x_0 + BU(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \ , \end{aligned}$$

ahol I az $n \times n$ dimenziós egységmátrix.

Az $(sI - A)^{-1}$ kifejezést a következő módon értelmezhetjük:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s}\left(I - \frac{A}{s}\right)^{-1} = \frac{1}{s}\left(I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \dots\right) \ .$$

A sorba fejtéssel kapott kifejezést inverz Laplace-transzformálva:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots \equiv e^{At} ,$$

ahol az e^{At} az ún. mátrixexponenciális és $t \geq 0$. E jelölés bevezetésekor azt használjuk ki, hogy az inverz Laplace-transzformációval kapott sorba fejtett alak formailag megfelel az e^{at} sorba fejtésének, ahol a tetszőleges skalár szám, $t \geq 0$ pedig az időváltozó.

A kapott eredményt felhasználva inverz-Laplace transzformálhatjuk az

$$X(s) = (sI-A)^{-1}x_0 + (sI-A)^{-1}BU(s)$$

egyenletet:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau .$$

Azaz a t időponthoz tartozó $x(t)$ állapotváltozó vektor értékét meghatározhatjuk a kezdeti feltétel (1. tag) és a bemenet (2. tag) függvényében. Az ugyanezen t időponthoz tartozó kimenet értékét az eredeti modell kimeneti egyenlete alapján határozhatjuk meg:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) .$$

Az állapottérmodell és a bemenet–kimenet modell kapcsolata

Ha ugyanannak a rendszernek készítjük el az állapottérmodelljét és bemenet–kimenet modelljét, akkor megfelelő modellezés esetén a modellek viselkedésének egyformának kell lennie, azaz, ha ugyanabban az induló állapotban ugyanazzal a bemenettel gerjesztjük, akkor ugyanazt a kimenetet kell kapnunk. Vizsgáljuk meg ennek igazolhatóságát egy SISO rendszer esetében, azaz a B bemeneti mátrix legyen a b $n \times 1$ oszlopvektor, a C mátrix a c^T $1 \times n$ sorvektor, a D mátrix pedig a d skalár szám.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^Tx(t) + du(t) . \end{aligned}$$

Legyen a kezdő állapot zérus ($x_0 = 0$), és Laplace-transzformáljuk az állapottérmodellt, majd fejezzük ki az első egyenletből az állapotváltozók Laplace-transzformáltját:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI-A)^{-1}bU(s) \\ Y(s) &= c^TX(s) + dU(s) . \end{aligned}$$

Helyettesítsük be az első egyenletet a második egyenletbe:

$$Y(s) = \left(c^T(sI-A)^{-1}b + d\right)U(s) ,$$

és rendezzük át a kapott egyenletet a következő alakra:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = c^T(sI-A)^{-1}b + d .$$

Az egyenlet bal oldalán kapott kifejezés, azaz a kimenet Laplace-transzformáltjának és a bemenet Laplace-transzformáltjának a hányadosa megfelel az átviteli függvénynek.

Írjuk fel az átviteli függvényt a bemenet–kimenet modell alapján:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + ... + b_0 u(t) \ ,$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0} \ .$$

Egy rendszer állapottérmodellje és bemenet–kimenet modellje között tehát az átviteli függvény teremti meg a kapcsolatot:

$$G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{z.k.f.} = c^T(sI - A)^{-1}b + d = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0} \ ,$$

ahol a *z.k.f.* rövidítés a zérus kezdeti feltételekre utal.
(*Megjegyzés*: a szokásos jelölés miatt az állapottérmodell b bemeneti vektorának és a bemenet–kimenet modell bemeneti oldal b_i együtthatóinak nagyon hasonló a jelölése, de a két modell más-más elemére utalnak.)

Megfigyelhetőség

Az állapottérmodell felállításakor állapotváltozónak a rendszer belső összefüggéseit, működését meghatározó mennyiségeket választunk. A kimeneti változók pedig olyan mennyiségek lesznek, amelyeket közvetlenül meg tudunk mérni. Az állapotváltozók viszont nem feltétlenül mérhetők, figyelhetők meg közvetlenül, értékük alakulására a kimeneti változók mérése alapján lehet következtetni. Ezt a lehetőséget, rendszertulajdonságot adja meg a *megfigyelhetőség* fogalma, melyet az egyszerűsítés kedvéért SISO rendszerekre vezetjük be, és feltételezzük, hogy a bemenetnek nincs közvetlen hatása a kimenetre.

A *megfigyelhetőség* definíciója a következő:
Az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^T x(t) \end{aligned}$$

modellel megadott rendszert akkor nevezzük teljesen megfigyelhetőnek, ha tetszőleges $t_0 = 0$ időponthoz tartozó $x(t_0)$ kezdő állapothoz és $u(t) = 0, \ t \geq t_0$ bemenethez létezik olyan $t_1 > t_0$ időpont, hogy $y(t), \ t \in (t_0, t_1]$ kimenet ismerete elegendő $x(t_0)$ kezdő állapot meghatározásához.

A megfigyelhetőség teljesüléséhez az kell, hogy az

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{A(t_1 - t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} bu(\tau) \mathrm{d}\tau \\ y(t_1) &= c^T x(t_1) = c^T e^{A(t_1 - t_0)} x(t_0) \end{aligned}$$

egyenletekből $x(t_0)$ kiszámítható legyen. Kálmán megfigyelhetőségi tételének köszönhetően ez a probléma azonban könnyebben eldönthető.

Megfigyelhetőségi tétel:
Az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^T x(t) \end{aligned}$$

modellel megadott rendszert akkor és csak akkor megfigyelhető, ha az állapottérmodell A és c^T együttható mátrixaiból képzett $\mathcal{O}_{n-1}$ megfigyelhetőségi mátrix:

$$\mathcal{O}_{n-1} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

teljes rangú: $r(\mathcal{O}_{n-1}) = n$, ahol n az állapotváltozók száma.

Tekintve, hogy SISO rendszerek esetében az $\mathcal{O}_{n-1}$ megfigyelhetőségi mátrix $n \times n$-es négyzetes mátrix lesz, a teljes rangúság kérdése a megfigyelhetőségi mátrix determináns értékének a meghatározásával eldönthető. Ha az $\mathcal{O}_{n-1}$ mátrix determinánsa nem egyenlő nullával, akkor teljes rangú, azaz a modell teljesen megfigyelhető, tehát a kimenetek méréséből visszakövetkeztethetünk az állapotváltozó egy adott időpontbeli értékére. Ha a megfigyelhetőségi mátrix determinánsa nulla, akkor van legalább egy olyan állapotváltozó, aminek az értékét így nem tudjuk meghatározni. A nem megfigyelhető állapotváltozók pontos számához meg kell határozni a $\mathcal{O}_{n-1}$ mátrix tényleges rangját.

Irányíthatóság

A szabályozási feladatok célja, hogy a rendszer előírt állapotba kerüljön. Ez az állapottér modelleknél azt jelenti, hogy az állapotváltozó vektor komponensei vegyenek fel egy meghatározott értéket egy adott időpontban. Az irányíthatóság esetében tehát azt vizsgáljuk, hogy az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^T x(t) \end{aligned}$$

modell állapotváltozóit, adott kezdő állapotból kiindulva, a bemenet megfelelő megválasztásával át lehet-e vinni egy előre megadott végállapotba.

Az *állapotirányíthatóság definíciója*:

Az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^T x(t) \end{aligned}$$

modellel leírt rendszert egy adott $(t_0, t_1]$ időintervallumon teljesen állapotirányíthatónak nevezzük, ha tetszőleges $x(t_0)$ kezdő állapothoz és tetszőleges $x(t_1)$ végállapothoz létezik olyan $u(t)$ bemenő jel, ami a rendszert a kezdő állapotból a végállapotba átviszi.

Az állapotirányíthatóság teljesüléséhez az kell, hogy az

$$x(t_1) = e^{A(t_1 - t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1 - \tau)} bu(\tau) \mathrm{d}\tau$$

összefüggés alapján az $u(t)$ bemenet meghatározható legyen. Ennek vizsgálata helyett, ebben az esetben is Kálmán tételét alkalmazhatjuk az irányíthatóság ellenőrzésére.

Irányíthatóság tétele:

Az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^T x(t) \end{aligned}$$

modellel leírt rendszer akkor és csak akkor állapotirányítható, ha az állapottérmodell A és b együttható mátrixaiból képzett $\mathcal{C}_{n-1}$ irányíthatósági mátrix:

$$\mathcal{C} = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b]$$

teljes rangú: $r(\mathcal{C}_{n-1}) = n$, ahol n az állapotváltozók száma.

Az irányíthatósági mátrix ebben az esetben is $n \times n$-es mátrix lesz, ha SISO rendszert vizsgálunk, tehát rangját a determinánsának meghatározásával ellenőrizhetjük. Így, ha a megfigyelhetőségi mátrix determinánsa nem nulla, akkor a modell teljesen irányítható, azaz a rendszer átvihető tetszőleges végállapotba. Ha az irányíthatósági mátrix rangja nulla, akkor van legalább egy olyan állapotváltozó, amire a bemenő jelnek nem lesz hatása.

Stabilitás

Az állapottérmodellel leírt rendszerek esetében is nagyon fontos vizsgálati szempont a stabilitás. Kétféle megközelítésből vizsgálhatjuk az ilyen modellek esetében a stabilitást. Az első esetben csak a bemenetek és kimenetek viszonyára teszünk megkötést, és *külső stabilitású*nak nevezzük a rendszert, ha korlátos bemenetre a kimenet véges korlátok között marad. Az állapottérmodellek esetében azonban fontosabb az ún. *belső stabilitás*, amikor az állapotváltozók végértékére teszünk megkötést:

A *belső stabilitás* definíciója:
Legyen adott az alábbi állapottér modell

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ x(t_0) &= x_0 \neq 0 \quad t > t_0 \ , \end{aligned}$$

azaz legyen a bemenet zérus, a kezdőfeltételek pedig nullától különbözőek. Akkor nevezzük ezt a modellt belső stabilitásúnak, ha az $x(t)$ megoldás kielégíti az alábbi feltételt:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \ .$$

A definíciónak megfelelően egy állapottérmodellt akkor tekintünk (belső) stabilnak, ha a magára hagyott rendszer valamennyi állapotváltozójának értéke nullához tart, azaz beáll az egyensúlyi (munkaponti) értékére.

A belső stabilitás teljesüléséhez az A állapotátviteli mátrixot kell megvizsgálni. Ehhez vezessük be a stabilitási mátrix fogalmát a következő definíciónak megfelelően.

A *stabilitási mátrix* fogalma:
Egy $A \in R^{n \times n}$ mátrixot stabilitási mátrixnak nevezünk, ha valamennyi sajátértéke negatív valós vagy negatív valós részű komplex szám:

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \ .$$

A *belső stabilitás* tétele:
Egy adott állapottérmodell akkor és csak akkor belső stabilitású, ha az A állapotátviteli mátrix stabilitási mátrix. Ha az A állapotátviteli mátrix nem stabilitási mátrix, akkor a modell nem lesz stabil, azaz instabil lesz.

A tételnek megfelelően, egy állapottérmodell stabilitásának vizsgálatához az A állapotátviteli mátrix sajátértékeit kell meghatározni. A sajátértékeket a $|\lambda I - A| = 0$ egyenlet megoldásával kaphatjuk meg, azonban belátható, hogy ez általános esetben, már egy három állapotváltozót tartalmazó rendszer esetében is harmadfokú egyenlet megoldását jelenti. A szakirodalomban megtalálható az ilyen esetben alkalmazható Ljapunov-tétel, aminek alkalmazására itt nem térünk ki.

2.2. Kidolgozott feladatok

1. Írja fel az alábbi egyenletek alapján az állapottérmodellt! Határozza meg a modell tulajdonságait is!

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= 3x_2(t) - 4x_1(t) + 2u_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_3(t) + u_1(t) - 3u_2(t) \\
\dot{x}_3(t) &= x_3(t) \\
y(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + 3x_3(t)
\end{aligned}$$

   Megoldás

   Az egyenletekben szereplő változók indexelése alapján látható, hogy a modellben három belső állapot, két bemenő és egy kimenő változó szerepel. Ennek megfelelően a vektorok és mátrixok dimenziói a következők lesznek:

$$\dim(x(t)) = 3 \quad \dim(u(t)) = 2 \quad \dim(y(t)) = 1$$

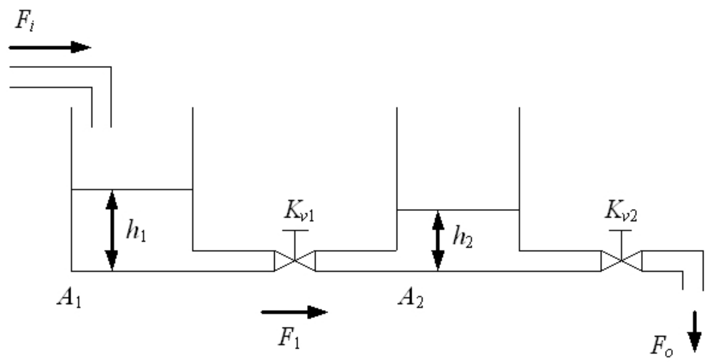
$$\dim(A) = 3 \times 3 \quad \dim(B) = 3 \times 2 \quad \dim(c^T) = 1 \times 3 \quad \dim(d^T) = 1 \times 2 \; .$$

   Ennek megfelelően az állapottérmodell a következő lesz:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\
y(t) &= [1 \;\; 2 \;\; 3] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + [0 \;\; 0] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \; .
\end{aligned}$$

   A kapott modell folytonos idejű, lineáris és időinvariáns tulajdonságú.

2. Tekintsük a 2.2 ábrán látható egyszerű technológiai rendszert:
   ahol



2.2. ábra. A 2. példa technológiai rendszere

- A_1, A_2 az 1., ill. 2. tartály alapterülete, konstans értékek;
- $h_1(t)$, $h_2(t)$ az 1., ill. 2. tartályban a folyadékszint magassága, az idő függvényében változó értékek;
- K_{v1}, K_{v2} az 1., ill. 2. szelep ellenállási tényezője, konstans értékek;
- $F_i(t)$, $F_1(t)$, $F_o(t)$ a belépő, a két tartály között átfolyó és a kifolyó folyadék térfogatárama, az idő függvényében változó értékek.

Egyszerűsítésként tételezzük fel, hogy a tartályokban a folyadéknak sem az összetétele, sem a hőmérséklete nem változik meg, valamint a tartályokból kifolyó mennyiség a tartálybeli folyadékszinttel, illetve folyadékszint-különbséggel egyenesen arányos. Feladatok:

(a) Írja fel a technológiai rendszer állapottér modelljét, ha a belépő és kilépő folyadékáram mennyiségét tudja mérni!

(b) Írja fel úgy is a modellt, ha a két tartály közötti szakaszon is mérhető a folyadékáram mennyisége!

(c) Hogyan kell a technológiát módosítani, hogy a segédmátrix értéke ne legyen nulla?

Megoldás:

A tartályok működése a következő, ún. mérlegegyenlet segítségével írható le:

tartálybeli mennyiség megváltozása = belépő folyadékáram − kilépő folyadékáram.

A tartálybeli folyadékmennyiséget, azaz a folyadék térfogatát felírhatjuk az alapterület és a folyadékszint segítségével:

$$V(t) = Ah(t) \ ,$$

ahol az alapterület állandó, míg a szint változik a be- és kilépő áram mennyiségének megfelelően. Figyelembe véve a tartályok működésére, vagyis a bennük lévő folyadék térfogatának megváltozására megadott egyszerűsítéseket, a következő egyenletek írhatók fel:

$$\begin{aligned}
\text{1. tartály} \quad \dot{V}_1(t) = A_1\dot{h}_1(t) &= F_i(t) - \frac{1}{K_{v1}}\left(h_1(t) - h_2(t)\right) \ , \\
\text{2. tartály} \quad \dot{V}_2(t) = A_2\dot{h}_2(t) &= \frac{1}{K_{v1}}\left(h_1(t) - h_2(t)\right) - \frac{1}{K_{v2}}h_2(t) \ .
\end{aligned}$$

Ha a tartálypark működését a tartályokban lévő folyadékmennyiség alapján jellemezzük, akkor az állapottér modell változóinak a következőket vehetjük fel:

- két állapotváltozó lesz, melyek a tartálybeli szintek, ezek lesznek az $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}$ vektor elemei;
- egy bemenő változó lesz, $u(t) = F_i(t)$, tehát a bemenet skalár változó lesz;
- az (a) kérdésnek megfelelően egy kimenő változó lesz, $y(t) = F_o(t)$, így ez is skalár lesz.

Az állapottérmodell felírásához az egyenleteket átrendezve:

$$\begin{aligned}
\dot{h}_1(t) &= -\frac{1}{A_1K_{v1}}h_1(t) + \frac{1}{A_1K_{v1}}h_2(t) + \frac{1}{A_1}F_i(t) \\
\dot{h}_2(t) &= \frac{1}{A_2K_{v1}}h_1(t) - \left(\frac{1}{A_2K_{v1}} + \frac{1}{A_2K_{v2}}\right)h_2(t) \\
F_o(t) &= \frac{1}{K_{v2}}h_2(t)\ .
\end{aligned}$$

Az egyenleteket mátrix-vektor alakra hozva megkapjuk a rendszer leírását állapottérmodell alakban:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1K_{v1}} & \frac{1}{A_1K_{v2}} \\ \frac{1}{A_2K_{v1}} & -\frac{K_{v1}+K_{v2}}{A_2K_{v1}K_{v2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} F_i(t) \\
F_o(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{K_{v2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}\ .
\end{aligned}$$

A (b) esetben két kimenő változónk lesz: a két tartály között átfolyó mennyiség, $F_1(t)$ és a második tartály után távozó folyadékáram, $F_o(t)$. A két tartály között átfolyó folyadékáramot a következő egyenlettel adhatjuk meg:

$$F_1(t) = \frac{1}{K_{v1}}\left(h_1(t) - h_2(t)\right)\ .$$

Hozzáadva ezt az egyenletet az (a) pontban felírt modellhez, az állapotváltozást leíró rendszeregyenlet változatlan marad, csak a kimeneti egyenletet kell módosítani:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1K_{v1}} & \frac{1}{A_1K_{v2}} \\ \frac{1}{A_2K_{v1}} & -\frac{K_{v1}+K_{v2}}{A_2K_{v1}K_{v2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} F_i(t) \\
\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_o(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{K_{v1}} & -\frac{1}{K_{v1}} \\ 0 & \frac{1}{K_{v2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}\ .
\end{aligned}$$

A (c) pontban feltett kérdésre, mely szerint milyen technológiai változtatás kell ahhoz, hogy a d értéke ne legyen zérus, az a legegyszerűbb válasz, hogy a belépő folyadékáramot még az 1. tartály előtt meg kell osztani, és egy részét közvetlenül a kimenetre vezetni.

3. Legyen adott egy állapottérmodell rendszeregyenlete a következő adatokkal:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + bu(t)\ ,$$

ahol

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}\ .$$

Legyen a bemenet $u(t) = 1(t) - 1(t-2)$, a kezdeti feltétel pedig zérus, $\underline{x}(0) = \underline{0}$. Határozzuk meg az $x_1(t)$ állapotváltozó értékének alakulását!

Megoldás menete:

Helyettesítsünk be az állapottérmodell általános megoldásába a zérus kezdeti feltételt is figyelembe véve, majd írjuk fel állapotváltozónként az egyenleteket:

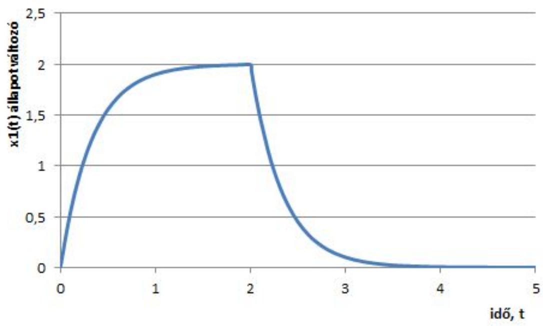
$$\underline{x}(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-3(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} u(\tau)\mathrm{d}\tau \ ,$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 6\int_0^t e^{-3(t-\tau)}(1(\tau) - 1(\tau-2))\mathrm{d}\tau \\ x_2(t) &= -4\int_0^t e^{-2(t-\tau)}(1(\tau) - 1(\tau-2))\mathrm{d}\tau \ . \end{aligned}$$

Bontsuk fel az $x_1(t)$ állapotváltozó esetében az időintervallumot a bemenő jel változásának megfelelően és végezzük el az integrálást:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 6\left(\int_0^t e^{-3(t-\tau)}1(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_0^t e^{-3(t-\tau)}1(\tau-2)\mathrm{d}\tau\right) = \\ &= \begin{cases} 6\int_0^t e^{-3(t-\tau)}\mathrm{d}\tau & , \quad 0 \le t \le 2 \\ 6\left(\int_0^t e^{-3(t-\tau)}\mathrm{d}\tau - \int_2^t e^{-3(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right) & , \quad 2 < t \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 6e^{-3t}\frac{1}{3}[e^{3\tau}]_0^t & , \quad 0 \le t \le 2 \\ 6\left(e^{-3t}\frac{1}{3}[e^{3\tau}]_0^t - e^{-3t}\frac{1}{3}[e^{3\tau}]_2^t\right) & , \quad 2 < t \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 2e^{-3t}(e^{3t} - 1) & , \quad 0 \le t \le 2 \\ 2\left(e^{-3t}(e^{3t} - 1) - e^{-3t}(e^{3t} - e^{3\cdot 2})\right) & , \quad 2 < t \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 2(1 - e^{-3t}) & , \quad 0 \le t \le 2 \\ 2\left((1 - e^{-3t}) - (1 - e^{-3(t-2)})\right) & , \quad 2 < t \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 2(1 - e^{-3t}) & , \quad 0 \le t \le 2 \\ 2(e^{-3(t-2)} - e^{-3t}) & , \quad 2 < t \ . \end{cases} \end{aligned}$$

Az $x_1(t)$ állapotváltozó időbeli lefutása a 2.3 ábrán látható.



2.3. ábra. 3. mintapélda $x_1(t)$ állapotváltozójának időbeli lefutása

4. Igazoljuk, hogy az

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

állapottérmodell és az

$$y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 3y(t) = u(t)$$

bemenet–kimenet modell ugyanazt a rendszert írja le!

Megoldás menete:

Ha a két modell ugyanazt a rendszert írja le, akkor ugyanazt az átviteli függvényt kell kapnunk, akár az állapottérmodell, akár a bemenet–kimenet modell alapján írom fel.

Írjuk fel először az állapottérmodell alapján az átviteli függvényt! Az összefoglalóban leírtaknak megfelelően:

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d \ ,$$

ahol a példának megfelelően

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^T = [0 \;\; 1], \quad d = 0 \ .$$

Végezzük el először az $(sI - A)^{-1}$ mátrix invertálását:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\mathrm{Adj} \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -1 & s \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -1 & s \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} s & -3 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}}{s^2 + 2s + 3} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+2s+3} & \frac{-3}{s^2+2s+3} \\ \frac{1}{s^2+2s+3} & \frac{s+2}{s^2+2s+3} \end{bmatrix} .$$

Visszahelyettesítve ezt az átviteli függvényt meghatározó egyenletbe:

$$G(s) = c^T(sI-A)^{-1}b = [0 \;\; 1] \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+2s+3} & \frac{-3}{s^2+2s+3} \\ \frac{1}{s^2+2s+3} & \frac{s+2}{s^2+2s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [0 \;\; 1] \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+2s+3} \\ \frac{1}{s^2+2s+3} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+2s+3} \; .$$

Vezessük le az átviteli függvényt a bemenet–kimenet modellből is. Zérus kezdeti feltételek mellett Laplace-transzformálva az egyenletet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 3y(t)\right) &= \mathcal{L}\left(u(t)\right) \\ s^2Y(s) + 2sY(s) + 3Y(s) &= U(s) \; . \end{aligned}$$

Innen az átviteli függvény

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+2s+3} \; .$$

Összehasonlítva a két levezetés eredményeként kapott átviteli függvényt, megállapítható, hogy a két modell ugyanazt a rendszert írja le.

(*Megjegyzés*: az $(sI - A)^{-1}$ mátrix invertálását a lineáris algebrából ismert $A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(A)}{\det(A)}$ összefüggés segítségével határoztuk meg, ahol $\mathrm{Adj}(A)$ az A mátrix adjungáltját jelenti. 2×2-es mátrixok esetében az adjungálás megfelel a főátlóbeli elemek felcserélésének és a mellékátlóbeli elemek előjelváltásának, mint ahogy az a megoldás menetében is látszik. Nagyobb dimenziójú négyzetes mátrixoknál ez a művelet ugyanúgy bonyolultabb, mint ahogy a determinánsszámítás.)

5. Legyen adott egy állapottérmodell az együttható mátrixaival:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \; , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; , \quad c^T = [4 \;\; 5] \; , \quad d = 0 \; .$$

Vizsgáljuk meg a modell

(a) megfigyelhetőségét;

(b) irányíthatóságát;

(c) (belső) stabilitását.

A megoldás menete:

A kérdések megválaszolása előtt határozzuk meg az egyes változók számát!

– Miután az A mátrix 2×2 mátrix, így az állapotvektornak is két komponense van, azaz $n = 2$.

– A b a példa szerint egy 2×1 oszlopvektor, így egy bemenete van a rendszernek.

– A c^T pedig egy 1×2 sorvektor, azaz a rendszernek egy kimenete van.

Ezeknek az adatoknak a tisztázása szükséges a feltett kérdések megválaszolásához.

(a) A megfigyelhetőség vizsgálatához írjuk fel a megfigyelhetőségi mátrixot:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -7 & -8 \end{bmatrix} .$$

Bár ilyen kisméretű mátrixnál könnyű a rangot ellenőrizni, de alkalmazzuk az összefoglalóban említett determináns módszert:

$$det(\mathcal{O}) = 4 \cdot (-8) - 5 \cdot (-7) = 3 ,$$

azaz az $\mathcal{O}$ mátrix determinánsa nem egyenlő nullával, így teljes rangú és ebből következően a modell megfigyelhető.

(b) Az irányíthatóság vizsgálatát az irányíthatósági mátrix segítségével végezzük el:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Határozzuk meg a $\mathcal{C}$ mátrix determinánsát

$$det(\mathcal{C}) = 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 0 = 1 ,$$

tehát a $\mathcal{C}$ mátrix determinánsa nem egyenlő nullával, így az irányíthatósági mátrix teljes rangú, azaz a modell irányítható.

(c) A stabilitást az A mátrix sajátértékeinek vizsgálatával végezhetjük el. A tételnek megfelelően akkor lesz a rendszer (belső) stabil, ha az A mátrix valamennyi sajátértékének a valós része negatív. A saját értékeket a következő egyenlet segítségével lehet meghatározni:

$$|\lambda I - A| = 0 .$$

Végezzük el a kijelölt műveletet:

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 .$$

Kifejtve a determinánst:

$$(\lambda + 3)\lambda + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 .$$

Megoldva az egyenletet, $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = -2$ gyökök lesznek az A mátrix sajátértékei. Miután mindkét sajátérték negatív valós, így a stabilitási tételnek megfelelően a rendszer állapottérmodellje belső stabilitású.

2.3. Gyakorló feladatok

2.3.1. Ellenőrző kérdések

1. Adja meg a lineáris, időinvariáns, folytonos idejű állapottérmodellt!

2. Adja meg az állapotátmeneti függvény Kálmán-féle rendszermodellben szereplő definícióját!
3. Írja fel a lineáris, időinvariáns, folytonos idejű bemenet–kimenet modellt!
4. Adja meg a folytonos idejű állapottérmodellek megfigyelhetőségének definícióját!
5. Egy rendszer állapottérmodellje és bemenet–kimenet modellje között milyen kapcsolat értelmezhető?
6. Adja meg a lineáris, időinvariáns, folytonos idejű állapottérmodell belső stabilitásának definícióját!
7. Adja meg a folytonos idejű állapottérmodellek megfigyelhetőségének Kálmán-féle tételét!
8. Adja meg a folytonos idejű állapottérmodellek irányíthatóságának definícióját!
9. Mit jelent az, hogy egy állapottérmodell determinisztikus?
10. Mit jelent az, hogy egy állapottérmodell lineáris?
11. Adja meg a folytonos idejű állapottérmodellek irányíthatóságának Kálmán-féle tételét!
12. Adja meg a lineáris, időinvariáns, folytonos idejű állapottérmodell belső stabilitásának tételét!

2.3.2. Feladatok

1. Egy állapottérmodell A mátrixának dimenziója 3×3, a B-nek 3×1 a C-nek 2×3.
   (a) Hány állapotváltozója és hány bemenő és kimenő változója van a modellnek?
   (b) Adja meg a D mátrix dimenzióját!
2. Egy technológiai rendszer állapottérmodellel történő leírása során öt állapotváltozót, három bemenetet és két kimenetet vettünk figyelembe. Adja meg a modell együtthatómátrixainak a dimenzióit!
3. Írja fel az alábbi egyenletek alapján az állapottérmodellt!

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t)_1 &= 2x_2(t) - 3x_1(t) + u(t) \\
\dot{x}(t)_2 &= x_1(t) + 4u(t) \\
y_1(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + 3u(t) \\
y_2(t) &= x_2(t) - 4x_1(t)
\end{aligned}$$

4. Legyenek az $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad y(t) = Cx(t)$ állapottérmodell együttható mátrixai a következők:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \;\; 2] \;.$$

   (a) Adja meg az állapotváltozók, bemeneti változók és kimeneti változók számát!
   (b) Határozza meg a modell stabilitását!

5. (a) Határozza meg az alábbi állapottérmodell irányíthatóságát és megfigyelhetőségét:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} x(t)\ .\end{aligned}$$

   (b) Igaz-e, hogy a modellhez tartozó átviteli függvény nevezőjének és számlálójának nincs közös gyöke?

   (c) Vizsgálja meg a rendszer stabilitását a modell alapján!

6. (a) Határozza meg az állapottérmodell állapot-, bemenő és kimenő változóinak a számát, ha a mátrixok a következők:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ \ 2 \ \ 3]\ .$$

   (b) Megfigyelhető-e a modell?

7. (a) Határozza meg az állapottérmodell állapot-, bemenő és kimenő változóinak a számát, ha a mátrixok a következők:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\ .$$

   (b) Irányítható-e a modell?

   (c) Stabil-e a modell?

8. Legyen adott egy állapottér-modell rendszeregyenlete a következő adatokkal:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + bu(t)\ ,$$

   ahol

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}\ .$$

   Legyen a bemenet $u(t) = 1(t) - 1(t-1)$, a kezdeti feltétel pedig zérus, $x(0) = 0$. Határozzuk meg az $x_2(t)$ állapotváltozó értékének alakulását!

9. Igazolja, hogy az

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

   állapottérmodell és a

$$2y^{(2)}(t) + 6y^{(1)}(t) + 4y(t) = 8u^{(1)}(t) + 10u(t)$$

   bemenet–kimenet modell ugyanazt a rendszert írja le!

2.3.3. megoldások

1. (a) Az állapotváltozó száma 3, $n = 3$; a bemenő változók száma 1, $p = 1$; a kimenő változók száma 2, $r = 2$.

   (b) A D mátrix 2×1 oszlopvektor lesz.

2. Az A mátrix 5×5-ös négyzetes mátrix, a B 5×2 mátrix, a C 2×5 mátrixa és a D 2×3 mátrix lesz. Ha a bemenetek közül egyik sem hat közvetlenül valamelyik kimenetre, akkor D a megfelelő dimenziójú nullmátrix.

3. Az állapottér modell:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(t)\\ \begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

4. (a) $\dim(x)$=2; $\dim(u)$=2; $\dim(y)$=1

   (b) A sajátértékek: λ_1=1; λ_2=5, tehát nem teljesül az a feltétel, hogy $\forall \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$, így a modell nem stabil.

5. (a) Irányíthatósági mátrix: $\mathcal{C} = \begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 13\\ 2 & 36\end{bmatrix}$; determinánsa $det(\mathcal{C}) = 82$. Miután $det(\mathcal{C}) \neq 0$, így a mátrix teljes rangú, tehát a modell irányítható.

   Megfigyelhetőségi mátrix: $\mathcal{O} = \begin{bmatrix}c^T\\ c^T A\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 19 & 9\end{bmatrix}$; determinánsa $det(\mathcal{O}) = 8$. Miután $det(\mathcal{O}) \neq 0$, így a mátrix teljes rangú, tehát a modell megfigyelhető.

   (b) Miután a megfigyelhetőség és irányíthatóság együttesen teljesül a modell esetében, ebből következik, hogy ha az együttható mátrixok alapján levezetjük az átviteli függvényt, akkor a kapott racionális törtfüggvény számlálójának és nevezőjének nem lesz közös gyöke.

   (c) A sajátértékek: λ_1=0,5; λ_2=4,5. Miután $\forall \mathrm{Re}(\lambda_i) \not< 0$, így a modell instabil.

6. (a) $\dim(x)$=3; $\dim(u)$=2; $\dim(y)$=1

   (b) Megfigyelhetőségi mátrix: $\mathcal{O} = \begin{bmatrix}c^T\\ c^T A\\ c^T A^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 7 & 4\\ 8 & 18 & 15\end{bmatrix}$; determinánsa $det(\mathcal{O} = 21$. Miután $det(\mathcal{O}) \neq 0$, így a mátrix teljes rangú, tehát a modell megfigyelhető.

7. (a) $\dim(x)$=2; $\dim(u)$=1; $\dim(y)$=2

   (b) Irányíthatósági mátrix: $\mathcal{C} = \begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 14\\ 3 & 13\end{bmatrix}$; determinánsa $det(\mathcal{C}) = -16$. Miután $det(\mathcal{C}) \neq 0$, így a mátrix teljes rangú, tehát a modell irányítható.

   (c) A sajátértékek: λ_1=5; λ_2=-1, azaz van pozitív sajátértéke, ezért a modell instabil.

Méréselmélet példatár II. rész

3. fejezet

Mérési adatok feldolgozása

3.1. Elméleti áttekintés

A mérési adatok általában ömlesztve, vagy a mérnöki gyakorlatban gyakran idő szerint rendezve jelennek meg. Bár az időbeli sorrendnek általában nagy jelentősége van, azonban sok esetben célszerű ezeket az adatokat más szempontok szerint is csoportosítani, illetve összevonni, és további, de kevesebb számú mennyiséggel jellemezni az átláthatóbb kezelés érdekében.

E fejezet célja, hogy bemutassa azokat az adatfeldolgozási, statisztikai alapműveleteket, melyek segítségével az adatok rendezése és elsődleges feldolgozása elvégezhető.

3.1.1. Elemi műveletek

A mérési adatok tehát elsődlegesen a következő formákban jelennek meg a felhasználó előtt:

– regisztrálóról vagy más adatrögzítőről származó, idő szerint részben rendezett eredmények;

– különböző mérési eredmények, melyeket a mérési hely azonosít;

– rendezetlen megfigyelések halmaza.

Az adatok rendezetlen vagy részben, idő vagy hely szerint rendezett, felsorolásszerű halmazát szokás *lajstrom*nak nevezni. A lajstromok elemeire, vagyis az egyedi adatokra x_i jelöléssel hivatkozunk, ahol az i index utal az x elem lajstrombeli helyére. Ha lényeges, akkor egy második indexszel hivatkozhatunk az adat további jellemzőjére.

Számlálás

A legegyszerűbb statisztikai művelet az adatok *számlálás*a vagy megszámolása. Ennek elsődleges célja az, hogy megkapjuk a rendelkezésre álló adatok számát, mely számos további művelethez lesz szükséges kiindulási adat. Az adatok számát általában n-nel jelöljük.

A számlálásnak további célja lehet, hogy például megállapítsa, rendelkezésre áll-e az előírt számú adat, vagy az, hogy bizonyos statisztikai elemzéseknél egyező számú adatot kell a különböző adatsoroknak tartalmaznia, és ezt ellenőrizzük ezen a módon.

Rangsorolás

Az adatok elemzésének egyik fontos szempontja lehet a legkisebb és a legnagyobb értékek megkeresése, illetve az adatok egymáshoz képest vett nagyság szerinti viszonya. Ezt legegyszerűbben a *rangsorolás* segítségével, vagyis az adatok növekvő vagy csökkenő érték szerinti sorba rendezésével oldhatjuk meg.

A rangsorolt adatokra a lajstrombeli helyüktől való megkülönböztetés érdekében az $x_{(i)}$ jelöléssel szokás hivatkozni, hiszen általában a lajstrombeli és a rangsorolás utáni sorrend nem egyezik meg, azaz $x_i \neq x_{(i)}$. Amennyiben növekvő sorrendbe rendeztük az adatokat, akkor a legkisebb elem, vagyis a *minimum* lesz az $x_{min} = x_{(1)}$, a legnagyobb elem, azaz a *maximum* az $x_{max} = x_{(n)}$, és például az ötödik legnagyobb érték az $x_{(n-4)}$ jelű elem lesz. A rangsorolást egyben felhasználhatjuk az adatokhoz történő *rangszám* hozzárendelésére is. Az R_i rangszám az a pozitív egész szám, mely megmutatja, hogy a lajstrom i-dik adata hányadik a rangsorba rendezett adathalmazban:

$$R_i = k, \text{ha}\, x_i = x_{(k)} \ .$$

Bizonyos adatsorok esetében előfordulhat, hogy tartalmaznak egyforma nagyságú adatokat. Az ilyen adatsorok rangsorolására a következő két módszer alkalmazható:

Kapcsolt rang esetében valamennyi azonos adat ugyanazt, a sorban következő rangszámot kapja, a nagyság szerint sorban következő pedig azt a rangszámot, amelynek az értéke annyival nagyobb, mint ahányszor előtte az egyforma adatok száma volt. Így, ha nagyság szerinti rendezéskor az ötödik és hatodik elem értéke megegyezik, akkor ezek egyaránt az 5 rangszámot kapják, míg a következő elem a 7-t.

Átlag rang alkalmazásakor az azonos adatokhoz a sorban következő rangszámok átlagát rendeljük. Az előbbi példa ötödik és hatodik eleméhez ebben az esetben aZ 5,5 rangszámot rendeljük hozzá.

Mindkét esetben lehetnek problémák a rangszámok értelmezésével. A kapcsolt rang esetében nem biztos, hogy lesz n rangszámú, hiszen ha az utolsó két érték megegyezik, akkor azok az $n-1$-es rangszámot kapják. Az átlag rangnál akár az 1, akár n rang kimaradhat, ha a sorba rendezett adatoknál a legkisebb vagy a legnagyobb értékű adatok megegyeznek, továbbá lehetnek tört értékű rangok. Fontos eltérést jelent a két megoldás között, hogy a rangszámok összege, melyre bizonyos statisztikai vizsgálatoknál szükség van, a kapcsolt rangok esetében kisebb lesz, mint az átlag rang alkalmazásakor.

Összegzés

Az összegzés vagy szummázás az adatok mennyiségi értékeinek összeadását jelenti:

$$x_{\text{össz}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

Az adatok összegének értéke önmagában is fontos információ lehet, de nagyon sok esetben ez is mint kiindulási adat szerepel további műveleteknél.

3.1.2. Középértékek

A mérési adatok számszerű értékeinek ismerete fontos információt jelent a megfigyelt változó értékének alakulásáról, de sok esetben célszerű azt – a jobb átláthatóság érdekében – egy jellemző értékekkel helyettesíteni. A jól megválasztott helyettesítő értékkel tehát információsűrítést hajtunk végre, segítve ezzel a mérési adatok könnyebb értelmezését. Az információsűrítés egyik legfontosabb módja a *középérték-számítás*.

A középértékkel szembeni legfontosabb követelmények:

- Közbülső helyet foglaljon el, azaz a mérési adatok minimuma és maximuma között legyen.
- Lehetőség szerint egyszerű legyen a meghatározásának matematikai módszere.
- Számszerű értékeket tartalmazó adatok esetén feleljen meg a mérési adatok megjelenési típusának.
- Legyen könnyen értelmezhető.
- Legyen minél kevésbé érzékeny a kiugró mérési adatokra, azaz legyen robusztus.

A középértékek két fő csoportra oszthatók: a *számított* és a *helyzeti* középértékekre. A számított középértékek közé soroljuk a *számtani*, a *négyzetes*, a *mértani* és a *harmonikus* átlagot, míg a helyzeti középértékek közé tartozik a *módusz*, a *medián*, illetve tágabb értelemben ide sorolhatók a *kvantilisek*. A számított középértékekre jellemző, hogy szinte mindig közbülső értéket vesznek fel, viszont a kapott érték nem feltétlenül lesz a mért adatok típusával egyező. A helyzeti középértékek esetében a tipikusság könnyen teljesül, és általában kevésbé lesznek érzékenyek a kiugró értékekre, mint a számított átlagok.

Számtani átlag

Egyszerű számtani átlag. Egy adatsor *számtani átlag*a az a szám, mellyel az n számú adatot helyettesítve, azok értékösszege változatlan marad. Kiszámítása:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \\ \sum_{i=1}^{n} x_i &= n\bar{x} \ . \end{aligned}$$

A számtani átlag jellemző matematikai tulajdonságai:

- A csak egyforma értéket tartalmazó adatsorok kivételével mindig közbülső értéket vesz fel: $x_{min} < \bar{x} < x_{max}$.
- Az egyes értékek számtani átlagtól való eltérésének összege zérus: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$.
- Az egyes értékek számtani átlagtól való eltérésének négyzetösszege minimális: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 \rightarrow min$, ha $c = \bar{x}$.
- Ha az adatokon lineáris transzformációt hajtunk végre, akkor ugyanezt a transzformációt az átlagértéken is végrehajtva megkapjuk a transzformált adatok átlagát:

$$\tilde{x}_i = a + bx_i \Rightarrow \bar{\tilde{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i = a + b\bar{x} \ .$$

Súlyozott számtani átlag. Míg az egyszerű számtani átlagnál valamennyi adat egyforma súllyal vesz részt az átlagképzésben, addig a súlyozott számtani átlag esetében az egyes adatok különböző mértékben befolyásolják az átlagot:

$$\bar{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} {w_i}' x_i \ ,$$

ahol a w_i súlyok tetszőleges számértékek és

$${w_i}' = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \ , \quad w_i \geq 0 \ .$$

Mérési adatok feldolgozása esetében súlyozott átlagot például akkor alkalmazhatunk, ha ugyanazt a mérési adatot több különböző módon határoztuk meg, és a kapott értékek között azok megbízhatósága alapján különbséget akarunk tenni.

Rekurzív vagy futóátlag. Míg az egyszerű számtani átlagnál valamennyi adat beérkezése után határozzuk meg annak értékét, addig a rekurzív vagy futóátlag esetében minden bejövő adat után meghatározzuk az átlagot úgy, hogy az előző lépésben kapott átlagot korrigáljuk a frissen beérkezett adattal:

$$\begin{aligned} \bar{x}_r(0) &= 0 \ , \\ \bar{x}_r(k) &= \bar{x}_r(k-1) + \frac{1}{k}(x_k - \bar{x}_r(k-1)) = \frac{k-1}{k}\bar{x}_r(k-1) + \frac{1}{k}x_k \ , \end{aligned}$$

ahol $\bar{x}_r(k)$ a k számú adat alapján vett átlag, és x_k a k-dik mérési adat.

Fontos megjegyezni, hogy a rekurzív átlag esetében, az egyszerű átlaghoz hasonlóan, valamennyi adatot egyforma súllyal vesszük figyelembe, azaz $\bar{x}_r(k) = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_1}{k}$, csak a számolást végezzük el úgy, hogy minden új bejövő adat után az addig kiszámolt átlagot korrigáljuk az új értékkel.

A következő képletek szolgálnak a rekurzív átlag esetleges utólagos korrekciójára:

– új adat (x_{n+1}) beszúrása:

$$\bar{x}_{korr} = \frac{1}{n+1}(n\bar{x} + x_{n+1}) = \frac{n}{n+1}\bar{x} + \frac{1}{n+1}x_{n+1} \ ,$$

– i-dik adat törlése:

$$\bar{x}_{korr} = \frac{n}{n-1}\bar{x} - \frac{1}{n-1}x_i \ ,$$

– i-dik adat cseréje:

$$\bar{x}_{korr} = \bar{x} - \frac{1}{n}(x_{i_{el}} - x_{i_{be}}) \ ,$$

ahol $x_{i_{el}}$ az elhagyandó és $x_{i_{be}}$ a beírandó adat.

Mozgóátlag. Ha az adatok időben lassan változnak, azaz értékükben eltolódás, trend figyelhető meg, például valamilyen külső hatás következtében, akkor az átlagolás során célszerű a frissebb mérési adatokat nagyobb súllyal figyelembe venni, így a régebbi mérési adatoknak az átlagra történő hatását csökkenteni. Erre kínál megoldást a *mozgóátlagolás.*

A mozgóátlagolás elvégzésére két lehetőség áll rendelkezésre.

1. Az első esetben az átlagolást az utolsó N számú érték alapján végezzük el, azaz az ennél korábbi értékeket figyelmen kívül hagyjuk. Magát az átlagolást elvégezhetjük a számtani átlag alapképletével a megfelelő határértékek figyelembevételével:

   $$\bar{x}_m^N(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^{k} x_i \ ,$$

   ahol N az úgynevezett ablakszélesség. A megadott képlet csak akkor ad értelmezhető eredményt, ha a bejövő adatok száma elérte az ablak szélességét, azaz $k \geq N$.

   A módszert szokás *ablakos átlagolás*nak nevezni, mivel mintegy ablakot tolunk végig a mérési adatokon, és mindig csak az ablakban látható mérési adatokon végezzük el az átlagolást. A szakirodalomban megtalálható az ablakos átlagolás rekurzív változatának képlete is.

2. A másik módszer a *felejtő átlagolás*, mely a régebbi adatokhoz fokozatosan csökkenő súlyt rendel. A számolás egyik lehetséges módja a következő képlet alapján végezhető el:

   $$\bar{x}_m(k) = \sum_{i=0}^{k} x_i w(k-i) \ ,$$

   ahol

   $$w(j) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}(\frac{\tau-1}{\tau})^j & \text{ha } j \geq 0 \\ 0 & \text{ha } j < 0 \ , \end{cases}$$

   és $\tau > 1$ az átlagolás *felejtési időállandó*ja.

Az ablakos mozgóátlagolást vizsgálva megállapíthatjuk, hogy az ablakszélesség megválasztása döntően befolyásolja a kapott átlagértékek alakulását. Ha az adatok elmozdulása viszonylag jelentős, és a mérést terhelő zaj kicsi, akkor célszerű kis ablakszélességet választani. Miután a zajok zavaró hatása kicsi, ezért a keskeny ablakban viszonylag könnyű az adatok eltolódását észrevenni, vizsgálni. Ha az adatok elmozdulása viszonylag kicsi, és a zaj nagy, akkor célszerű nagyobb ablakszélességet használni annak érdekében, hogy a zaj hatását minél inkább semlegesíteni tudjuk. A másik két esetben, tehát nagy elmozdulás és nagy zaj vagy kis elmozdulás és kis zaj esetében az ablakszélességnek valamilyen közepes értéket választhatunk, hogy a zaj hatását ki tudjuk szűrni az adatok elmozdulása mellől. Hasonló megfontolások alapján választhatjuk meg a felejtési időállandó értékét is. Ha τ értékét nagynak választjuk, akkor a régebbi adatok gyorsabban "felejtődnek", mivel értékükhöz kis súly kerül, míg ha τ értékét egynél nem sokkal nagyobbra választjuk, akkor a régebbi adatok felejtése lassan megy végbe. Adott τ-hoz a w_j súlytényezők előre kiszámíthatók, így az adatok feldolgozása során a megfelelő értékeket csak be kell helyettesíteni.

További számított átlagok

A *négyzetes átlag* az az érték, mellyel az adatsor értékeit helyettesítve, azok négyzetösszege változatlan marad. Kiszámítása:

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}} \ .$$

A *mértani* vagy *geometriai átlag* az az érték, mellyel az adatsor értékeit helyettesítve, azok szorzata marad változatlan. Meghatározása:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \ x_i \geq 0 \ .$$

A *harmonikus átlag* az az érték, mellyel az adatsor értékeit helyettesítve, azok reciprok összege marad változatlan:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/x_i} \ x_i > 0 \ .$$

Momentumok

A momentumok a számított átlagértékek csoportjába tartoznak, és elsősorban származtatott mutatószámok meghatározásánál használjuk őket. A mérési adatok r*-ed rendű momentum*át az alábbi összefüggéssel határozhatjuk meg:

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n} \ .$$

Látható, hogy az elsőrendű momentum a számtani átlagot, a másodrendű momentum a négyzetes átlag négyzetét adja meg.

Az adatok elhelyezkedése szempontjából, a mérési hibák besorolása miatt, fontos lehet az átlagértéktől való távolság. Erre ad mérőszámot a *centrális momentum*. Az r-ed rendű centrális momentumot a következő képlettel határozhatjuk meg:

$$m_r^{(c)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^r}{n} \ .$$

Belátható, hogy az elsőrendű centrális momentum értéke nulla, ezt a tényt használjuk ki, mikor a véletlen hibák hatását párhuzamos mérésekkel küszöböljük ki (lásd a 4.1.2 fejezetben).

Módusz

A *módusz* a helyzeti középértékek közé tartozik, és értéke megfelel az adatsor legtöbbször előforduló értékének. A meghatározása alapján a tipikusság követelményét leginkább ez a középérték elégíti ki. Ugyanakkor belátható, hogy bizonyos esetben előfordulhat, hogy a meghatározásának nincs jelentősége, vagy több módusszal is rendelkezik az adathalmaz. Ez előbbi eset olyankor fordulhat elő, ha a mérőeszköz felbontása nagy, ugyanakkor a rendszerben lévő zajok miatt a mérési eredmények ingadoznak, így vagy nincs két egyforma érték, vagy nagyon kevés érték számossága egyezik meg. Több módusza olyankor lesz egy adatsornak, ha a mérési eredmények jellemzően kettő (esetleg néhány) jellemző értéket vesznek fel. Ennek alapján egyedi értékek esetében a móduszt olyankor érdemes meghatározni, ha van néhány olyan mérési eredmény az adathalmazban, melyeknek a gyakorisága a többi eredményhez képest nagyobb. Szélsőséges értékekre, így a kiugró vagy a rendkívüli hibákkal terhelt mérési adatokra nem érzékeny a módusz, azaz robusztusnak tekinthető. Miután a módusz a legtöbbször előforduló mérési eredmény, így a mérési tartomány bármely értéke, akár a tartomány valamelyik szélső értéke is lehet elvileg módusz. Ekkor a módusz a közepes értékre vonatkozó kritériumot nem feltétlenül teljesíti.

Medián

A *medián* szintén helyzeti középérték. A medián a nagyság szerint sorba rendezett értékek esetén a középső érték, tehát az az érték, melynél ugyanannyi kisebb és nagyobb érték fordul elő. Ennek megfelelően a medián egyaránt képes a számtani átlag kiugró mérési adatokra való érzékenységét, és a módusz esetenkénti irrelevanciáját, egyértelműségének hiányát, illetve nem feltétlenül közepes jellegét kompenzálni. Meghatározása páratlan számú adatot tartalmazó adathalmaz esetén tipikus: sorba rendezés után a medián értéke megegyezik az $(n+1)/2$-dik elem értékével. Páros számú adat esetén a medián a két középső elem átlaga lesz: sorba rendezés után az $n/2$-dik és az $n/2+1$-dik elem értékének számtani átlagolásával kapjuk meg. Ennek megfelelően páros számú elem esetén kaphatunk olyan értéket a mediánra, mely a mérési adatok között nem szerepel. Ugyanakkor a meghatározás módja miatt a medián biztos, hogy közbülső érték lesz, és robusztus, azaz nem érzékeny az esetleges kiugró mérési hibákra.

Kvantilisek

A medián, az előző részben leírtaknak megfelelően, két egyenlő részre osztja a sorba rendezett mérési adatokat, tehát a mediánnál kisebb és nagyobb érték egyforma valószínűséggel fordul elő a mérési adatok között. Hasonló elven bevezethetünk további osztópontokat is, melyek a sorba rendezett mérési adatokat három, négy, illetve k egyenlő részre osztják. Ezeket az osztópontokat általánosan *kvantilis*eknek nevezzük és $q_j^{(k)}$-val jelöljük. $q_j^{(k)}$ jelenti azt a j-dik k-ad rendű kvantilist, melynél a mérési adathalmazban előforduló valamennyi érték j/k-ad része kisebb, ahol a j értéke $1, 2, ..., k-1$ lehet. A kvantilis értékét a mediánnál megismert módon határozhatjuk meg: vagy a megfelelő értéket kiválasztjuk, vagy két szomszédos értéket átlagolunk.

A fontosabb kvantilisek a következők:

– medián – felező, jele $Me = q_1^{(2)}$;

– tercilis – harmadoló, $T_j = q_j^{(3)}, j = 1, 2$;

– kvartilis – negyedelő, $Q_j = q_j^{(4)}, j = 1, 2, 3$;

– kvintilis – ötödölő;

– decilis – tizedelő, $D_j = q_j^{(10)}, j = 1, 2, ..., 9$;

– percentilis – századoló, $P_j = q_j^{(100)}, j = 1, 2, ..., 99$.

A kvantilisek tehát az adatok méréstartománybeli elhelyezkedését jellemzik, segítségükkel megadható, hogy az adatoknak az osztópont vagy osztópontok által meghatározott százaléka milyen tartományba esik. Ezt a tulajdonságukat például adatok ábrázolásánál, megjelenítésénél használhatjuk fel. Az osztópontok megadásával a mérési adathalmazt közel egyforma számú adatot tartalmazó részekre oszthatjuk fel, illetve, mint a továbbiakban a box-plot ábrázolás kapcsán látni fogjuk, az adatok térbeli elhelyezkedését is jellemezhetjük segítségükkel.

3.1.3. Szóródás

Míg a különböző típusú középértékek egy jellemző értékkel helyettesítik az adathalmazt, addig a *szóródás* a mérési adatok különbözőségét, mérési tartományon belüli elhelyezkedését jellemzi.

A szóródás jellemzésére használt legfontosabb mérőszámok:

– szóródás terjedelme,

– interkvartilis terjedelem,

– átlagos abszolút eltérés,

– szórás.

A felsorolt mérőszámokkal szemben általános elvárás, hogy teljes homogén adatsor esetén, tehát, ha minden mérési adat megegyezik, az értékük nulla legyen, viszont, ha az adatokban van ingadozás, akkor azt kimutassák. Fontos az is, hogy a megadott mérőszám a szóródás szempontjából értelmezhető legyen, és előny a könnyű meghatározhatóság.

A szóródás terjedelme és az interkvartilis terjedelem

A mérési adatok tartománybeli elhelyezkedésének legegyszerűbb jellemzésére a *szóródás terjedelme*, vagyis a legnagyobb és a legkisebb mért érték közötti különbség szolgál: $T = x_{max} - x_{min}$. A terjedelem könnyen számítható, jól értelmezhető, de érzékeny a kiugró mérési adatokra.

Ezt az érzékenységet küszöböli ki az *interkvartilis terjedelem.* Egy mérési adathalmaz interkvartilis terjedelme az alsó és a felső, vagy másképpen az első és a harmadik kvartilis közti különbség: $TQ = Q_3 - Q_1$. Az interkvartilis terjedelem által meghatározott tartományban helyezkedik el a mérési adatok fele, illetve alatta és felette a további egy-egy negyede.

Átlagos abszolút eltérés

Az *átlagos abszolút eltérés* esetében a mérőszám bevezetésének célja az adatoknak egy adott középértéktől való eltérésének bemutatása. Az átlagos abszolút eltérés az eltérések abszolút értékét összegzi és átlagolja. Ha a számtani átlaghoz viszonyítjuk az eltéréseket, akkor az átlagos abszolút eltérés:

$$\delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}| \ .$$

Belátható, hogy az átlagos abszolút eltérés értéke akkor lesz minimális, ha a számtani átlag helyett a mediánhoz viszonyítjuk az eltéréseket:

$$\delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - c| \quad , \quad \text{ha} \quad c = Me \ .$$

Szórás

A szórás a legáltalánosabban használt mérőszáma a szóródásnak. Származtatása a másodrendű centrális momentum alapján történik, annak négyzetgyöke lesz, tehát a szórás az átlagtól való eltérések négyzetösszege átlagának négyzetgyöke. A gyakorlatban, a meghatározás alapján megkülönböztetünk elméleti szórást, illetve korrigálatlan és korrigált tapasztalati szórást.

Elméleti szórás. Elméleti szórás alatt véletlen mennyiségnek a várható érték körüli ingadozását értjük. Az elméleti szórást az alábbi képlet segítségével határozhatjuk meg:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}} \ ,$$

ahol μ a meghatározandó mérési adat várható értéke, n a mérések száma. Az elméleti szórás meghatározásához tehát pontosan ismerni kell a meghatározandó mérési adatot, ami csak speciális esetben teljesül. Ez a helyzet például etalon mennyiség mérésekor, vagyis, ha a műszert kalibráljuk, vagy ha éppen az összeállított mérőrendszer szórását akarjuk meghatározni. További feltétel, hogy az elméleti szórás meghatározásához igen nagy számú párhuzamos mérés szükséges, ami a gyakorlatban legalább harminc párhuzamos mérés elvégzését jelenti. Az elméleti szórás négyzetét szokás varianciának is nevezni.

Az elméleti szórás meghatározásánál a számlálóban szereplő kifejezés több származtatott mutatóban is szerepel, ezért szokás rá külön, mint eltérés négyzetösszegre hivatkozni:

$$SS = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \ .$$

Az elméleti szórást tehát elsősorban műszerek vagy mérési eljárások bevizsgálása során lehet meghatározni, tehát olyankor, amikor van lehetőség pontosan ismert mennyiség nagyon sokszori meghatározására párhuzamos mérések keretében. Egy másik alkalmazási lehetőség, ha van egy pontosan ismert paraméterekkel rendelkező mérési eljárásunk, és ennek alkalmazásával vizsgálunk egy nagy elemszámmal rendelkező sokaságot, például egy tömegtermelésben előállított terméket. Ilyenkor az elméleti szórás meghatározásához nagyszámú mintán kell a vizsgálatot elvégezni.

Tapasztalati szórás. A gyakorlatban, ha nem ismerjük a meghatározandó adat tényleges értékét, akkor a mérési eljárásban az elméleti szórás helyett a tapasztalati szórást tudjuk meghatározni. A tapasztalati szórás meghatározásánál a keresett mérési adat elméleti értéke helyett a mérési adatok átlagához viszonyítjuk az eltéréseket. Ugyancsak a tapasztalati szórás képletét alkalmazzuk, ha csak kisszámú minta alapján akarjuk jellemezni a vizsgált érték szóródását. Belátható, hogy a tapasztalati szórás az elméleti szórás minták alapján végzett becslését szolgáltatja.

A tapasztalati szórás meghatározására a szakirodalomban kétféle módszer ismert. Az ún. *korrigálatlan tapasztalati szórás*t a következő módon határozhatjuk meg:

$$s^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}} \ .$$

A korrigált tapasztalati szórás számítási képlete pedig a következő:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \ .$$

Mint látható, mindkét esetben az elméleti szórással szemben az eltéréseket a mérések átlagához viszonyítjuk, de a korrigálatlan szórásnál a mérések számával, míg a korrigáltnál a mérések számának eggyel csökkentett értékével osztunk. Abban az esetben, ha a mérések száma viszonylag kevés, például három-négy, akkor az elméleti szórás alulbecslésének elkerülése érdekében érdemes a korrigált tapasztalati szórást alkalmazni. Ha a párhuzamos mérések száma nagy, és a meghatározandó érték nem ismert, akkor alkalmazhatjuk a korrigálatlan tapasztalati szórást. Megjegyezzük, hogy közgazdasági elemzéseknél általában éppen emiatt a korrigálatlan tapasztalati szórást határozzák meg, a műszaki gyakorlatban viszont általában a korrigált tapasztalati szórást alkalmazzuk. A jegyzet további részében, ha csak külön nem jelezzük, akkor szórás alatt mindig a korrigált tapasztalati szórást értjük.

Az elméleti szóráshoz hasonló módon, a tapasztalati szórás képletének számlálóját is szokás külön meghatározni, és belátható, hogy a kifejezés átalakítható a következő módon:

$$SS = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - n\overline{x}^2 \ .$$

Az átalakítás következtében a korrigált tapasztalati szórás a következő képletekkel is meghatározható:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - n\overline{x}^2}{n-1}} \ .$$

Nyilvánvaló, ha valamennyi adat megegyezik egymással és így következésképpen az átlaggal is, akkor a tapasztalati szórás értéke nulla lesz.

A számtani átlaghoz hasonlóan a szórás, illetve az eltérés négyzetösszeg esetében is megvizsgálhatjuk, hogy a lineáris transzformációnak milyen hatása van az értékükre. Legyenek a lineáris transzformáció paraméterei a és b, a transzformált változó pedig $\widetilde{x}_i$. Ekkor a transzformált változó:

$$\widetilde{x}_i = a + bx_i \ .$$

Az eltérés négyzetösszeg transzformációja:

$$SS_{\widetilde{x}} = \sum_{i=1}^{n}(a + bx_i - (a + b\overline{x}))^2 = \sum_{i=1}^{n} b(x_i - \overline{x})^2 = bSS_x \ .$$

A transzformált korrigált tapasztalati szórás:

$$\sigma_{a+bx} = |b|\sigma_x \ .$$

Szórás jellemzése további mérőszámokkal. A tapasztalati szórás értékének felhasználásával további mérőszámokkal jellemezhetjük a mérési folyamatot.

Relatív szórás. A relatív szórás az alábbi képlet segítségével határozható meg:

$$s_{rel} = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \ [\%] \ .$$

A relatív szórás segítségével tehát megadhatjuk, hogy egy mérőműszer mérési tartományának különböző pontjaiban milyen arányban változik meg a szórása a mérési eredmények átlagához viszonyítva.

Átlagérték szórása. Az átlagérték szórásának meghatározásával az elvégzett párhuzamos mérések száma alapján vizsgáljuk a mérési folyamatot:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \ .$$

Meghatározása a párhuzamos mérések számának becslését teszi lehetővé.

Átlagérték relatív szórása. E mérőszám meghatározásánál mind az átlagérték méréstartományon belüli elhelyezkedésének, mind a párhuzamos mérések számának hatását figyelembe vesszük:

$$s_{\bar{x},rel} = \frac{s}{\bar{x}\sqrt{n}} \cdot 100 \ .$$

3.1.4. Adatok megjelenítése

Adatbázisok, adattáblák

A mérési adatokat, a feldolgozásukhoz, értelmezésükhez érdemes különböző módon tárolni, megjeleníteni. Az alkalmazandó módszer kiválasztásánál az egyik legfontosabb szempont a mérési adatok száma. Néhány adat esetén természetesen bármilyen egyszerű módon megjeleníthetjük az adatainkat, de ha egy hosszabb mérési periódus eredményeként esetleg több ezer adatot kell tárolni, akkor érdemes azokat a feldolgozás szempontjainak megfelelően csoportosítani.

A megjelenítés során alkalmazhatunk idősoros és keresztmetszeti táblázatokat, illetve ezek kombinációit. Az idősoros táblázatokban az adatokat a mérés időpontjának megfelelően soroljuk fel, tehát a felsorolás sorrendje ennek megfelelően kötött. Mérési adatok esetében általában ezt a leírási módszert alkalmazzuk.

Ha a mérési adatokat például a mérés helye szerint csoportosítjuk, akkor keresztmetszeti táblázatokat kapunk. Az ilyen táblázatokban a csoportok felsorolása (elvileg) tetszőleges, történhet akár a mérőhely sorszáma alapján, akár más, pl. topológiai szempontoknak megfelelően.

Alkalmazhatjuk a két csoportosítási mód kombinálását is, ekkor például "térben" és időben rendszerezve soroljuk fel az adatainkat.

Különösen nagy tömegű adat esetében érdemes azokat a kiértékelés jellegének megfelelően rendszerezni. Erre két statisztikai alapművelet szolgál, a csoportosítás és az összehasonlítás.

Ha különböző mérőhelyekről, műszerektől vagy mérési ciklusokból származnak az adataink, akkor érdemes azokat csoportosítani. A *csoportosítás* lényege, hogy a mérési adatokat különböző szempontok szerint osztályokba soroljuk. Fontos, hogy ezeket a szempontokat úgy válasszuk meg, hogy azok a mérés kiértékelése szempontjából lényegesek legyenek. Arra is figyeljünk, hogy a kiválasztott szempontok alapján az adatok egyértelműen besorolhatók legyenek. Mérési adatoknál is előfordulhat, hogy több szempont szerint végezzük el az adatok csoportosítását. Ezt kombinatív csoportosításnak is szokás nevezni. A szempontok száma azonban ne legyen túl sok, mert ekkor romlik az adatok áttekinthetősége.

Az *összehasonlítás* esetében valamilyen szempont szerint összetartozó adatokat rendelünk egymás mellé, hogy azonosságuk vagy különbözőségük kimutatható legyen. Összehasonlítás történhet azonos időpontban különböző helyeken mért értékek között, de lehet azonos helyen különböző időpontokban mért értékeket is összevetni. Ebben az esetben arra kell figyelni, hogy az összehasonlíthatóság értelmezhető legyen, tehát például azonos jellegű mennyiségekre végezzük el, vagy a megfigyelés körülményei azonosak legyenek, és például egy jól meghatározott módosítás hatását vizsgáljuk. Az összehasonlítás történhet

- hányadosképzéssel, mely elsősorban időbeli adatok esetében alkalmazott relatív mutatót ad;

- különbségképzéssel, mely keresztmetszeti adatoknál használt abszolút mutatót generál.

Adatok ábrázolása

A mérési adatokat tipikusan az idő függvényében szokás ábrázolni. Minden mérési adat külön pontként való megjelenítése csak kisszámú adat esetében jelenthet megoldást. Nagyszámú adat esetében a legegyszerűbb megoldás, ha az adatokat adott időtartamokra átlagoljuk, és az így kapott értékeket ábrázoljuk. Az átlagoláshoz használt időtartam megválasztásánál nagyjából a mintavételezéshez hasonlóan kell eljárni. Ha jól választjuk meg ezt az időtartamot, akkor az információ sűrítése mellett az adatoknak egyfajta elsődleges simítását is elvégezzük, hiszen a számtani átlag tompítja a kiugró értékek hatását.

Gyakorisági sorok. Ha a mérési adatainkat nem az időbeliségük, hanem az értékük szerint csoportosítjuk, akkor az adatok számának függvényében kétféle módon járhatunk el. Kisszámú adat esetében egyszerűen meghatározzuk az azonos értékű adatok számát. Ezt a fajta besorolást nehezítheti, hogy a nagy felbontású műszerekről kapott értékek a zaj következtében az utolsó kijelzett értékben mutatnak különbözőséget. Az így kapott adatsort *egyszerű gyakorisági sor*nak nevezzük.

Ha az adatok száma nagy, és az elvégzendő összehasonlítás megengedi, akkor érdemes az adatokat osztályokba besorolni, majd az osztályok elemszámát ábrázolni. Ennek eredményeként az ún. *osztályközös gyakorisági sor*okat, vagy *relatív gyakorisági sor*okat kapunk, melyeket hisztogramnak is szokás nevezni. A relatív gyakorisági sorok elkészítésének általános szabályai a következők:

- Az osztályok számát a következő szempontok alapján választjuk meg:
  - Általában az osztályok száma 5 és 20 között legyen, az adatok számának és "egyformaságának" függvényében.
  - Az osztályok számát szokás a következő módon is meghatározni:
    $k = 1 + 3,3 \cdot \lg n$, ahol n az adatok száma.
  - Ha túl kevés az osztályok száma, akkor összemoshatjuk a jellegzetességeket.
  - Ha túl sok osztályt választunk, akkor romlik az áttekinthetőség, és megjelenhetnek üres osztályok, amik az értelmezhetőséget nehezítik.
- Az osztályok szélességének megválasztása:
  - Az osztályok szélességét a legnagyobb és a legkisebb adat közti különbség és az osztályok száma hányadosának kerekítésével határozhatjuk meg.
  - Általában célszerű egyforma szélességű osztályokat alkalmazni. Az eltérő szélességek megnehezítik az összehasonlítást.
  - Annak érdekében, hogy egy-két kiugró adat miatt ne kelljen feleslegesen sok, és sokszor üres osztályt létrehozni, lehetőség van a legalsó és a legfelső osztályok esetében ún. nyitott osztályok megadására. Ekkor a legalsó osztálynak az alsó, a legfelső osztálynak a felső határát nem adjuk meg, hanem a kiugró értékeket ezekben gyűjtjük.
  - Érdemes az osztályok szélességét kellő alapossággal megválasztani, mivel a rosszul megválasztott szélesség komoly torzítást okozhat.
- Határok rögzítése:
  - Ha nem alkalmazunk nyitott osztályt, akkor a legkisebb mérési eredmény alapján meghatározzuk a legalsó osztály alsó határát.

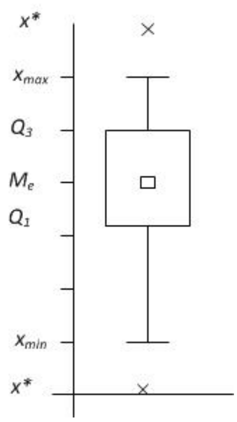
– A többi határt ennek, valamint az osztályszélességnek a figyelembevételével határozzuk meg.
– Az egyértelmű besorolás érdekében a határokat úgy kell megválasztani, hogy a határra ne eshessen adat. Ezt az eredmények megjelenési formája alapján legkönnyebben úgy érhetjük el, hogy a határok egy tizedessel nagyobb felbontásúak legyenek, mint a mérési adatok.
– Az osztályok alsó és felső határértékének átlagolásával meghatározhatjuk az osztályközép értékét.

A mérési adatoknak a megadott szabályok figyelembevételével elvégzett csoportosítása után a kapott értékeket általában oszlopdiagram formájában szokás megadni.

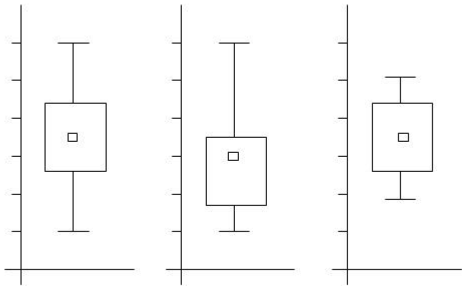
Box-plot ábra. Az adatok térbeli elhelyezkedésének összefoglaló ábrázolását megadhatjuk az ún. box-plot grafikon segítségével is. A box-plot grafikon esetében a következő értékeket vesszük fel:

– az esetleges alsó kiugró érték, x^*
– a legkisebb (nem kiugró) érték, x_{min}
– az alsó kvartilis, Q_1
– a medián, M_e
– a felső kvartilis, Q_3
– a legnagyobb (nem kiugró) érték, x_{max}
– az esetleges felső kiugró érték, x^*

A felsorolt adatokat a következő formátumú ábra segítségével jelenítjük meg:



A felsorolt határpontok definícióinak megfelelően a négyzettel jelölt rész tartalmazza az adatok felét, míg attól felfelé és lefelé az adatok 25 – 25%-a helyezkedik el. Ha az adatok eloszlása szimmetrikus, akkor ez a két rész közelítőleg egyforma. Ha valamelyik irányba hosszabb ez a 25%-os tartomány, akkor ennek megfelelően az adatsor is abba az irányban nyúlik el jobban. Ha az adatok szórása nagy, akkor ezek a tartományok is nagyok lesznek. A következő ábrán látható néhány tipikus eset:



3.2. Kidolgozott feladatok

3.2.1. Elemi műveletek

1. Legyen adott az alábbi mérési adatsor:

   1,41 g 1,39 g 1,40 g 1,42 g 1,40 g 1,39 g 1,43 g 1,42 g
   1,40 g 1,44 g 1,42 g

   Végezze el a számlálás, összegzés és rangsorolás műveletét! A rangsorolásnál alkalmazza mind a kapcsolt rang, mind az átlagrang módszert, és hasonlítsa össze a rangösszegeket!

   Megoldás menete:

   A *számlálás* eredménye az adatok száma, azaz $n = 11$.

   Az *összegzés* eredménye az adatok összege: $\sum x_i = 15,52$ g.

   A rangszámok kiosztásához első lépésként az adatokat nagyság szerint sorba rendezzük. (Ez a lépés természetesen nem kötelező, csak segíti a művelet elvégzését, különösen akkor, ha több azonos érték is szerepel az adatok között.) A *kapcsolt rang* módszer esetében az azonos értékek a soron következő legkisebb rangszámot kapják, majd az egyforma adatok számának megfelelően kihagyunk rangszámokat, és úgy folytatjuk a rangsorolást. Az *átlag rang* alkalmazása esetén az egyforma értékek a hozzájuk tartozó rangszámok átlagértékét kapják.

sorszám i	eredeti adatsor x_i [g]	rendezett adatsor $x_{(i)}$ [g]	kapcsolt rang R_{ki}	átlagrang R_i
1	1,41	1,39	1	1,5
2	1,39	1,39	1	1,5
3	1,40	1,40	3	4
4	1,42	1,40	3	4
5	1,40	1,40	3	4
6	1,39	1,41	6	6
7	1,43	1,42	7	8
8	1,42	1,42	7	8
9	1,40	1,42	7	8
10	1,44	1,43	10	10
11	1,42	1,44	11	11

Az eredeti és a sorba rendezett adatok jelölésére bevezetett megoldást alkalmazva látható, hogy az első adat a sorba rendezés után a hatodik lett, azaz

$$x_1 = x_{(6)} = 1,41 \text{ g.}$$

A harmadik adat viszont "maradt a helyén":

$$x_3 = x_{(3)} = 1,40 \text{ g.}$$

Kapcsolt rang esetén a rangszámok összege 59, míg az átlagrang alkalmazása esetén 66.

Ahogy említettük, nem feltétlenül kell a sorba rendezést elvégezni, ebben az esetben a következő táblázatot kapjuk:

adatok x_i [g]	kapcsolt rang R_{ki}	átlagrang R_i
1,41	6	6
1,39	1	1,5
1,40	3	4
1,42	7	8
1,40	3	4
1,39	1	1,5
1,43	10	10
1,42	7	8
1,40	3	4
1,44	11	11
1,42	7	8

2. Legyen adott az alábbi hőmérsékletmérési adatsor:

26,5 °C	26,4 °C	26,7 °C	26,5 °C	26,4 °C	26,8 °C	26,5 °C	26,2 °C
26,6 °C	26,5 °C	26,4 °C	26,1 °C				

Végezze el a számlálás, összegzés és rangsorolás műveletét! A rangsorolásnál alkalmazza mind a kapcsolt rang, mind az átlagrang módszert, és hasonlítsa össze a rangösszegeket!

Megoldás menete:

A *számlálás* eredménye az adatok száma, azaz $n = 12$.

Az *összegzés* eredménye az adatok összege: $\sum x_i = 317,6$ °C.

A rangszámok kiosztásához első lépésként itt is az adatokat nagyság szerint sorba rendezzük, majd a *kapcsolt rang* módszer esetében az azonos értékek a soron következő legkisebb rangszámot kapják, az *átlagrang* alkalmazása esetén az egyforma értékek a hozzájuk tartozó rangszámok átlagértékét kapják.

sorszám i	eredeti adatsor x_i[°C]	rendezett adatsor $x_{(i)}$[°C]	kapcsolt rang R_{ki}	átlagrang R_i
1	26,5	26,1	1	1
2	26,4	26,2	2	2
3	26,7	26,4	3	4
4	26,5	26,4	3	4
5	26,4	26,4	3	4
6	26,8	26,5	6	7,5
7	26,5	26,5	6	7,5
8	26,2	26,5	6	7,5
9	26,6	26,5	6	7,5
10	26,5	26,6	10	10
11	26,4	26,7	11	11
12	26,1	26,8	12	12

Kapcsolt rang esetén a rangszámok összege 69, míg az átlagrang alkalmazása esetén 78.

3.2.2. Középértékek

1. Legyen adott az alábbi tömegmérési adatsor:

   1,41 g 1,39 g 1,40 g 1,42 g 1,44 g 1,43 g 1,46 g 1,47 g
   1,45 g 1,48 g 1,50 g

   (a) Határozza meg az adatsor számított átlag típusú átlagértékeit!

   (b) Számítsa ki a súlyozott átlag értékét úgy, hogy a súlytényezők az átlagtól való eltérés abszolút értékei legyenek!

   (c) Határozza meg a rekurzív vagy futóátlag értékeit az első öt mérési adatra!

   (d) Határozza meg a mozgóátlag első öt értelmezhető értékét az ablakos módszer segítségével, ha az ablak szélessége $N = 3$.

   Megoldás menete:

   (a) A számított átlagok közül először az egyszerű számtani átlag, a mértani (geometrikus) átlag, a négyzetes átlag és a harmonikus átlag értékét határozzuk meg.
   Az *egyszerű számtani átlag*ot a jól ismert képlet segítségével határozhatjuk meg:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,4409 \text{ g} .$$

   A *harmonikus átlag*ot mérési adatok reciprokainak összegével határozhatjuk meg:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum 1/x_i} = 1,4401 \text{ g} .$$

   A *mértani (geometriai) átlag* esetében a mérési adatokat összeszorozzuk, majd n-dik gyököt vonunk:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = 1,4405 \text{ g} .$$

A *négyzetes (kvadratikus) átlag* pedig az átlagolandó számértékek négyzetösszegének átlagán alapul:

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} = 1,4413 \text{ g} .$$

A n érték az adatok számára utal ($n = 11$).

(Megjegyzés: az eredeti adatoknak megfelelően, valamennyi átlagot két tizedes jegyre kell megadni, azonban ennél a példánál nem látszanának a különböző átlagértékek közti különbségek.)

(b) A súlyozott átlag meghatározásához először számítsuk ki a súlytényezőket és normáljuk őket a feladatban megadottaknak megfelelően:

$$\begin{aligned} w_i &= |x_i - \bar{x}| , \\ w_i' &= \frac{w_i}{\sum w_i} . \end{aligned}$$

adatok x_i [g]	átlagtól való eltérés súlytényezők w_i	normált súlytényezők w_i'
1,41	0,03	0,099
1,39	0,05	0,164
1,40	0,04	0,132
1,42	0,02	0,067
1,44	0,00	0,003
1,43	0,01	0,035
1,46	0,02	0,061
1,47	0,03	0,094
1,45	0,01	0,029
1,48	0,04	0,126
1,50	0,06	0,190

Látható, hogy a normált súlytényezők összege 1:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i' = 1 .$$

A súlyozott átlag értéke:

$$\bar{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} w_i' \cdot x_i = 1,4426 \text{ g} .$$

Megjegyezzük, hogy a súlytényezők ilyen módon való megválasztása az átlagértéktől messzebb eső adatok hatását növeli, azaz az esetleges kiugró adatok erősen befolyásolják a súlyozott átlag értékét.

(c) A rekurzív vagy futóátlag esetében valamennyi adat egyforma súllyal szerepel az átlagban, így a kapott átlagérték valamennyi adat figyelembe vétele esetén megegyezik az egyszerű átlag értékével. Az egyes mérési eredmények beérkezése után az átlagértéket a következő képlet segítségével határozzuk meg:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_r(0) &= 0 \\
\bar{x}_r(k) &= \bar{x}_r(k-1) + \frac{1}{k}(x_k - \bar{x}_r(k-1)) = \frac{k-1}{k}\bar{x}_r(k-1) + \frac{1}{k}x_k \ .
\end{aligned}
$$

Behelyettesítve a megfelelő értékeket:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_r(0) &= 0 \\
\bar{x}_r(1) &= \bar{x}_r(0) + \frac{1}{1}(x_1 - \bar{x}_r(0)) = \frac{1-1}{1}\bar{x}_r(0) + \frac{1}{1}x_1 = \frac{1-1}{1}\cdot 0 + \frac{1}{1}\cdot 1,41 = 1,41 \text{ g} \\
\bar{x}_r(2) &= \bar{x}_r(1) + \frac{1}{2}(x_2 - \bar{x}_r(1)) = \frac{2-1}{2}\bar{x}_r(1) + \frac{1}{2}x_2 = \frac{2-1}{2}\cdot 1,41 + \frac{1}{2}\cdot 1,39 = 1,40 \text{ g} \\
\bar{x}_r(3) &= \bar{x}_r(2) + \frac{1}{3}(x_3 - \bar{x}_r(2)) = \frac{3-1}{3}\bar{x}_r(2) + \frac{1}{3}x_3 = \frac{3-1}{3}\cdot 1,4 + \frac{1}{3}\cdot 1,40 = 1,40 \text{ g} \\
\bar{x}_r(4) &= \bar{x}_r(3) + \frac{1}{4}(x_4 - \bar{x}_r(3)) = \frac{4-1}{4}\bar{x}_r(3) + \frac{1}{4}x_4 = \frac{4-1}{4}\cdot 1,4 + \frac{1}{4}\cdot 1,42 = 1,41 \text{ g} \\
\bar{x}_r(5) &= \bar{x}_r(4) + \frac{1}{5}(x_5 - \bar{x}_r(4)) = \frac{5-1}{5}\bar{x}_r(4) + \frac{1}{5}x_5 = \frac{5-1}{5}\cdot 1,405 + \frac{1}{5}\cdot 1,44 = 1,412 \text{ g}
\end{aligned}
$$

(d) A mozgóátlag esetében az átlagolásnál csak az ablakba eső adatokat vesszük figyelembe, a következő képletnek megfelelően:

$$
\bar{x}_m(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=k-N+1}^{k} x_i \ .
$$

Miután az ablak a megadott szélességnek megfelelően 3 adatot tartalmaz, így az első két számítás eredménye rossz értéket ad, így azokat el is vethetjük:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_m(1) &= \frac{1}{3}\sum_{i=1-3+1=-1}^{1} x_i = \frac{1,41}{3} = 0,47 \text{ g} \\
\bar{x}_m(2) &= \frac{1}{3}\sum_{i=2-3+1=0}^{2} x_i = \frac{1,41+1,39}{3} = 0,93 \text{ g} \ .
\end{aligned}
$$

Ebben a példában tehát a harmadik mérési adat beérkezésétől kezdve kapunk használható eredményeket:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_m(3) &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i = \frac{1,41+1,39+1,40}{3} = 1,40 \text{ g} \\
\bar{x}_m(4) &= \frac{1}{3}\sum_{i=2}^{4} x_i = \frac{1,39+1,40+1,42}{3} = 1,403 \text{ g} \\
\bar{x}_m(5) &= \frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5} x_i = \frac{1,40+1,42+1,44}{3} = 1,42 \text{ g} \\
\bar{x}_m(6) &= \frac{1}{3}\sum_{i=4}^{6} x_i = \frac{1,42+1,44+1,43}{3} = 1,43 \text{ g} \\
\bar{x}_m(7) &= \frac{1}{3}\sum_{i=5}^{7} x_i = \frac{1,44+1,43+1,46}{3} = 1,453 \text{ g} \ .
\end{aligned}
$$

Természetesen más N értéknél, azaz más ablakszélességnél az eredmény is más lesz. Vigyázzunk arra, hogy ha az adatfeldolgozás során, például a rangszámok kiosztásánál nagyság szerint sorba rendeztük az adatainkat, akkor mind a rekurzív, mind a mozgóátlag számításánál a rendezés előtti, eredeti adatsort használjuk!

2. Legyen adott az alábbi hőmérsékletmérési adatsor:

26,5 °C 26,4 °C 26,7 °C 26,5 °C 26,4 °C 26,8 °C 26,5 °C 26,2 °C
26,6 °C 26,5 °C 26,4 °C 26,1 °C 26,6 °C 26,2 °C

(a) Határozza meg a medián értékét!

(b) Határozza meg a módusz értékét!

(c) Határozza meg a tercilisek és a kvartilisek értékeit!

Megoldás menete:

Mindhárom feladat megoldásához első lépésként rendezzük nagyság szerint sorba az adatokat!

sorszám i	eredeti adatsor x_i [°C]	rendezett adatsor $x_{(i)}$ [°C]
1	26,5	26,1
2	26,4	26,2
3	26,7	26,2
4	26,5	26,4
5	26,4	26,4
6	26,8	26,4
7	26,5	26,5
8	26,2	26,5
9	26,6	26,5
10	26,5	26,5
11	26,4	26,6
12	26,1	26,6
13	26,6	26,7
14	26,2	26,8

(a) A medián a nagyság szerint rendezett adatsor középső eleme, amelynél egyforma valószínűséggel találunk kisebb és nagyobb értéket az adatsorban. Miután itt páros számú adat van, így a medián a két középső elem átlaga lesz:

$$M_e = \frac{x_{(7)} + x_{(8)}}{2} = \frac{26,5 + 26,5}{2} = 26,5\ °\mathrm{C}\ .$$

(b) A módusz az adatsor leggyakoribb eleme, azaz az az érték, mely a legtöbbször fordul elő az adatok között. Ennél a példánál a módusz $M_o = 26,5$ °C.

(c) A tercilisek a harmadolók, vagyis azok az értékek, melyek három olyan tartományra osztják a rendezett adatsort, melyekben közel egyforma számú adat szerepel. Két tercilist kell meghatározni a következő képletek segítségével:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{3} &= \frac{14+1}{3} = 5 \quad \rightarrow \quad T_1 = x_{(5)} = 26,4\ ^\circ\mathrm{C} \\ \frac{2(n+1)}{3} &= \frac{2(14+1)}{3} = 10 \quad \rightarrow \quad T_2 = x_{(10)} = 26,5\ ^\circ\mathrm{C}. \end{aligned}$$

A három kvartilis négy tartományra osztja a rendezett adatsort. Az első kvartilisnél az adatok 25%-a kisebb, a másodiknál az 50%-a, míg a harmadiknál a 75%-a. A példában szereplő adatsor kvartilisei a következők:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{4} &= \frac{14+1}{4} = 3,75 \approx 4 \quad \rightarrow \quad Q_1 = x_{(4)} = 26,4\ ^\circ\mathrm{C} \\ \frac{2(n+1)}{4} &= \frac{2(14+1)}{4} = 7,5 \quad \rightarrow \quad Q_2 = Me = \frac{x_{(7)} + x_{(8)}}{2} = 26,5\ ^\circ\mathrm{C} \\ \frac{3(n+1)}{4} &= \frac{3(14+1)}{4} = 11,25 \approx 11 \quad \rightarrow \quad Q_3 = x_{(11)} = 26,6\ ^\circ\mathrm{C}\ . \end{aligned}$$

Mint látható, ha nem egész érték jön ki az osztópont értékének meghatározásánál, akkor vagy kerekítünk, vagy ha pontosan 5 tizedet kapunk, akkor a két érték átlagát vesszük. A kapott kvantilisek bemutatása az adatsorral:

26,1	26,2	26,2	26,4	26,4	26,4	26,5	26,5	26,5	26,5	26,6	26,6	26,7	26,8
			Q_1	T_1		$M_e = Q_2$			T_2	Q_3			

Mint látható, a viszonylag kevés adat miatt a kvantilisek által meghatározott felosztás nem teljesen egyforma.

3. Legyen adott az alábbi hosszúságmérési adatsor:

19 m 26 m 23 m 26 m 30 m 29 m 33 m 29 m 35 m 37 m 34 m

(a) Határozza meg a rekurzív átlag (futóátlag) értékeit!

(b) Határozza meg a mozgóátlag értelmezhető értékeit az ablakos módszer segítségével, ha az ablak szélessége $N = 3$!

(c) Határozza meg a mozgóátlag értelmezhető értékeit az ablakos módszer segítségével, ha az ablak szélessége $N = 5$!

(d) Hasonlítsa össze a kapott átlagértékeket az eredeti adatok alakulásával!

Megoldás menete:

(a) A rekurzív átlag képlete:

$$\begin{aligned} \bar{x}_r(0) &= 0 \\ \bar{x}_r(k) &= \bar{x}_r(k-1) + \frac{1}{k}(x_k - \bar{x}_r(k-1)) = \frac{k-1}{k}\bar{x}_r(k-1) + \frac{1}{k}x_k\ , \end{aligned}$$

Behelyettesítve a megfelelő értékeket:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_r(0) &= 0 \\
\bar{x}_r(1) &= \frac{1-1}{1}\cdot 0+\frac{1}{1}\cdot 19 = 19,0 \text{ m} \\
\bar{x}_r(2) &= \frac{2-1}{2}\cdot 19+\frac{1}{2}\cdot 26 = 22,5 \text{ m} \\
\bar{x}_r(3) &= \frac{3-1}{3}\cdot 22,5+\frac{1}{3}\cdot 23 = 22,7 \text{ m} \\
\bar{x}_r(4) &= \frac{4-1}{4}\cdot 22,67+\frac{1}{4}\cdot 26 = 23,5 \text{ m} \\
\bar{x}_r(5) &= \frac{5-1}{5}\cdot 23,5+\frac{1}{5}\cdot 30 = 24,8 \text{ m} \\
\bar{x}_r(6) &= \frac{6-1}{6}\cdot 24,8+\frac{1}{6}\cdot 29 = 25,5 \text{ m} \\
\bar{x}_r(7) &= \frac{7-1}{7}\cdot 25,5+\frac{1}{7}\cdot 33 = 26,6 \text{ m} \\
\bar{x}_r(8) &= \frac{8-1}{8}\cdot 26,57+\frac{1}{8}\cdot 29 = 26,9 \text{ m} \\
\bar{x}_r(9) &= \frac{9-1}{9}\cdot 26,87+\frac{1}{9}\cdot 35 = 27,8 \text{ m} \\
\bar{x}_r(10) &= \frac{10-1}{10}\cdot 27,78+\frac{1}{10}\cdot 37 = 28,7 \text{ m} \\
\bar{x}_r(11) &= \frac{11-1}{11}\cdot 28,7+\frac{1}{11}\cdot 34 = 29,2 \text{ m} .
\end{aligned}$$

Az utolsó lépésben kapott eredmény természetesen megegyezik az adatsorra kiszámolt egyszerű átlag értékével:

$$\bar{x} = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_i = 29,2 \text{ m}$$

(b) A mozgóátlag képlete:

$$\bar{x}_m(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=k-N+1}^{k} x_i \ .$$

Az első esetben az ablak szélessége $N = 3$, így a mozgóátlag számolását csak a harmadik mérési adat beérkezése után kezdjük:

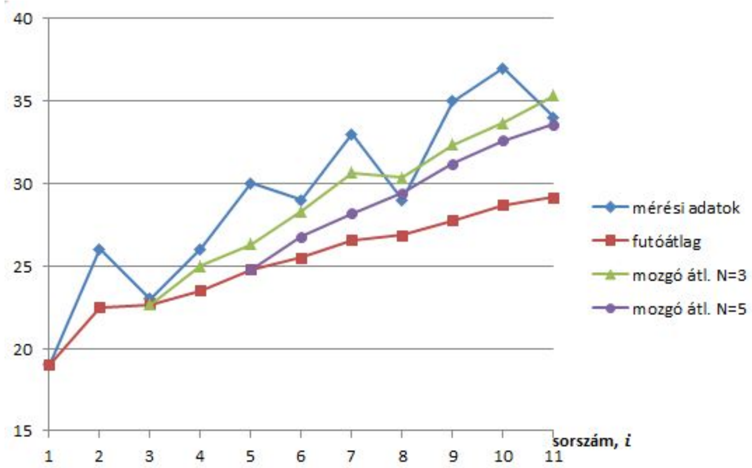
$$\begin{aligned}
\bar{x}_m(3) &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i = \frac{19+26+23}{3} = 22,7 \text{ m} \\
\bar{x}_m(4) &= \frac{1}{3}\sum_{i=2}^{4} x_i = \frac{26+23+26}{3} = 25,0 \text{ m} \\
\bar{x}_m(5) &= \frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5} x_i = \frac{23+26+30}{3} = 26,3 \text{ m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{x}_m(6) &= \frac{1}{3}\sum_{i=4}^{6} x_i = \frac{26+30+29}{3} = 28,3 \text{ m} \\
\bar{x}_m(7) &= \frac{1}{3}\sum_{i=5}^{7} x_i = \frac{30+29+33}{3} = 30,7 \text{ m} \\
\bar{x}_m(8) &= \frac{1}{3}\sum_{i=6}^{8} x_i = \frac{29+33+29}{3} = 30,3 \text{ m} \\
\bar{x}_m(9) &= \frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9} x_i = \frac{33+29+35}{3} = 32,3 \text{ m} \\
\bar{x}_m(10) &= \frac{1}{3}\sum_{i=8}^{10} x_i = \frac{29+35+37}{3} = 33,7 \text{ m} \\
\bar{x}_m(11) &= \frac{1}{3}\sum_{i=9}^{11} x_i = \frac{35+37+34}{3} = 35,3 \text{ m} .
\end{aligned}$$

(c) A második esetben az ablak szélessége $N = 5$, így a mozgóátlagok értékei a következők:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_m(5) &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{19+26+23+26+30}{5} = 24,8 \text{ m} \\
\bar{x}_m(6) &= \frac{1}{5}\sum_{i=2}^{6} x_i = \frac{26+23+26+30+29}{5} = 26,8 \text{ m} \\
\bar{x}_m(7) &= \frac{1}{5}\sum_{i=3}^{7} x_i = \frac{23+26+30+29+33}{5} = 28,2 \text{ m} \\
\bar{x}_m(8) &= \frac{1}{5}\sum_{i=4}^{8} x_i = \frac{26+30+29+33+29}{5} = 29,4 \text{ m} \\
\bar{x}_m(9) &= \frac{1}{5}\sum_{i=5}^{9} x_i = \frac{30+29+33+29+35}{5} = 31,2 \text{ m} \\
\bar{x}_m(10) &= \frac{1}{5}\sum_{i=6}^{10} x_i = \frac{29+33+29+35+37}{5} = 32,6 \text{ m} \\
\bar{x}_m(11) &= \frac{1}{5}\sum_{i=7}^{11} x_i = \frac{33+29+35+37+34}{5} = 33,6 \text{ m} .
\end{aligned}$$

(d) A háromféle számolás eredményét a következő táblázatban foglaljuk össze:



3.1. ábra. A mérési adatok, futóátlag és mozgóátlag értékek összehasonlítása

sorszám i	eredeti adatsor x_i[m]	rekurzív átlag $\bar{x}_r(i)[m]$	mozgóátlag $N=3$ $\bar{x}_m^{N=3}(i)[m]$	mozgóátlag $N=5$ $\bar{x}_m^{N=5}(i)$ [m]
1	19	19,0	-	-
2	26	22,5	-	-
3	23	22,7	22,7	-
4	26	23,5	25,0	-
5	30	24,8	26,3	24,8
6	29	25,5	28,3	26,8
7	33	26,6	30,7	28,2
8	29	26,9	30,3	29,4
9	35	27,8	32,3	31,2
10	37	28,7	33,7	32,6
11	34	29,2	35,3	33,6

Megjegyzés: Bár a mérés méter felbontású, az átlagértékeket tized méter felbontásban adtuk meg az egyes értékek közötti különbségek érzékeltetésre.

A táblázat adatai a 3.1 ábrán is láthatók.

Tételezzük fel, hogy olyan mérési adatokat ábrázoltunk, amelyek értéke az idő előre haladtával emelkedik, de zaj is szuperponálódik rá. A futóátlag értékei kiszűrik a zaj hatását, de az értékek egyre jobban elmaradnak a legfrissebb mérési adatok értékeitől. A mozgóátlag-számítás ezt a problémát korrigálja. Ha az ablakszélesség 3, akkor a követés jó, de a zaj okozta ingadozások láthatók. 5-ös ablakszélességnél a zajok hatása eltűnik, viszont az adatok változásának követése valamivel rosszabb, továbbá az ötödik mérési adat beérkeztéig nincs információnk a mérés menetéről.

3.2.3. Szóródás

1. Legyen adott az alábbi hőmérsékletmérési adatsor:

26,5 °C 26,4 °C 26,7 °C 26,5 °C 26,4 °C 26,8 °C 26,5 °C 26,2 °C
26,6 °C 26,5 °C 26,4 °C 26,1 °C 26,6 °C 26,2 °C .

(a) Határozza meg a terjedelem értékét!
(b) Határozza meg az interkvartilis terjedelem értékét!
(c) Határozza meg az átlagos abszolút eltérés értékét!
(d) Határozza meg a korrigált és a korrigálatlan tapasztalati szórás értékét!
(e) Határozza meg a relatív szórás, a középérték szórása és a középérték relatív szórása értékeket!

Megoldás

(a) A terjedelem a legkisebb és a legnagyobb érték közti különbség:

$$T = x_{max} - x_{min} = 26,8 - 26,1 = 0,7\ ^\circ\text{C}\ .$$

(b) Az interkvartilis terjedelem a harmadik és az első kvartilis értéke közötti különbség. A kvartilisek meghatározását az előző példában tárgyaltuk. Miután ebben a példában szereplő adatsor ugyanaz, mint a *Középértékek* rész 2. kidolgozott példájában szereplő, így:

$$TQ = Q_3 - Q_1 = 26,6 - 26,4 = 0,2\ ^\circ\text{C}\ .$$

Megjegyezzük, hogy a $[Q_1 - Q_3]$ intervallumba esik az adatok 50%-a.

(c) Az átlagos abszolút eltérést a következő képlet segítségével határozhatjuk meg:

$$\delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|\ .$$

Az adatok átlaga $\bar{x} = 26,457$°C, így az átlagos abszolút eltérés:

$$\delta = \frac{|x_1 - 26,457| + |x_2 - 26,457| + \cdots + |x_{14} - 26,457|}{14} = 0,149\ ^\circ\text{C}\ .$$

Mint az az elméleti összefoglalóban szerepelt, az átlagos abszolút eltérés legkisebb értékét akkor kapjuk meg, ha az átlagérték helyett a mediánhoz viszonyítva vesszük az eltérések abszolút értékeinek az átlagát:

$$\begin{aligned} \delta_{M_e} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - M_e| \\ M_e &= 26,5 \\ \delta_{M_e} &= \frac{|x_1 - 26,5| + |x_2 - 26,5| + \cdots + |x_14 - 26,5|}{14} = 0,143\ ^\circ\text{C}\ . \end{aligned}$$

(d) A korrigált tapasztalati szórás (s) képlete:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}\ .$$

Így az adatsor korrigált tapasztalati szórása:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{14}(x_i - 26,457)^2}{14-1}} = 0,195\ ^\circ\text{C}\ .$$

A korrigálatlan szórás (s^*) esetében a számolási képlet

$$s^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} \ ,$$

az értéke pedig:

$$s^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{14}(x_i - 26,457)^2}{14}} = 0,188 \ ^\circ\mathrm{C} \ .$$

Megjegyezzük, hogy a műszaki gyakorlatban általában a korrigált tapasztalati szórást alkalmazzuk. Ha az adatok száma nagy, mint tipikusan sok közgazdasági statisztikai vizsgálat esetében, akkor nem okoz nagy eltérést a korrigálatlan tapasztalati szórás alkalmazása.

(e) A relatív szórás értékét megkaphatjuk, ha a korrigált tapasztalati szórás értékét az egyszerű átlag értékéhez viszonyítjuk, és a kapott eredményt százalékban fejezzük ki:

$$s_{rel} = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{0,195}{26,457} \cdot 100 = 0,74\% \ .$$

A középérték szórása esetében a szórást az adatok számának négyzetgyökéhez viszonyítjuk:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0,195}{\sqrt{14}} = 0,052 \ ^\circ\mathrm{C} \ .$$

A középérték relatív szórása meghatározásánál mind az átlagértéket, mind az adatszám négyzetgyökét figyelembe vesszük:

$$s_{\bar{x}rel} = \frac{s}{\bar{x}\sqrt{n}} \cdot 100 = \frac{0,195}{26,457 \cdot \sqrt{14}} \cdot 100 = 0,20\% \ .$$

2. Egy mérleg 3 pontban történő kalibrálása során a következő adatokat kaptuk:

1. mérési pont:	100,5 g	99,5 g	100,2 g
2. mérési pont:	500,1 g	500,2 g	499,8 g
3. mérési pont:	900,9 g	899,1 g	900,1 g

(a) Határozza meg az egyes mérési pontokban az átlag, a korrigált tapasztalati szórás, a relatív szórás, az átlagérték szórása és a átlagérték relatív szórása értékeket!

(b) Milyen tanulságot tud levonni a kapott értékekből? Mikor érdemes több párhuzamos mérést végezni?

Megoldás

(a) Az 1. mérési ponthoz tartozó értékek:

– átlag: $\bar{x}^1 = \sum_{i=1}^{3} = x_i^1 = 100,07$ g

– korrigált tapasztalati szórás: $s^1 = \sqrt{\frac{\sum(x_i^1 - \bar{x}^1)^2}{2}} = 0,5132$ g

– relatív szórás: $s_{rel_{x1}} = \frac{s^1}{\bar{x}^1} = 0,51\%$
– középérték szórása: $s_{\bar{x}^1} = \frac{s^1}{\sqrt{3}} = 0,2963$ g
– középérték relatív szórás:$s_{rel_{\bar{x}_1}} = \frac{s_1}{\sqrt{3} \cdot \bar{x}_1} = 0,30\%$.

A 2. és 3. mérési ponthoz tartozó értékeket hasonló módon határozhatjuk meg. A következő táblázat tartalmazza a három mérési pontra vonatkozó értékeket:

	1. mérési pont	2. mérési pont	3. mérési pont
mért adatok:	100,5 g	500,1 g	900,9 g
	99,5 g	500,2 g	899,1 g
	100,2 g	499,8 g	900,1 g
Átlag:	100,07 g	500,03 g	900,03 g
Korrigált tapasztalati szórás:	0,5132 g	0,2082 g	0,9018 g
Relatív szórás:	0,51%	0,04%	0,10%
Átlagérték szórása:	0,296 g	0,120 g	0,521 g
Átlagérték relatív szórása:	0,30%	0,02%	0,05%

(b) A kapott értékekből látható, hogy bár a 3. mérési pontban a legnagyobb a mérési adatok szórása, de ha figyelembe vesszük az átlag értékét, akkor ahhoz viszonyítva az 1. mérési pontban kapjuk a legnagyobb ingadozást. Célszerűen a két szélső mérési pont környezetében, azaz a mérési tartomány szélein, több párhuzamos mérést kell végezni, mint a mérési tartomány közepén.

3.2.4. Adatok ábrázolása

1. A gyártószalagról lekerülő termékek tömegének folyamatos elemzése során a következő eredményeket kaptuk:

3205 g 3195 g 3198 g 3201 g 3200 g 3205 g 3198 g 3210 g 3191 g 3185 g .

Készítse el a mérések relatív gyakorisági hisztogramját, box-plot ábráját, állapítsa meg a módusz és medián értékét!

Megoldás

Bár az adatok kis száma miatt nem látszik érdemesnek osztályközös gyakorisági sor alkalmazása, de a nagyság szerinti sorba rendezésből látható, hogy kevés az egyforma adat:

3185 g 3191 g 3196 g 3198 g 3198 g 3200 g 320 1g 3205 g 3205 g 3210 g .

A mérések száma $n = 10$, határozzuk meg ennek alapján az osztályok számát:

$$k = 1 + 3,3 \lg n = 1 + 3,3 \lg 10 = 4,3 \approx 4 \ .$$

Az osztályok szélessége:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{3210 - 3185}{4} = 6,25 \approx 6 \ .$$

Az első osztály ($\tilde{x}_1$) alsó és felső határa és osztályközepe:

$\tilde{x}_1^a = 3182,5$ g $\quad \tilde{x}_1^f = 3188,4$ g $\quad \tilde{x}_1^k = 3185$ g .

Az osztályközös gyakorisági sor táblázata:

osztály-index	osztály-határok [g]	osztály-közép [g]	gyakoriság [db]	relatív gyakoriság
1	3182,5-3188,4	3185	1	0,1
2	3188,5-3194,4	3191	1	0,1
3	3194,5-3200,4	3197	3	0,3
4	3200,5-3206,4	3203	3	0,3
5	3206,5-3212,4	3209	1	0,1

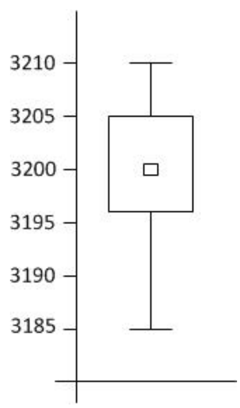
Mint a táblázatból látható, az eredetileg tervezett 4 osztálynál többet, ötöt kaptunk, ami a számolással meghatározott osztályszélesség lefelé kerekítésének következménye.

A sorba rendezés alapján

- a medián az $x_{(5)}$ és $x_{(6)}$ adatok átlaga: 3199 g
- módusz kettő is van: 3198 g és 3205 g .

A box-plot ábrához:

- alsó határérték: 3185 g ,
- alsó kvartilis: $Q_1 = \dfrac{n+1}{4} = 2,75 \approx 3 \Rightarrow x_{(3)} = 3196$ g ,
- medián: $M_e = 3199$ g ,
- felső kvartilis: $Q_3 = \dfrac{3(n+1)}{4} = 8,25 \approx 8 \Rightarrow x_{(8)} = 3205$ g ,
- felső határérték: 3210 g .



3.3. Gyakorló feladatok

3.3.1. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse a mérési adatok feldolgozásának elemi műveleteit!
2. Mi a különbség az átlag rang és a kapcsolt rang között?
3. Milyen elvárások vannak a középértékekkel szemben?
4. Mit jelent az, hogy a középérték legyen robusztus, illetve tipikus?
5. Mi a különbség és mi a hasonlóság az egyszerű és rekurzív átlag között?
6. Mi a különbség a rekurzív és a mozgóátlag-számítás között?
7. Mi alapján kell az ablakszélességet megválasztani az ablakos átlagolás esetében?
8. Mi a különbség az ablakos átlagolás és a felejtő átlagolás között?
9. Mi a módusz?
10. Mi a medián?
11. Az adatok hány százaléka található az alsó és a felső kvartilis között?
12. Sorolja fel a szóródás mérőszámait!
13. Mikor van gond a terjedelem értékével?
14. Adja meg a variancia definícióját!
15. Mi a különbség az elméleti és a tapasztalati szórásnégyzet között?
16. Mi a különbség a korrigált és a korrigálatlan tapasztalati szórás között?
17. Mi az a box-plot ábra?
18. Mi az a relatív gyakorisági hisztogram?

3.3.2. Feladatok

1. Egy áramerősség-mérés során a következő eredményeket kaptuk:

   13,5 A 13,3 A 13,5 A 13,6 A 13,8 A 13,6 A 13,2 A 13,7 A 13,4 A 13,1 A

   (a) Adja meg a módusz és a medián értékét!
   (b) Az adatok megfelelő csoportosításával készítse el a mérések relatív gyakorisági hisztogramját!
   (c) Számolja ki a mozgóátlag első három értelmezhető értékét, ha $N = 3$!

2. Egy folyamatos elemzés során a következő eredményeket kaptuk:

3205 g 3195 g 3198 g 3201 g 3200 g 3205 g 3198 g 3210 g 3191 g
3185 g

(a) Készítse el a mérések box-plot ábráját!
(b) Számolja ki a futó átlag első három értékét!

3. Egy nyomásmérés során a következő eredményeket kaptuk:

103,2 kPa 103,3 kPa 103,5 kPa 103,4 kPa 103,8 kPa 103,6 kPa 103,2 kPa
103,7 kPa 103,4 kPa 103,1 kPa

(a) Adja meg a módusz és a medián értékét!
(b) Az adatok megfelelő csoportosításával készítse el a mérések relatív gyakorisági hisztogramját!
(c) Adja meg a korrigált tapasztalati szórás, a relatív szórás, a középérték szórásának és a középérték relatív szórásának az értékét!

4. Egy áramerősség-mérés során a következő eredményeket kaptuk:

123,2 mA 123,3 mA 123,5 mA 123,5 mA 123,8 mA 124,1 mA 123,7 mA
123,9 mA 124,2 mA

(a) Jellemezze az adatsort a tanult szóródást jellemző mérőszámokkal!
(b) Készítse el a mérések box-plot ábráját, állapítsa meg a módusz és medián értékét!
(c) Számolja ki a mozgóátlag első három értelmezhető értékét, ha $N = 4$!

5. Egy folyamatos elemzés során a következő eredményeket kaptuk:

205 g 196 g 190 g 230 g 222 g 211 g 199 g 201 g 215 g 224 g

(a) Készítse el a mérések box-plot ábráját!
(b) Számolja ki a futóátlag első öt értékét!

3.3.3. Megoldások

1. (a) módusz: 13,2 A és 13,4 A; medián: 13,4 A
   (b) osztályok száma $k = 4$, osztályszélesség $h = 0,2$
   (c) $x_m^{N=3}(3) = 13,43$ A; $x_m^{N=3}(4) = 13,47$ A; $x_m^{N=3}(5) = 13,63$ A.
2. (a) legkisebb érték: 3191 g; alsó kvartilis: 3198 g; medián: 3199 g; felső kvartilis: 3205 g; legnagyobb érték: 3210 g
   (b) $x_r(1) = 3205$ g; $x_r(2) = 3200$ g; $x_r(3) = 3199,3$ g.
3. (a) módusz: 103,2 kPa és 103,4 kPa; medián: 103,4 kPa
   (b) osztályok száma $k = 4$, osztályszélesség $h = 0,2$
   (c) korrigált tapasztalati szórás: 0,23 kPa; relatív szórás: 0,22%; átlagérték szórása: 0,0727 kPA; átlagérték relatív szórása: 0,07%.

4. (a) terjedelem: $T = 1$ mA; interkvartilis terjedelem: $TQ = 0,4$ mA; korrigált tapasztalati szórás: $s = 0,344$ mA; relatív szórás: 0,28%; átlagérték szórása: 0,1148 mA; átlagérték relatv szórása: 0,09%;

   (b) legkisebb érték: 123,2 mA; alsó kvartilis: 123,5 mA; medián: 123,7 mA; felső kvartilis: 123,9 mA; legnagyobb érték: 124,2 mA; módusz: 123,5 mA

   (c) $x_m^{N=4}(4) = 123,38$ mA; $x_m^{N=4}(5) = 123,53$ mA; $x_m^{N=4}(6) = 123,73$ mA.

5. (a) legkisebb érték: 190 g; alsó kvartilis: 201 g; medián: 208 g; felső kvartilis: 215 g; legnagyobb érték: 230 g;

   (b) $x_r(1) = 205$ g; $x_r(2) = 200,5$ g; $x_r(3) = 197$ g; $x_r(4) = 205,2$ g; $x_r(5) = 208,6$ g.

4. fejezet

Mérési hibák

4.1. Elméleti áttekintés

Általánosságban megállapíthatjuk, hogy csaknem minden mérés hibával terhelt, de természetesen nem mindegy a hiba jellege, nagysága és egyéb jellemzői. A műszaki gyakorlatban a *mérési hiba* alatt általában a mérendő jel elméleti és az általunk meghatározott mért értéke közti különbséget értjük. A mérési hibát tehát egyszerű különbségképzés segítségével meghatározhatjuk a pontos érték és a mérési eredmény ismeretében. Az *általánosított hiba* fogalma szintén a pontos érték és a mérési eredmény közti eltérésen alapul, csak ezt az alkalmazott szimbólumhalmazon értelmezett metrika segítségével kell meghatározni. Bár a korábban ismertetett példáknak megfelelően a műszaki gyakorlatban is előfordulnak olyan feladatok, amikor a mérési hiba nem határozható meg egy egyszerű kivonással, de az elemi fizikai, kémiai mérések többségének esetében igen, ezért ebben a fejezetben a hagyományos mérési hibához kapcsolódó fogalmakat tekintjük át. Miután a mérési eredmények általában csak kiinduló pontjai további számításoknak, ezért megvizsgáljuk azt is, hogy ezeknél az elemi méréseknél elkövetett hibák hogyan befolyásolják a számított értékek pontosságát.

4.1.1. Hibafüggvények

A mérési hibákat csoportosíthatjuk a leírásuk alapján, mely szerint a következő két hibafüggvényt különböztetjük meg:

– az abszolút hibafüggvényt,

– a relatív hibafüggvényt.

Az *abszolút hibafüggvény*, H_i, a mérési eredmény és a pontos érték különbsége:

$$H_i = |x_{m_i} - x_0| \ ,$$

ahol x_{m_i} a mérési eredmény, x_0 a pontos érték, i a mérés sorszáma. Az abszolút hiba mértékegysége megegyezik a mért mennyiség mértékegységével.

A *relatív hibafüggvény*, h_i az abszolút hiba és a pontos érték százalékos aránya:

$$h_i = \frac{H_i}{|x_0|} \cdot 100[\%] \ x_0 \neq 0 \ .$$

A relatív hiba dimenziómentes érték.

Jól látható, hogy mindkét hibafüggvény meghatározásakor szükség van a keresett jellemző pontos értékére. Ez általában ismeretlen egy adott mérési eljárásnál. Ismert viszont a műszer kalibrálásakor, vagyis amikor pontosan ismert értéket mérünk a műszer értékmutatásának ellenőrzésére, így a mérési tartomány különböző pontjaiban meghatározhatjuk az abszolút és relatív hiba mértékét. A műszerek gyári ismertetőjében, az ún. gépkönyvben is találhatunk erre vonatkozó adatot. Például egy digitális kijelzőjű eszköz gépkönyvbeli pontossági adatai legyenek a következők:

$$\pm 0,2\% \pm 1 \text{ digit} .$$

Az első adat a teljes mérési tartományra vonatkoztatott relatív hibát, míg a második adat az utolsó kijelzett számjegy bizonytalanságát, vagyis az abszolút hiba mértékét adja meg.

Ennek alapján egy konkrét mérés relatív hibáját a következő formában adhatjuk meg:

$$h_i = h_0 + \frac{H_{max}}{|x_m|} \cdot 100 .$$

Azaz, az adott mérés relatív hibáját a teljes tartományra vonatkozó relatív hiba (h_0) és a mért értékre (x_m) meghatározott relatív hiba összegeként kapjuk meg. Abban az esetben, ha nem ismerjük a helyes értéket, akkor a mérés relatív hibáját a mért értékre vonatkoztatva adhatjuk meg. Ha a mérés abszolút hibája nem túl jelentős, akkor a két érték között nincs nagy eltérés.

4.1.2. Hibatípusok

A hibák típus szerinti osztályozása a következő besorolásnak megfelelően végezhető el:

- Dinamikus hiba
- Statikus hiba
    - Véletlenszerű hiba
        - Véletlen hiba
        - Kiugró hiba
        - Nagyságrendi eltérés
    - Rendszeres hiba
        - Állandó rendszeres hiba
        - Arányos rendszeres hiba

Dinamikus hiba

Dinamikus hiba akkor lép fel egy mérés során, ha a mérőeszköz által mutatott érték nem a műszer állandósult állapotában történik. Ennek oka általában az, hogy a műszer nem képes a megfigyelt folyamat változásait megfelelő sebességgel követni, de a mérést végző személy is okozhatja a mérési eredmény túl korai leolvasásával. A dinamikus hiba a műszer időállandójának a megfigyelt folyamat változási sebességéhez képesti megfelelő megválasztásával érhető el, azonban figyelembe kell venni a műszer beépítése során alkalmazott eszközöknek (pl. védőtok) az időállandóra gyakorolt hatását.

Statikus hibák

Ha a mérést a dinamikus hiba lehetőségét kizárva végezzük el, és a mérési eredmény és a jel tényleges értéke különbözik, akkor *statikus hibá*ról beszélünk. A mérési eredményt befolyásoló hibaforrásoknak kétféle hatása lehet: egyes hibák nagysága és előjele véletlenszerűen változik, tehát hatásukra ugyanannak az értéknek többszöri, vagyis párhuzamos mérése esetén, egyszer többet, máskor kevesebbet kapunk a tényleges értéknél, míg más hibák esetén azt tapasztaljuk, hogy a hiba mindegyik párhuzamos mérésnél ugyanolyan mértékben és irányban módosítja az eredményt. Az első csoportba tartozó hibákat *véletlenszerű hibáknak*, míg a második csoportba tartozókat *rendszeres hibáknak* nevezzük.

Véletlenszerű hibák. A véletlenszerű hibák tetszőleges mértékben és irányban módosíthatják a mérési eredményt. Okozóik általában olyan, vagy a környezetből, vagy a mérőrendszerből, mérést végző személytől származó hatások, melyek a mérést az adott pillanatban véletlenszerűen befolyásolják, módosítják. Ezeket a hibákat általában a mérési eredmények szórásához viszonyítva lehet csoportosítani.

Véletlen hibák. Véletlen hibával terhelt egy mérési eredmény, ha az a várható érték körüli ± 3 korrigált tapasztalati szórásnyi tartományban található. Véletlen hibák minden mérésnél, így irányított mérőrendszer esetén is előfordulhatnak. A véletlen hibákat is egyrészt a környezeti hatások, másrészt a mérőrendszer működése során fellépő zajok, zavarások okozzák, azonban mértékük nem haladja meg a mérési eredmény várható értéke körüli 3 szórásnyi távolságot. A véletlen hibák olyan normális eloszlással írhatók le, melynek zérus a várható értéke és a teljes mérési eljárásra jellemző a szórása.

Véletlen hibák ellen, tulajdonságaikat kihasználva, párhuzamos mérésekkel lehet védekezni. A hibák irányának és nagyságának véletlen jellege miatt, többször elvégezve ugyanolyan körülmények között a mérést, a hibák egymást kompenzálják, így jó közelítéssel a helyes értéket kapjuk. Az elvégzendő párhuzamos mérések számát a mérési eljárás szórása alapján lehet meghatározni.

Kiugró hibák. Kiugró hibával terhelt mérés esetén a mérési eredmény már lényegesen eltér a többi mérési eredmény alapján becsült várható értéktől, annak ± 3–6 korrigált tapasztalati szórásnyi tartományába esik. A kiugró hibák esetében már az irányított mérőrendszer kapcsán előírt feltételek nem teljesülnek, tehát a környezetből vagy a mérőrendszer működéséből származó zavarások kiküszöbölése, állandó értéken tartása, illetve mérés útján való figyelembe vétele nem valósult meg.

Nagyságrendi eltérés. A nagyságrendi eltérés típusú hibák esetében a mérési eredmény a szórás értékének legalább hatszorosával eltér valamelyik irányban a várható értéktől. Nyilvánvaló, hogy az irányított mérőrendszer feltételei nem teljesülnek. Tipikusan ilyen hibát kapunk, ha egy változtatható mérési tartományú műszer esetében az eredmény rögzítése során rosszul jegyeztük le a pillanatnyi tartományt.

Véletlenszerű hibák kimutatása. A véletlenszerű hibák osztályozása tehát a mérési eljárás várható értéke és szórása alapján történik. Ennek megfelelően egy mérési eredményt akkor tudunk véletlenszerű hibával jellemezni, ha vagy korábbi mérésekből vagy a műszerkönyvből ismerjük ezeket az adatokat.

Ha nem állnak rendelkezésre ezek az adatok, akkor a következő egyszerű tesztet alkalmazhatjuk:

Gyanús, kiugró eredmények kezelése: v-teszt

Határozzuk meg a következő kifejezésből v_0 értékét:

$$v_0 = \frac{|x_i^* - \bar{x}|}{s} \ ,$$

ahol

- x_i^* a gyanús, vizsgálandó eredmény;
- $\bar{x}$a többi adatból, azaz a gyanús érték *nélkül* számolt átlag;
- s a többi adatból, azaz a gyanús érték *nélkül* számolt korrigált tapasztalati szórás.

A kapott v_0 értéket összevetjük az alábbi táblázatból, a párhuzamos mérések számának n függvényében megválasztott v_t értékkel. n értékének meghatározásakor a gyanús mérést is figyelembe vesszük.

n	v_t
3	46,7
4	10,1
5	6,51
6	5,31

Ha v_0 értéke nagyobb, mint v_t értéke, akkor a mérési eredmény legalább kiugró hibával terhelt és így figyelmen kívül hagyható. A melléklet T/V. táblázatában több mérési eredményhez tartozó szignifikanciahatárok is megtalálhatók.

Rendszeres hibák. A statikus hibák másik nagy csoportját, az adott mérést mindig egy irányban és azonos mértékben torzító rendszeres vagy módszeres hibák alkotják. Míg a véletlen hibák hatását párhuzamos méréssel kompenzálhatjuk, addig az állandó és egyirányú hatás miatt ez a megoldás a rendszeres hibák esetében nem vezet eredményre.

Méréselméleti szempontból *helyes mérés*ről beszélünk, ha a mérési eredménynek nincs rendszeres hibája, *pontos mérés* esetében pedig csak véletlen hibák befolyásolják a mérést.

A rendszeres hibát létrehozó okok szintén részben a környezetben, részben a mérőrendszerben, illetve a mérést végző személyben kereshetők, de a hatásuk, szemben a véletlenszerű hibákkal, folyamatos, állandó és nem pillanatszerű. Példa lehet erre egy mérleg vízszintezésének elmulasztása, a kiértékelési eljárásban egy konstans elírása.

A rendszeres hibák kimutatása általában összetett feladat, meghatározásukhoz pontosan ismert mennyiséget, *etalon*t kell mérni. A mérés során lehetőség szerint olyan körülményeket kell biztosítani, melyek mellett a mérési eredmények szórása a lehető legkisebb, mivel a nagy szórás akadályozhatja az esetleges rendszeres hiba kimutatását.

A rendszeres hibák meghatározására szolgáló eljárásokat kalibrálásnak vagy hitelesítésnek nevezzük. Hitelesítésnek nevezzük a folyamatot akkor, ha a rendszeres hiba meghatározását olyan műszer esetében végezzük el, amely elszámoláshoz kapcsolódó gazdasági folyamatban vesz részt (például mérleg a piacon vagy benzinkút áramlásmérője). Kalibrálni az ilyen folyamatban részt nem vevő műszereket kell (saját otthoni konyhamérleg vagy mérőpohár). Alapvetően azonban mind a két esetben az a cél, hogy az esetleges rendszeres hibát feltárjuk, ezért a következő módon járunk el. A vizsgálandó mérőeszközzel egy pontosan ismert értékű mennyiséget, lehetőleg etalont mérünk meg. A mérés során ekkor is előfordulhatnak véletlen hibák, ezek hatásának kiküszöbölésére ebben az esetben is párhuzamos méréseket végzünk. Ahhoz, hogy minél pontosabb képet kapjuk az esetleges rendszeres hiba természetéről, az ellenőrző mérést a mérőeszköz mérési tartományában elosztva, annak minél több pontjában végezzük el. Ez nem minden eszköz esetében végezhető el, hiszen ehhez a megfelelő értékű etalont is biztosítani kell. Az egyes pontokban kapott párhuzamos mérési eredmények átlagait a valódi értékek függvényében ábrázoljuk. Regresszió segítségével egyenest illesztünk a kapott pontokra. A kapott egyenes helyzete alapján a következő esetek lehetségesek:

– Ha az egyenes az origóban metszi a tengelyeket és 45° meredekségű, akkor nincs rendszeres hibája a mérési eljárásnak.

– Ha az egyenes meredeksége 45°, de a tengelymetszet nem az origóban van, akkor *állandó rendszeres hiba* befolyásolja a mérést. Ilyen hiba esetén a mérés eredményét a műszer mérési tartományának bármely pontjában a torzítás ugyanakkora.

– Ha az egyenes ugyan az origóban metszi a tengelyeket, de a meredeksége 45°-tól eltér, akkor *arányos rendszeres hibá*ról beszélünk, mert a mérési hiba nagysága arányos a mért értékkel.

– Ha az egyenes nem az origóban metszi a tengelyeket és a meredeksége sem 45°, akkor a mérésnek *állandó és arányos rendszeres hibá*ja is van.

A rendszeres hibák jellemzésére az alábbi egyenlettel megadott összefüggés használható:

$$m_i = \alpha + \beta \cdot {\mu^0}_i + \varepsilon_i \ ,$$

ahol m_i az i-dik mérési pontban meghatározott eredmény, α a rendszeres hiba állandó része, $\beta - 1$ a rendszeres hiba arányos része, ${\mu^0}_i$ a tényleges érték (az etalon értéke), ε_i a véletlen hiba.

4.1.3. Pontosság, pontossági osztályok

A pontosságot, a Metrológiai Szótárnak megfelelően, kétféle módon lehet definiálni:

– A pontosság a mérőeszköznek az a tulajdonsága, hogy a mérendő mennyiség valódi értékéhez közeli értékmutatást vagy választ szolgáltat.

– Pontos mérési eljárásnál az adott mérendő mennyiség mért értékei a mérendő mennyiség helyes értékeitől egy előre megadott értéknél kevesebbel térnek el.

Míg az első definíció a pontosság kifejezés hétköznapi megfelelőjét adja, addig a második megfogalmazás a mérés általánosításának megfelelően az eredmények egy adott intervallumba vagy osztályba esését vizsgálja. E megfogalmazás alapján a mérési eljárásokat és a mérőműszereket *pontossági osztályok*ba sorolhatjuk, így minősítve az értékmutatásuk helyességét és pontosságát.

A pontossági osztályok meghatározása a következő képlet szerint történik:

$$h_p \geq \frac{H_{max}}{x_k} \ ,$$

ahol h_p a pontossági osztály értéke, az x_k konvencionális (megállapodás szerinti) érték, H_{max} a műszer abszolút hibája.

A pontossági osztályba sorolásnál figyelembe vett konvencionális érték a következő lehet:

– a műszer végkitérésben mért értéke (felső méréshatára),

– megállapodás alapján meghatározott érték.

A végkitérésbeli érték konvencionális értékként olyan műszereknél használatos, ahol a mérendő jel egy megadott tartományban változhat. A megállapodás alapján meghatározott értéket pedig számláló jellegű műszereknél alkalmazzák elsősorban.

Mint láttuk, a pontossági osztályba sorolás a mérési eljárás vagy a műszer pontosságáról ad információt. A pontossági osztály, a konvencionális érték és a mérési eredmény ismeretében meghatározható a műszertől származó abszolút és relatív hiba maximális értéke. Ezt a mérési eredményre vonatkozó abszolút és relatív hibakorlát meghatározásával fejezzük ki.

Az *abszolút hibakorlát* (H_{max}) értéke a következő összefüggés alapján határozható meg:

$$H_{max} = h_p \cdot x_v \ ,$$

ahol h_p a pontossági osztály, x_v a végkitérésben mutatott érték. A képletnek megfelelően, az abszolút hibakorlát értéke független a mért értéktől, és azt fejezi ki, hogy bármekkora mért érték esetén mekkora lehet annak maximálisan az abszolút hibája a végkitérésre vonatkoztatva.

A *relatív hibakorlát* (h_{max}) meghatározása a következő:

$$h_{max} = h_p \cdot \frac{x_v}{x_m} \ ,$$

ahol h_p a pontossági osztály, x_v a végkitérésben mutatott érték és x_m a mért érték. Mint az összefüggésből is látható, a relatív hiba nagysága függ a mért értéktől, minél kisebb értéket mérünk, annál nagyobb lesz a relatív hiba egy adott abszolút hibájú mérőműszer esetében.

A relatív hibakorlát alapján meghatározható a legkisebb értelmesen mérhető érték elvi határa, ami a műszer abszolút hibakorlátjának megfelelő érték. Ennél kisebb értéket meghatározva a relatív hibakorlát 100%-nál nagyobb lesz. Megjegyezzük, hogy a gyártók általában a leolvashatóságot úgy határozzák meg egy adott műszer esetében, hogy az abszolút hibakorlát közeli érték se legyen leolvasható.

4.1.4. Hibaterjedés

A mérés során meghatározott értékekkel egyrészt jellemezhetjük a technológiai folyamat menetének alakulását, másrészt általában felhasználjuk azokat további, méréssel nem, vagy csak nehezen meghatározható mennyiségek értékének számolással történő megadására. Az *elemi mérések* során elkövetett hibák azonban a számított értékekben is megjelennek. Így például, ha egy test térfogatát a jellemző méreteinek mérésével, majd a megfelelő térfogatszámítási képletbe történő behelyettesítéssel határozzuk meg, akkor elemi mérések, például az élhossz meghatározása során elkövetett hibák a számított mennyiség, azaz itt a térfogat értékét is befolyásolják.

Egyszerűbb esetben a számított mennyiség hibakorlátját az elemi mérések hibakorlátjából származtatjuk a következő módon:

– Ha a számítási művelet összeadás vagy kivonás, akkor az elemi mérések abszolút hibakorlátjainak összegzésével határozzuk meg a számolt érték abszolút hibakorlátját, majd ennek és a számolt értéknek a hányadosaként megkapjuk a relatív hibakorlátot.

– Ha a számolt értéket szorzással vagy osztással határozzuk meg, akkor az elemi mérések relatív hibakorlátjait összegezve meghatározzuk a számolt érték relatív hibakorlátját, majd ennek és a számolt értéknek a szorzataként az abszolút hibakorlátot.

A számított eredmények hibakorlátjainak megadása tehát a következő módon történik:

1. A műszer pontossági osztálya és konvencionális értéke alapján meghatározzuk a mérés abszolút hibakorlátját, majd a mért értékek figyelembevételével a relatív hibakorlátot a számításhoz szükséges minden egyes elemi mérés esetében.

2. Elvégezzük a számított érték meghatározását a megfelelő képlet alapján, majd a számítás jellegének megfelelően vagy az abszolút vagy a relatív hibakorlátot határozzuk meg az elemi mérések megfelelő hibakorlátjainak összegzésével.

3. A meghatározott hibakorlát és a számított érték felhasználásával meghatározzuk a másik hibakorlátot.

4. Ha a számolási művelet több lépésből áll, akkor a további eredmények hibakorlátjainak meghatározásánál, a 2. és 3. lépésnek megfelelően, a korábban számolt értékek relatív és abszolút hibakorlátjait alkalmazzuk.

4.2. Kidolgozott feladatok

4.2.1. Mérési eredmények leolvasási hibája

1. Nyomásmérővel mérjük egy gőzvezeték nyomását. A nyomásmérő méréstartománya $0,0 \div 300,0$ kPa, pontossága 5% $\pm$ 2 osztás. Mekkora a relatív hibája a 55,0 kPa, illetve a 220,0 kPa értékek mérésének?

   Megoldás

   A nyomásmérő méréstartományának megadása alapján látható, hogy a leolvasás tized kPa felbontású. Ennek megfelelően a nyomásmérő abszolút hibája $H_{max} = 0,2$ kPa. A megadott 5%-os érték a teljes tartományra vonatkoztatott relatív hiba. Mindezek alapján az egyes mérések relatív hibáit a következő összefüggésekkel tudjuk meghatározni:

$$h_{55,0\ \mathrm{kPa}} = 5\% + \frac{0,2\ \mathrm{kPa}}{55,0\ \mathrm{kPa}} \cdot 100 = 5,36\%\ ,$$

$$h_{220,0\ \mathrm{kPa}} = 5\% + \frac{0,2\ \mathrm{kPa}}{220,0\ \mathrm{kPa}} \cdot 100 = 5,09\%\ .$$

2. Ampermérővel mérünk áramerősséget. A műszer pontossága 2% $\pm$ 1 osztás, méréstartománya $0,000 \div 1,000$ A. Mekkora a relatív hibája a 0,852 A, illetve a 0,025 A értékek mérésének?

   Megoldás

   Az ampermérő méréstartományának megadásából látható, hogy ebben az esetben a felbontás ezred amper. Ebből követezően minden egyes mérés abszolút hibája $H_{max} = 0,001$ A. A teljes tartományra vonatkoztatott relatív hiba 2%, így az egyes mérések relatív hibái:

$$h_{0,852\ \mathrm{A}} = 2\% + \frac{0,001\ \mathrm{A}}{0,852\ \mathrm{A}} \cdot 100 = 2,117\%\ ,$$

$$h_{0,025\ \mathrm{A}} = 2\% + \frac{0,001\ \mathrm{A}}{0,025\ \mathrm{A}} \cdot 100 = 6\%\ .$$

4.2.2. Véletlenszerű hibák

1. Egy mérési sorozat eredményeként a következő értékeket kaptuk:

   431,5 g 431,7 g 431,5 g 432,0 g 430,5 g .

   – A mérési sorozat adatai alapján határozza meg a véletlenszerű hiba meghatározásához szükséges értékeket!
   – A kapott eredményeket felhasználva minősítse véletlenszerű hiba szempontjából a következő mérési eredményeket:

     430,0 g; 429,2 g; 437,0 g .

   Megoldás

   – A véletlenszerű hiba meghatározásához a mérési adatok átlagértéke és korrigált tapasztalati szórása szükséges. Ezek értékei a megadott mérési adatok alapján:

   $$\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 431,3 \text{ g}$$

   $$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{4}} = 0,5709 \text{ g} .$$

   A kapott adatok alapján a véletlenszerű hibák meghatározásához a következő határok állíthatók fel:

   – Véletlen hibát tartalmaz a mérési eredmény, ha értéke a $\bar{x} \pm 3s$ tartományba esik, azaz a példában a $431,3$ g $\pm 3 \cdot 0,5709$ g, azaz az $429,7$ g $\div 433,0$ g intervallumban található.
   – Kiugró hiba jellemzi a mérési eredményt, ha értéke $\bar{x} - 6s \div \bar{x} - 3s$, illetve $\bar{x} + 3s \div \bar{x} + 6s$ között található. A példában ennek a $427,9$ g $\div 429,7$ g, valamint a $433,0$ g $\div 434,7$ g intervallumok felelnek meg.
   – Rendkívüli vagy nagyságrendi hibájúnak tekinthető a mérési eredmény, ha értéke kisebb, mint $\bar{x} - 6s$, illetve nagyobb, mint $\bar{x} + 6s$, azaz a példában $427,9$ g-nál kisebb, és $434,7$ g-nál nagyobb.

   (*Megjegyzés:* A határok megadásánál a mérési adatok alapján számolt értékek esetén alkalmazandó értékes jegyek száma szabályt alkalmaztuk.)

   – Az előző pontban kiszámolt értékek alapján a következő megállapításokat tehetjük:
     – a $430,0$ g adat csak véletlen hibát tartalmaz;
     – a $429,2$ g érték kiugró hibával terhelt;
     – a $437,0$ g mérési eredmény már nagyságrendi hibájú.

2. Egy áramerősség-mérővel végzett meghatározás során a következő értékeket kaptuk:

   1,58 A 1,55 A 1,57 A 1,53 A 1,56 A .

– A mérési sorozat adatai alapján határozza meg a véletlenszerű hiba meghatározásához szükséges értékeket!

– A kapott eredményeket felhasználva minősítse véletlenszerű hiba szempontjából a következő mérési eredményeket:

1,52 A   1,43 A   1,65 A .

Megoldás

– A véletlenszerű hiba meghatározásához a mérési adatok átlagértéke és korrigált tapasztalati szórása:

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 1,56 \text{ A}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{4}} = 0,019 \text{ A} .$$

A kapott adatok alapján a véletlenszerű hibák meghatározásához a következő határok állíthatók fel:

– véletlen hiba tartománya: 1,50 A – 1,62 A;
– kiugró hiba tartománya: 1,44 A – 1,50 A, illetve 1,62 A - 1,67 A;
– rendkívüli hibával terhelt a mérés, ha az eredmény 1,44 A-nál kisebb, vagy 1,67 A-nál nagyobb.

– Az előző pontban kiszámolt tartományok alapján a következő megállapításokat tehetjük:

– 1,52 A - az adat csak véletlen hibát tartalmaz;
– 1,43 A - az adat rendkívüli hibával terhelt;
– 1,65 A - az adat kiugró hibával terhelt.

4.2.3. Hibaterjedés

1. Egy kocka élhosszát 0,2-es pontosságú, 1 méter hosszú mérőszalaggal mérjük meg, és az eredmény 20 cm. A tömegre egy 0,5-ös pontosságú, 25 kg méréshatású mérleggel mérve, 16 kg-t kaptunk. Számolja ki a kocka sűrűségét és a számolt adat abszolút és relatív hibáját! Szükség esetén melyik mérést kellene pontosítani?

Megoldás

(a) Határozzuk meg először a kocka élhosszának mérése során elkövetett mérési hibakorlátokat:

– A mérőszalag pontossági osztálya $msz_{hp} = 0,2\%$, a konvencionális érték ebben az esetben a maximális érték: $msz_{max} = 1$ m, így a mérések abszolút hibakorlátja:

$$msz_{Hmax} = msz_{max} \cdot msz_{hp} = 1 \text{ m} \cdot 0,002 = 0,002 \text{ m} .$$

– Az élhossz mérésének eredménye:

$$a = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m} .$$

A mérés abszolút hibakorlátja megegyezik a mérőszalag pontossági osztálya alapján számolt hibakorláttal:

$$H_a = msz_{Hmax} = 0,002 \text{ m} .$$

A mérés relatív hibakorlátját az abszolút hibakorlát és a mért érték alapján határozhatjuk meg:

$$h_a = \frac{H_a}{a} \cdot 100 = \frac{0,002 \text{ m}}{0,2 \text{ m}} \cdot 100 = 1\% .$$

(b) Számoljuk ki a kocka térfogatát és határozzuk meg a kapott eredmény abszolút és relatív hibakorlátját:

– A kocka térfogata:

$$V = a^3 = (0,2 \text{ m})^3 = 0,008 \text{ m}^3 .$$

– A térfogat számolását szorzással végeztük, így először a számolt érték relatív hibakorlátját határozzuk meg:

$$h_V = 3 \cdot h_a = 3 \cdot 1\% = 3\% .$$

– A számolt érték abszolút hibakorlátját pedig a számolt adat és a relatív hibakorlát segítségével kapjuk meg:

$$H_V = V \cdot h_V = 0,008 \text{ m}^3 \cdot 0,03 = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 .$$

(c) A tömeg meghatározása során a következő értékeket kapjuk a hibakorlátokra:

– A mérleg pontossági osztálya $M_{hp} = 0,5\%$, a konvencionális érték ebben az esetben is a maximális érték: $M_{max} = 25$ kg, így a mérések abszolút hibakorlátja:

$$M_{Hmax} = M_{max} \cdot M_{hp} = 25 \text{ kg} \cdot 0,005 = 0,125 \text{ kg} .$$

– A tömeg mérésének eredménye:

$$m = 16 \text{ kg} .$$

A mérés abszolút hibakorlátja megegyezik a mérleg pontossági osztálya alapján számolt hibakorláttal:

$$H_m = M_{Hmax} = 0,125 \text{ kg} .$$

A mérés relatív hibakorlátját az abszolút hibakorlát és a mért érték alapján határozhatjuk meg:

$$h_m = \frac{H_m}{m} \cdot 100 = \frac{0,125 \text{ kg}}{16 \text{ kg}} \cdot 100 = 0,78\% .$$

(d) A sűrűség meghatározását a tömeg és térfogat aránya alapján végezhetjük el:

– A sűrűség értéke:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{16 \text{ kg}}{8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \ .$$

– A számolás osztással történt, így először a relatív hibakorlátot határozzuk meg:

$$h_\rho = h_m + h_V = 0,78\% + 3\% = 3,78\% \ .$$

– Az abszolút hibakorlátot pedig a relatív hibakorlát és számolt érték alapján kapjuk meg:

$$H_\rho = \rho \cdot h_\rho = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,0378 = 76,6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \ .$$

(e) A sűrűség meghatározásánál a relatív hibakorlátot a tömeg és a számolt térfogat hibakorlátjának összegzésével határoztuk meg:

$$h_\rho = h_m + h_V = 0,78\% + 3\% = 3,78\% \ .$$

Az eredményből látható, hogy a térfogat meghatározása során elkövetett hiba jelenik meg nagyobb súllyal az eredményben. Miután a térfogatot is számolással kaptuk meg, és ennek hibakorlátját az élhossz mérése alapján határoztuk meg:

$$h_V = 3 \cdot h_a = 3 \cdot 1\% = 3\% \ ,$$

így a mérés pontosításához az élhossz meghatározását kell nagyobb pontossági osztályú eszközzel elvégezni.

2. Határozza meg az átfolyt térfogatáramot és a számolt érték relatív és abszolút hibakorlátját, ha a következő elemi méréseket végeztük el:

   – Az átfolyt mennyiséget köbözéssel határozzuk meg egy tartályban, melyről a következő adatokat tudjuk:
     – a tartály átmérője 1,2 m, melyet 0,1-es pontossági osztályú 2 m-es mérőszalaggal mértünk meg;
     – a szintmérő 0,2 pontossági osztályú és a maximális értéke 4 m.
   – A mérés kezdetén a tartályban lévő víz szintje 0,5 m, a végén 2,2 m.
   – Az időt egy 0,1 pontossági osztályú órával mérjük, melynek az alapul vett konvencionális értéke 60 s.
   – A mérés során eltelt idő 120 s.

Megoldás

(a) Első lépésként a térfogatváltozás meghatározásához számoljuk ki a tartály alapterületét, és a számolt értékhez tartozó abszolút és relatív hibakorlátot.

– A mérőszalag pontossági osztálya $m_{hp} = 0,1\%$, a konvencionális érték ebben az esetben a maximális érték $m_{max} = 2$ m. Ennek alapján a mérések abszolút hibakorlátja:

$$m_{Hmax} = m_{max} \cdot m_{hp} = 2 \text{ m} \cdot 0,001 = 0,002 \text{ m} \ .$$

– Az átmérő mérésének eredménye $d = 1,2$ m .
A mért érték abszolút hibakorlátja megegyezik az előző pontban kiszámolt értékkel

$$H_d = m_{Hmax} = 0,002 \text{ m} ,$$

a relatív hibakorlátja

$$h_d = \frac{m_{H_d}}{d} = \frac{0,002 \text{ m}}{1,2 \text{ m}} \cdot 100 = 0,17\% .$$

– A tartály alapterületének számolt értéke:

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{(1,2 \text{ m})^2 \cdot \pi}{4} = 1,1 \text{ m}^2 .$$

Miután a számolás során multiplikatív műveletet végeztünk, ezért először a relatív hibakorlátot határozzuk meg az átmérő mérése során meghatározott relatív hibakorlát alapján:

$$h_A = 2 \cdot h_d = 2 \cdot 0,17\% = 0,34\% ;$$

az abszolút hibakorlátot pedig a mérés eredménye és kapott relatív hibakorlát alapján határozzuk meg:

$$H_A = A \cdot h_A = 1,1 \text{ m}^2 \cdot 0,34\% = 0,0038 \text{ m}^2 .$$

(b) A térfogatváltozás meghatározásához szükség van a szintmérővel végzett mérés hibakorlátjainak meghatározására is.

– A szintmérő pontossági osztálya $l_{hp} = 0,2\%$, a konvencionális érték ebben az esetben is a maximális érték $l_{max} = 4$ m. Ennek alapján a mérések abszolút hibakorlátja:

$$l_{Hmax} = l_{max} \cdot l_{hp} = 4\text{m} \cdot 0,002 = 0,008 \text{ m}$$

– A mérés kezdetén már volt folyadék a tartályban, az induló érték: $l_1 = 0,5$ m.
Ennek a mérési adatnak az abszolút hibakorlátja ebben az esetben is megegyezik az előző pontban meghatározott értékkel:

$$H_{l_1} = l_{Hmax} = 0,008 \text{ m} ,$$

a relatív hibakorlátja pedig

$$h_{l_1} = \frac{H_{l_1}}{l_1} \cdot 100 = 1,6\% .$$

– A megfigyelés végén kapott szintmérési adat és hibakorlátai:
A záró érték: $l_2 = 2,2$ m, az abszolút hibakorlát:

$$H_{l_2} = l_{Hmax} = 0,008 \text{ m} ,$$

a relatív hibakorlát:

$$h_{l_2} = \frac{H_{l_2}}{l_2} \cdot 100 = \frac{0,008 \text{ m}}{2,2 \text{ m}} \cdot 100 = 0,36\% .$$

– A szint változását a záró és az induló szintérték különbségeként kapjuk meg, azaz a számolás additív jellege miatt először az abszolút hibakorlátot határozzuk meg, majd ennek alapján a relatív hibakorlát értékét. A szintváltozás számolt értéke:

$$dL = l_2 - l_1 = 2,2 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 1,7 \text{ m} ,$$

ennek abszolút hibakorlátja

$$H_{dL} = H_{l_1} + H_{l_2} = 2 \cdot l_{Hmax} = 2 \cdot 0,008 \text{ m} = 0,016 \text{ m} ,$$

relatív hibakorlátja

$$h_{dl} = \frac{H_{dL}}{dL} \cdot 100 = \frac{0,016 \text{ m}}{1,7 \text{ m}} \cdot 100 = 0,94\% .$$

(c) A tartály alapterülete és a szint változása alapján meghatározhatjuk a megfigyelés során bekövetkezett térfogatváltozást. A térfogatváltozás:

$$dV = A \cdot dL = 1,1 \text{ m}^2 \cdot 1,7 \text{ m} = 1,92 \text{ m}^3 ,$$

a számolási művelet szorzás, így a relatív hibakorlát:

$$h_{dV} = h_A + h_{dL} = 0,34\% + 0,94\% = 1,28\% ,$$

az abszolút hibakorlát pedig

$$H_{dV} = dV \cdot h_{dV} = 1,92 \text{ m}^3 \cdot 0,0128\% = 0,0245 \text{ m}^3 .$$

(d) A térfogatáram meghatározásához szükség van az időmérés adatainak meghatározásához:

– A időmérő pontossági osztálya $tm_{hp} = 0,1\%$, a konvencionális érték ebben az esetben a megállapodás szerinti $tm_{konv.e.} = 60$ s.
Ennek alapján az idő mérésének abszolút hibakorlátja:

$$tm_{Hmax} = tm_{konv.e.} \cdot tm_{hp} = 0,06 \text{ s} .$$

– A megfigyelés $t = 120$ s-ig folyt. Az ehhez tartozó abszolút hibakorlát:

$$H_t = tm_{Hmax} = 0,06 \text{ s} ;$$

a relatív hibakorlát pedig

$$h_t = \frac{H_t}{t} \cdot 100 = \frac{0,06\text{s}}{120\text{s}} \cdot 100 = 0,05\% .$$

(e) A megfigyelés alatt kapott térfogatáram számolt értéke:

$$Q = \frac{dV}{t} = \frac{1,92 \text{ m}^3}{120 \text{ s}} = 0,016 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} ,$$

a relatív hibakorlát:

$$h_Q = h_{dV} + h_t = 1,28\% + 0,05\% = 1,33\% ,$$

az abszolút hibakorlát:

$$H_Q = Q \cdot h_Q = 0,016 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 0,0133 = 2,12 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} .$$

(f) A hibaterjedés alapján meghatározhatjuk, hogy az egyes elemi mérések közül melyik, hogyan befolyásolja a számolt érték pontosságát:

$$h_Q = h_{dV} + h_t = h_A + h_{dL} + h_t = 2 \cdot h_d + h_{dL} + h_t = 0,34\% + 0,94\% + 0,05\% = 1,33\% \,.$$

Az elvégzett felbontásnak megfelelően a szintkülönbség mérése befolyásolja döntően, több mint 70%-ban a számolt érték pontosságát, így ha a térfogatáramra kiszámolt érték hibakorlátjai túlságosan nagyok, akkor ennek a mérésnél kell nagyobb pontossági osztályú műszert alkalmazni.

4.3. Gyakorló feladatok

4.3.1. Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse az abszolút és a relatív hibafüggvényt!
2. Értelmezze az alábbi, műszerkönyvben található adatot:

   $$\pm 0,5\% \pm 2 \text{ digit} \,.$$

3. Mikor követhetünk el dinamikus hibát a mérés során?
4. Mi a különbség a véletlenszerű és a rendszeres hibák között?
5. Csoportosítsa a véletlenszerű hibákat!
6. Jellemezze a véletlen/kiugró/nagyságrendi hibákat!
7. Jellemezze a rendszeres hibákat!
8. Hogyan lehet kimutatni a rendszeres hibát?
9. Milyen típusai vannak a rendszeres hibáknak?
10. Mi az a v-teszt? Mikor alkalmazható?
11. Adja meg a pontossági osztály definícióját!
12. Mi a konvencionális érték egy analóg ampermérő és egy digitális stopper esetében?
13. Mi az az abszolút hibakorlát és a relatív hibakorlát?
14. Hogyan vesszük figyelembe a mérési hibák terjedését, ha az elvégzett művelet szorzás, illetve kivonás?
15. Ha többlépéses számolás végeredményeként túl nagy hibakorlát jön ki, mit kell megvizsgálni?

4.3.2. Feladatok

1. Nyomásmérővel mérjük egy gőzvezeték nyomását. A digitális kijelzésű eszköz méréstartománya 0,0 $\div$ 400,0 kPa, pontossága 1% $\pm$2 digit. Mekkora a relatív hibája a 60,0 kPa, illetve a 330,0 kPa értékek mérésének?

2. Árammérővel mérjük az áramerősséget. A digitális kijelzésű eszköz méréstartománya 0,00 A $\div$ 10,00 A, pontossága 1% $\pm$3 digit. Mekkora a relatív hibája a 6,05 A, illetve a 3,30 A értékek mérésének?

3. Feszültségmérővel mérünk, melynek méréstartománya 0,000 $\div$ 24,000 V, pontossága 0,1% 2 osztás. Mekkora a relatív hibája az 5,258 V, illetve a 12,005 V értékek mérésének?

4. Egy mérési sorozat eredményeként a következő értékeket kaptuk:

   731,5 g   731,0 g   731,5 g   732,0 g   731,5 g .

   – A mérési sorozat adatai alapján határozza meg a véletlenszerű hiba típusának meghatározásához szükséges értékeket!
   – A kapott eredményeket felhasználva minősítse véletlenszerű hiba szempontjából a következő mérési eredményeket:

     730,0 g   732,5 g   734,0 g .

5. Határozza meg egy téglatest felületét, és a számolt érték relatív és abszolút hibakorlátját, ha a következő elemi méréseket a következő módon végeztük el:
   a téglatest méreteit egy 1 m-es hosszúságú 0,2 pontossági osztályú mérőszalaggal mértük le és az eredmények rendre 0,5 m, 0,3 m, 0,2 m voltak.

6. Egy kocka élhosszát 0,2-es pontosságú, 1 méter hosszú mérőszalaggal méri meg, és az eredmény 20 cm. A tömegre egy 0,5-es pontosságú, 25 kg méréshatású mérleggel mérve, 16 kg-t kaptunk. Számolja ki a kocka sűrűségét és a számolt adat abszolút és relatív hibáját! Szükség esetén melyik mérést kellene pontosítani?

7. Határozza meg egy rúdnak a tömegét, és a számolt érték relatív és abszolút hibakorlátját, ha a következő elemi méréseket végeztük el:

   – a rúd hosszát egy 10 m-es hosszúságú 1,0 pontossági osztályú mérőszalaggal mértük le és az eredmény 3,7 m volt;
   – a rúd átmérőjét egy 180 mm-es hosszúságú 0,2 pontossági osztályú tolómérővel mértük le és az eredmény 54 mm volt;
   – a sűrűség értéke 4,72 g/cm^3 (pontos adat).

8. Határozza meg egy utazás várható üzemanyagigényét, és a számolt érték relatív és abszolút hibakorlátját, ha a következő elemi méréseket végeztük el:

   – az átlagfogyasztás meghatározásához 665 km-es utat teszünk meg, és 34,2 litert tankolunk;
   – a km-számláló pontossági osztálya 0,5; az alapul vett konvencionális érték 1000 km;
   – a benzinkút pontossági osztálya 0,1; az alapul vett konvencionális érték 100 liter;

– a megtenni kívánt út 1100 km, melynek mérését ugyanazzal a km-számlálóval végeztük.

9. Egy szobát akar kifesteni (csak a négy oldalfalat). A szükséges anyagmennyiség meghatározásához a következő adatok állnak a rendelkezésére:

   – A szoba méreteit egy 3 m-es hosszúságú 0,5 pontossági osztályú mérőszalaggal mértük le és az eredmények rendre hosszúság: 4,5 m (mérés két részletben!), szélesség 2,8 m, magasság 2,6 m voltak.
   – A festékigény 10 $\mathrm{l/m^2}$ (pontos adatnak tekinthető!).

   Hány liter festékre lesz szüksége?

4.3.3. Megoldások

1. A 60,0 kPa leolvasásának relatív hibája 1,33%, 330,0 kPa leolvasásáé 1,06%.
2. A 6,05 A leolvasásának relatív hibája 1,50%, 3,30 A leolvasásáé 1,91%.
3. Az 5,258 V leolvasásának relatív hibája 0,138%, 12,005 V leolvasásáé 0,116%.
4. A mérések átlaga 731,5 g, tapasztalati szórása 0,35 g. A 730,0 g mérési adat kiugró hibával, a 732,5 g véletlen hibával, a 734,0 g pedig nagyságrendi hibával terhelt.
5. A felület számolt értéke $F = 0,62\ \mathrm{m^2}$, az abszolút hibakorlát $H_F = 0,01\ \mathrm{m^2}$, a relatív hibakorlát $h_F = 1,29\%$.
6. A kocka anyagának sűrűsége $\rho = 2000\ \mathrm{kg/m^3}$, a relatív hibakorlát $h_A = 3,78\%$, az abszolút hibakorlát $H_A = 75,63\ \mathrm{kg/m^3}$.
7. A rúd súlya $m = 39,98$ kg, a számolt érték relatív hibakorlátja $h_m = 1,60\%$, abszolút hibakorlátja $H_m = 0,64$ kg.
8. A szükséges üzemanyag mennyisége 56,6 liter, az abszolút hibakorlát 0,85 liter, a relatív hibakorlát 1,5%.
9. A szükséges festék mennyisége 379,6 liter, az abszolút hibakorlát 4,5 liter, a relatív hibakorlát 1,2%.

5. fejezet

Paraméteres statisztikai próbák

5.1. Elméleti áttekintés

5.1.1. u-próba

Legyen adott egy normális eloszlású sokaság, melynek ismert a varianciája, azaz az elméleti szórásnégyzete. A cél a sokaság *várható értékére* tett feltevés igazolása. Ezt a feltevést az úgynevezett *nullhipotézis* vagy *állító hipotézis* segítségével fogalmazzuk meg. A próbával tehát azt ellenőrizzük, hogy a mért adatok alátámasztják-e ezt a hipotézist vagy ellentmondanak-e annak. Ha a cél a sokaság várható értékének (μ) egy konkrét, elvárt értékkel való egyezősége, akkor a nullhipotézist a következő alakban adjuk meg:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \ .$$

Az ellenhipotézis vagy alternatív hipotézis ekkor a következő lesz:

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \ .$$

A hipotézis-vizsgálatnak ezt az esetét kétoldalas próbának nevezzük, mivel mind a $\mu > \mu_0$, mind a $\mu < \mu_0$ esetet lehetségesnek tartjuk. A H_0 hipotézist pedig csak akkor fogadjuk el, ha a próba alkalmazása során kapott érték az előre megadott érték körüli, általában szűk, szimmetrikus tartományba esik. A próba menete a következő:

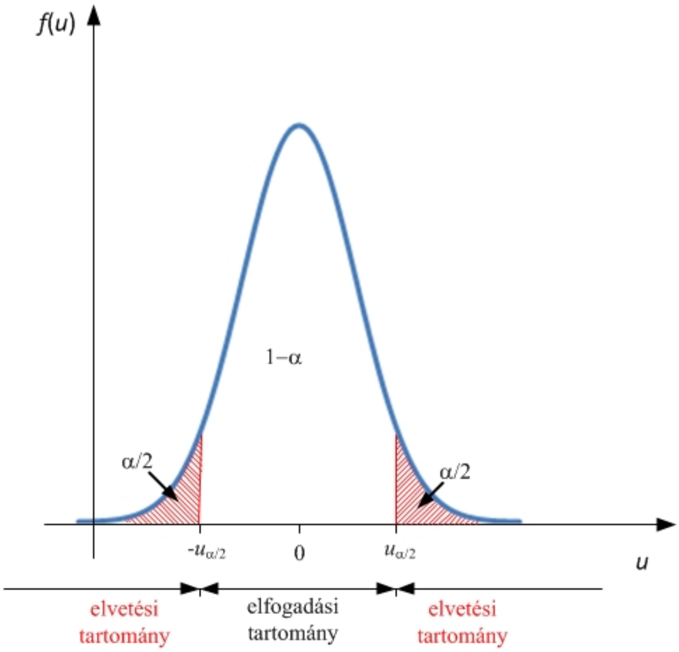
1. Legyen adott a vizsgálandó, ismert σ szórású sokaságból vett, n elemű minta: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A minta átlaga $\bar{x}$ alapján meghatározzuk u_0 próbastatisztika értékét

   $$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ .$$

   Az u_0 próbastatisztika kifejezése nem feltétlenül azonos az $N(0,1)$ eloszlású u standard normális eloszlású valószínűségi változóéval, mert μ helyett μ_0 szerepel benne. Csak akkor lesz az, ha $\mu = \mu_0$, azaz, ha a H_0 hipotézis igaz. Átalakítva a próbastatisztika értékére felírt kifejezést:

   $$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{(2)} \ .$$

   Az első tag (1) definíció szerint u-eloszlású, míg a második tag (2) az attól való eltérést fejezi ki.



5.1. ábra. Nullhipotézis elfogadási/elvetési tartományai kétoldalas próba esetén

2. Az u-eloszlás táblázata alapján kiszámítjuk, hogy az u_0 próbastatisztika nagy $(1-\alpha)$ valószínűséggel milyen intervallumba esik. Ha H_0 igaz (azaz a kifejezés 2. tagja zérus), akkor ez lesz az elfogadási tartomány. Kétoldalas (ellen)hipotézis esetén:
$$P\left(-u_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq u_{\alpha/2}\right) = P\left(\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq u_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha \ .$$
Mivel a táblázatban az $F(u)$ eloszlásfüggvény értékei találhatók, ezért a táblázat belsejében $1-\alpha/2$ értéket kikeresve kapjuk meg $u_{\alpha/2}$ értékét.

3. Megvizsgáljuk, hogy a próbastatisztika számolt értéke u_0 az elfogadási tartományon belül van-e! Ha H_0 igaz, akkor u_0 nagy, pl. $1-\alpha = 0.95$ valószínűséggel a $(-u_{\alpha/2}, u_{\alpha/2})$ elfogadási tartományban van, és csak kis $(\alpha = 0.05)$ valószínűséggel esik azon kívülre, az elutasítási tartományba.

4. Így, ha az u_0 számított érték az $1-\alpha$ valószínűséghez tartozó elfogadási tartományba esik, akkor a H_0 hipotézist *elfogadjuk*, míg ha a próbastatisztika értéke azon kívülre, az elutasítási tartományba esik, akkor *elutasítjuk*.

A nullhipotézis elfogadási tartománya az 5.1 ábrán látható.

Az u-próba lényege tehát a próbastatisztika számlálójában szereplő minta átlagértéke és a mérendő mennyiség várható értéke közti különbség vizsgálata a nevezőben szereplő ingadozás figyelembevételével:
$$u_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ .$$
Ha a számlálóbeli eltérés csak véletlen ingadozással magyarázható, azaz véletlen mérési hibák okozzák, akkor az eredmény nagy, $1-\alpha$ valószínűséggel az elfogadási intervallumba esik, és

ezért a H_0 hipotézist elfogadhatjuk. Ha az eltérés meghaladja az elfogadható mértéket, azaz az eredmény az elutasítási intervallumba esik, akkor elutasítjuk a H_0 hipotézist. α adja meg annak valószínűségét, hogy ugyan a H_0 hipotézis igaz, de mégis elutasítjuk. Az α valószínűség a próba *szignifikanciaszintje*, melyet mindig a döntéssel együtt kell megadni. Előfordulhat, hogy a különbség 0,05-os szinten szignifikáns, a 0,01-os szinten nem, azaz a H_0 hipotézist $\alpha_1 = 0,05$ szinten elutasítjuk, míg $\alpha_2 = 0,01$ esetén elfogadjuk. Az $1-\alpha$ valószínűséget a próba *konfidenciaszint*jének nevezzük.

Az előzőekben olyan állítás igazságát vizsgáltuk, mely szerint a sokaság várható értéke megegyezik-e egy adott értékkel. Vannak olyan esetek, amikor azt szeretnénk megtudni, hogy a sokaság várható értéke elér-e egy adott értéket, vagy nem halad-e meg egy előírt határértéket. Ezeket az eseteket egyoldalas statisztikai próbának nevezzük, és a vizsgálandó állításokat a következő módon írhatjuk fel:

– ha a vizsgálat célja annak eldöntése, hogy a sokaság várható értéke nem halad meg egy előírt értéket:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu \le \mu_0 \\ H_1 &: \mu > \mu_0 \; ; \end{aligned}$$

– ha a vizsgálat célja annak eldöntése, hogy a várható érték nagyobb vagy egyenlő, mint az előírt érték:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu \ge \mu_0 \\ H_1 &: \mu < \mu_0 \; . \end{aligned}$$

Ekkor azt vizsgáljuk, hogy a

$$u_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \underbrace{\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{*}$$

kifejezésben a *-gal jelölt második tag értéke, hogy befolyásolja az u_0 próbastatisztika értékét. Ha a H_0 állító hipotézisünk igaz, akkor az első esetben, vagyis amikor a várható érték nem haladhat meg egy megadott értéket, akkor a második tag értékének nullának vagy negatívnak kell lennie. A fordított célú vizsgálatnál a második tag értéke nulla vagy pozitív lehet H_0 elfogadásához. A próba menete hasonló a kétoldalas próbához:

– kiszámoljuk a példa adatai alapján u_0 -t;

– a táblázatból a megadott α szignifikanciaszinthez kikeressük a határértéket.

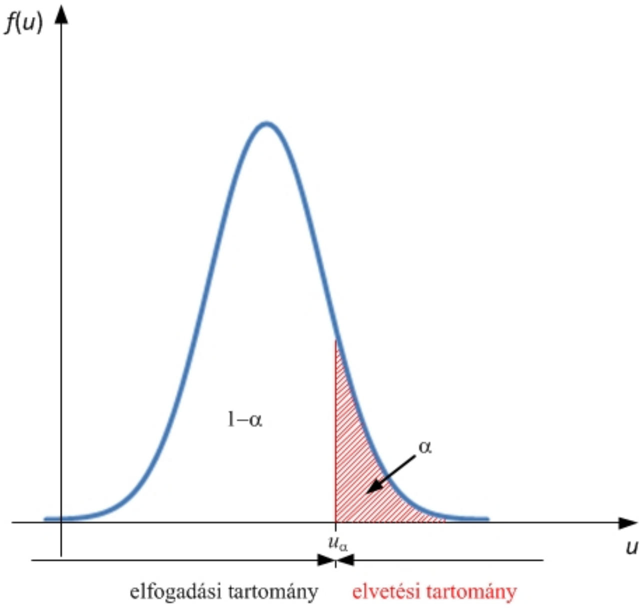
– Az elfogadási tartományok a következők lesznek:
  1. eset (a várható érték nem halad meg egy megadott értéket):

$$P\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le u_\alpha\right) = 1-\alpha \quad \text{azaz} \quad u_0 \in (-\infty, u_\alpha] \; .$$

  2. eset (a várható érték nagyobb, mint egy megadott érték):

$$P\left(-u_\alpha \le \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \quad \text{azaz} \quad u_0 \in [-u_\alpha, \infty) \; .$$

  Az 1. esetben, az úgynevezett jobb oldali ellenhipotézis esetén az elfogadási/elvetési tartományok a 5.2 ábrának megfelelően alakulnak.



5.2. ábra. Elfogadási tartomány jobb oldali ellenhipotézis esetén

5.1.2. Első- és másodfajú hiba

Minden statisztikai próbánál kétféle hiba követhető el:

– elvetjük H_0 állító hipotézist, pedig igaz,

– elfogadjuk H_0 hipotézist, pedig nem igaz.

Az első esetben *elsőfajú hibá*ról, a másodikban *másodfajú hibá*ról beszélünk.

	Döntés: H_0-t	
H_0	elfogadjuk	elutasítjuk
igaz	helyes	elsőfajú hiba
nem igaz	másodfajú hiba	helyes

Annak valószínűsége, hogy elsőfajú hibát követünk el: α, mert α valószínűsége annak, hogy H_0 állító hipotézis igazsága mellett a próbastatisztika az elutasítási tartományba esik:

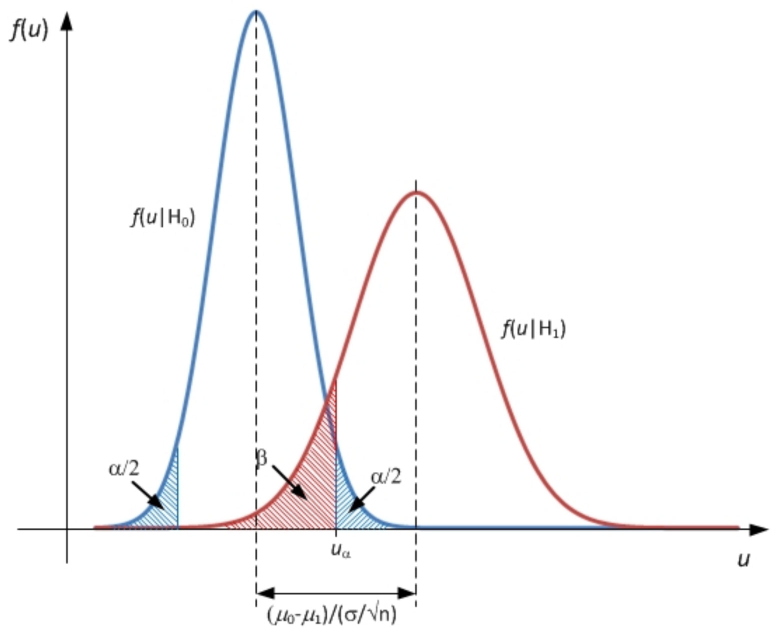
$$P\left(|u_0| > \mu_{\alpha/2} | H_0\right) = \alpha \ .$$

A másodfajú hiba valószínűségét egy olyan H_1 alternatív hipotézisre lehet megadni, amely a H_0 hipotézistől a feladat megszabta műszaki szempontok alapján elegendően nagy, eltérő állítást tartalmaz:

$$H_1 : \mu = \mu_1 \ .$$

Ha H_0 helyett H_1 igaz, akkor az u_0 próbastatisztika sűrűségfüggvénye az u-eloszláshoz képest a $\mu_1 - \mu_0$ különbség nagyságának függvényében eltolódik:

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ .$$



5.3. ábra. A másodfajú hiba valószínűsége

Másodfajú hibáról beszélünk tehát, ha a H_0 állító hipotézist elfogadjuk, pedig nem igaz, vagyis a H_1 ellenhipotézis igaz, de nem azt fogadjuk el. Ennek bekövetkeztét, azaz a másodfajú hiba valószínűségét β-val jelöljük. A másodfajú hiba elkövetésének valószínűsége annál kisebb, minél távolabb van a H_0 hipotézisben megadott μ_0 várható érték, az ellenhipotézisbeli μ_1 várható értéktől. Azaz minél nagyobb az eltérés, a hipotézisekben szereplő várható értékek között, annál kisebb a valószínűsége, hogy ez a különbség észrevétlen maradjon. β értéke:

– nő, ha a variancia (σ^2) növekszik;

– csökken, ha a minta elemszámát (n-t) növeljük;

– nő, ha α-t csökkentjük.

Másképpen megfogalmazva: minél kisebb a minta információtartalma, azaz minél nagyobb a szórás és minél kisebb a minta elemszáma, annál nagyobb lesz a másodfajú hiba β valószínűsége. A 5.3 ábrán látható, hogyan függ β a felsorolt tényezőktől.

Összefoglalva:

– Ha u_0 kívül van az α-hoz meghatározott elfogadási tartományon, akkor H_0-t elutasítjuk. Ekkor

  – α lesz annak valószínűsége, hogy H_0-t elutasítjuk, pedig igaz;

  – és α-t csökkentve ez a kockázat is csökkenthető.

– Ha H_0-t elfogadjuk, az nem jelenti azt, hogy igaz is, inkább azt, hogy *nincs elégséges információnk az elutasításhoz*! Ennek kockázatát adja meg a másodfajú hiba.

Jelölje Δ a várható értékek közötti, a feladat műszaki szempontjából lényeges különbséget, vagyis a várható értékek közötti kimutatandó eltérést:

$$\Delta = \mu_1 - \mu_0 \ .$$

Határozzuk meg ehhez β-t, vagyis annak valószínűségét, hogy Δ nagyságú eltérést nem veszünk észre. Adott α mellett β az ellenhipotézistől és a $\sigma/\sqrt{n}$ kifejezés értékétől függ. Ismert α, β, Δ és σ értékek függvényében az elvégzendő párhuzamos mérések száma meghatározható.

Ha az ellenhipotézist $H_1 : \mu_i > \mu_0$ alternatívák sorozataként adjuk meg, akkor a másodfajú hiba β valószínűsége függvény lesz, melynek maximuma a $\mu_1 = \mu_0$ helyen van, és ezt a próba *erőfüggvényé*nek nevezzük. β értékét szokás a $\mu_1 - \mu_0$ függvényében ábrázolni, és így megkapjuk a próba *működési jelleggörbéjé*t (OC-görbe).

5.1.3. χ^2-próba

A χ^2-próba a variancia, azaz az elméleti szórásnégyzet vizsgálatára alkalmazható. A cél tehát a vizsgált normális eloszlású sokaság ismeretlen σ^2 varianciájára vonatkozó H_0 hipotézis ellenőrzése.

A megoldás menete:

– Végezzünk el n számú mérést, azaz vegyünk n elemű mintát a vizsgálandó sokaságból.

– Határozzuk meg a minta (korrigált) tapasztalati szórásnégyzetét, s^2-t.

– Az állító hipotézisünk

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \ ,$$

azaz az állító hipotézis alapján azt kívánjuk ellenőrizni, hogy a műszernek a mérések alapján becsült elméleti szórásnégyzete (σ^2) megfelel-e a műszerkönyvben megadott értéknek (σ_0^2).

Miután a szórás esetében általában az jelent gondot, ha a megadott határértéknél (σ_0^2) nagyobb, ezért az ellenhipotézist adjuk meg a következő módon:

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \ .$$

Ez viszont azt jelenti, hogy az állító hipotézist is módosítani kell:

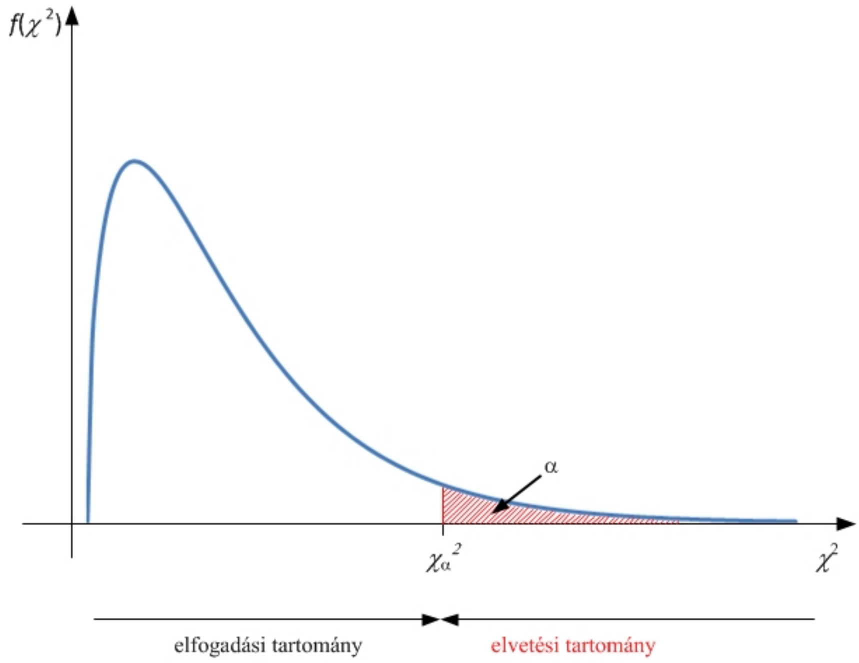
$$H_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2 \ .$$

Ha a H_0 hipotézis igaz, akkor a következő kifejezés χ^2-eloszlású $\nu = n-1$ szabadsági fokkal:

$$\chi_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \ .$$

– Megadva az α szignifikanciaszintet, annak valószínűsége, hogy a χ_0^2 próbastatisztika aktuális értéke az elfogadási tartományba esik $1-\alpha$:

$$P(\chi_0^2 \le \chi_\alpha^2) = P\left(\frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \le \chi_\alpha^2\right) = 1 - \alpha \ .$$



5.4. ábra. Elfogadási és elutasítási tartomány χ^2 próba esetében

Ennek alapján elfogadjuk a H_0 állító hipotézist, ha a próbastatisztika értéke kisebb a küszöbértéknél:

$$\frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \leq \chi_\alpha^2 \ ,$$

és elutasítom, ha nagyobb annál:

$$\frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2 \ .$$

Az elfogadási és elutasítási tartomány a sűrűségfüggvény alapján az 5.4 ábrán látható.

Ha H_0 igaz, akkor α a valószínűsége annak, hogy $\chi_0^2 > \chi_\alpha^2$. Ha H_1 igaz, akkor χ_0^2 eloszlása $\chi^2 \cdot \sigma^2/\sigma_0^2$ és mivel $\sigma^2 > \sigma_0^2$, így általában χ_α^2-nél nagyobb értéket vesz fel. Kis α-nál kisebb a valószínűsége, hogy χ_α^2-tól jobbra eső értéket vegyen fel a próbastatisztika értéke, tehát a $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ ellenhipotézis jobb oldali ellenhipotézis lesz.

5.1.4. F-próba

Két elméleti szórásnégyzet összehasonlítására, egyezőségének vizsgálatára az F-próba alkalmazható. A feladat tehát két, normális eloszlású sokaságból vett minta tapasztalati szórásnégyzetének összehasonlításával annak eldöntése, hogy a varianciák egyeznek-e. Az állító hipotézis

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \ .$$

Ha a két variancia azonos, akkor a szórásnégyzetek arányának eloszlása F-eloszlású, így a próbastatisztika:

$$F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = F^{\nu_1,\nu_2} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \ ,$$

ahol n_1 és n_2 a két minta elemszáma, $\nu_1 = n_1 - 1$ és $\nu_2 = n_2 - 1$ az s_1 ill. s_2 szórások szabadsági foka.
Így F_0 csak akkor F eloszlású, ha $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, ellenkező esetben attól lefelé ($\sigma_1^2/\sigma_2^2 < 1$) vagy felfelé ($\sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1$) eltér. Az egyoldalas ellenhipotézis a következő alakú:

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \ .$$

H_0-t akkor utasítjuk el, ha $s_1^2/s_2^2 > F_\alpha^{\nu_1,\nu_2}$

Kétoldalas ellenhipotézis esetén a H_1 hipotézis

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \ ,$$

és H_0-t akkor utasítjuk el, ha $s_1^2/s_2^2 < F_{1-\alpha/2}^{\nu_1,\nu_2}$ vagy $s_1^2/s_2^2 > F_{\alpha/2}^{\nu_1,\nu_2}$.

Írjuk a nagyobb tapasztalati szórást a számlálóba, azaz legyen $s_1^2 > s_2^2$, azaz $s_1^2/s_2^2 > 1$. Ekkor elég csak a felső határt ellenőrizni:

$$s_1^2/s_2^2 < F_{\alpha/2}^{\nu_1,\nu_2},$$

mivel ekkor biztos, hogy

$$s_2^2/s_1^2 > F_{1-\alpha/2}^{\nu_2,\nu_1}, \quad \text{ha} \ \ s_1^2 > s_2^2.$$

A kétoldalas próba szignifikanciaszintje nem $\alpha/2$ lesz, hanem α!

5.1.5. Egymintás t-próba

Az u-próbával ismert varianciájú sokaság esetében a minta értékeinek átlaga alapján következtetünk a sokaság várható értékére. A variancia meghatározásához nagy elemszámú mérési adatsor kell, ez viszont nem mindig áll rendelkezésre. A t-eloszlás hasonló az u-eloszláshoz, csak a variancia helyett a tapasztalati szórás szerepel benne. Így, ha nem áll rendelkezésre a minták hátterében lévő sokaság elméleti szórásnégyzete, akkor az u-próba helyett a t-próba alkalmazható.

Az egymintás t-próba teljesen analóg az u-próbával, csak a számolásnál a σ^2 variancia helyett az s^2 korrigált tapasztalati szórásnégyzetet alkalmazzuk. A feladat itt is annak ellenőrzése, hogy a várható érték megegyezik-e egy adott (pl. a mérések alapján meghatározott) értékkel.

Hipotézisek:

$$\begin{aligned} H_0 \quad &: \quad \mu = \mu_0 \quad \text{vagy} \quad H_0 : \mu - \mu_0 = 0 \\ H_1 \quad &: \quad \mu \neq \mu_0 \quad \text{vagy} \quad H_1 : \mu - \mu_0 \neq 0 \ . \end{aligned}$$

A próbastatisztika:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \ .$$

A kapott próbastatisztika értékét a t-eloszlás táblázatából vett t_α^ν értékkel vetjük össze, ahol α a próba szignifikanciaszintje, ν pedig a szabadsági fok, és $\nu = n - 1$, ahol n a mérési adatok száma.

A H_0 hipotézis elfogadása ugyanolyan módon történik, mint az u-próba esetében: ha a próbastatisztika értéke az elfogadási intervallumba esik $-t_{\alpha/2}^\nu \leq t_0 \leq t_{\alpha/2}^\nu$, akkor elfogadjuk a H_0 hipotézist α szignifikanciaszint mellett, ha nem, akkor elutasítjuk a H_0 hipotézist és H_1-t fogadjuk el.

5.1.6. Kétmintás t-próba

A kétmintás t-próba esetében a cél két, egymástól független minta mögött álló sokaság várható értékei egyezőségének vagy különbözőségének kimutatása. Ilyen eset például, ha két gyártósor által előállított termék tulajdonságát határozzuk meg ugyanazzal a mérőműszerrel vagy két különböző tanulócsoport teljesítményét mérjük ugyanazzal a teszttel. A lényeg tehát, hogy a minták egymástól függetlenek legyenek, de nyilván a vizsgált jellemző az ugyanaz, így feltételezhető, hogy a várható értékek megegyeznek. Alkalmazhatóságának feltétele, hogy a két minta mögött lévő sokaság varianciái megegyezzenek, melyet F-próbával kell igazolni.

Hipotézisek:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vagy} \quad H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 &: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{vagy} \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \ . \end{aligned}$$

A vizsgálathoz szükséges adatok:

- a két minta mérési adatai;
- n_1, n_2 a két minta elemszáma;
- s_1^2, s_2^2 a két minta korrigált tapasztalati szórása.

A megoldás menete:

1. Első lépésként a két minta mögötti két sokaság varianciájának egyezőségét kell ellenőrizni F-próba segítségével.
   - Ha teljesül, akkor folytatható a kétmintás t-próba.
   - Ha nem igazolható a két sokaság varianciájának egyezősége, akkor a kétmintás t-próba nem alkalmazható, más eljárással kell próbálkozni.
2. Legyen d az a valószínűségi változó, mely leírja a két minta várható értéke közötti különbséget:

   $$d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \ .$$

   Belátható, hogy d is normális eloszlású valószínűségi változó, melynek paraméterei:
   - várható értéke

     $$E(d) = E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = E(\bar{x}_1) - E(\bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2 \ ,$$

   - varianciája a minták függetlensége miatt

     $$Var(d) = Var(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = Var(\bar{x}_1) + Var(\bar{x}_2) = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \ .$$

3. Legyen s_d egy d-től független valószínűségi változó:

   $$s_d^2 = s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \ ,$$

ahol s^2 a minták közös tapasztalati szórásnégyzete, melyet a következő képlet segítségével határozhatunk meg:

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left(s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1) \right) \ .$$

s_d^2 kiszámításához azért célszerű az egyesített s^2-t alkalmazni, mert ennek szabadsági foka nagyobb, mint akár az s_1^2, akár s_2^2 szórásnégyzetéé, így kisebb kritikus érték tartozik hozzá.

4. Belátható, hogy az alábbi kifejezés t-eloszlású $\nu = n_1 + n_2 - 2$ szabadsági fokkal:

$$t = \frac{d - E(d)}{s_d} = \frac{d - E(d)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \ .$$

5. Legyen a vizsgálandó hipotézispár a következő:

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow E(d) = 0 \\ H_1 &: \ \mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow E(d) \neq 0 \ , \end{aligned}$$

azaz kétoldalas hipotézissel vizsgáljuk a várható értékek egyezőségét.

6. A próbastatisztika értékét a következő kifejezéssel határozhatjuk meg $\nu = n_1 + n_2 - 2$ szabadsági fok mellett:

$$t_0 = \frac{d - 0}{s_d} = \frac{d}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \ .$$

7. Ha a próbastatisztika értékére igaz, hogy

$$-t_{\alpha/2} < t_0 \leq t_{\alpha/2} \ ,$$

azaz az adott α szignifikanciaszint által meghatározott tartományba esik, akkor t-eloszlású, és így az átlagértékek különbözősége α szinten nem szignifikáns.

5.1.7. Páros t-próba

Páros t-próba alkalmazásánál tételezzük fel, hogy x és y két, normális eloszlású valószínűségű változó, melyekre igaz, hogy a két minta, amelyből x és y származik, nem független egymástól, de a méréskor elkövetett hibák igen. Ez az eset fordul elő akkor, ha ugyanannak az anyagnak a tömegét határozzuk meg két különböző mérlegen végzett, egyforma számú párhuzamos mérés segítségével, ugyanannak a közegnek a hőmérsékletét mérjük meg két különböző hőmérővel egyszerre, egymás után többször, vagy ugyanannak az anyagnak vizsgáljuk valamely tulajdonságát kezelés vagy változtatás előtt és után. A lényeg tehát, hogy ugyanazt a mennyiséget kell meghatároznunk két különböző mérőeszközzel vagy esetleg módszerrel.

A vizsgálat célja annak kimutatása, hogy van-e különbség a páronként elvégzett mérések között. Így az állító és az ellenhipotézis a következő lesz:

$$\begin{aligned} H_0 &: \ E(x_i) = E(y_i) \\ H_1 &: \ E(x_i) \neq E(y_i) \ , \end{aligned}$$

ahol i az összetartozó mérési adatpárok sorszáma. A felírt hipotézispárnak megfelelően általában kétoldalas próbát végzünk, de természetesen módosítható ez a hipotézisrendszer úgy is, hogy valamelyik műszer szisztematikusan kevesebbet/többet mér, mint a másik, azaz egyoldalas próba is elvégezhető.

A megoldás menete:

1. Legyen d az a valószínűségi változó, mely leírja a párhuzamosan végzett mérések, vagy minták közötti különbséget:

   $$d_i = x_i - y_i \ .$$

   Belátható, hogy d_i is normális eloszlású valószínűségi változó, melynek paraméterei:

   – várható értéke

   $$E(d_i) = E(x_i) - E(y_i) \ ,$$

   – szórása a mérési hibák (mint minták) függetlensége miatt

   $$Var(d_i) = Var(x_i) + Var(y_i) \ .$$

2. Végezzünk el n számú párhuzamos mérést mindkét műszerrel. A páronkénti eltérések átlagértékét és szórásnégyzetét a jól ismert definiáló összefüggések segítségével határozhatjuk meg:

   $$\begin{aligned} \bar{d} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \\ s_d^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1} \ . \end{aligned}$$

3. Belátható, hogy az alábbi kifejezés t-eloszlású $\nu = n-1$ szabadsági fokkal:

   $$t_0 = \frac{\bar{d} - E(\bar{d})}{s_d/\sqrt{n}} \ .$$

4. Ha a H_0 hipotézis igaz, akkor $E(\bar{d}) = 0$, így a próbastatisztika:

   $$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} \ .$$

5. Ha a próbastatisztika értékére igaz, hogy

   $$-t^{\nu}_{\alpha/2} \le t_0 \le t^{\nu}_{\alpha/2},$$

   azaz az adott α szignifikanciaszint és ν szabadsági fok által meghatározott tartományba esik, akkor elfogadjuk a H_0 hipotézist. Annak valószínűsége, hogy rossz döntést hoztunk, azaz t_0 benne van a $[-t^{\nu}_{\alpha/2}, t^{\nu}_{\alpha/2}]$ tartományban, de a H_0 hipotézis nem igaz α lesz.

5.2. Kidolgozott feladatok

5.2.1. u-próba

1. Egy töltőgép működését kívánja ellenőrizni, azaz, hogy ténylegesen a ráírt mennyiség van-e a zacskókban. Ehhez vesz 10 darab 0,5 kg-osnak megadott csomagot és leméri a tömegüket. Az eredmények:

   490 g 505 g 490 g 500 g 495 g 505 g 490 g 510 g 495 g 505 g .

   (a) Végezze el az ellenőrzést, ha a szabvány szerinti megengedett átlag körüli ingadozás 2 g és a szignifikanciaszint 5%.

   (b) Végezze el az ellenőrzést 1%-os szignifikanciaszint mellett is!

   (c) Határozza meg, hogy milyen tartományba kell esnie a minták átlagának 5%-os szignifikanciaszint mellett, hogy a zacskók tömege várható értéke az előírtnak megfeleljen!

   A megoldás menete:

   A feladat a zacskók tömegének várható értéke és az előírt érték egyezőségének ellenőrzése a szórás ismeretében, tehát a megoldáshoz a kétoldalas u-próbát alkalmazhatjuk. Az ellenőrzést a 10 véletlenszerűen kiválasztott minta segítségével végezzük el.

   Első lépésként írjuk fel a vizsgálandó hipotézispárt:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 = 500 \text{ g} \\ H_1 &: \mu \neq \mu_0 = 500 \text{ g} . \end{aligned}$$

   Számítsuk ki a minták átlagát:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 498,5 \text{ g} .$$

   Az elméleti szórás értéke a feladat szerint $\sigma = 2$ g, így a próbastatisztika értéke:

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{498,5 - 500}{2/\sqrt{10}} = -2,3717 .$$

   $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint és kétoldalas próba esetén az u-eloszlás táblázata alapján a kritikus érték $u_{\alpha/2} = 1,96$. A H_0 hipotézis elfogadási tartománya tehát:

$$-1,96 \leq u_0 \leq 1,96 .$$

   Miután a példa adatai alapján számolt u_0 próbastatisztika-érték nincsen benn ebben a tartományban, így elvetjük a H_0 hipotézist, azaz a csomagok tömegének várható értéke nem egyezik meg az előírt értékkel.

   Ha a szignifikanciaszintet $\alpha = 1\%$-ra csökkentjük, akkor a kritikus érték $u_{\alpha/2} = 2,58$ lesz, azaz a próbastatisztika értéke benne lesz az elfogadási tartományban, így elfogadjuk a H_0 hipotézist.

   A 10 elemű minta alapján az a tartomány, melybe a H_0 hipotézis elfogadásához a minták átlagának esnie kell $\alpha = 5\%$-os szignifikanciaszint esetén:

$$P(\mu_0 - u_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} < \bar{x} \leq \mu_0 + u_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

$$P(500 - 1,96 \cdot 2/\sqrt{10} < \bar{x} \leq 500 + 1,96 \cdot 2/\sqrt{10}) = 1 - 0,05$$
$$P(498,8 < \bar{x} \leq 501,2) = 0,95 \ .$$

Tehát a 10 elemű minta esetén a minták átlagának 498,8 és 501,2 g között kell lennie, hogy az előírt értékkel való egyezőséget 5%-os szignifikanciaszinten elfogadjuk.

2. Lakott területen kívül vezet és traffipaxszal bemérik. A készülék hét mérést végez, ezek eredményei:

   102, 101, 102, 99, 100, 98 és 97 km/h .

   (a) $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett döntse el, hogy megbüntetik-e a megengedett 90 km/h sebesség legalább 10%-kal való túllépéséért! A mérési módszer varianciája $1,69$ km^2/h^2.
   (b) Milyen tartományba kell esni a sebesség átlagának, hogy ne büntessék meg $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett?
   (c) Mi lesz a döntés, ha a szignifikanciaszintet $\alpha = 0,01$-re csökkentjük?
   (d) Mi lesz a szignifikanciaszintnek az a határértéke, amelynél éppen nem büntetik meg?

   A megoldás menete:

   A feladat megfogalmazása alapján látható, hogy egyoldalas u-próbát kell elvégezni. u-próbát, mivel a várható értéket akarjuk meghatározni az elméleti szórásnégyzet ismeretében, és egyoldalast, hiszen azt kell eldönteni, hogy ez a várható érték meghalad-e egy határértéket, vagy sem. Írjuk fel először a vizsgálandó hipotézispárt:

$$H_0 \ : \ \mu \leq \mu_0 = 99 \text{ km/h}$$
$$H_1 \ : \ \mu > \mu_0 = 99 \text{ km/h} \ .$$

   A μ_0 érték megadásánál figyelembe vettük a 10%-os megengedett határérték-túllépést. Számítsuk ki a minták átlagát:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7} = 99,9 \text{ km/h} \ .$$

   A variancia, azaz az elméleti szórásnégyzet értéke a feladat szerint $\sigma^2 = 1,69$ km^2/h^2, így a próbastatisztika értéke:

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{99,9 - 99}{\sqrt{1,69}/\sqrt{7}} = 1,74 \ .$$

   $\alpha = 0,05$ szignifikancia érték és egyoldalas próba esetén az u-eloszlás táblázata alapján a kritikus érték $u_\alpha = 1,65$. A H_0 hipotézis elfogadási tartománya tehát:

$$u_0 \leq 1,65 \ .$$

   Miután a számolt próbastatisztika értéke ennél a határértéknél nagyobb, így büntetés várható. A sebesség megengedett legnagyobb értéke, aminél még éppen nem büntetnek meg, ha a mérések száma 7, és a szignifikanciaszint $\alpha = 0,05$:

$$P(\bar{x} \leq \mu_0 + u_\alpha \cdot \sigma/\sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

$$P(\bar{x} \leq 99 + 1,65 \cdot \sqrt{1,65}/\sqrt{7}) = 1 - 0,05$$
$$P(\bar{x} \leq 99,81) = 0,95 \ ,$$

azaz nem büntetnek meg, ha a 7 sebességmérés átlaga nem haladja meg a 99,8 km/h-t. Ha a szignifikanciaszintet $\alpha = 0,01$-re csökkentjük, akkor a H_0 hipotézis elfogadási határa $u_\alpha = 2,33$ lesz, így ezen a szignifikanciaszinten már elfogadjuk a H_0 hipotézist, azaz elkerüljük a büntetést. Azt a szignifikanciaszintet, melyen éppen elfogadjuk a H_0 hipotézist úgy határozhatjuk meg, hogy megnézzük, milyen érték tartozik az u-eloszlás táblázatában az 1,74-hez:

$$\Phi(1,74) = 0,95637 \ ,$$

így az elfogadás határ szignifikanciaszintje:

$$1 - 0,95637 = 0,04363 \ ,$$

tehát a feladatban megadott mérési eredmények esetében 4,4 %-os vagy ennél kisebb szignifikanciaszintnél tudjuk a H_0 hipotézist elfogadni.

3. Egy vizsgálati anyagban az egyik komponensnek legalább 5%-os arányúnak kell lennie. 3 párhuzamos mérést végzünk el, melyek eredményei:

   4,81%   4,56%   4,77% .

   A meghatározás varianciája: 0,09. Teljesül-e a mérések alapján a komponensre tett előírás? Milyen módosítást kellene esetleg végezni az ellenőrzésen?

   A megoldás menete:

   A feladat megfogalmazása alapján belátható, hogy ebben a példában is egyoldalas u-próbát kell elvégezni, a várható értékről kell eldönteni, hogy elér-e, illetve meghalad-e egy előírt határértéket az elméleti szórásnégyzet ismeretében. Írjuk fel először a vizsgálandó hipotézispárt:

$$H_0 \ : \ \mu \geq \mu_0 = 5\%$$
$$H_1 \ : \ \mu < \mu_0 = 5\% \ .$$

   A hipotézispárból látható, hogy ebben az esetben bal oldalas próbát kell elvégezni. Számítsuk ki a minták átlagát:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{3} = 4,71\% \ .$$

   A variancia, azaz az elméleti szórásnégyzet értéke a feladat szerint $\sigma^2 = 0,09$, így a próbastatisztika értéke:

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{4,71 - 5}{\sqrt{0,09}/\sqrt{3}} = -1,655 \ .$$

   $\alpha = 0,05$ szignifikanciaérték és egyoldalas próba esetén az u-eloszlás táblázata alapján a kritikus érték $u_\alpha = -1,65$ lesz, ahol a negatív előjel utal a próba bal oldalas jellegére. A H_0 hipotézis elfogadási tartománya tehát:

$$-1,65 \leq u_0 \ .$$

Miután a számolt próbastatisztika értéke ennél a határértéknél éppen kisebb, ezért a H_0 hipotézist elutasítjuk. Ugyanakkor érezhető, hogy az elfogadás/elutasítás kérdése ilyen, a határértékhez közeli esetben meglehetősen bizonytalan. Éppen ezért, ha a próbastatisztika értéke közelítőleg megegyezik a határértékkel adott szignifikanciaszint mellett, akkor két dolgot tehetünk:

– Csökkentjük a szignifikanciaszintet. Ez azonban a másodfajú hiba valószínűségét növeli, tehát nagyobb lesz annak esélye, hogy elfogadjuk az állító hipotézisünket, pedig nem igaz.
– További vizsgálatokat végzünk. Ha a mérést csak véletlen hiba terheli, akkor azok hatása egyrészt a mérések átlagában egyre kevésbé jelentkezik, másrészt a növekvő mérésszám hatására a próbastatisztika értéke is változni fog, ami segíti a megfelelő hipotézis elfogadását.

4. Vizsgáljuk meg újra az 1. mintapélda adatait, mely szerint egy töltőgép működését ellenőrizzük, hogy a ráírt mennyiség kerül-e csomagolásra. Ebben az esetben 5 darab 0,5 kg-os csomagot választunk ki mintaként, melyek tömegei:

490 g   505 g   490 g   500 g   495 g .

Legyen most az átlag körüli ingadozás 5 g!

(a) Végezzük el a vizsgálatot 5%-os szignifikanciaszint mellett.
(b) Vizsgáljuk meg, hogy mekkora lesz a másodfajú hiba valószínűsége, ha az alultöltés határértékét 495 g-ban határozzuk meg!

A megoldás menete:

A feladat első részének megoldásához a kétoldalas u-próbát alkalmazhatjuk.

A vizsgálandó hipotézispár:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 = 500 \text{ g} \\ H_1 &: \mu \neq \mu_0 = 500 \text{ g} . \end{aligned}$$

A minták átlagát:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = 496 \text{ g}$$

A szórás értéke a feladat szerint $\sigma = 5$ g, így a próbastatisztika értéke:

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{496 - 500}{5/\sqrt{5}} = -1,789 .$$

$\alpha = 0,05$ szignifikanciaérték és kétoldalas próba esetén az u-eloszlás táblázata alapján a kritikus érték $u_{\alpha/2} = 1,96$. A H_0 hipotézis elfogadási tartománya tehát:

$$-1,96 \leq u_0 \leq 1,96 .$$

Miután a példa adatai alapján számolt u_0 próbastatisztika-érték ebben az esetben benne van a tartományban, így elfogadjuk a H_0 hipotézist, azaz a csomagok tömegének várható értéke megegyezik az előírt értékkel.

A másodfajú hiba meghatározásához használjuk fel, hogy alultöltöttnek mondjuk a csomagolást, ha a várható érték 495 g vagy kevesebb. Erre az esetre a hipotézispárt a következő módon írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu \geq \mu_0 = 500 \text{ g} \\ H_1 &: \mu \leq \mu_1 = 495 \text{ g} \ . \end{aligned}$$

A másodfajú hiba annak valószínűségét adja meg, hogy az u_0 próbastatisztika-érték az elfogadási tartományba esik, de a H_0 hipotézis nem igaz, hanem a H_1 hipotézis igaz:

$$\beta = P(-u_{\alpha/2} < u_0 < u_{\alpha/2} | H_1) \ .$$

Ha a H_1 hipotézis igaz, akkor u_0 nem u-eloszlású, azaz az u_0 alábbi behelyettesítésében:

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

az első tag lesz u-eloszlású és az ettől való eltérést leíró második tag nemcsak a véletlen hibák okozta ingadozás hatását tartalmazza. Visszahelyettesítve ezt a másodfajú hiba meghatározásába:

$$\begin{aligned} \beta &= P(-u_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{\alpha/2} | \mu = \mu_1) = \\ &= P(-u_{\alpha/2} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < u < u_{\alpha/2} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}) = \\ &= P(-1,96 - \frac{495 - 500}{5/\sqrt{5}} < u < 1,96 - \frac{495 - 500}{5/\sqrt{5}}) = \\ &= P(0,27 < u < 4,196) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0,27 < u) &= 1 - \Phi(0,27) = 1 - 0,6064 = 0,3936 \\ P(u < 4,196) &\approx 1 \end{aligned}$$

Így

$$\beta = P(0,27 < u < 4,196) = P(u < 4,196) - P(0,27 < u) = 1 - 0,3936 = 0,6064$$

azaz annak valószínűsége, hogy másodfajú hibát követünk le 60,6%.

A másodfajú hiba nagy valószínűsége annak következménye, hogy a kimutatandó különbség és a szórás megegyezik. Ha kimutatandó különbséget 10 grammra növeljük, akkor a másodfajú hiba valószínűsége 0,6%-ra csökken.

5.2.2. χ^2-próba

1. Egy műszer bizonytalanságát vizsgáljuk. A műszerrel elvégzünk adott számú mérést:

320 g 317 g 320 g 324 g 319 g 321 g 319 g .

Vizsgálja meg $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy igaz-e a műszerkönyv állítása, mely szerint a műszer varianciája $2,00$ g^2!

A megoldás menete:

A feladat a műszer varianciájának ellenőrzése, azaz, hogy a mintákból meghatározott tapasztalati szórásnégyzet értéke alapján elfogadható-e a műszerkönyvben megadott gyári érték a megadott szignifikanciaszint mellett. A vizsgálandó hipotézisek:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma^2 \le \sigma_0^2 = 2 \text{ g}^2 \\ H_1 &: \sigma^2 > \sigma_0^2 = 2 \text{ g}^2 \ . \end{aligned}$$

A próba elvégzéséhez első lépésként határozzuk meg a minta tapasztalati szórását:

$$\begin{aligned} n &= 7 \quad \text{(a párhuzamos mérések száma)} \\ \bar{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 320 \text{ g} \\ s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = 4,6666 \text{ g}^2 \ . \end{aligned}$$

A próbastatisztika értéke:

$$\chi_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} = 14,00 \ .$$

A kritikus χ_t^2 értéket a χ^2 eloszlás táblázatból határozhatjuk meg a szabadsági fok ($\nu = n - 1 = 6$) és a szignifikanciaszint ($\alpha = 0,05$) figyelembevételével:

$$\chi_\alpha^2 = 12,592 \ .$$

Miután

$$\chi_0^2 = 14,00 \not< \chi_\alpha^2 = 12,592 \ .$$

azaz a műszer által mért értékek ingadozása nem felel meg a műszerkönyvben megadottaknak, hanem annál nagyobb, $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett.

Vegyük észre, hogy az u-próbához hasonlóan, a szignifikanciaszint csökkentése növeli az elfogadási tartományt. Jelen példában már $\alpha = 0,025$ szignifikanciaszint esetén a H_0 hipotézis, vagyis a gépkönyv adatának való megfelelés elfogadható, de nagy a veszélye a másodfajú hiba elkövetésének.

2. Egy anyagminta összetételének ingadozását vizsgáljuk. Veszünk 12 mintát, melynek tapasztalati szórásnégyzete 13,7 lett. $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett

   – elfogadjuk-e azt a hipotézist, hogy az alapsokaság varianciája kisebb, mint 13,2?

   – elfogadjuk-e azt a hipotézist, hogy az alapsokaság varianciája nagyobb, mint 13,2?

A megoldás menete:

Az első kérdés esetében vizsgálandó hipotézispár:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma^2 \le \sigma_0^2 = 13,2 \\ H_1 &: \sigma^2 > \sigma_0^2 = 13,2 \ . \end{aligned}$$

A próbastatisztika értéke:

$$\chi_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} = 11,417 \ .$$

A kritikus χ_α^2 érték a táblázat alapján

$$\chi_\alpha^2 = 19,675 \ .$$

Így a H_0 hipotézis elfogadható, hiszen

$$\chi_0^2 = 11,417 \le \chi_\alpha^2 = 19,675 \ ,$$

tehát az anyagminta összetételének ingadozása kisebb, mint a megadott határérték.

A második kérdéshez az alábbi hipotézispár tartozik:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma^2 > \sigma_0^2 = 13,2 \\ H_1 &: \sigma^2 \le \sigma_0^2 = 13,2 \ . \end{aligned}$$

Ha a H_1 hipotézis az igaz, akkor a próbastatisztika meghatározásakor

$$\chi_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \ ,$$

a variancia valódi σ^2 értékénél nem kisebb számmal, σ_0^2-tel osztunk, ezért

$$\frac{\chi^2\sigma^2}{\sigma_0^2} < \chi^2$$

lesz. Ebből következik, hogy az elfogadási tartomány a H_0 hipotézisre a

$$\chi_0^2 > \chi_{1-\alpha}^2$$

lesz. A példában

$$\chi_{1-\alpha}^2 = \chi_{0,95}^2 = 4,575$$

$$\chi_0^2 = 11,417 > \chi_{0,95}^2 = 4,575$$

így a H_0 hipotézist elfogadjuk, azaz a minta összetételének ingadozása nagyobb, mint a megadott érték.

A feladat megoldása során mindkét, egymásnak (részben) ellentmondó hipotézispár H_0 állító hipotézisét igazoltuk, miután a rendelkezésre álló adatok ennek nem mondtak ellent! A példával annak a demonstrálása volt a cél, hogy a statisztikai próbák a hipotézisekben megfogalmazott állításoknak nem az abszolút igazságát állapítják meg, hanem csak adott szignifikanciaszint melletti elfogadhatóságukat igazolják.

5.2.3. F-próba

1. Két mérleg által mutatott érték ingadozását hasonlítjuk össze üzemi körülmények között. Mindkét mérleggel lemérjük ugyanazt a tárgyat párhuzamos méréseket végezve. Az eredmények:

   1. mérleg: x_i = 3,15 g 3,17 g 3,20 g 3,24 g 3,19 g
   2. mérleg: y_i = 3,21 g 3,17 g 3,19 g 3,19 g .

   Vizsgáljuk meg, hogy $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, egyformának tekinthető-e a műszerek ingadozása (szórása)?

   A megoldás menete:

   A feladat ebben az esetben a két mérőeszköz által mutatott érték ingadozásának összehasonlítása, vagyis a *varianciák egyezőségének* vizsgálata. A problémát tehát az F-próba segítségével oldhatjuk meg. Írjuk fel az állító és az ellenhipotézist:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ H_1 &: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2 \ . \end{aligned}$$

   Következő lépésként határozzuk meg a mérések átlagát és tapasztalati szórásnégyzetét mindkét mérleg esetében:

$$\begin{aligned} n_x &= 5 \quad \text{(a párhuzamos mérések száma az 1. mérleggel)} \\ \bar{x} &= \frac{1}{n_x}\sum_{i=1}^{n_x} x_i = 3,19 \text{ g} \\ s_x^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\bar{x})^2}{n_x-1} = 0,00117 \text{ g}^2 \ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_y &= 4 \quad \text{(a párhuzamos mérések száma a 2. mérleggel)} \\ \bar{y} &= \frac{1}{n_y}\sum_{i=1}^{n_y} y_i = 3,19 \text{ g} \\ s_y^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\bar{y})^2}{n_y-1} = 0,000267 \text{ g}^2 \ . \end{aligned}$$

   Az F-próbastatisztikát a következő képlettel határozhatjuk meg:

$$F_0 = \frac{s_x^2}{s_y^2} = 4,3125 \ .$$

   Az összefoglalóban leírtaknak megfelelően a nagyobbik tapasztalati szórásnégyzet kerül a számlálóba és a kisebb a nevezőbe, viszont a szignifikancia szint 0,1 lesz.

   Az F eloszlás T/IV. táblázatbeli értékének leolvasásához határozzuk meg a mérések szabadsági fokait:

$$\begin{aligned} \nu_x &= n_x - 1 = 4 \\ \nu_y &= n_y - 1 = 3 \ . \end{aligned}$$

A táblázat sorai közül a számláló szabadsági fokának megfelelőt, az oszlopai közül pedig a nevező szabadsági fokának megfelelőt kiválasztva a kritikus értékre $F_{2\alpha=0,1}^{\nu_x=4,\nu_y=3} = 9,12$-t kapunk. Miután

$$F_0 = 4,3125 < F_{0,1}^{4,3} = 9,12 \ ,$$

így megállapíthatjuk, hogy a két mérleg ingadozása egyformának tekinthető.

2. Két feszültségmérőt alkalmazunk a két különböző áramkörben, és a bizonytalanságukat, vagyis az értékmutatásuk ingadozását akarjuk összevetni. A következő értékeket kaptuk:

   1. feszültségmérő: x_i = 18,9 V 18,8 V 18,6 V 18,4 V 18,7 V
   2. feszültségmérő: y_i = 23,8 V 22,8 V 23,0 V 23,2 V 23,1 V 22,2 V

   Feltételezve, hogy mindkét esetben a feszültség állandó volt, tehát az ingadozás csak a műszerektől eredt, vizsgáljuk meg, hogy $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, egyformának tekinthető-e a műszerek ingadozása (szórása)?

   A megoldás menete:

   A feladat ebben az esetben is a két mérőeszköz által mutatott érték ingadozásának összehasonlítása, vagyis a *varianciák egyezőségének* vizsgálata, amit az F-próba segítségével ellenőrizhetünk.

   Első lépésként írjuk fel a vizsgálandó hipotéziseket:

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ H_1 &: \ \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2 \ , \end{aligned}$$

   majd határozzuk meg a mérések átlagát és tapasztalati szórásnégyzetét mindkét mérleg esetében:

$$\begin{aligned} n_x &= 5 \quad \text{(a párhuzamos mérések száma az 1. feszültségmérővel)} \\ \bar{x} &= \frac{1}{n_x}\sum_{i=1}^{n_x} x_i = 18,68 \text{ V} \\ s_x^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i-\bar{x})^2}{n_x-1} = 0,037 \text{ V}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_y &= 6 \quad \text{(a párhuzamos mérések száma a 2. feszültségmérővel)} \\ \bar{y} &= \frac{1}{n_y}\sum_{i=1}^{n_y} y_i = 23,02 \text{ V} \\ s_y^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_y}(y_i-\bar{y})^2}{n_y-1} = 0,2737 \text{ V}^2 \ . \end{aligned}$$

   A próbastatisztika értékét a következő képlettel határozhatjuk meg:

$$F_0 = \frac{s_y^2}{s_x^2} = 7,396 \ .$$

A 2. műszer esetében volt nagyobb a tapasztalati szórásnégyzet, így itt az került a számlálóba.

A mérések szabadsági fokait:

$$\begin{aligned}\nu_x &= n_x - 1 = 4\\ \nu_y &= n_y - 1 = 5\ .\end{aligned}$$

A táblázat sorai közül a számláló szabadsági fokának megfelelőt, az oszlopai közül pedig a nevező szabadsági fokának megfelelőt kiválasztva a kritikus értékre $F_{2\alpha=0,1}^{\nu_y=5,\nu_x=4} = 6,26$-t kapunk. Miután

$$F_0 = 7,396 \not< F_{0,1}^{5,4} = 6,26\ ,$$

így a két mérleg ingadozása nem egyforma, azonban a kétoldalas próba miatt a szignifikanciaszint 0,1 lesz.

5.2.4. Egymintás t-próba

1. (Az u-próba 1. mintapéldájának t-próbás változata.) Egy töltőgép működését kívánja ellenőrizni, azaz, hogy ténylegesen a ráírt mennyiség van-e a zacskókban. Ehhez vesz 10 darab 0,5 kg-osnak megadott csomagot és leméri a tömegüket. Az eredmények:

   490 g 505 g 490 g 500 g 495 g 505 g 490 g 510 g 495 g 505 g .

   (a) Végezze el az ellenőrzést 5%-os szignifikanciaszint mellett!
   (b) Végezze el az ellenőrzést 1%-os szignifikancia szint mellett is!
   (c) Határozza meg, hogy milyen tartományba kell esnie a minták átlagának, hogy a zacskók tömege várható értéke az előírtnak megfeleljen!
   (d) Hasonlítsa össze a kapott eredményeket az u-próba 1. mintapéldájának eredményeivel!

   A megoldás menete:

   A feladat a zacskók tömegének várható értéke és az előírt érték egyezőségének ellenőrzése *ismeretlen elméleti szórás* esetén, tehát a megoldáshoz a kétoldalas t-próbát alkalmazhatjuk. Az ellenőrzést a 10 véletlenszerűen kiválasztott minta segítségével végezzük el.

   (a) Első lépésként írjuk fel a vizsgálandó hipotézispárt:

   $$\begin{aligned}H_0 &: \mu = \mu_0 = 500 \text{ g}\\ H_1 &: \mu \neq \mu_0 = 500 \text{ g}\ .\end{aligned}$$

   Számítsuk ki a minták átlagát:

   $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 498,5 \text{ g}$$

   és korrigált tapasztalati szórását:

   $$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2}{10-1}} = 7,47 \text{ g}\ .$$

A próbastatisztika értéke:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{498,5 - 500}{7,47/\sqrt{10}} = -0,6349 \ .$$

$\alpha = 0,05$ szignifikancia érték, $\nu = n - 1 = 9$ szabadsági fok és kétoldalas próba esetén a t-eloszlás T/II. táblázata alapján a kritikus érték $t^{\nu=9}_{\alpha=0,05} = 2,262$. A H_0 hipotézis elfogadási tartománya tehát:

$$-2,262 < t_0 \leq 2,262 \ .$$

Miután a példa adatai alapján számolt t_0 próbastatisztika-érték benne van ebben a tartományban, így elfogadjuk a H_0 hipotézist, azaz a csomagok tömegének várható értéke megegyezik az előírt értékkel.

(b) Ha a szignifikanciaszintet $\alpha = 1\%$-ra csökkentjük, akkor a kritikus érték $t^{\nu=9}_{\alpha=0,01} = 3,250$ lesz, azaz a próbastatisztika értéke továbbra benne lesz az elfogadási tartományban, így ekkor is elfogadjuk a H_0 hipotézist.

(c) A 10 elemű minta alapján az a tartomány, melybe a H_0 hipotézis elfogadásához a minták átlagának esnie kell $\alpha = 5\%$-os szignifikanciaszint esetén:

$$P(\mu_0 - t_{\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n} < \bar{x} \leq \mu_0 + t_{\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

$$P(500 - 2,262 \cdot 7,47/\sqrt{10} < \bar{x} \leq 500 - 2,262 \cdot 7,47/\sqrt{10}) = 1 - 0,05$$

$$P(494,7 < \bar{x} \leq 505,3) = 0,95 \ .$$

(d) A kapott eredményt összevetve az u-próba 1. mintapéldájának eredményével megállapítható, hogy míg annál a feladatnál elvetettük az előírt értékkel való egyezést elfogadó H_0 hipotézist, addig ebben az eetben elfogadtuk. Az u-próba és a t-próba azért jutott ellentétes eredményre, mert a minták alapján meghatározott korrigált tapasztalati szórás az u-próbához kapcsolódó példában megadott elméleti szórástól szignifikánsan különbözik. Ezt, egy χ^2-próbával igazolhatjuk:

$$H_0 \ : \ \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 4$$
$$H_1 \ : \ \sigma^2 > \sigma_0^2 = 4 \ .$$

A próbastatisztika értéke:

$$\chi_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} = \frac{7,47^2(10-1)}{4} = 125,6 \ .$$

A kritikus χ^2_α érték a T/III. táblázat alapján

$$\chi^2_{\alpha=0,05} = 16,919 \ .$$

A számolt χ_0^2 ennél lényegesen nagyobb, így természetesen a H_0 hipotézis nem fogadható el.

2. Egy áramerősség-mérővel végzett párhuzamos mérések során a következő eredményeket kaptuk:

1,48 A 1,44 A 1,51 A 1,47 A 1,49 A .

$\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett vizsgáljuk meg, hogy a következő állítások közül melyik igaz:

- Az áramerősség értéke 1,5 A.
- Az áramerősség értéke kisebb, mint 1,5 A.
- Az áramerősség értéke nagyobb, mint 1,5 A.

A megoldás menete:

Az első állításra a választ kétoldalas t-próba segítségével adhatjuk meg, mivel az alapsokaságnak nem ismerjük a varianciáját. A vizsgálandó hipotézispár:

$$H_0 \ : \ \mu = \mu_0 = 1,5 \text{ A}$$
$$H_1 \ : \ \mu \neq \mu_0 = 1,5 \text{ A} \ .$$

Számítsuk ki a minták átlagát:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = 1,478 \text{ g}$$

és korrigált tapasztalati szórását:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{5-1}} = 0,02588 \text{ g} \ .$$

A próbastatisztika értéke:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{1,478 - 1,5}{0,02588/\sqrt{5}} = -1,901 \ .$$

$\alpha = 0,05$ szignifikanciaérték, $\nu = n - 1 = 4$ szabadsági fok és kétoldalas próba esetén a t-eloszlás táblázata (T/II. táblázat) alapján a kritikus érték: $t_\alpha^{\nu=4} = 2,776$. A H_0 hipotézis elfogadási tartománya tehát:

$$-2,776 < t_0 \leq 2,776 \ ,$$

azaz elfogadjuk a H_0 hipotézist.

A második állításra egyoldalas t-próbát alkalmazhatunk:

$$H_0 \ : \ \mu \leq \mu_0 = 1,5 \text{ A}$$
$$H_1 \ : \ \mu > \mu_0 = 1,5 \text{ A}$$

A próbastatisztika meghatározása ugyanúgy történik, mint az első esetben, így t_0 értéke:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{1,478 - 1,5}{0,02588/\sqrt{5}} = -1,901 \ .$$

Bár a szignifikancia szint továbbra is 5%, de a t-eloszlás táblázata mindig a kétoldalas próbához adja meg a határértéket. Egyoldalas vizsgálat esetén ezért a 2α szignifikanciaszinthez tartozó értéket keressük meg, mely megfelel az egyoldalas vizsgálathoz tartozó határértéknek. Ebben példában így a 10%-os szignifikanciasszinthez tartozó értéket kell kiválasztanunk:

$$t_{2\alpha=0,1}^{\nu=4} = 2,132 \ .$$

A H_0 hipotézist elfogadjuk, ha

$$t_0 = -1,901 \leq t_{0,1}^{4} = 2,132 \ .$$

Ez ebben a példában teljesül, így elfogadjuk a H_0 hipotézist, mely szerint a mérés várható értéke nem nagyobb, mint 1,5.

A harmadik állítás igazolására is egyoldalas t-próbát alkalmazhatunk, de a hipotézispárt most így írjuk fel:

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \mu \geq \mu_0 = 1,5 \text{ A} \\ H_1 &: \ \mu < \mu_0 = 1,5 \text{ A} \ , \end{aligned}$$

azaz ebben az esetben az ellenhipotézis bal oldali. A próbastatisztika meghatározása ekkor is ugyanúgy történik, mint az első esetben, így t_0 értéke:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{1,478 - 1,5}{0,02588/\sqrt{5}} = -1,901 \ .$$

A szignifikanciaszint meghatározása a második esethez hasonlóan történik, de itt t_t értéke a bal oldali ellenhipotézis miatt:

$$t_{2\alpha=0,1}^{\nu=4} = -2,132 \ .$$

A H_0 hipotézist elfogadjuk, ha

$$t_0 = -1,901 \geq t_{0,1}^{4} = -2,132$$

Miután ez teljesül, így elfogadjuk a H_0-t, mely szerint a mérés várható értéke nem kisebb, mint 1,5.

Mint látható, a három eset három, egymásnak részben ellentmondó állító hipotézist tartalmazott, melyet mindhárom esetben elfogadtunk. Ez természetesen nem azt jelenti, hogy mindhárom esetben igaz is az elfogadott hipotézis, csak azt, hogy a mérési adatok alapján nincs elégséges indokunk egyik állító hipotézis elutasításához sem. Mindhárom hipotézis elfogadásának az az oka, hogy a mérések átlaga nem nagyon tér el a várható értéktől, a szórás pedig viszonylag nagy. Ha a mérések átlaga 1,47 A, vagy a szórás 0,02 A lenne, a harmadik állítást már nem fogadnánk el.

5.2.5. Kétmintás t-próba

1. Egy gyártósor működését az előállított termék tömege alapján minősítjük. Ehhez két egymást követő napon mintát veszünk, melyek tömegei a következő módon alakultak:

   1.nap: 1,48 g 1,44 g 1,51 g 1,47 g 1,49 g
   2.nap: 1,49 g 1,51 g 1,47 g 1,52 g 1,53 g 1,48 g .

A mérési eredmények normális eloszlását feltételezve vizsgáljuk meg, hogy a gyártósor a két egymást követő napon ugyanolyan minőségű terméket állított elő! (α=5%)

A megoldás menete:

A feladat tehát annak vizsgálata, hogy a két, egymást követő napon az előállított termékek tömegének várható értéke egyforma-e. Ehhez mindkét napi termelésből, a mintavétel szabályainak megfelelően, mintát vettünk. Miután a két minta egymástól független, így az ellenőrzéshez a kétmintás t-próbát alkalmazhatjuk az alábbi hipotézispár vizsgálatával:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 &: \mu_1 \neq \mu_2 \ . \end{aligned}$$

A t-próba alkalmazása előtt azonban egy F-próba segítségével ellenőrizni kell, hogy a minták alapján az alapsokaságok varianciái megegyeznek-e:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 &: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \ . \end{aligned}$$

A mérések szabadsági fokai, átlagai és tapasztalati szórásnégyzetei:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= n_1 - 1 = 4 \\ \bar{x}_1 &= \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_{1_i} = 1,478 \text{ g} \\ s_1^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1_i} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1} = 6,7 \cdot 10^{-4} \text{ g}^2 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_2 &= n_2 - 1 = 5 \\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_{2_i} = 1,5 \text{ g} \\ s_2^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2_i} - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1} = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ g}^2 \ . \end{aligned}$$

Az F-próbastatisztika értéke:

$$F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1,196 \ .$$

A F-eloszlás táblázat alapján a kritikus értékre $F_t = 5,19$-t kapunk. Miután

$$F_0 = 1,094 < F_t = 5,19 \ ,$$

így a két elméleti szórásnégyzet egyezőnek tekinthető, tehát a kétmintás t-próba folytatható.

A bevezetőben felírt hipotézispár ellenőrzéséhez először is ki kell számolnunk a minták tapasztalati szórásnégyzetének a szabadsági fokokkal vett súlyozott átlagát:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left(s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)\right) = \\ &= \frac{1}{5 + 6 - 2}\left(6,7 \cdot 10^{-4}(5 - 1) + 5,6 \cdot 10^{-4}(6 - 1)\right) = 6,1 \cdot 10^{-4} \ . \end{aligned}$$

Innen $s = 0,0247$. A próbastatisztika pedig:

$$t_0 = \frac{d}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{1,478 - 1,5}{0,0247\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}} = -1,472$$

A kritikus érték meghatározásánál a szabadsági fok $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 9$, a szignifikanciaszint 5%, így a t-eloszlás táblázata alapján:

$$t^{\nu=9}_{\alpha/2=0,025} = 2,262 \ .$$

Az elfogadási tartomány:

$$-2,262 < t_0 \leq 2,262 \ ,$$

azaz elfogadhatjuk a H_0 hipotézist, tehát a két egymást követő nap azonos minőségű terméket állított elő a gyártósor.

2. Egy technológiai egység két különböző pontján, egymástól függetlenül mérjük a hőmérsékletet.

   1. pont (°C): 54,4 54,3 54,3 54,5 54,4 54,3 54,4
   2. pont (°C): 54,2 54,0 n.a. 54,1 54,2 54,1 54,2 ,

   ahol az n.a. rövidítés arra utal, hogy valamilyen hiba miatt nem érkezett be adat. Ellenőrizzük a technológiai egység két pontján a hőmérséklet egyformaságát, ha a mérési eredmények ingadozását csak véletlen mérési hiba okozza! (α=5%)

   A megoldás menete:

   A feladat most annak vizsgálata, hogy a technológiai egység két, *egymástól különböző* pontján a hőmérsékletek megegyeznek-e. A méréseknél feltételeztük, hogy csak véletlen hiba jelentkezik, így *normális eloszlás*únak tekinthetők. Miután a mérési eredmények egymástól független, normális eloszlású mintáknak tekinthetők, ezért az ellenőrzéshez a kétmintás t-próbát alkalmazhatjuk az alábbi hipotézispár vizsgálatával:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 &: \mu_1 \neq \mu_2 \ . \end{aligned}$$

   A t-próba alkalmazása előtt, az áttekintő részben leírtaknak megfelelően F-próba segítségével ellenőrizzük az alapsokaságok varianciáinak megegyezését:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 &: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \ . \end{aligned}$$

   A mérések szabadsági fokai, átlagai és tapasztalati szórásnégyzetei:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= n_1 - 1 = 6 \\ \bar{x}_1 &= \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_{1_i} = 54,37 \ ^\circ\text{C} \\ s_1^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1_i} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1} = 5,7 \cdot 10^{-3} \ ^\circ\text{C}^2 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu_2 &= n_2 - 1 = 5\\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_{2_i} = 54,13\ ^\circ\mathrm{C}\\ s_2^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2_i}-\bar{x}_2)^2}{n_2-1} = 6,7\cdot 10^{-3}\ ^\circ\mathrm{C}^2\ .\end{aligned}$$

Az F-próbastatisztika értéke:

$$F_0 = \frac{s_2^2}{s_1^2} = 1,17\ .$$

A F-eloszlás táblázat alapján a kritikus értékre $F_{2\alpha=0,1}^{\nu_2=5,\nu_1=6} = 4,39$-t kapunk. Miután

$$F_0 = 1,17 < F_{0,1}^{5,6} = 4,39\ ,$$

így a két elméleti szórásnégyzet megegyezőnek tekinthető 10%-os szignifikanciaszint mellett, tehát a kétmintás t-próba folytatható.

A bevezetőben felírt hipotézispár ellenőrzéséhez számoljuk ki a minták tapasztalati szórásnégyzetének a szabadsági fokokkal vett súlyozott átlagát:

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{n_1+n_2-2}\left(s_1^2(n_1-1)+s_2^2(n_2-1)\right) =\\ &= \frac{1}{7+6-2}\left(5,7\cdot 10^{-3}(7-1)+6,7\cdot 10^{-3}(6-1)\right) = 0,00615\ .\end{aligned}$$

Innen $s = 0,078$. A próbastatisztika értéke:

$$t_0 = \frac{d}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{54,37-54,13}{0,1358\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{6}}} = 5,458\ .$$

A kritikus érték meghatározásánál a szabadsági fok $\nu = n_1+n_2-2 = 11$, a szignifikanciaszint 5%, így a t-eloszlás táblázata alapján:

$$t_{\alpha/2=0,025}^{\nu=11} = 2,201\ ,$$

és az elfogadási tartomány:

$$-2,201 < t_0 \leq 2,201\ .$$

Miután a próbastatisztika értéke nincs benne az elfogadási tartományban, ezért a H_0 hipotézist elvetjük, tehát a technológiai egység két pontján nem azonos a hőmérséklet.

5.2.6. Páros t-próba

A kétmintás t-próba és a páros t-próba alkalmazási feltételei közötti különbség bemutatására vizsgáljuk meg a kétmintás t-próba 1. feladatát a páros t-próba feltételeinek megfelelően módosítva!

1. Egy gyártósor működését az előállított termék tömege alapján minősítjük. Ehhez öt mintát veszünk, és minden mintát két, különböző felbontású mérlegen mérünk le úgy, hogy az eredmények mintánként összerendezhetőek:

mérések i	1. mérleg x_i	2. mérleg y_i
1	1,48	1,494
2	1,44	1,513
3	1,51	1,474
4	1,47	1,522
5	1,49	1,536

A mérési eredmények normális eloszlását feltételezve, $\alpha = 5\%$-os szignifikanciaszint mellett vizsgáljuk meg, hogy a két mérési sorozat alapján a várható értékek megegyeznek-e!

A megoldás menete:

A feladat most a két, ugyanazokat a termékmintákat lemérő mérleg működésének összehasonlítása. Feltételezzük, hogy a méréseket csak véletlen hibák befolyásolják, így azok alakulása a normális eloszlást követi. Miután a két mérési adatsor egymástól nem független, de külön-külön normális eloszlásúak, így az ellenőrzéshez a páros t-próbát alkalmazhatjuk az alábbi hipotézispár vizsgálatával:

$$H_0 \; : \; \mu_x = \mu_y$$
$$H_1 \; : \; \mu_1 \neq \mu_2 \; .$$

Első lépésként határozzuk meg a páronkénti eltéréseket. Mint a mérési eredményekből látható, a második mérleg felbontása nagyobb, mint az elsőé. A mérési eredmények közti különbség meghatározásakor az eredményt az első mérleg felbontása szerinti értékre kerekítjük.

i	x_i	y_i	d_i
1	1,48	1,494	-0,01
2	1,44	1,513	-0,07
3	1,51	1,474	0,04
4	1,47	1,522	-0,05
5	1,49	1,536	-0,05

Határozzuk meg a páronkénti eltérések átlagértékét és szórását:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = -0,03$$
$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = 0,0423 \; .$$

A próbastatisztika értéke:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{-0,03}{0,0423/\sqrt{5}} = -1,584 \; .$$

Az összehasonlított párok száma $n = 5$ volt, így a szabadsági fok $\nu = 4$. A szabadsági fok és a $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint figyelembevételével a kritikus érték a t-táblázat alapján $t_{\alpha=0,05}^{\nu=4} = 2,776$, és a H_0 hipotézis elfogadási tartománya:

$$-2,776 < t_0 \leq 2,776 \; .$$

Miután a próbastatisztika értéke benne van ebben a tartományban, így elfogadhatjuk a H_0 hipotézist, tehát a két mérleg egyforma mennyiséget határozott meg.

5.3. Gyakorló feladatok

5.3.1. Ellenőrző kérdések

1. Mi a statisztikai próbák alkalmazásának célja?
2. Ismertesse a bináris hipotézis rendszert!
3. Mi a hipotézisvizsgálat általános menete?
4. Mi az u-próba célja és melyek alkalmazásának feltételei?
5. Mit értünk az alatt, hogy a próba egyoldalas, illetve kétoldalas?
6. Adja meg egy kétoldalas u-próba hipotézisrendszerét!
7. Adja meg egy egyoldalas u-próba hipotézisrendszerét, ha a cél annak bizonyítása, hogy a sokaság várható értéke nem halad meg egy adott értéket!
8. Ábrázolja sűrűségfüggvény segítségével egy kétoldalas próba elfogadási/elutasítási tartományait!
9. Mi az a szignifikanciaszint?
10. Hogyan befolyásolja a H_0 hipotézis elfogadását a szignifikanciaszint csökkentése?
11. Milyen hibák követhetők el a statisztikai próbáknál?
12. Mi a valószínűsége annak, hogy elsőfajú hibát követünk el?
13. Milyen hipotézisrendszerrel lehet a másodfajú hibát meghatározni?
14. Mitől és hogyan függ a másodfajú hiba nagysága?
15. Mi a célja a χ^2-próbának?
16. Mi az alkalmazási feltétele a χ^2-próbának?
17. Mutassa meg sűrűségfüggvény segítségével a χ^2-próba elfogadási/elvetési tartományait!
18. Mi a célja az F-próbának?
19. Mi a célja és mik az alkalmazási feltételei az egymintás t-próbának?
20. Hasonlítsa össze az u- és a t-próbát!
21. Mi a célja és mik az alkalmazási feltételei a kétmintás t-próbának?
22. Mi a célja és mik az alkalmazási feltételei a páros t-próbának?

5.3.2. Feladatok

1. Egy speciális lisztféleséget gyárt, és ellenőrizni kívánja, hogy ténylegesen a ráírt mennyiség van-e a csomagokban. Ehhez mintaként vesz 10 darab 0,5 kg-osnak megadott lisztet és leméri a tömegüket. Az eredmények:

   485 g 505 g 490 g 500 g 495 g 510 g 485 g 510 g 495 g 505 g .

   Végezze el az ellenőrzést, ha a szabvány szerint a megengedett átlag körüli ingadozás 2 g, a szignifikancia szint pedig 5%!

2. Egy gyártó a gépkocsik jobb és bal oldalára felszerelt gumik kopása közötti különbséget kívánja tesztelni. Ehhez véletlenszerűen felszerelnek 6 autó hátsó kerekeire 12 db új, ugyanolyan gyártmányú gumit, majd adott nagyságú út megtétele után ellenőrzik a kopást. Az eredmények:

autó	jobb oldal	bal oldal
1	8,9	9,4
2	8,8	8,0
3	9,8	9,1
4	7,7	7,1
5	9,1	9,3
6	10,2	9,2

   Vizsgálja meg, hogy $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszinten van-e különbség a gumik kopása között a két oldalon!

3. Egy pékség működését kívánja ellenőrizni. Ehhez vesz 10 darab 1 kg-osnak megadott kenyeret és leméri a tömegüket. Az eredmények:

   1020 g 980 g 1000 g 1050 g 1010 g 1010 g 990 g 1050 g 950 g 990 g .

   (a) Végezze el az ellenőrzést mint vásárló, azaz az adatok alapján győződjön meg, hogy a vásárolt kenyerek átlagtömege várhatóan legalább annyi, mint amennyit a címkéje jelez!

   (b) Végezze el az ellenőrzést mint a felettes szerv szakembere, azaz az adatok alapján győződjön meg, hogy a vásárolt kenyerek átlagtömege megegyezik az elméleti értékkel, ha igen nagy számú adat alapján az átlag körüli ingadozás 25 g^2!

   (c) Milyen intervallumba kell esnie az átlagnak, hogy a hatóság szerint elfogadható legyen?

   Megjegyzés: $\alpha = 0,05$ mind a három esetben.

4. Gombóc Artúrnak feltűnt, hogy újabban a mazsolás csokiban is nagyon ingadozik a mazsolák száma. Egy szokásos reggeli adagjában (15 db mazsolás csokiban) azután megszámolta a mazsolákat, és azt találta, hogy azok átlaga 16,8, relatív szórása pedig 37,3% volt. A csokipapír szerint átlagosan 20 darabnak kellene benne lenni. Mit tanácsolna Gombóc Artúrnak: írjon, vagy ne írjon reklamáló levelet, esetleg vizsgálódjon tovább (ha igen, akkor hogyan)? Gombóc Artúr 5%-os szignifikanciaszintet alkalmaz általában. Megjegyzés: Gombóc Artúrnak az a véleménye, hogy ha a csokiban túl kevés a mazsola, az épp olyan baj, mintha túl sok.

5. Két gyártó gumiabroncsainak kopását kívánja tesztelni. Ehhez véletlenszerűen felszerelnek 5 autó hátsó kerekeire 5 db A és 5 db B gyártmányú gumit, majd adott nagyságú út megtétele után ellenőrzik a kopást. (A gumik véletlenszerűen lettek felszerelve, azaz egy autóra kerülhet két ugyanolyan gyártmányú gumi is!) Az eredmények:

A gumi	B gumi
9,3	8,7
9,7	8,9
9,6	9,2
8,3	7,1
*	9,6

(* - defektes lett, így nem értékelhető) Vizsgálja meg, hogy $\alpha = 0.05$ szignifikanciaszinten van-e különbség a gumik kopása között a két gyártó esetében!

6. Egy műszer mérési adatainak bizonytalanságát vizsgáljuk. A műszerrel elvégzünk adott számú mérést:

320 g 317 g 320 g 324 g 319 g 321 g 319 g

(a) Vizsgálja meg, hogy igaz-e a műszerkönyv állítása, mely szerint a műszer varianciája $2,00$ g^2 ($\alpha = 0,05$)!

(b) Vizsgálja meg v-teszt segítségével, hogy 324 g-os adat kiugrónak tekinthető-e!

7. Egy tárgyból a konzultáció hatékonyságát kívánjuk mérni. A zárthelyi megíratása után külön választjuk a konzultáción részt vett, illetve részt nem vett hallgatók dolgozatát. Az eredmények:

konzultáción részt vevők	konzultáción részt nem vevők
84	89
90	81
96	90
94	77
88	93
	69

Korábbi vizsgálatok szerint a zárthelyi dolgozatok eredményei a normális eloszlásnak megfelelően alakulnak. Vizsgálja meg a megfelelő t-próba segítségével, hogy $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszinten van-e különbség a két csoport eredménye között!

8. Egy műszer gépkönyvében megadott szórás értékét kívánja ellenőrizni. Ennek során a következő eredményeket kapjuk:

1,2 V 1,3 V 1,1 V 1,0 V 1,2 V

Vizsgálja meg, hogy elfogadható-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett a gépkönyvben megadott $\sigma = 0,1$ V érték?

9. Lakott területen vezet és traffipaxszal bemérik. A készülék öt mérést végez, ezek eredményei:

   56, 53, 52, 50 és 49km/h.

   A mérési módszer varianciája 1,96. Vizsgálja meg, hogy $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett megbünteti-e a rendőrség a megengedett 50 km/h sebesség túllépéséért?

10. Két áramerősség-mérő mérési adatainak ingadozását kívánjuk összehasonlítani. Mindkét műszerrel elvégzünk adott számú mérést:

    1. műszer: 1,24 A 1,15 A 1,18 A 1,20 A 1,23 A
    2. műszer: 1,224 A 1,192 A 1,212 A 1,182 A 1,186 A 1,204 A .

    Vizsgálja meg, hogy egyformának tekinthető-e a műszerek bizonytalansága ($\alpha = 0,05$)?

11. Egy speciális lisztféleséget vásárol rendszeresen, és ellenőrizni kívánja, hogy ténylegesen a ráírt mennyiség van-e a csomagban. Ehhez vesz 8 darab 0,5 kg-osnak megadott lisztet és leméri a tömegüket. Az eredmények:

    499 g 500 g 498 g 497 g 498 g 502 g 498 g 501 g

    (a) Végezze el az ellenőrzést mint vásárló, azaz az adatok alapján győződjön meg, hogy a vásárolt lisztcsomagok átlagtömege várhatóan legalább annyi, mint amennyit a címkéje jelez!
    (b) Miután elvégezte az előbbi pontban leírt ellenőrzést, eszébe jut, hogy a mérlegét is ellenőriznie kellene, mielőtt dönt a reklamációról. A kalibráció során kiderül, hogy a mérlegnek állandó rendszeres hibája van, a tényleges értéknél mindig 1 g-mal többet mutat. Figyelembe véve ezt a tényt, hogyan dönt egy esetleges reklamációról?
    (c) Végezze el az ellenőrzést mint a felettes szerv szakembere ugyanezen adatok alapján, ha a szabvány szerint a megengedett variancia 16 g^2!

    A szignifikanciaszint $\alpha = 0,05$ minden esetben.

12. Az ország két különböző régiójában lehulló csapadék savasságát vizsgáljuk. Ehhez véletlenszerűen kiválasztott 8 csapadékból mintát veszünk, és megmérjük a pH-értékét (a mintavételek nem biztos, hogy ugyanazon a napon történtek!):

Eső	Délnyugat	Északkelet
1	4,60	4,55
2	4,27	4,31
3	4,31	4,84
4	3,88	4,67
5	4,49	4,28
6	4,22	4,95
7	4,54	4,72
8	4,76	4,63

    A megfelelő t-próba segítségével vizsgálja meg, hogy az adatok alapján igaz-e, hogy a csapadék savasságának mértéke eltér a két helyen! ($\alpha = 0,05$)

13. Két mérleg bizonytalanságát vizsgáljuk. Mindkét mérleggel elvégzünk adott számú mérést:

    1. mérleg: 4205 g 4195 g 4198 g 4201 g 4200 g
    2. mérleg: 4214 g 4198 g 4211 g 4191 g 4185 g .

    Vizsgálja meg, hogy egyformának tekinthető-e a mérlegek bizonytalansága ($\alpha = 0,05$)?

14. Lakott területen kívül vezet és traffipaxszal bemérik. A készülék hat mérést végez, ezek eredményei:

    102, 103, 102 100, 98 és 97 km/h

    (a) $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett döntse el, hogy megbüntetik-e a megengedett 90 km/h sebesség legalább 10%-kal való túllépéséért! (A mérési módszer varianciája 2,25 km^2/h^2.)

    (b) Milyen tartományba kell esni-e a sebesség átlagának, hogy ne büntessék meg?

5.3.3. Megoldások

1. Alkalmazandó próba: kétoldalas u-próba
   $u_0 = -3,162$
   $u_{\alpha/2} = 1,96$
   elutasítjuk a H_0 hipotézist, nincs megfelelő mennyiségű liszt a csomagban.

2. Alkalmazandó próba: páros t-próba
   t_0: 1,624
   $t_{\alpha/2}^{\nu=5} = 2,571$
   elfogadjuk a H_0 hipotézist, nincs különbség a két oldal kopása között.

3. (a) Alkalmazandó próba: egymintás, egyoldalas t-próba
   $t_0 = 0,516$
   $t_{\alpha}^{\nu=9} = 1,833$
   elfogadjuk a H_0 hipotézist, a kenyerek legalább 1 kg tömegűek.

   (b) Alkalmazandó próba: egymintás, kétoldalas u-próba
   $u_0 = 3,162$
   $u_{\alpha/2} = 1,96$
   elutasítjuk a H_0 hipotézist, a kenyerek tömege nem megfelelő.

   (c) Elfogadási intervallum: 997–1003 g, e két érték között kell a 10 darab kenyér átlagtömegének lennie.

4. Alkalmazandó próba: egymintás, kétoldalas t-próba
   $t_0 = -1,978$
   $t_{\alpha/2}^{\nu=14} = 2,145$
   elfogadjuk a H_0 hipotézist, a mazsolák száma megfelelő.

5. Alkalmazandó próba: kétmintás t-próba
   $F_0 = 2,236$
   $F_{\alpha}^{\nu_2=4,\nu_1=3} = 9,12$
   nincs különbség a két sokaság elméleti szórásnégyzete között, $t_0 = 0,937$
   $t_{\alpha/2}^{\nu=7} = \pm 2,365$
   elfogadjuk a H_0 hipotézist, nincs különbség a gumik kopása között.

6. (a) Alkalmazandó próba: egyoldalas χ^2-próba
   $\chi_0^2 = 14,00$
   $\chi_\alpha^{2\ \nu=6} = 12,592$,
   elutasítjuk a H_0 hipotézist, a műszer varianciája nagyobb a műszerkönyvben megadott értéknél.

   (b) Alkalmazandó próba: v-teszt
   $v_0 = 1,85 < v_t = 4,73$,
   azaz nem kiugró az adat.

7. Alkalmazandó próba: kétmintás t-próba
   $F_0 = 3,691$
   $F_\alpha^{\nu_2=5,\nu_1=4} = 6,26$,
   azaz nincs különbség a két sokaság elméleti szórásnégyzete között. t_0= 1,584
   $t_{\alpha/2}^{\nu=9}$= 2,262 ,
   azaz elfogadjuk a H_0 hipotézist, nincs különbség a dolgozatok között.

8. Alkalmazandó próba: egyoldalas χ^2-próba
   $\chi_0^2 = 0,52$
   $\chi_\alpha^{2\ \nu=4} = 9,487$,
   azaz elfogadjuk a H_0 hipotézist, a műszer szórása megfelel a gépkönyvben megadottnak.

9. Alkalmazandó próba: egyoldalas u-próba
   $u_0 = 2,282$
   $u_\alpha = 1,65$,
   azaz elutasítjuk a H_0 hipotézist, túllépte az 50 km/h-ás sebességhatárt.

10. Alkalmazandó próba: F-próba
    $F_0 = 5,11$
    $F_\alpha^{\nu_2=5,\nu_1=4} = 6,26$,
    azaz elfogadjuk a H_0 hipotézist, nincs különbség a két műszer szórása között.

11. (a) Alkalmazandó próba: egymintás, egyoldalas t-próba
    $t_0 = -1,433$
    $t_\alpha^{\nu=7} = -2,365$,
    azaz elfogadjuk a H_0 hipotézist, megfelelő mennyiségű liszt van a zacskóba töltve.

    (b) Kalibrálás után a t-próba még egyszer
    $t_0 = -3,071$
    $t_\alpha^{\nu=7} = -2,365$,
    azaz elutasítjuk a H_0 hipotézist, nincs megfelelő mennyiségű liszt a zacskóba töltve.

    (c) Alkalmazandó próba: kétoldalas u-próba
    $u_0 = -1,326$
    $u_\alpha = 1,96$,
    azaz elfogadjuk a H_0 hipotézist, megfelelő mennyiségű liszt van a zacskóba töltve.

12. Alkalmazandó próba: kétmintás t-próba
    $t_0 = 1,844$
    $t_{\alpha/2}^{\nu=7} = 2,179$,
    azaz elfogadjuk a H_0 hipotézist, nincs különbség az esők savassága között.

13. Alkalmazandó próba: F-próba
    $F_0 = 11,44$
    $F_\alpha^{\nu_2=4,\nu_1=4} = 6,39$,
    azaz elutasítjuk a H_0 hipotézist, van különbség a két mérleg szórása között.

14. (a) Alkalmazandó próba: egyoldalas u-próba
    $u_0 = 2,178$
    $u_\alpha = 1,65$,
    azaz elutasítjuk a H_0 hipotézist, több mint 10%-kal túllépte a 90 km/h-ás sebességhatárt.

    (b) 5 mérés esetén a sebesség átlaga maximum 100 km/h óra lehet.

6. fejezet

Nemparaméteres statisztikai próbák

6.1. Elméleti áttekintés

Az 5. fejezetben leírtaknak megfelelően, a paraméteres próbák alkalmazásához kellenek a minták, mérési eredmények számszerű értékei, továbbá a vizsgált alapsokaságra teljesülnie kell, hogy normális eloszlású legyen. A méréstechnika feladatok jelentős részénél ezek a feltételek könnyen teljesíthetők, hiszen számszerű értékeket kapunk a mérőműszer kimenetén, és ha a mérési eredményeket csak véletlen típusú statikus mérési hiba terheli, akkor az eredmények alakulása a normális eloszlásnak felel meg.

Bizonyos problémák esetében azonban ezek a feltételek nem teljesülnek. Vannak esetek, amikor a mérés eredménye nehezen számszerűsíthető, az eredmények inkább csak összehasonlíthatók és így rangsorolhatók. Az eldönthető, hogy az egyik vagy a másik megfigyelés eredménye a nagyobb vagy a kisebb, illetve a kedvezőbb vagy a kedvezőtlenebb, de konkrét számérték nem vagy csak nehezen rendelhető hozzá, vagy nem igazán releváns. Sok esetben az eredmények normális eloszlásának igazolása jelent gondot, vagy az összehasonlítandó mintákhoz nem ugyanaz a variancia tartozik. Ha ilyen problémák lépnek fel, akkor a paraméteres statisztikai vizsgálatok nem alkalmazhatók, illetve az alkalmazásuk során kapott eredmény nem lesz megbízható.

Az ilyen esetekre kínálnak megoldást az úgynevezett *nemparaméteres statisztikai módszerek.* A nemparaméteres próbák esetében elegendő, ha az adatok rangsorolása elvégezhető, és a vizsgált alapsokaságokra sincsenek további feltételek. A nemparaméteres módszerek, a paraméteres változatokhoz hasonlóan alkalmazhatók az alapsokaságok várható értékének becslésére, kettő vagy több alapsokaság várható értékének összehasonlítására, változók közötti összefüggés elemzésére és a szórás elemzésére.

6.1.1. Mann–Whitney-féle U-próba

A Mann–Whitney-féle U-próba a kétmintás t-próba nemparaméteres párja, azaz két független sokaság várható értékeinek egyezőségét ellenőrizhetjük mintavétel segítségével. Akkor célszerű ezt a próbát alkalmazni, ha a kétmintás t-próba előfeltételei nem, vagy nem biztos, hogy teljesülnek: a két alapsokaság nem biztos, hogy normális eloszlású, illetve a minták alapján nem ugyanahhoz az elméleti szórásnégyzethez tartoznak.

Az alkalmazás menete

1. A vizsgálandó hipotézisek legyenek a következők:

   – H_0: nincs különbség a két adathalmaz várható értékében

- H_1: van különbség a két adathalmaz várható értékében.

A hipotézisek ilyen megfogalmazása kétoldalas próbát jelent, hiszen csak azt vizsgáljuk, hogy egyeznek-e a várható értékek vagy sem, az eltérés iránya nem érdekes. Ha a H_1 hipotézist a következő módon adjuk meg:

- H_1: az egyik adathalmaz a másikhoz képest jobbra tolódik

akkor egyoldalas próbát végzünk, hiszen azt kell eldöntenünk, hogy az egyik adathalmaz várható értéke nagyobb-e, mint a másiké.

2. Vegyünk n_1 számú mintát az 1. adathalmazból és n_2 számút a 2. adathalmazból.

3. Végezzük el a rangsorolást *valamennyi* adat figyelembevételével. Figyelem: azonos értékek esetén az átlagrang számítási módszert (lásd 3.1.1 fejezet) kell alkalmazni!

4. Határozzuk meg a rangösszegeket az egyes adathalmazokból vett minták esetében, jelöljük ezeket T_1 és T_2-vel.

5. A Mann–Whitney U-próba próbastatisztikájának értékét az alábbi képletek segítségével határozhatjuk meg:

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - T_1$$
$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - T_2$$

A számolt értékek közül a döntéshez felhasznált próbastatisztikát a próba jellege alapján választjuk ki (ld. a 7. pontban).

6. A próbastatisztikák kiértékelése:
Közel azonos elemszámot feltételezve a két mintában, U_1 akkor lesz kisebb, mint U_2, ha az 1. adathalmazhoz tartozó T_1 rangösszeg nagy, azaz, ha az 1. adathalmaz adatainak eloszlása jobbra tolódik el a 2. adathalmaz eloszlásához képest. Így, ha egyoldalas próbát végzünk, akkor elvetjük a H_0 hipotézist, vagyis azt, hogy az 1. adathalmaz várható értéke kisebb vagy egyenlő, mint a 2. adathalmazé, ha U_1 kisebb, mint egy meghatározott U_0 küszöbérték. Ugyanez a levezetés elvégezhető U_2 értékére, illetve a 2. adathalmaz várható értékére is. A hipotézisek elfogadását/elutasítását meghatározó U_0 küszöbértéket a minták elemszámai és a szignifikanciaszint alapján táblázatok segítségével határozzuk meg. A táblázat megfelelő cellája megadja annak valószínűségét, hogy a kapott U_{1v2} érték kisebb, mint U_0, de a H_0 hipotézis igaz. Az alábbi táblázat tartalmazza az U_0 kritikus értékeit, ha a 2. minta elemszáma $n_2 = 3$, és az 1. minta elemszáma $n_1 = 1; 2$ vagy 3.

$n_2 = 3$		n_1	
U_0	1	2	3
0	0,25	0,1	0,05
1	0,5	0,2	0,1
2		0,4	0,2
3		0,6	0,35
4			0,5

Az U_0 kritikus értékeit táblázatok sorozata tartalmazza. A T/VI. táblázat tartalmazza az $n_2 = 3; 4; 5$ táblázatokat. A megfelelő értéket a következő módon határozzuk meg:

- A 2. adathalmaz n_2 elemszáma alapján kiválasztjuk a megfelelő táblázatot.
- Az 1. adathalmaz n_1 elemszáma alapján kiválasztjuk a megfelelő oszlopot.
- Az oszlopokban szereplő értékek közül a szignifikanciaszint és a teszt egy- vagy kétoldalas jellege alapján választunk. Ha egyoldalas tesztet végzünk, akkor az értékek közül kiválasztjuk azt, amelyik legközelebb van a választott α szignifikanciaszint értékéhez. Kétoldalas teszt esetén azt az értéket választjuk ki, amelyik $\alpha/2$ értékhez van legközelebb.
- U_0 kritikus értéket az α vagy $\alpha/2$ alapján kiválasztott érték sorának első oszlopában találjuk.

7. H_0 hipotézis elfogadása:

   - Legyen a feladat a két alapsokaság várható értéke egyezőségének a vizsgálata. Ekkor kétoldalas tesztet végzünk és a hipotézispárt a következő módon adjuk meg:
     - H_0: nincs különbség a két adathalmaz várható értékében
     - H_1: van különbség a két adathalmaz várható értékében.

     Elvégezzük a rangsorolást, majd meghatározzuk a rangösszegeket. Kiszámítjuk U_1 és U_2 értékét. A próbához a kettő közül a kisebbet választjuk. Meghatározzuk U_0 értékét a megfelelő táblázat és a választott α szignifikanciaszinthez. Elfogadjuk a H_0 hipotézist, azaz a két adathalmaz várható értéke egyforma, ha a próbastatisztika értéke $(\min(U_1, U_2))$ nagyobb, mint U_0.
   - Legyen a feladat a két alapsokaság várható értéke közti eltérés vizsgálata. Ellenőrizzük azt, hogy az 1. adathalmaz várható értéke jobbra tolódik-e (azaz nagyobb-e) a 2. adathalmazéhoz képest. Ekkor a hipotézispárt a következő módon adjuk meg:
     - H_0: nincs különbség a két adathalmaz várható értékében
     - H_1: az 1. adathalmaz a 2.-hez képest jobbra eltolódik.

     Elvégezzük a rangsorolást, majd meghatározzuk a rangösszegeket, de csak a T_1-re van szükségünk. Kiszámítjuk U_1 értékét. Meghatározzuk U_0 értékét a megfelelő táblázat és a választott α szignifikanciaszinthez. Elvetjük a H_0 hipotézist, azaz a H_1 hipotézist fogadjuk el, tehát az 1. adathalmaz várható értéke jobbra tolódik el a 2. adathalmazhoz képest, ha a próbastatisztika értéke U_1 kisebb vagy egyenlő, mint U_0.
   - Ha a feladat a 2. adathalmaz jobbra tolódásának vizsgálata az 1. adathalmazhoz képest, akkor vizsgálat menete hasonló az előző ponthoz, csak a T_2 rangösszeget és az U_2 próbastatisztika-értéket használjuk a H_0 hipotézis elfogadásához vagy elvetéséhez.

6.1.2. Wilcoxon-próba

A Wilcoxon-próba két összetartozó minta várható értéke egyezőségének ellenőrzésére alkalmazható, azaz ez a próba a páros t-próba nemparaméteres párja.

A módszer lényege, hogy az összetartozó értékeket páronként összehasonlítjuk, és ha nincs különbség a két eloszlás között, akkor a különbségek fele részben pozitívak, fele részben negatívak lesznek, és nagyságrendileg megegyeznek egymással. Tehát, ha rangszámot rendelünk a különbségekhez, és nincs szignifikáns különbség a két minta várható értéke között, akkor a pozitív és a negatív különbségek rangösszegei megegyeznek.

Az alkalmazás menete

1. Legyen egyaránt n számú mintánk az 1. adathalmazból és a 2. adathalmazból.
2. A vizsgálandó hipotézispár legyen a következő

   H_0 : a két adathalmaz várható értéke között nincs különbség

   H_1 : van különbség a várható értékekben (kétoldalas próba) vagy
   az egyik adathalmaz a másikhoz képest jobbra eltolódik (egyoldalas próba).
3. Határozzuk meg páronként a különbségeket. Ha két adat megegyezik, akkor azokat hagyjuk figyelmen kívül, de csökkentsük n értékét is!
4. Rangsoroljuk az abszolútérték alapján a különbségeket, úgy hogy a legkisebb különbség kapja az 1 rangot. Azonos értékek esetén itt is az átlagrang számítást alkalmazzuk.
5. Határozzuk meg a rangösszegeket külön a pozitív és a negatív különbségekre $\to T^+$, T^-.
6. A hipotézisek eldöntése:

   Kétoldalas tesztnél : a két rangösszeg közül a kisebbet használjuk a H_0 hipotézis ellenőrzésére, és elvetjük H_0 -t, ha ez az érték kisebb a táblázatból meghatározott T_0 küszöbértéknél.

   Egyoldalas tesztnél :

   – ha az 1. sokaság jobbra tolódását vizsgáljuk a 2.-hez képest a minták alapján, akkor a T^--t használjuk, és elvetjük H_0-t, ha $T^- \leq T_0$;
   – ha a 2. sokaság jobbra tolódását vizsgáljuk a 1.-hez képest a minták alapján, akkor a T^+-t használjuk, és elvetjük H_0-t, ha $T^+ \leq T_0$.

   A T_0 küszöbértéket a T/VII. táblázat segítségével határozhatjuk meg az összehasonlított adatpárok és a szignifikanciaszint alapján. Mint a táblázatból is látható, a próbához legalább 5, egymástól különböző értékeket tartalmazó adatpár szükséges.

6.2. Kidolgozott feladatok

6.2.1. Mann–Whitney U-próba

1. Egy tárgyból a konzultáció hatékonyságát kívánjuk mérni. A zh megíratása után külön választjuk a konzultáción részt vett, illetve részt nem vett hallgatók dolgozatát. Az eredményeket pontszámokban megadva az alábbi táblázat tartalmazza:

konzultáción részt vevők	konzultáción részt nem vevők
85	89
90	80
94	92
93	71
90	93
	60

Vizsgálja meg Mann–Whitney-féle U-próba segítségével, hogy $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszinten van-e különbség a két csoport eredménye között!

A megoldás menete:

A feladat megfogalmazásának megfelelően a két csoport eredményének egyezőségét vagy eltérését kell belátnunk, így kétoldalas Mann–Whitney próbát kell alkalmazni. Írjuk fel az ennek megfelelő hipotézispárt:

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{ a két csoport eredménye egyforma} \\ H_1 &: \text{ a két csoport eredménye különbözik.} \end{aligned}$$

Jelöljük 1. csoportként a konzultációkon részt vevőket, és 2. csoportként a részt nem vevőket. Első lépésként végezzük el a rangsorolás valamennyi adatot figyelembe véve:

1. csoport	r(1.cs.)	2. csoport	r(2.cs.)
85	4	89	5
90	6,5	80	3
94	11	92	8
93	9,5	71	2
90	6,5	93	9,5
		60	1

A próbastatisztikák kiszámolásához szükség van a csoportok elemszámára és a rangösszegekre:

$$\begin{aligned} n_1 = 5 \quad &, \quad T_1 = 37,5 \\ n_2 = 6 \quad &, \quad T_2 = 28,5 \ . \end{aligned}$$

Az U_1 és U_2 próbastatisztika-értékeket számoljuk ki a következő képleteknek megfelelően

$$\begin{aligned} U_1 &= n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - T_1 = 5 \cdot 6 + \frac{5(5+1)}{2} - 37,5 = 7,5 \\ U_2 &= n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - T_2 = 5 \cdot 6 + \frac{6(6+1)}{2} - 28,5 = 22,5 \ . \end{aligned}$$

Kétoldalas próba miatt a két érték közül a kisebbet választjuk a próbához:

$$\min(U_1, U_2) = 7,5 \ .$$

A T/VI. táblázatai közül az $n_2 = 6$-hoz tartozót választva, $\alpha/2 = 0,025$-höz közeli értéket keresve az $n_1 = 5$ oszlopban U_0-ra a 4 értéket kapjuk. A H_0 hipotézist akkor fogadjuk el, ha

$$\min(U_1, U_2) > U_0 \ .$$

Miután a próbastatisztika értéke $U_1 = 7,5$ nem kisebb, mint U_0 értéke, ezért nem vetjük el, azaz elfogadjuk a H_0 hipotézist, azaz nincs különbség a konzultáción részt vett és részt nem vett hallgatók eredményei között.

2. Két gyártótól származó monitorok megbízhatóságát vizsgálták úgy, hogy hány hónapig működtek az egyes gyártóktól származó monitorok meghibásodás nélkül. Az eredmények a következők voltak:

   1. gyártó: 34, 37, 23, 27, 40 hónap 2. gyártó: 35, 33, 22, 25, 21 hónap

   $\alpha = 0,1$ szignifikanciaszint mellett határozza meg a Mann–Whitney próba segítségével, hogy az 1. gyártó termékei megbízhatóbbak, mint a 2. gyártóé!

   A megoldás menete:

   A feladat megfogalmazásának megfelelően a cél annak vizsgálata, hogy az 1. gyártó termékei megbízhatóbbak-e, mint a 2.-é, így most egyoldalas Mann–Whitney próbát kell alkalmazni. Írjuk fel az ennek megfelelő hipotézispárt:

$$H_0 \ : \ \text{a két gyártó termékei egyformán megbízhatóak}$$
$$H_1 \ : \ \text{az 1. gyártó termékei megbízhatóbbak, mint a 2. gyártóé.}$$

   Első lépésként végezzük el a rangsorolást valamennyi adatot figyelembe véve:

1. gyártó	$r(1.\text{gy.})$	2. gyártó	$r(2.\text{gy.})$
34	7	35	8
37	9	33	6
23	3	22	2
27	5	25	4
40	10	21	1

   A próba egyoldalas jellege miatt csak az egyik U próbastatisztika értékére van szükség, és mivel az 1. sokaság várható értékének jobbra tolódását vizsgáljuk, ezért ez az érték az U_1. Határozzuk meg először az 1. gyártó rangösszegét, T_1-t:

$$T_1 = 34 \ .$$

   Számítsuk ki az elemszámok ($n_1 = n_2 = 5$) és T_1 rangösszeg alapján az U_1 értékét:

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - T_1 = 5 \cdot 5 + \frac{5(5+1)}{2} - 34 = 6 \ .$$

   A T/VI. táblázatai közül az $n_2 = 5$-hoz tartozót választva, $\alpha = 0,1$-höz közeli értéket keresve az $n_1 = 5$ oszlopban U_0-ra a 6 értéket kapjuk. A H_0 hipotézist akkor fogadjuk el, ha

$$U_1 > U_0 \ .$$

   Miután a próbastatisztika értéke $U_1 = 6$ nem nagyobb, mint U_0 értéke, ezért elvetjük H_0 hipotézist, azaz elfogadjuk a H_1 hipotézis, mely szerint az 1. gyártó termékei megbízhatóbbak, mint a 2. gyártóé.

   Mint látható, a próbastatisztika értéke pontosan a döntési határra esik, ezért bár a szabálynak megfelelően el kell vetni H_0 hipotézist, de érezhető a döntés bizonytalansága. A paraméteres próbákhoz hasonlóan itt is két dolgot tehetünk:

– vagy növeljük a szignifikanciaszintet és az $\alpha \approx 0,2$ szignifikanciaszinthez tartozó $U_0 = 8$ értékkel összevetve a próbastatisztika értékét biztosabb döntést hozhatunk, bár ez a megoldás növeli a másodfajú hiba valószínűségét;

– vagy további megfigyeléseket végezve és a kapott adatok alapján a próbát újra kivitelezve hozzuk meg a döntést.

3. Két programozási nyelv tömörségét kívánjuk vizsgálni. Ennek érdekében egy, mindkét nyelvben járatos programozóval megoldatunk 7 különböző feladatot mindkét programnyelven. Az alábbi táblázat ugyanazon feladatok esetében tartalmazza az utasítások számát az 'A' illetve a 'B' nyelven írt program esetében. Igazolható-e az alábbi adatok alapján, hogy az egyik nyelven kevesebb paranccsal lehet a feladatokat lekódolni, mint a másik nyelven? Végezze el az ellenőrzést Wilcoxon-teszt segítségével, α=0,05 szignifikanciaszint mellett!

feladat sorszáma	'A' nyelven írt program	'B' nyelven írt program
1	115	140
2	140	130
3	200	210
4	135	100
5	180	175
6	130	120
7	135	135

A megoldás menete:

A feladatnak megfelelően azt kell vizsgálnunk, hogy a két nyelv tömörsége egyforma-e, azaz ugyanazt a feladatot megoldva egyik vagy másik nyelven az utasítások száma ugyanannyi. Írjuk fel először a hipotéziseket:

H_0 : a két nyelv tömörsége egyforma

H_1 : a két nyelv tömörsége különbözik.

A feladatnak és a felírt hipotézispárnak megfelelően kétoldalas Wilcoxon-próbát kell elvégezni.

Az összefoglalóban leírtaknak megfelelően a Wilcoxon-próba esetében első lépésként meghatározzuk az adatpárok közötti különbséget, majd a kapott eltéréseket az abszolút értékük alapján rangsoroljuk, ahogy ez az alábbi táblázatban látható:

feladat sorszáma	'A' nyelven írt program	'B' nyelven írt program	különbség	T^+ rangszámok	T^- rangszámok
1	115	140	-25		5
2	140	130	10	2,5	
3	200	210	-10		2,5
4	135	100	35	6	
5	180	175	5	1	
6	135	120	15	4	
7	135	135	0	kimarad	

A 7. feladat esetében a két program ugyanannyi utasítást tartalmazott, tehát a különbségük nulla, így ezt az adatpárt nem vesszük figyelembe, de az adatpárok számát is csökkentjük, azaz $n = 6$ a továbbiakban.

Határozzuk meg a pozitív (T^+) és a negatív (T^-) eltérésekhez tartozó rangszámok összegét:

$$T^+ = 13,5 \qquad T^- = 7,5 \ .$$

A feladat kétoldalas jellege miatt a két érték közül a kisebbet kell felhasználnunk, ez itt a negatív eltérések rangszámainak összege, T^-.

A megadott szignifikanciaszint ($\alpha = 0,05$) és az adatpárok korrigált száma ($n = 6$) alapján a T/VII. táblázatból határozzuk meg T_0 értékét:

$$T_0 = 1 \ .$$

Miután $T^- > T_0$, ezért a H_0 hipotézist fogadjuk el, azaz a megadott adatok alapján $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett egyformának tekinthető a két programozási nyelv tömörsége.

4. Két azonos felépítésű, azonos funkciójú és azonos körülmények között üzemelő gép működését hasonlítjuk össze a meghibásodások száma alapján. A 9 hónapig tartó megfigyelés eredményét, azaz a havi meghibásodások számát az alábbi táblázat tartalmazza:

hónap	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1. gép	6	15	8	9	9	6	13	11	8
2. gép	7	11	5	7	11	6	12	5	3

Igazolható-e az adatok alapján, hogy a 2. gép megbízhatóbban működik, mint az 1. gép?

Megoldás menete:

A feladat megfogalmazása szerint két teljesen azonos gép működését kell összehasonlítani, amelyek ugyanabból az alapanyagból ugyanazt a terméket gyártják ugyanolyan körülmények között. Tehát a gépek működésének összehasonlítására a Wilcoxon-próba alkalmazható. Miután a cél annak kimutatása, hogy az egyik gép megbízhatóbban, kevesebb meghibásodással működik, mint a másik, így egyoldalas próbát kell alkalmazni. Az összefoglaló részben leírtaknak megfelelően ezt úgy tudjuk a hipotézisekben megfogalmazni, hogy az 1. adathalmaz jobbra tolódását vizsgáljuk a 2. adathalmazhoz képest, azaz azt nézzük meg, hogy az 1. gép szignifikánsan többször romlott-e el, mint a 2. gép. Ennek megfelelően a hipotézisek:

H_0 : a két gép megbízhatósága egyforma

H_1 : az 1. gép többször romlott el, mint a 2. gép.

Első lépésként határozzuk meg az adatpárok közötti különbséget, majd végezzük el az különbségek abszolút értékei alapján a rangsorolást, de a negatív és pozitív értékekhez tartozó különbségeket külön-külön rögzítsük:

hónap	1. gép	2. gép	különbség	rang−	rang+
1	6	7	-1	1,5	
2	15	11	4		6
3	8	5	3		5
4	9	7	2		3,5
5	9	11	-2	3,5	
6	6	6	0		
7	13	12	1		1,5
8	11	5	6		8
9	8	3	5		7
			T^-:	5	
			T^+:		31

A 6. hónapban egyforma számban hibásodott meg a két gép, így ezt figyelmen kívül hagyjuk, és az adatpárok számát is csökkentjük eggyel.

Miután az 1. adathalmaz jobbra tolódását vizsgáljuk a 2.-hez képest, azaz, arra keresünk választ, hogy az 1. gép többször hibásodott-e meg, mint a 2. gép, ezért a vizsgálathoz a $T^- = 5$ rangösszeget használjuk. A T_0 küszöbértéket a T/VII. táblázatból határozzuk meg a szignifikanciaszint ($\alpha = 0,05$), a figyelembe vett adatpárok száma ($n = 8$) és a próba egyoldalas jellege alapján:

$$T_0 = 8 \ .$$

Miután

$$(T^- = 5) < (T_0 = 8) \ ,$$

így a H_1 hipotézist fogadjuk el, azaz az 1. gép kevésbé megbízhatóan működik, mint a 2. gép.

6.3. Gyakorló feladatok

6.3.1. Ellenőrző kérdések

1. Milyen esetben érdemes vagy kell nemparaméteres statisztikai próbát alkalmazni?

2. Hasonlítsa össze a paraméteres és a nemparaméteres statisztikai próbák alkalmazási feltételeit!

3. Hogyan vesszük figyelembe a minták értékeit a nemparaméteres próbáknál?

4. Mi a célja a Mann–Whitney U-próbának?

5. Melyik paraméteres próba párja a Mann–Whitney-féle U-próba?

6. Hogyan végezzük el a rangsorolást a Mann–Whitney U-próbánál?

7. Hogyan írjuk fel a hipotéziseket, ha azt akarjuk vizsgálni, hogy az 1. sokaság várható értéke jobbra tolódik-e a 2. sokasághoz képest a Mann–Whitney U-próbánál?

8. Mi a célja a Wilcoxon-próbának?

9. Melyik paraméteres próbának felel meg a Wilcoxon-próba?

10. Mit kell tenni a Wilcoxon-próbánál abban az esetben, ha az adatpár értékei megegyeznek?

11. Hogyan végezzük el a rangsorolást a Wilcoxon-próbánál?

12. Hogyan írjuk fel a hipotéziseket a Wilcoxon-próbánál, ha azt akarjuk vizsgálni, hogy a két sokaság várható értéke megegyezik-e?

6.3.2. Feladatok

1. Egy folyóparti település szennyvíz-kibocsátását vizsgáljuk úgy, hogy mintát veszünk a folyó vizéből a település előtt és után. A víz szennyezettségét az oldott oxigén koncentrációja alapján vizsgáljuk. Véletlenszerűen veszünk 5-5 mintát mindkét helyről, és az elemzések során a következő eredményeket kapjuk mgO_2/dm^3-ben megadva.

A település felett	4,8	5,2	5,0	4,9	5,1
A település alatt	5,0	4,7	4,9	4,8	4,9

   (a) Mann–Whitney teszt alkalmazásával vizsgálja meg, hogy a település alatti minták kevesebb oldott oxigént tartalmaznak-e, azaz szennyezettebb-e a víz $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett.

   (b) Végezze el a vizsgálatot t-próbával is és hasonlítsa össze a két próba eredményét!

2. Két gyártótól származó monitorok megbízhatóságát vizsgálták úgy, hogy hány hónapig működtek az egyes gyártóktól származó monitorok meghibásodás nélkül. Az eredmények a következők voltak:

   1. gyártó monitorjai: 36, 39, 21, 30, 43 hónap
   2. gyártó monitorjai: 38, 33, 51, 45, 31 hónap .

   (a) $\alpha = 0,1$ szignifikanciaszint mellett határozza meg a Mann–Whitney próba segítségével, hogy a 2. gyártó termékei megbízhatóbbak, mint a 1. gyártóé!

   (b) Milyen megbízhatósági szint mellett teljesül az, hogy a 2. gyártó termékei megbízhatóbbak, mint az 1. gyártóé?

3. Egy kísérletben különböző típusú utasító jellegű KRESZ-táblákra vonatkozó reakcióidőt vizsgálták. Az első csoportba tiltó típusú táblák tartoztak (pl. "Jobbra kanyarodni tilos!"), míg a második csoportba állító jellegűek (pl. "Kötelező haladás irány jobbra"). A kísérletben 10 személy vett részt, mindegyik személynek 20-20 táblát mutattak és mérték a helyes művelet megtételének idejét. Az alábbi táblázat az egyes személyek ms-ban mért átlagos reakcióidejét tartalmazza:

kísérleti személy	tiltó jellegű táblák	állító jellegű táblák
1	814	702
2	736	725
3	831	744
4	730	663
5	829	829
6	724	708
7	817	747
8	691	685
9	746	742
10	579	610

Az adatok alapján igaz-e, hogy az átlagos reakció idő nem egyforma a két táblatípus esetén? ($\alpha = 0,05$)

4. Két versenyző egy évadban a következő helyezéseket érte el:

1. versenyző	11	8	13	8	7	9
2. versenyző	10	12	6	3	1	4

   (a) Tegyük fel, hogy nincs információnk arról, hogy a versenyzők azonos sportágban és azonos versenyeken érték el ezeket az eredményeket! Hogyan értékeli, van-e különbség a két versenyző teljesítménye között $\alpha = 0,1$ szignifikanciaszinten?

   (b) Tegyük fel, hogy a két versenyző ugyanabban a sportágban indult és ugyanazon a versenyeken érték el a megadott eredményeket? Hogyan ítéli meg ekkor a két versenyző eredményét ugyancsak $\alpha = 0,1$ szignifikancia szint mellett?

   (c) Hasonlítsa össze és értékelje a két próba eredményét!

5. Két teljesen azonos gyártmányú és konfigurációjú szerver működését hasonlítjuk össze az alábbi táblázatban szereplő havi leállások alapján.

hónap sorszáma	'A' szerver leállásai	'B' szerver leállásai
1	3	7
2	14	12
3	7	9
4	10	15
5	9	12
6	5	6
7	13	13

Vizsgálja meg Wilcoxon-próba segítségével, hogy van-e különbség a két gép megbízhatósága között $\alpha = 0,05$ mellett!

6. A friss tojások egyik lehetséges osztályozása a tömegük szerint történik a következő besorolás szerint:

XL > 73 g ; L 63–73 g; M 53–63 g; S < 53 g

Tételezzük fel, hogy egy gazdaságban az egyik tyúkot ketrecben tartják, és speciális táppal etetik, míg a másik tyúkot hagyományos körülmények között tartják. Mindkét tyúktól egy héten keresztül naponta megmérnek egy aznapi tojást. A kapott értékeket az alábbi táblázat tartalmazza (n - nem volt aznap tojás)

nap sorszáma	tápos tyúk	normál tyúk
1	XL	L
2	M	n
3	S	L
4	XL	M
5	M	n
6	L	S
7	n	L

Szolgáltatnak-e az adatok arra elégséges bizonyítékot, hogy a két tyúk tojásméretei különböznek $\alpha = 0,1$ szignifikanciaszint esetén?

6.3.3. Megoldások

1. (a) Alkalmazott próba: egyoldalas Mann–Whitney-próba
   $U_1 = 6$, $U_0 = 3$, így $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $U1 \nleq U_0$, tehát nincs különbség a víz szennyezettségében a település előtt és után.

   (b) Alkalmazott próba: kétmintás t-próba
   Az F-próbánál: $F_0 = 1,387$; $F_t = 5,05$ A t próbánál: $s^2 = 0,019$; $t_0 = 1,606$; $t_t = 2,132$, így ebben az esetben sincs különbség.

2. Alkalmazott próba: egyoldalas Mann–Whitney-próba

   (a) $U_2 = 8$, $U_0 = 4$, így $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $U2 \nleq U_0$, tehát nincs különbség a két gyártó termékei között.

   (b) $\alpha = 0,21$ szignifikanciaszinten utasítjuk el H_0 hipotézist, azaz mondhatjuk, hogy a 2. gyártó termékei megbízhatóbbak, mint az 1. gyártóé.

3. Alkalmazott próba: kétoldalas Wilcoxon-próba
   $T^- < T_0$, van különbség a reakcióidők között.

4. (a) Alkalmazott próba: kétoldalas Mann–Whitney-próba $min(U_1, U_2) = U_1 = 9$, $U_0 = 5$, így $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $U1 \nleq U_0$, tehát nincs különbség a két versenyző között.

   (b) Alkalmazott próba: kétoldalas Wilcoxon-próba $min(T^-, T^+) = T^- = 2$, $T_0 = 2$, így $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $T^- \leq T_0$, tehát van különbség a két versenyző között.

   (c) Több információ jobb összehasonlítást tesz lehetővé.

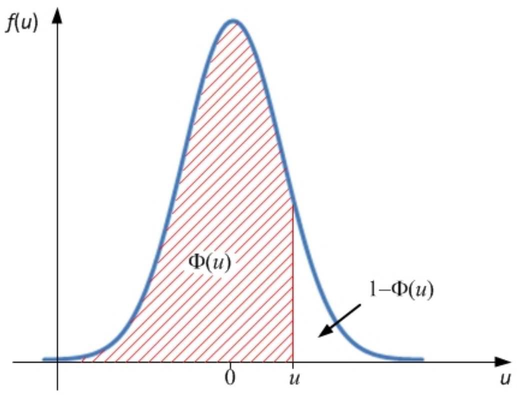
5. Alkalmazott próba: kétoldalas Wilcoxon-próba
   $T^+ > T_0$, nincs különbség a szerverek meghibásodása között.

6. Alkalmazott próba: kétoldalas Mann–Whitney-próba $min(U_1, U_2) = U_1 = 19$, $U_0 \approx 5,5$, így $\alpha = 0,1$ szignifikanciaszint mellett $U1 \nleq U_0$, tehát nincs különbség a két tyúk tojásai között.

Táblázatok

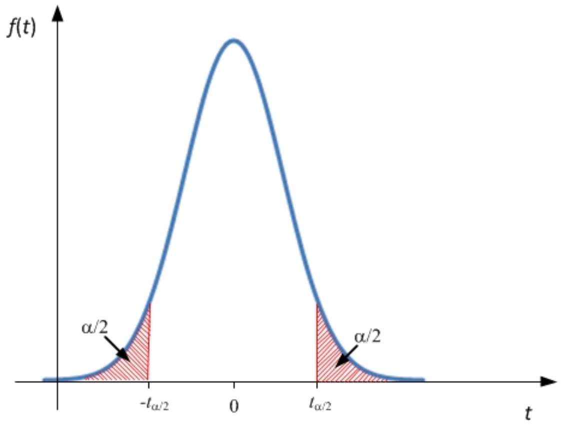
A következő oldalakon találhatóak azok a táblázatok, melyek alapján a különböző statisztikai próbáknál a hipotézisvizsgálat elvégezhető. A táblázatok csak annyi adatot tartalmaznak, amennyi a gyakorló és zárthelyi feladatok megoldásához szükséges. Az Ajánlott irodalom fejezetben felsorolt könyvek részletesebb táblázatokat tartalmaznak.

T/I. u-eloszlás



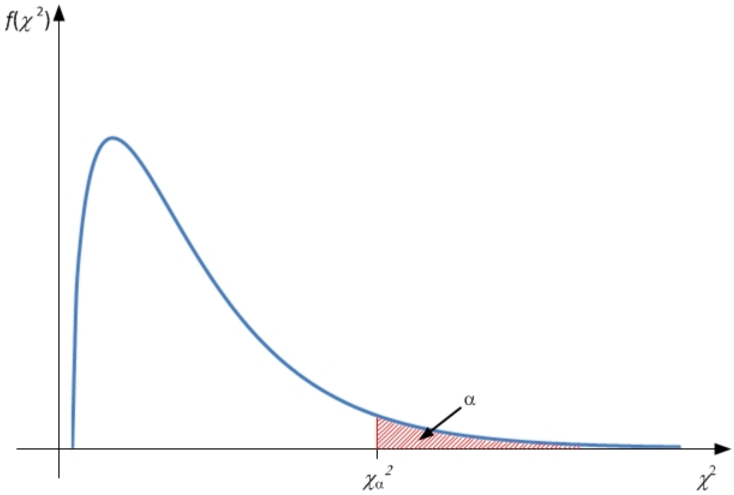
u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520

T/II. t-eloszlás



	α			
ν	0,1	0,05	0,025	0,01
1	6,314	12,706	25,452	63,657
2	2,920	4,303	6,205	9,925
3	2,353	3,182	4,177	5,841
4	2,132	2,776	3,495	4,604
5	2,015	2,571	3,163	4,032
6	1,943	2,447	2,969	3,707
7	1,895	2,365	2,841	3,499
8	1,860	2,306	2,752	3,355
9	1,833	2,262	2,685	3,250
10	1,812	2,228	2,634	3,169
11	1,796	2,201	2,593	3,106
12	1,782	2,179	2,560	3,055
13	1,771	2,160	2,533	3,012
14	1,761	2,145	2,510	2,977
15	1,753	2,131	2,490	2,947

T/III. χ^2-eloszlás



	α							
ν	0,99	0,975	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025	0,01
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349
2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103
3	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449
4	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767
5	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	9,2364	11,0705	12,8325	15,0863
6	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119
7	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753
8	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902
9	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660
10	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093
11	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250
12	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170
13	4,1069	5,0088	5,8919	7,0415	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882
14	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412
15	5,2293	6,2621	7,2609	8,5468	22,3071	24,9958	27,4884	30,5779

T/IV. F-eloszlás

	ν_n									
ν_{sz}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,45	18,51	10,13	7,71	6,61	5,99	5,59	5,32	5,12	4,96
2	199,50	19,00	9,55	6,94	5,79	5,14	4,74	4,46	4,26	4,10
3	215,71	19,16	9,28	6,59	5,41	4,76	4,35	4,07	3,86	3,71
4	224,58	19,25	9,12	6,39	5,19	4,53	4,12	3,84	3,63	3,48
5	230,16	19,30	9,01	6,26	5,05	4,39	3,97	3,69	3,48	3,33
6	233,99	19,33	8,94	6,16	4,95	4,28	3,87	3,58	3,37	3,22
7	236,77	19,35	8,89	6,09	4,88	4,21	3,79	3,50	3,29	3,14
8	238,88	19,37	8,85	6,04	4,82	4,15	3,73	3,44	3,23	3,07
9	240,54	19,38	8,81	6,00	4,77	4,10	3,68	3,39	3,18	3,02
10	241,88	19,40	8,79	5,96	4,74	4,06	3,64	3,35	3,14	2,98
11	242,98	19,40	8,76	5,94	4,70	4,03	3,60	3,31	3,10	2,94
12	243,91	19,41	8,74	5,91	4,68	4,00	3,57	3,28	3,07	2,91
13	244,69	19,42	8,73	5,89	4,66	3,98	3,55	3,26	3,05	2,89
14	245,36	19,42	8,71	5,87	4,64	3,96	3,53	3,24	3,03	2,86
15	245,95	19,43	8,70	5,86	4,62	3,94	3,51	3,22	3,01	2,85

ahol

ν_{sz} – a számláló szabadsági foka,

ν_n – a nevező szabadsági foka,

a számlálóba a nagyobb tapasztalati szórásnégyzet érték, a nevezőbe a kisebb tapasztalati szórásnégyzet érték kerül.

T/V. v-teszt (kiugró adat ellenőrzése)

n	$sz.h$
3	46,7
4	10,1
5	6,51
6	5,31
7	4,73
8	4,40
9	4,18
10	4,04
15	3,71
20	3,60

ahol

n – az összes adat száma (gyanús értéket is figyelembevéve)

$sz.h.$ – szignifikanciaszint, aminél ha nagyobb a számolt érték, akkor kiugrő adatnak tekintjük a gyanús értéket

T/VI. Mann–Whitney U-eloszlás

$n_2 = 3$			
		n_1	
U_0	1	2	3
0	0,25	0,10	0,05
1	0,50	0,20	0,10
2		0,40	0,20
3		0,60	0,35
4			0,50

$n_2 = 4$				
		n_1		
U_0	1	2	3	4
0	0,2000	0,0667	0,0286	0,0143
1	0,4000	0,1333	0,0571	0,0286
2	0,6000	0,2667	0,1143	0,0571
3		0,4000	0,2000	0,1000
4		0,6000	0,3143	0,1714
5			0,4826	0,2429
6			0,5714	0,3429
7				0,4429
8				0,5571

$n_2 = 5$					
		n_1			
U_0	1	2	3	4	5
0	0,1667	0,0476	0,0179	0,0079	0,0040
1	0,3333	0,0952	0,0357	0,0159	0,0079
2	0,5000	0,1905	0,0714	0,0317	0,0159
3		0,2857	0,1250	0,0556	0,0278
4		0,4286	0,1964	0,0952	0,0476
5		0,5714	0,2857	0,1429	0,0754
6			0,3929	0,2063	0,1111
7			0,5000	0,2778	0,1548
8				0,3651	0,2103
9				0,4524	0,2738
10				0,5476	0,3452
11					0,4206
12					0,5000

$n_2 = 6$						
			n_1			
U_0	1	2	3	4	5	6
0	0,1429	0,0357	0,0119	0,0048	0,0022	0,0011
1	0,2857	0,0714	0,0238	0,0095	0,0043	0,0022
2	0,4286	0,1429	0,0476	0,0190	0,0087	0,0043
3	0,5714	0,2143	0,0833	0,0333	0,0152	0,0076
4		0,3214	0,1310	0,0571	0,0260	0,0130
5		0,4286	0,1905	0,0857	0,0411	0,0206
6		0,5714	0,2738	0,1286	0,0628	0,0325
7			0,3571	0,1762	0,0887	0,0465
8			0,4524	0,2381	0,1234	0,0660
9			0,5476	0,3048	0,1645	0,0898
10				0,3810	0,2143	0,1201
11				0,4571	0,2684	0,1548
12				0,5429	0,3312	0,1970
13					0,3961	0,2424
14					0,4654	0,2944
15					0,5346	0,3496
16						0,4091
17						0,4686
18						0,5314

ahol

n_1 – az 1. adathalmaz elemszáma

n_2 – a 2. adathalmaz elemszáma

$n_1 \leq n_2$.

A táblázatok első oszlopa tartalmazza az U_0 határértékeket. A cellákban található szignifikancia-értékek alapján kiválasztva a megfelelő U_0-t, elvetjük a H_0 hipotézist, ha az U próbastatisztika értéke kisebb mint U_0.

T/VII. Wilcoxon T-eloszlás

egyoldalas	kétoldalas	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$
$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,10$	1	2	4	6	8	11
$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,05$		1	2	4	6	8
$\alpha = 0,015$	$\alpha = 0,02$			0	2	3	5

ahol

n – a figyelembevett adatpárok száma

A táblázat cellái tartalmazzák az T_0 határértékeket. Az első két oszlopban található szignifikanciaértékek alapján kiválasztva a megfelelő T_0-t, elvetjük a H_0 hipotézist, ha az T próbastatisztika értéke kisebb mint T_0.

Ajánlott irodalom

Az érdeklődő hallgatóknak az alábbi, többé-kevésbé könnyen beszerezhető könyveket javasoljuk:

Kemény S., Deák A.: *Kísérletek tervezése és értékelése*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (2000)

Mendenhall, W.: *Introduction to Probability and Statistics*, PWS-Kent Publishers, Boston, USA, (1987)

Prékopa A.: *Valószínűségelmélet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1974)

Dowdy, S., Wearden, S.: *Statistics for Research*, John Wiely and Sons, New York, USA, (1983)

Kailath, T.: *Linear Systems*, Prentice-Hall, Inc., Enlewood Cliffs, USA, (1980)