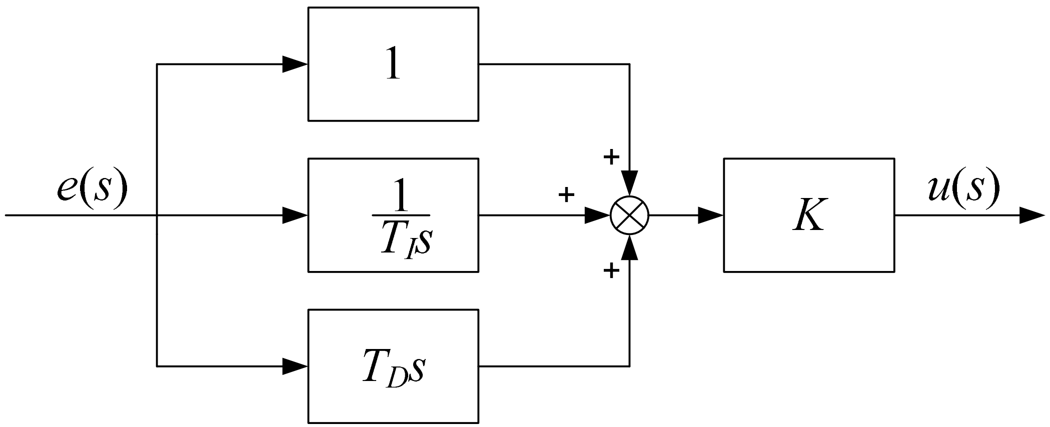
Mintavételes rendszerek szabályozása

Diszkrét PID algoritmus

- folytonos PID algoritmus
  - Arányos, integráló és deriváló tagok párhuzamos kapcsolása



  - ahol

    K – a közös erősítés

    T_I – az integrálási időállandó

    T_D – a deriválási időállandó

Diszkrét PID algoritmus

- I/O modell:

$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d\,\frac{de(t)}{dt}\right)$$

- átviteli függvény

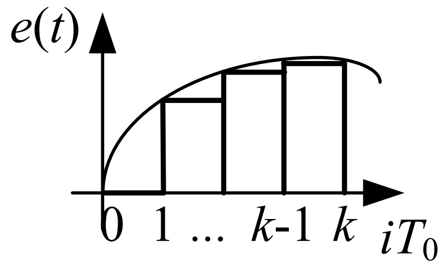
$$G(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

Diszkrét PID algoritmus

- a folytonos algoritmus diszkretizálása
  - tagonként az időtartománybeli modell alapján
  - az átviteli függvényből táblázattal

  - arányos tag: $e(t) \rightarrow e(kT_0)$, azaz a hibajel értéke az adott mintavételezési időpontban
  - integráló tag:

$$\frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)d\tau \rightarrow \frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k-1} e(i)$$



azaz az integrálást a téglány szabály alapján szummázással közelítjük

Diszkrét PID algoritmus

- derivàló tag

$$T_D \frac{de(t)}{dt} \rightarrow T_D \frac{e(kT_0) - e((k-1)T_0)}{T_0}$$

azaz a deriválást két pontos különbségképzéssel közelítjük

- léteznek más, pontosabb, de bonyolultabb megoldások az integráló illetve a deriváló tagok közelítésére

Diszkrét PID algoritmus

- a diszkrét PID algoritmus I/O modellje:

$$u(kT_0) = K\left(e(kT_0) + \frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k-1} e(iT_0) + T_D\,\frac{e(kT_0) - e((k-1)T_0)}{T_0} \right)$$

  - ez az ún. pozíció algoritmus, mely megadja, hogy hova álljon be a végrehajtószerv (pl. hány %-ra nyisson).
  - z-transzformálva

$$U(z) = K\left(E(z) + \frac{T_0}{T_I}\,\frac{z}{z-1}\,E(z) + \frac{T_D}{T_0}\left(1 - z^{-1}\right)E(z) \right)$$

Diszkrét PID algoritmus

- az impulzus átviteli függvény

$$G_{DPID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K\left(1 + \frac{T_0}{T_I}\frac{z}{z-1} + \frac{T_D}{T_0}\frac{z-1}{z}\right)$$

Diszkrét PID algoritmus

- Vannak olyan beavatkozó szervek, amelyek bemenetére a pillanatnyi helyzethez képesti megváltozást kell bemenő adatként megadni. Ezt szolgáltatja a sebesség algoritmus.
- Levezetéshez írjuk fel a pozíció algoritmust a k-dik és k-1-dik mintavételezési időpontra:

$$u(k) = K\left(e(k) + \frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k-1} e(i) + T_D\frac{e(k) - e(k-1)}{T_0}\right)$$

$$u(k-1) = K\left(e(k-1) + \frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k-2} e(i) + T_D\frac{e(k-1) - e(k-2)}{T_0}\right)$$

Diszkrét PID algoritmus

- kivonva egymásból a két egyenletet

$$u(k)-u(k-1)=K\left(e(k)-e(k-1)+\frac{T_0}{T_I}e(k-1)+\frac{T_D}{T_0}(e(k)-2e(k-1)+e(k-2))\right)$$

- ezt az egyenletet a következő alakban szokás megadni:

$$u(k)-u(k-1)=q_0e(k)+q_1e(k-1)+q_2e(k-2)$$

- ahol

$$q_0=K\left(1+\frac{T_D}{T_0}\right)\quad q_1=-K\left(1-\frac{T_0}{T_I}+2\frac{T_D}{T_0}\right)\qquad q_2=K\frac{T_D}{T_0}$$

Diszkrét PID algoritmus

- impulzus átviteli függvény

$$\left(1-z^{-1}\right)U(z)=q_0E(z)+q_1z^{-1}E(z)+q_2z^{-2}E(z)$$

$$G^{s}_{DPID}(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-z^{-1}}$$

Diszkrét PID algoritmus

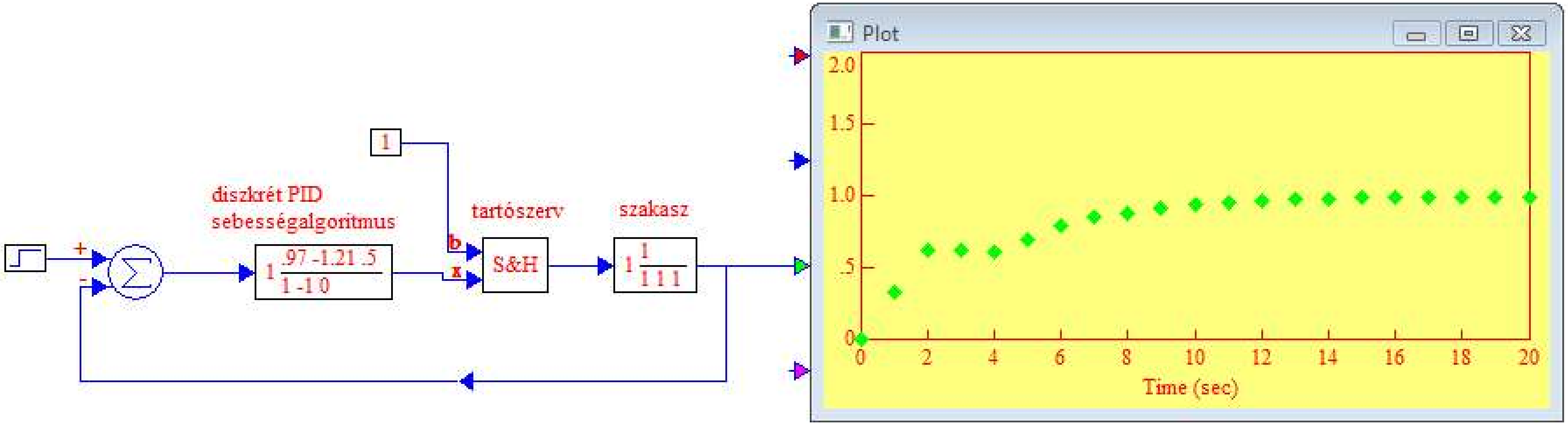
- Diszkrét PID algoritmus beállítása Takahashi szerint
  - paraméterek
    - T_0 mintavételezési idő
    - T a szabályzott szakasz időállandója
    - T_h a szabályzott szakasz holtideje
    - K a szabályzó erősítése
    - T_I integrálási időállandó
    - T_D deriválási időállandó
  - legyen $\dfrac{T_h}{T_0} \geq 1$

Diszkrét PID algoritmus

- beállítandó paraméterek
  - erősítés
    $$K = \frac{1.2T}{T_h + T_0} - \frac{0{,}3T \cdot T_0}{\left(T_h + T_0 / 2\right)^2}$$
  - integrálási időállandó
    $$\frac{T_0}{T_I} = \frac{0{,}6T \cdot T_0}{K\left(T_h + T_0 / 2\right)^2}$$
  - deriválási időállandó
    $$\frac{T_D}{T_0} = \frac{0{,}5T}{KT_0}$$

Diszkrét PID algoritmus

- a példa szimulációja



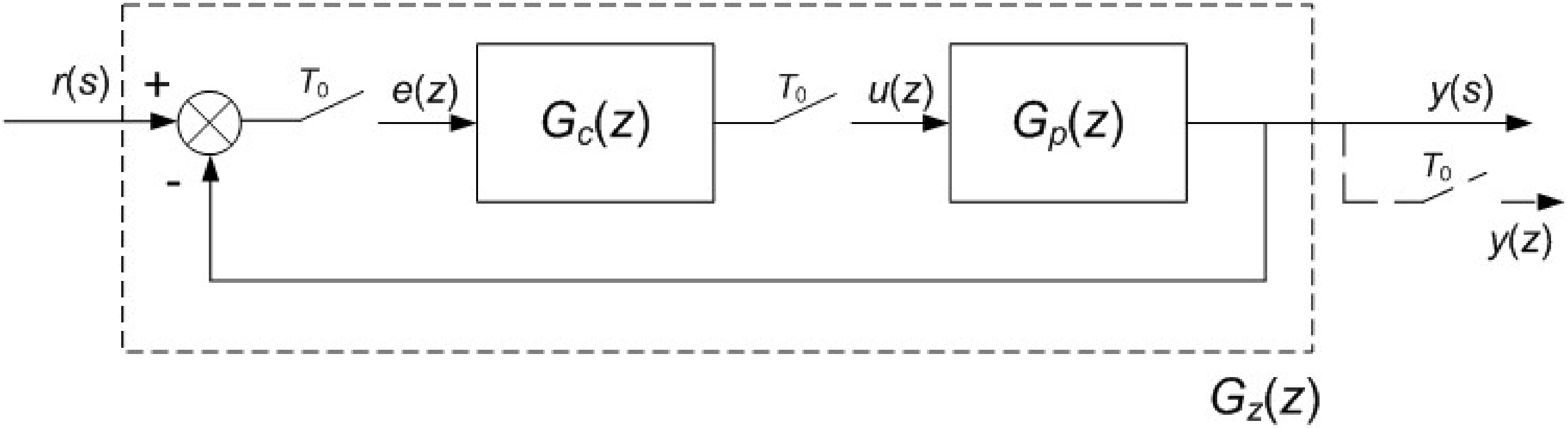
Deadbeat algoritmus

- Véges beállású szabályozási algoritmus

- Cél: a szabályozott jellemző véges, előre meghatározott számú mintavételezési periódus után érje el az állandósult állapotot adott, előírt változású alapjel vagy zavaró jel esetén
  az alsó szintű kör a felső szint utasításait minimális idő alatt teljesítse

Deadbeat algoritmus

- A mintavételezett, zárt szabályozási kör:



- az eredő impulzus átviteli függvény:

$$G_z(z)=\frac{y(z)}{r(z)}=\frac{G_c(z)G_p(z)}{1+G_c(z)G_p(z)}$$

Deadbeat algoritmus

- a szabályozó impulzus átviteli függvénye:

$$G_c(z) = \frac{1}{G_p(z)} \cdot \frac{G_z(z)}{1 - G_z(z)}$$

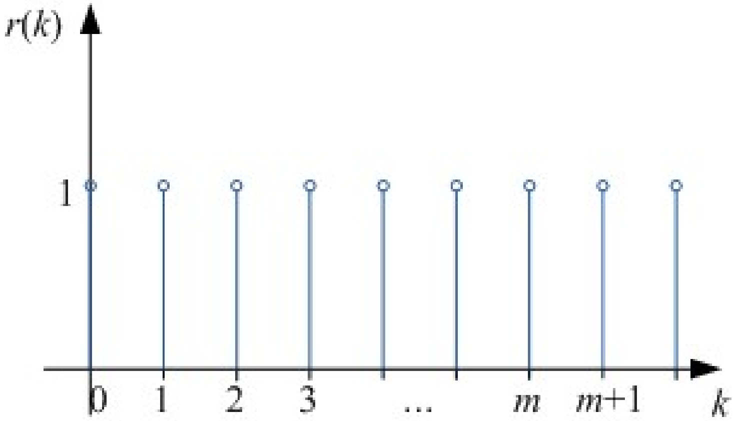
Deadbeat algoritmus

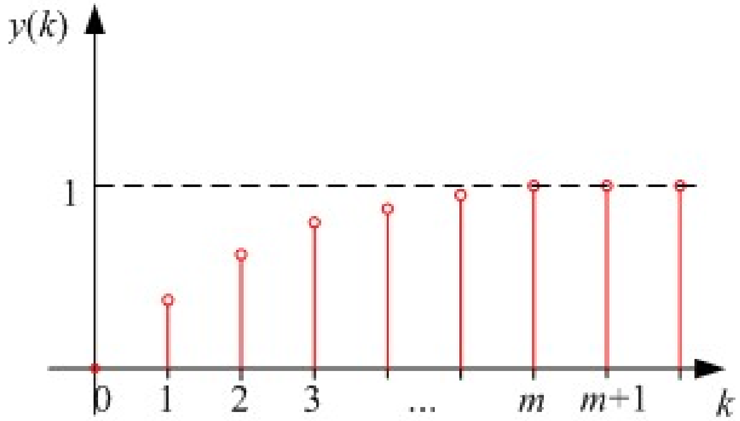
- legyen az alapjel:

$$r(t) = 1(t) \qquad r(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

- a kimenet:

$$y(z) = y(0)z^0 + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \ldots + 1\left(z^{-m} + z^{-(m+1)} + \ldots\right)$$





Deadbeat algoritmus

- A megfelelő $y(k)$ kimenő jel sorozatot csak olyan $u(k)$ beavatkozó jel sorozat hozhatja létre, amely m mintavételezési ciklusidő alatt szintén stacionárius értékre áll be:

$$u(z) = u(0)z^{0} + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \ldots + u(m)\left(z^{-m} + z^{-(m+1)} + \ldots\right)$$

Deadbeat algoritmus

- A zárt körre vonatkozó összefüggés:

$$\frac{y(z)}{r(z)} = \left(1 - z^{-1}\right)\left(y(0)z^{0} + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \ldots + z^{-m} + z^{-(m+1)} + \ldots\right) =$$

$$= y(1)z^{-1} + \left(y(2) - y(1)\right)z^{-2} + \ldots + \left(\underset{\substack{\uparrow \\ y(m)}}{1} - y(m-1)\right)z^{-m} + \left(\underset{\substack{\uparrow \\ y(m+1)}}{1} - \underset{\substack{\uparrow \\ y(m)}}{1}\right)z^{-(m+1)} + \ldots =$$

$$= P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_m z^{-m}$$

Deadbeat algoritmus

- Hasonló módon írjuk fel a következő összefüggést:

$$\frac{u(z)}{r(z)} = \left(1 - z^{-1}\right)\left(u(0)z^{0} + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \ldots + u(m)\left(z^{-m} + z^{-(m+1)} + \ldots\right)\right) =$$

$$= u(0) + \left(u(1) - u(0)\right)z^{-1} + \left(u(2) - u(1)\right)z^{-2} + \ldots + \left(u(m) - u(m-1)\right)z^{-m} =$$

$$= Q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots + q_m z^{-m}$$

Deadbeat algoritmus

- Belátható, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 = y(1) + y(2) - y(1) + y(3) - y(2) + \ldots + y(m) - y(m-1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} q_i = u(m) = u(0) + u(1) - u(0) + u(2) - y(1) + \ldots + u(m) - u(m-1) =$$

$$= \frac{1}{K} = \frac{\sum a_i}{\sum b_i} \qquad \left(K = \frac{y_\infty}{u_\infty} \right)$$

Deadbeat algoritmus

- Belátható, hogy

$$G_z(z) = P(z) \qquad G_p(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{y(z)/r(z)}{u(z)/r(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

- így a szabályozó impulzus átviteli függvénye:

$$G_c(z) = \frac{1}{G_p(z)} \frac{G_z(z)}{1 - G_z(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} \frac{P(z)}{1 - P(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}$$

Deadbeat algoritmus

- polinom alakban

$$G_c(z)=\frac{Q(z)}{1-P(z)}=\frac{q_0+q_1 z^{-1}+\ldots+q_m z^{-m}}{1-p_1 z^{-1}-\ldots-p_m z^{-m}}$$

ahol az együtthatók $q_0=\frac{1}{\sum b_i}=u(0)$

$$q_1=a_1 q_0 \qquad p_1=b_1 q_0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$q_m=a_m q_0 \qquad p_m=b_m q_0$$

azaz

$$G_c(z)=\frac{q_0 A(z^{-1})}{1-q_0 B(z^{-1})}$$

Deadbeat algoritmus

- Probléma: $$u_0 = \frac{1}{\sum b_i}$$

  azaz az első beavatkozó jel nem realizálható.
- Megoldás: korlátozzuk ennek értékét, de ekkor a beállási idő egy periódussal nő.
- Gyakorlati szabályok:

  $u(0) \approx u(1)$ $u(0)$ ne legyen kisebb, mint $u(1)$

  $T_0 \geq 0{,}18T_{95}$ ha nincs korlát $u(0)$-ra

  $T_0 \geq 0{,}11T_{95}$ ha van korlát $u(0)$-ra

  T_{95} 95%-os beállási idő

Holt idős rendszerek

- technológiából származó holt idő
  - fizikai folyamatok véges sebessége (anyagok szállítása, áramlása)
- információ átadásból származó holt idő
  - műszerek, érzékelők védelme
- el kell dönteni, hogy lényeges-e a figyelembe vétele

Holt idős rendszerek

- Holt idős rendszerek leírása

$$G_h(s) = G(s)e^{-T_h s}$$

ahol T_h a szakasz holtideje

- Frekvenciatartományban
  - amplitúdó:

$$\left|e^{-j\omega T_h}\right| = |\cos\omega T_h - j\sin\omega T_h| = 1$$

  - fázis

$$\angle e^{-j\omega T_h} = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\sin\omega T_h}{\cos\omega T_h}\right) = -\omega T_h$$

azaz a holtidős tagnak nincs hatása az amplitúdóra, de a frekvenciával arányos fáziskésést okoz.

Holt idős rendszerek

- holt idő hatása a Nyquist és Bode diagramon
  - holtidős tag Nyquist diagramja: egység sugarú kör, egyszeri körüljárás $2\pi/T_h$ frekvencia növekedésnek felel meg
  - holtidős tag Bode diagramja: egységnyi amplitúdó miatt az amplitúdó görbe a frekvencia tengelyen fut, míg a fázis görbe az egyenes arányosságnak és a logaritmikus léptékű ábrázolásnak megfelelően alakul
  - holtidős szakasz esetében a holtidő mentes görbét az egység vektorral kell szorozni és ωT_h fáziskésést hozzáadni

Holt idős rendszerek

- Időtartományban az analitikus elemzés nem egyszerű, általában az alábbi sorbafejtéseket alkalmazhatjuk:

$$e^{-Ts} = 1 - Ts + \frac{(Ts)^2}{2!} - \frac{(Ts)^3}{3!} + \cdots$$

vagy

$$e^{-Ts} = \frac{1}{e^{Ts}} = \frac{1}{1 + Ts + \frac{(Ts)^2}{2!} + \frac{(Ts)^3}{3!} + \cdots}$$

így az operátor tartománybeli közelítő alak:

$$G_h(s) = 1 - T_h s \quad \text{vagy} \quad G_h(s) = \frac{1}{1 + T_h s}$$

Holt idős rendszerek

- Holtidős tag gyökhelygörbe vizsgálata
  - az elméleti alak a végtelen sok pólus miatt nehezen értelmezhető
  - konkrét holtidős szakasz esetében:

$$G(s)G_h(s) = \frac{Ke^{-T_h s}}{(s+1)(s+2)}$$

a szögfeltétel kielégítése:

$$\angle(s+1) + \angle(s+2) - \angle e^{-T_h s} = l\pi \quad l = 1,3,\ldots$$

$$\angle e^{-T_h s} = \angle e^{-\sigma s} - \angle e^{-j\omega T_h} =$$

$$= 0° + \angle(\cos\omega T_h - j\sin\omega T_h) = -\omega T_h$$

Dahlin algoritmus

- Cél: adott átviteli függvénnyel rendelkező, holt idős szakaszt tartalmazó, mintavételes zárt szabályozási körhöz szabályozó illesztése

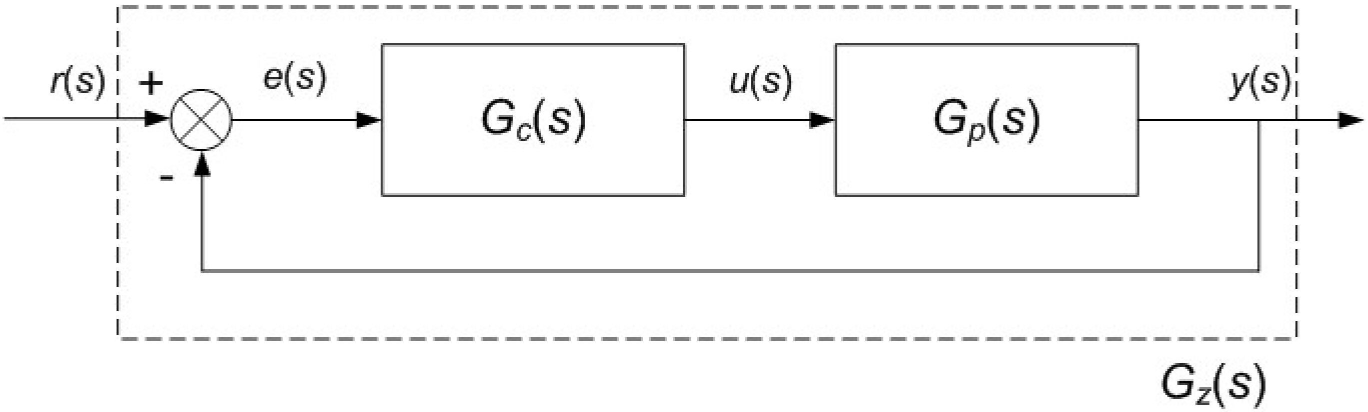
- A szabályozási rendszer alsó szintjén legyen a szabályzó kör eredő átviteli függvénye:

$$G_z(s) = \frac{e^{-sT_h}}{\tau s + 1}$$

ahol τ a zárt kör időállandója, T_h a szakasz holtideje

Dahlin algoritmus

- A folyamatos működésű szabályozó kör

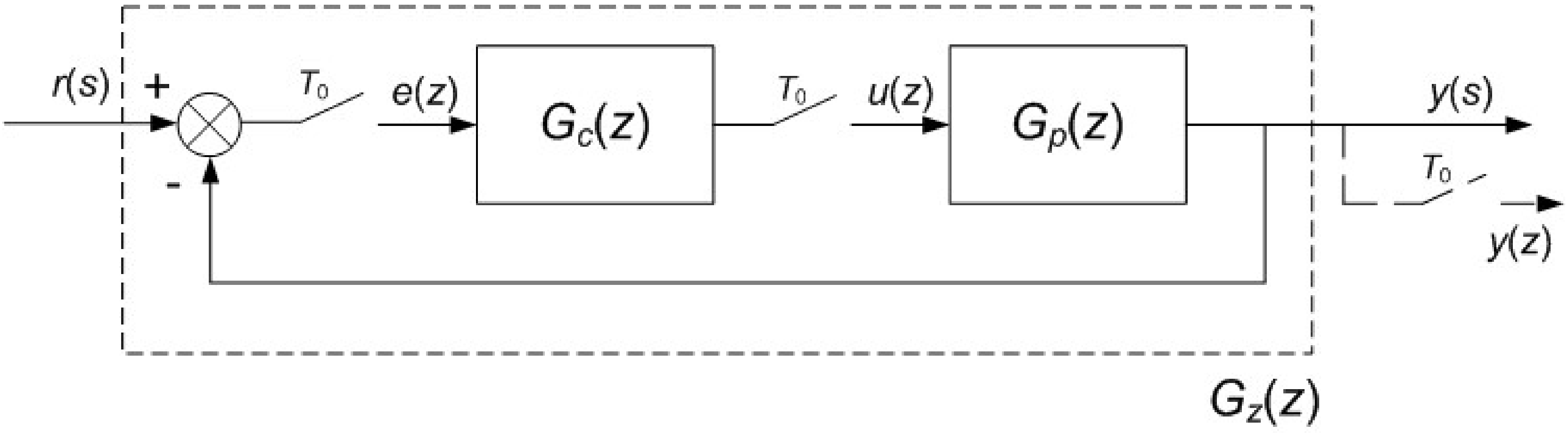


$$G_z(s)=\frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}=\frac{1}{\tau s+1}e^{-sT_h}=\frac{1}{\frac{1}{\lambda}s+1}e^{-sT_h}$$

ahol λ= 1/τ – hangolási tényező

Dahlin algoritmus

- A mintavételezéses szabályozási kör



$$G_z(z) = \frac{G_c(z)G_p(z)}{1+G_c(z)G_p(z)}$$

ahol T_0 – mintavételezési időállandó

Dahlin algoritmus

- Feladat: határozzuk meg a szabályozó impulzus átviteli függvényét ($G_c(z)$) adott zárt kör impulzus átviteli függvényhez ($G_z(z)$) , ha ismerjük a szakasz impulzus átviteli függvényét ($G_p(z)$).

$$G_c(z) = \frac{1}{G_p(z)} \cdot \frac{G_z(z)}{1 - G_z(z)}$$

Dahlin algoritmus

- Az zárt kör átviteli függvényének közelítése:

$$G_z(s)=\frac{1}{\frac{1}{\lambda}s+1}e^{-sT_h}$$

$$G_z(z)=\frac{\left(1-e^{-\lambda T_0}\right)\cdot z^{-1}}{1-e^{-\lambda T_0}z^{-1}}z^{-N}$$

$$N=\frac{T_h}{T_0}$$

Dahlin algoritmus

- Legyen a szakasz átviteli illetve impulzus átviteli függvénye:

$$G_p(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} e^{-sT_h}$$

$$G_p(z) = \frac{K\left(1 - e^{-\frac{T_0}{T_1}}\right) z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T_0}{T_1}} z^{-1}} z^{-N} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} z^{-N}$$

ahol $a_1 = -e^{-\frac{T_0}{T_1}}, \quad b_1 = K\left(1 - e^{-\frac{T_0}{T_1}}\right) \quad N = \frac{T_h}{T_0}$

Dahlin algoritmus

- Behelyettesítve a $G_z(z)$ és $G_p(z)$ impulzus átviteli függvényeket a szabályozóra kapott összefüggésbe:

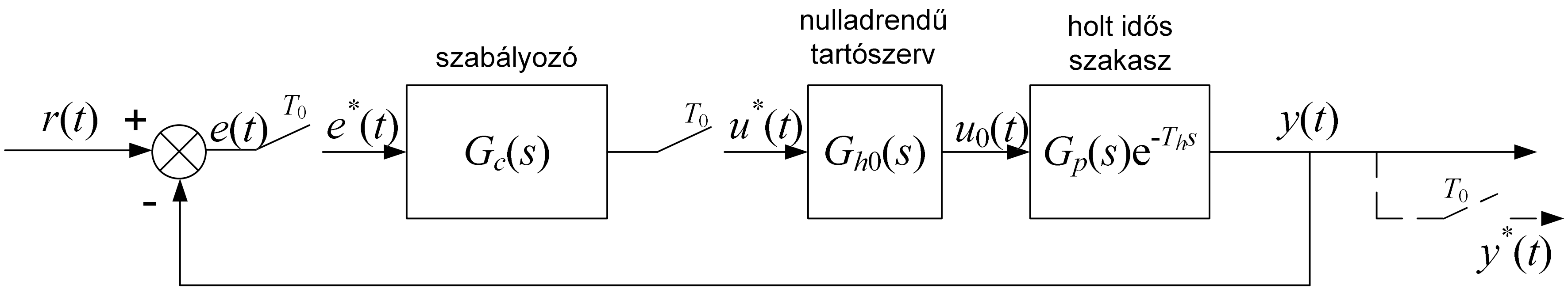
$$G_c(z)=\frac{1}{G_p(z)}\cdot\frac{G_z(z)}{1-G_z(z)}=\frac{1-e^{-\frac{T_0}{T_1}}z^{-1}}{K\left(1-e^{-\frac{T_0}{T_1}}\right)z^{-1}z^{-N}}\cdot\frac{\frac{\left(1-e^{-\lambda T_0}\right)z^{-1}z^{-N}}{1-e^{-\lambda T_0}z^{-1}}}{1-\frac{\left(1-e^{-\lambda T_0}\right)z^{-1}z^{-N}}{1-e^{-\lambda T_0}z^{-1}}}=$$

$$=\frac{\left(1+a_1z^{-1}\right)\left(1-e^{-\lambda T_0}\right)}{b_1\left(1-e^{-\lambda T_0}z^{-1}-\left(1-e^{-\lambda T_0}\right)z^{-N-1}\right)}$$

ahol $a_1=-e^{-\frac{T_0}{T_1}},\quad b_1=K\left(1-e^{-\frac{T_0}{T_1}}\right)\quad N=\frac{T_h}{T_0}\quad \lambda=\frac{1}{\tau}$

Szabályozás Smith-prediktorral

- Holtidős szakaszok szabályozására alkalmazható módszer
- Tekintsük az alábbi szabályozó kört:

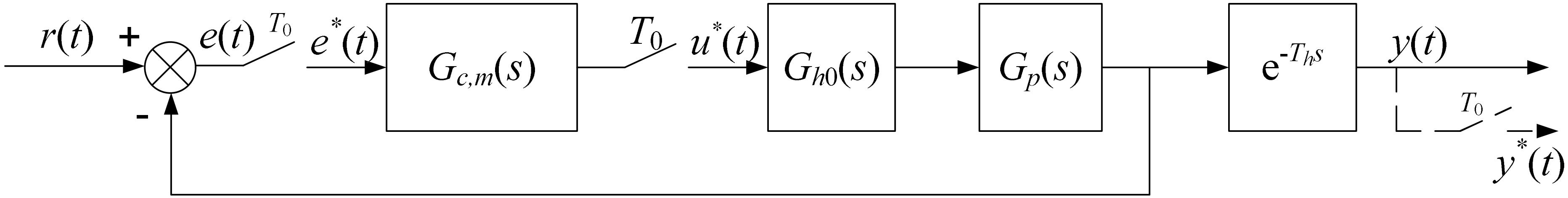


- az eredő impulzusátviteli függvény

$$G_e(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{z^{-N} G_c(z) G_{h0} G_p(z)}{1 + z^{-N} G_c(z) G_{h0} G_p(z)} \qquad N = \frac{T_h}{T_0}$$

Szabályozás Smith-prediktorral

- a szabályozó megfelelő módosításával alakítsuk át a kört a következő módon:



- ekkor a módosított rendszer impulzusátviteli függvénye:

$$G_{e,m}(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{G_{c,m}(z)G_{h0}G_p(z)}{1 + G_{c,m}(z)G_{h0}G_p(z)} z^{-N}$$

Szabályozás Smith-prediktorral

- Az eredeti illetve az átalakított rendszer kimenetének meg kell egyeznie, így

$$\frac{G_c(z)}{1 + z^{-N} G_c(z) G_{h0} G_p(z)} = \frac{G_{c,m}(z)}{1 + G_{c,m}(z) G_{h0} G_p(z)}$$

ebből

$$G_c\,(z) = \frac{G_{c,m}(z)}{1 + (1 - z^{-N}) G_{c,m}(z) G_{h0} G_p(z)}$$

Szabályozás Smith-prediktorral

- A módosított szabályozó kör felépítése: