



Nemlineáris rendszerek



Lineáris – nemlineáris rendszerek

- Lineáris, időinvariáns, folytonos idejű bemenet/kimenet (I/O) modell:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u$$

ahol u – a bemenő jel

y – a kimenő jel

$a_n, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0$ – paraméterek

- a leíró egyenletek nem tartalmazhatják a változók szorzatait vagy hatványait
- elméleti rendszerek



Lineáris – nemlineáris rendszerek

- Lineáris rendszerek alapvető tulajdonsága:

$$u_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$u_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in R$$

$$\lambda_1 \cdot u_1(t) + \lambda_2 \cdot u_2(t) \rightarrow \lambda_1 \cdot y_1(t) + \lambda_2 \cdot y_2(t)$$

szuperpozíció
tétele

- példa – mérleg
- idővariáns rendszerek is lehetnek lineáris rendszerek (elvileg)



Lineáris – nemlineáris rendszerek

- valós rendszerek többé-kevésbé nemlineárisak
 - ha kicsi az eltérés az állandósult állapotban, akkor alkalmazhatunk lineáris modellt
 - analízis – lineáris modell
 - szimuláció – nemlineáris rendszer
 - szakadósos rendszerek – nem linearizálhatók
- a nemlineáris rendszerek nem mindig kedvezőtlenek, vannak technikai és gazdasági előnyei



Lineáris – nemlineáris rendszerek

- Tipikus nemlineáris egyenletek:

$$\ddot{y} + b(\dot{y})^2 + cy = Ku$$

$$\ddot{y} + b\dot{y} + c\sqrt{y} = Ku$$

$$\ddot{y} + b\dot{y} + \sin y = Ku$$

- de az alábbi egyenlet egy lineáris, idővariáns rendszert ír le:

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = K(t)u$$



Lineáris – nemlineáris rendszerek

- **Lineáris** és **nemlineáris** rendszerek tulajdonságai:

1. **Lineáris rendszerek**: érvényes a szuperpozíció tétele – nemcsak állandósult állapotban, hanem a tranziens során bármikor

Nemlineáris rendszerek: a szuperpozíció tétele nem alkalmazható



Lineáris – nemlineáris rendszerek

2. **Lineáris rendszerek:** a kimenő jel alakja, lefutása független a bemenőjel nagyságától; az állandósult kimenet pedig független a kezdeti feltételektől

Nemlineáris rendszerek: a kimenő jel lefolyása és állandósult értéke a bemenő jel nagyságának és a kezdeti állapotnak függvénye



Lineáris – nemlineáris rendszerek

3. **Lineáris rendszerek:** a stabilitás kizárólagosan a rendszer tulajdonsága, nem függ a bemenő jeltől és a kezdeti feltételtől, a karakterisztikus egyenlet alapján vizsgálható

Nemlineáris rendszerek: a stabilitás azonos bemenő jel esetén függhet a kezdőállapottól, illetve azonos kezdőállapot esetén a bemenő jel nagyságától



Lineáris – nemlineáris rendszerek

4. **Lineáris rendszerek:** egy adott bemenethez – állandósult állapotban – csak egyetlen meghatározott kimenet

Nemlineáris rendszerek: az egyensúlyi állapot különböző kimeneteknél is létrejöhet



Lineáris – nemlineáris rendszerek

5. **Lineáris rendszerek:** a válasz csak olyan jelösszetevőket tartalmazhat állandósult állapotban, amilyenek a bemenetben is jelen vannak

Nemlineáris rendszerek: állandósult állapotban a kimenőjelnek a bemenőjel frekvenciájának egész számú többszöröseivel, illetve törtrészeivel jellemezhető összetevők (felharmonikus és szubharmonikusok) is felléphetnek



Lineáris – nemlineáris rendszerek

6. **Lineáris rendszerek:** a bemenő jel frekvenciáját változtatva a kimenet amplitúdója és fázisa folytonos függvény szerint változik

Nemlineáris rendszerek: ugrásszerű változások is lehetnek a kimenet amplitúdójában és fázisában

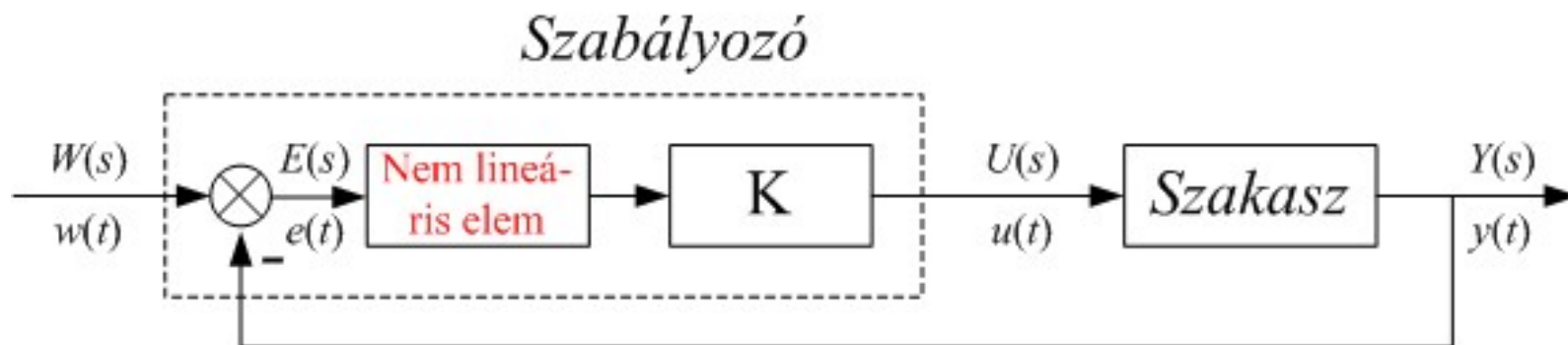


Lineáris – nemlineáris rendszerek

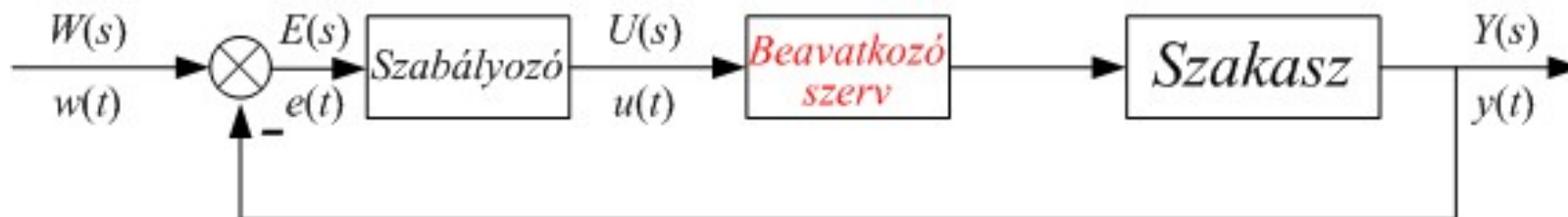
- A nemlineáris rendszereknél nincs érvényben a szuperpozíció elve, így nem beszélhetünk tranziens és stacionárius összetevőről. A jelek nem bonthatók fel összetevőkre, így nem lehet az összetevőkkel külön-külön műveleteket elvégezni.
- Sokszor a kapcsolat nem adható meg képlet segítségével, csak durva közelítéssel. Ilyeneket gyakran kapcsolati görbékkel, táblázatokkal adják meg. (Pl.: szelep átfolyási jelleggörbék, hiszterézis, korlátozási görbék)
- Megoldásuk általában egyedi eljárást igényel.

Tipikus nemlineáris rendszerek

- Nemlinearitás visszacsatolt körben:
 - nemlineáris elemet tartalmazó szabályozó

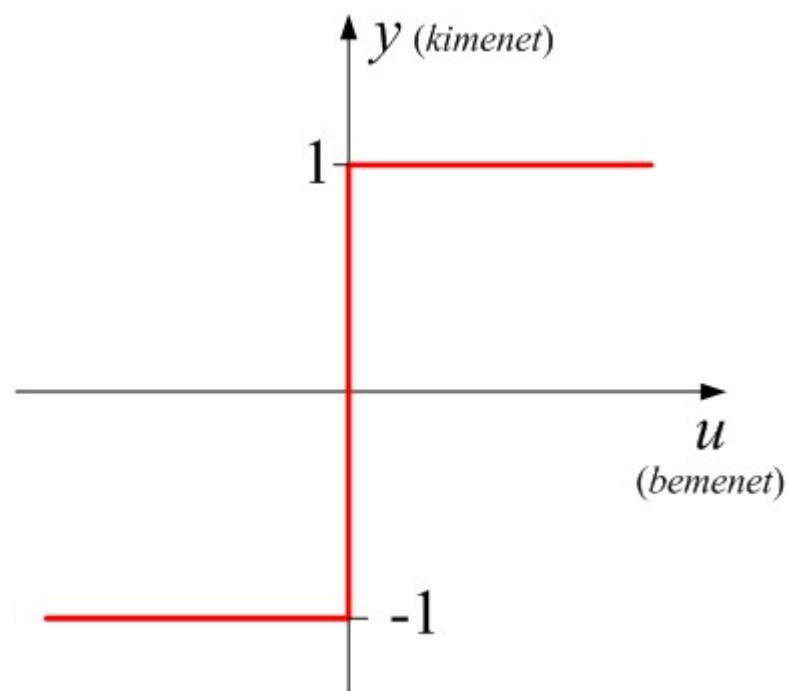


- végrehajtó szerv nemlinearitása



Tipikus nemlineáris rendszerek

- Ideális relé vagy két állású szabályozó



a kimenő jel értéke csak a bemenet előjelétől függ

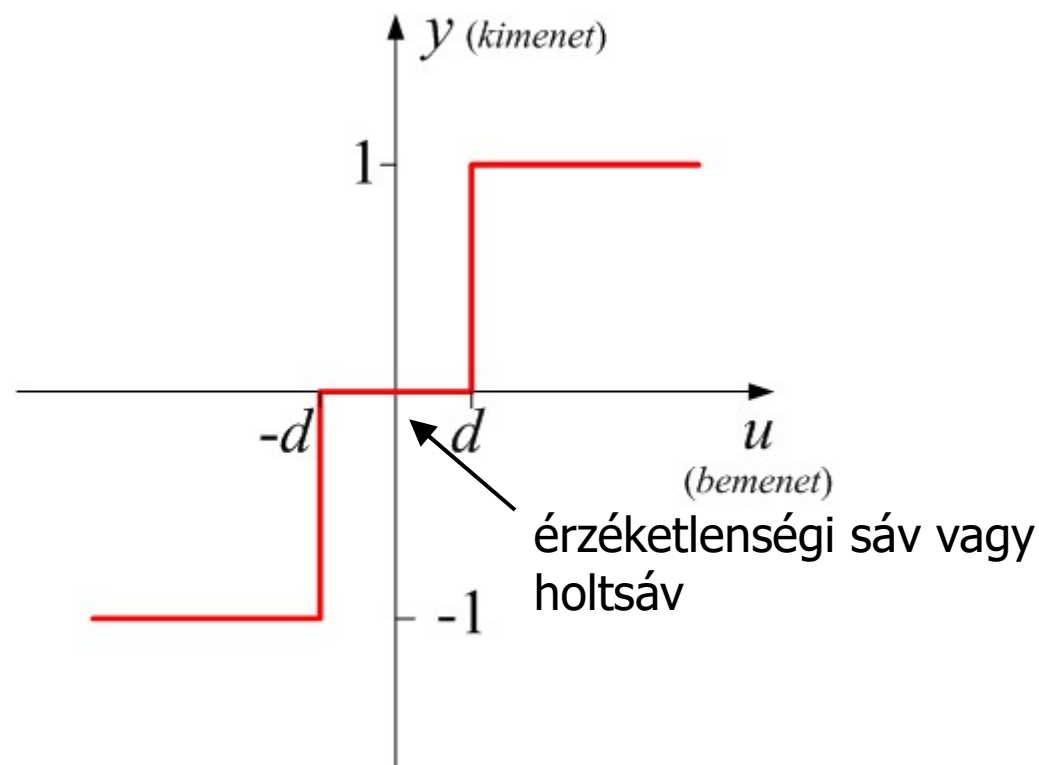


Tipikus nemlineáris rendszerek

- Hőmérséklet szabályozás ideális relével:
 - előírtnál alacsonyabb hőmérséklet (hibajel pozitív) konstans fűtés
 - előírtnál magasabb hőmérséklet (hibajel negatív) konstans hűtés
 - egyszerű, olcsó és hatékony szabályozási mód
 - ha csak egy előírt érték felett vagy alatt kell tartani a hőmérsékletet, akkor a relé csak ki/bekapcsolja a fűtést vagy hűtést
 - probléma: gyakori kapcsolás gyors mechanikai tönkremenetelt okozhat

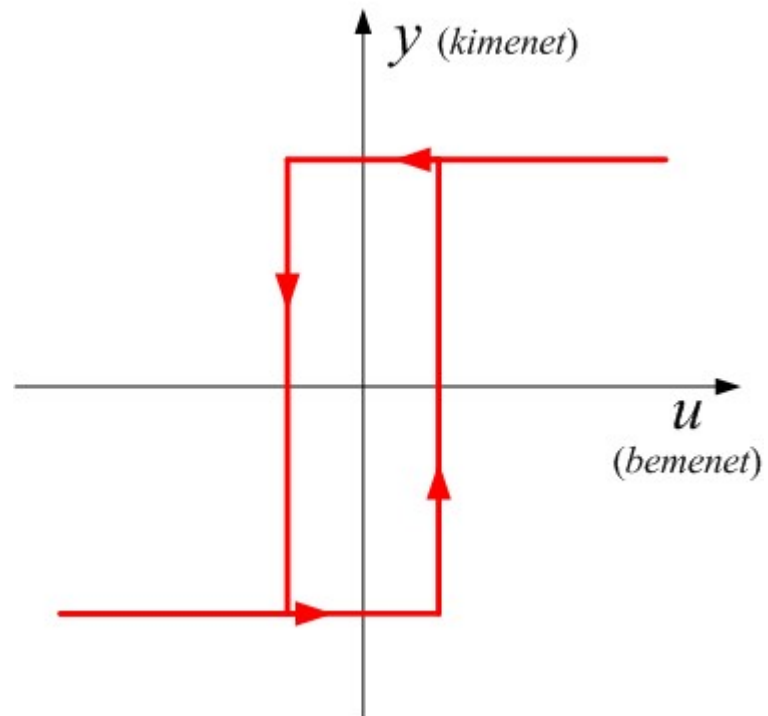
Tipikus nemlineáris rendszerek

- Relé érzéketlenségi sávval - háromállású szabályozó



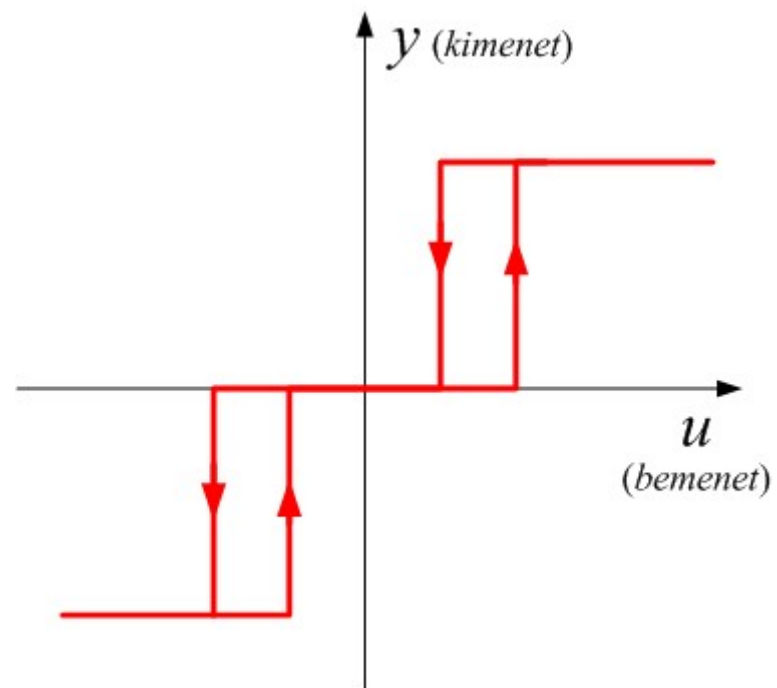
Tipikus nemlineáris rendszerek

- Relé hiszterézissel



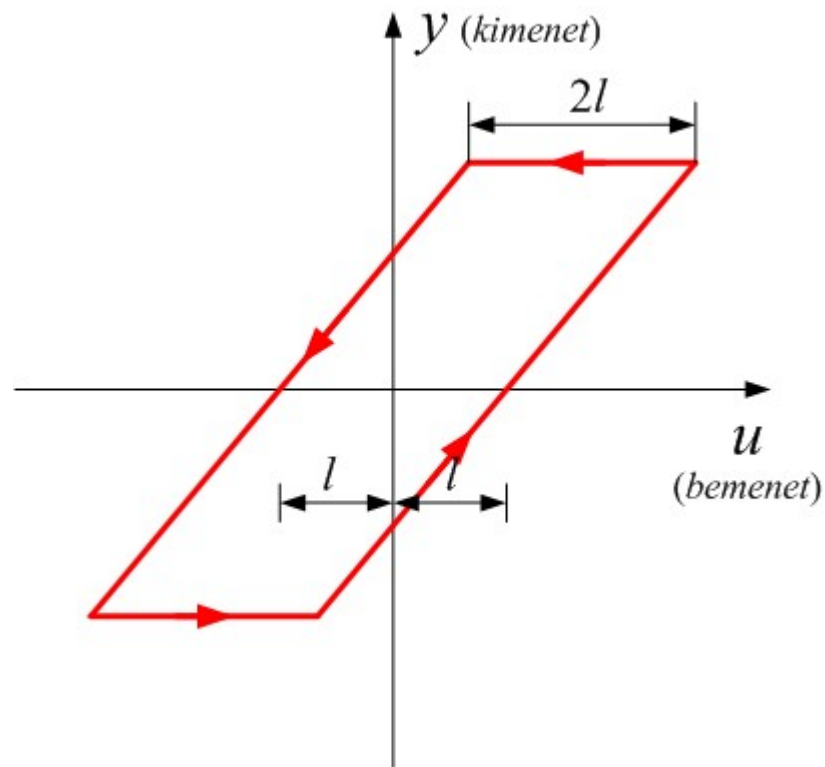
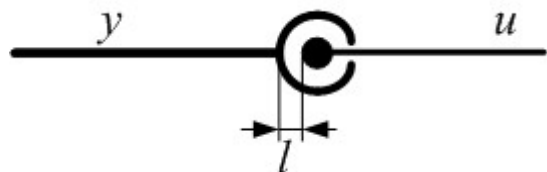
Tipikus nemlineáris rendszerek

- Relé hiszterézissel és érzéketlenségi sávval



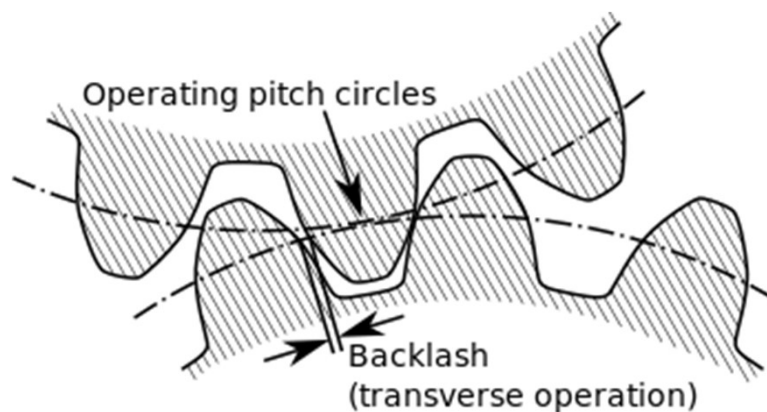
Tipikus nemlineáris rendszerek

- Histerézis kotyogás
 - Mechanikai kapcsolódások laza illesztése

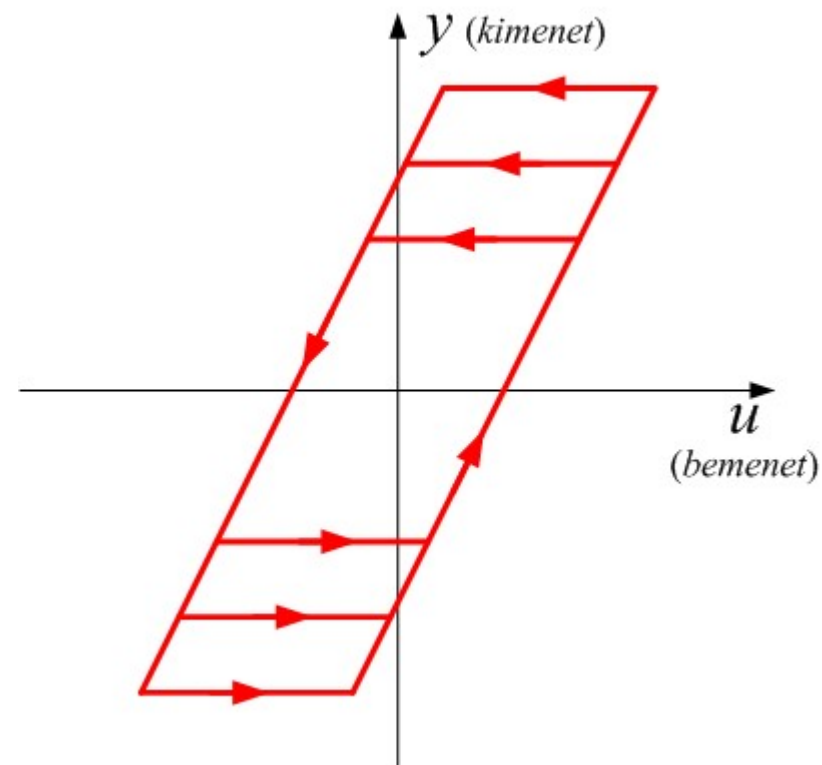


Tipikus nemlineáris rendszerek

- Histerézis kotyogás vagy backlash

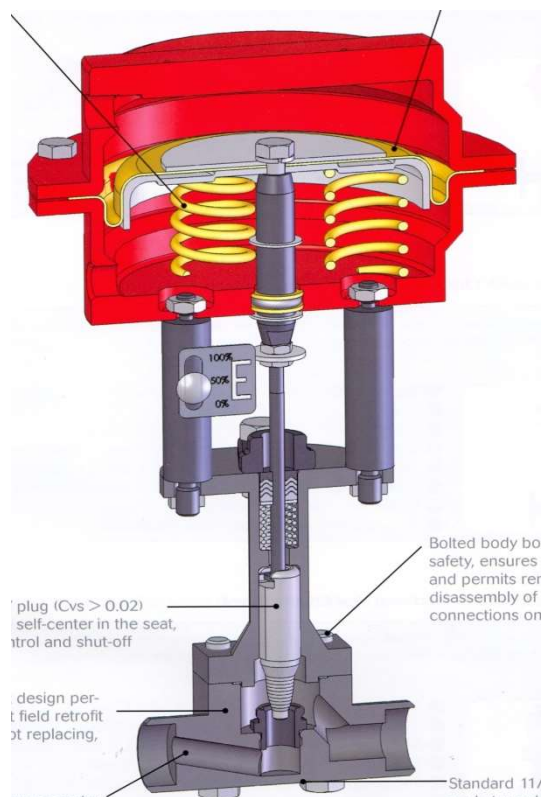


fogaskerék áttétel

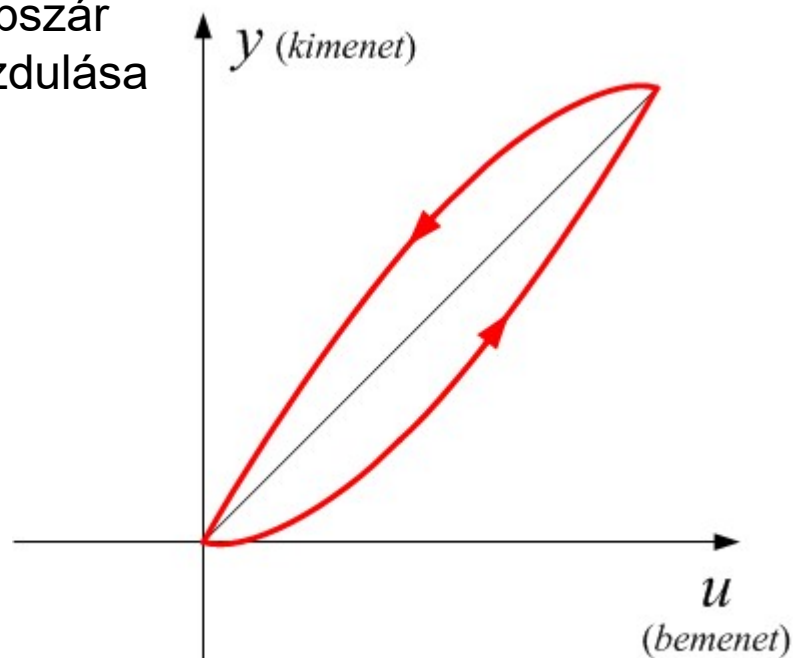


Tipikus nemlineáris rendszerek

- Pneumatikus működtetésű szelep hiszterézise



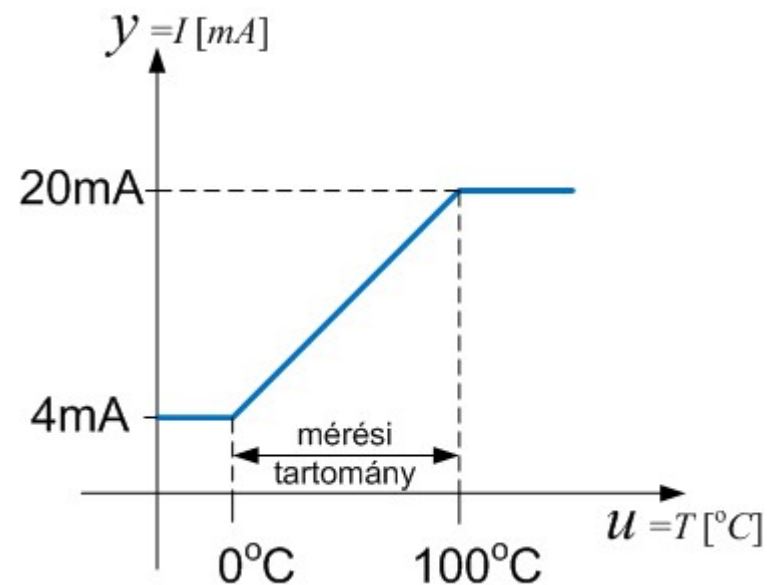
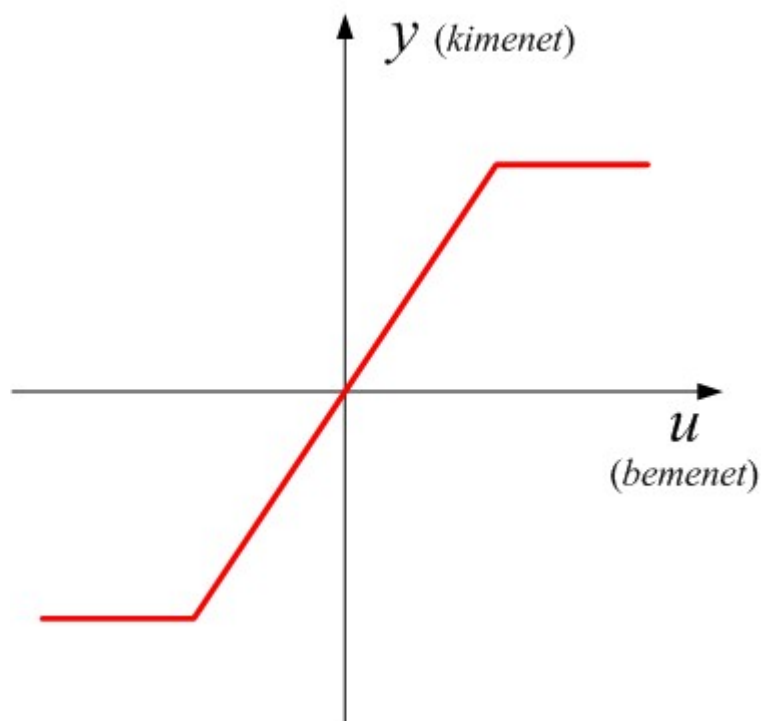
szelepszár elmozdulása



pneumatikus végrehajtó jel

Tipikus nemlineáris rendszerek

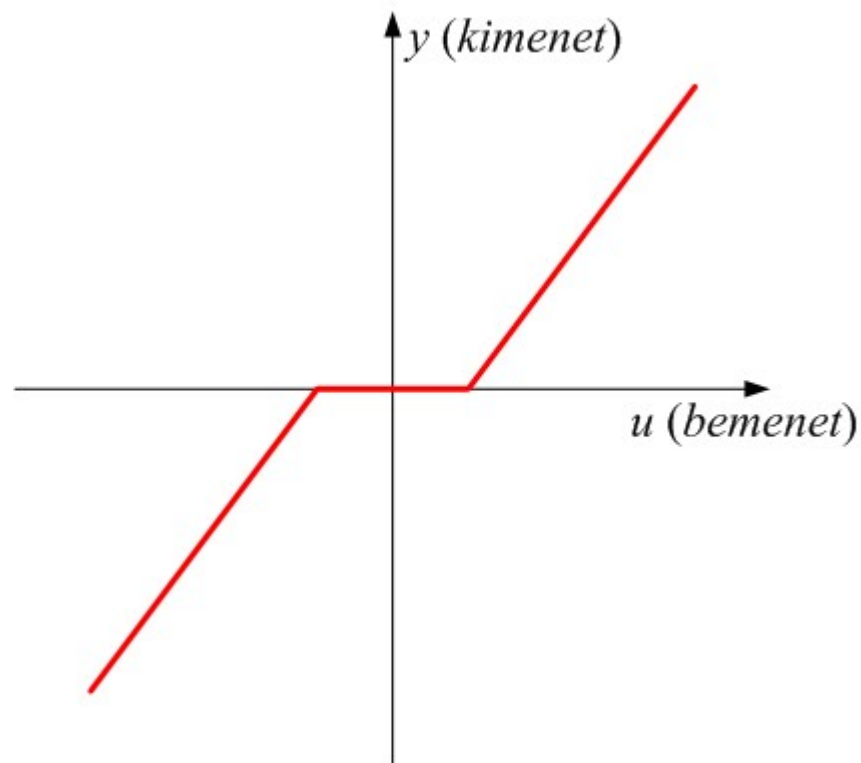
- Telítődés, korlátozás



erősítőkre, távadókra jellemző viselkedés, az eszköz csak a méréshatáron belül képes a jel átvitelére

Tipikus nemlineáris rendszerek

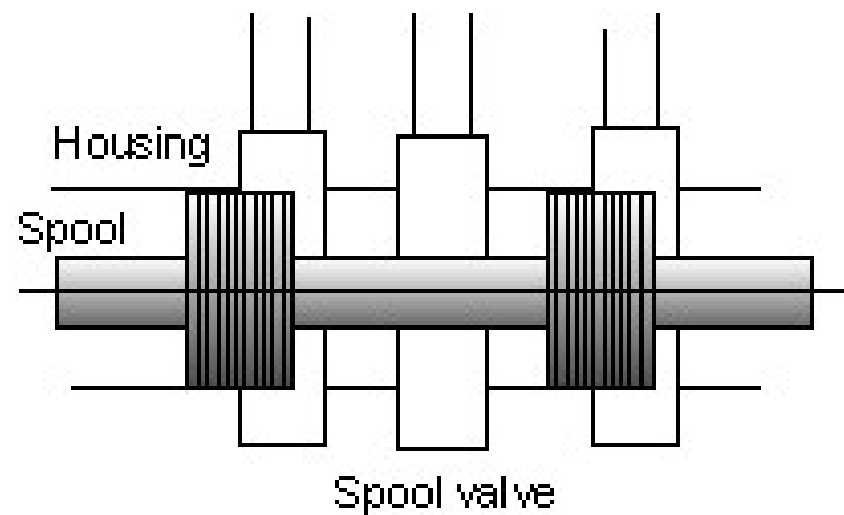
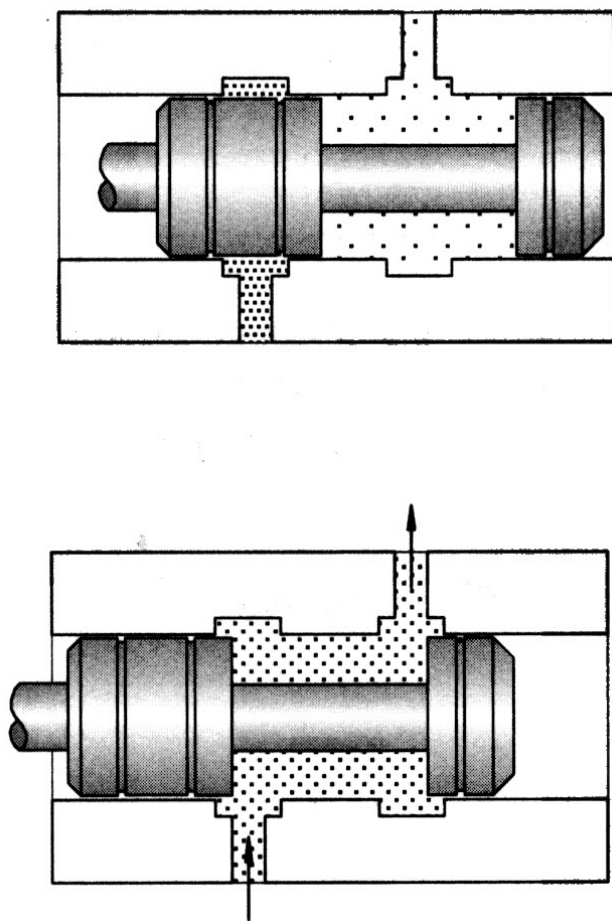
- Érzéketlenségi sáv



tolattyú (töltő szelep) átfedéssel

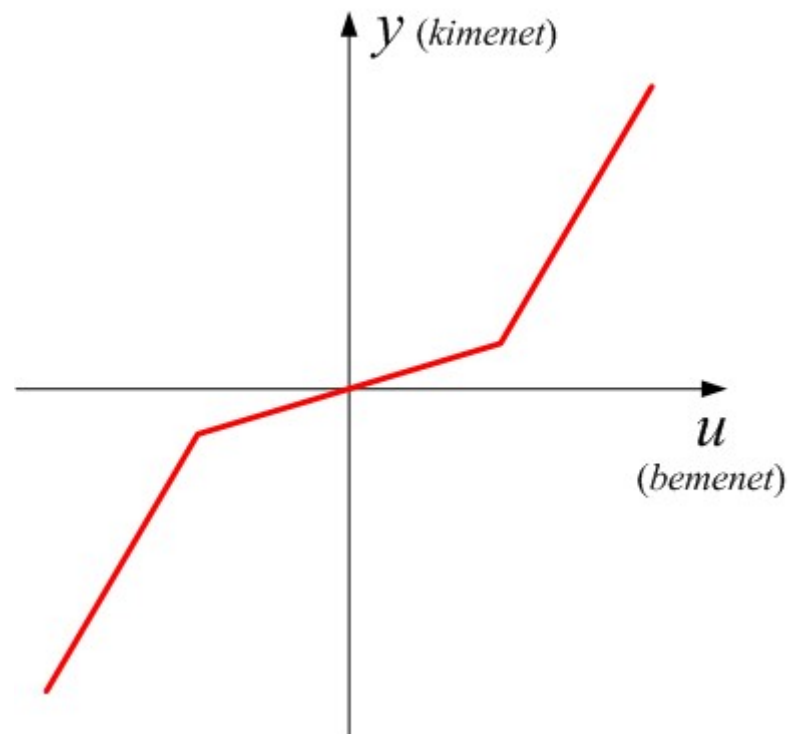
Tipikus nemlineáris rendszerek

- Tolattyú szelep - átfedéssel



Tipikus nemlineáris rendszerek

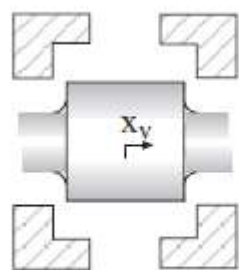
- Tartományonkénti eltérő erősítés



tolattyú hézaggal

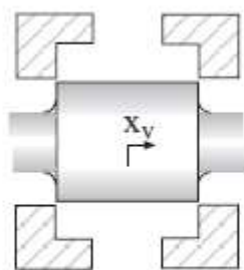
Tipikus nemlineáris rendszerek

- Átlapolás hatása folyadékáramra



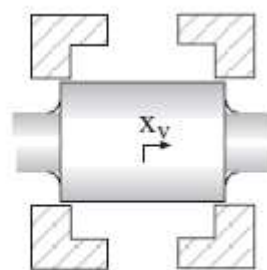
Under-lap

a,



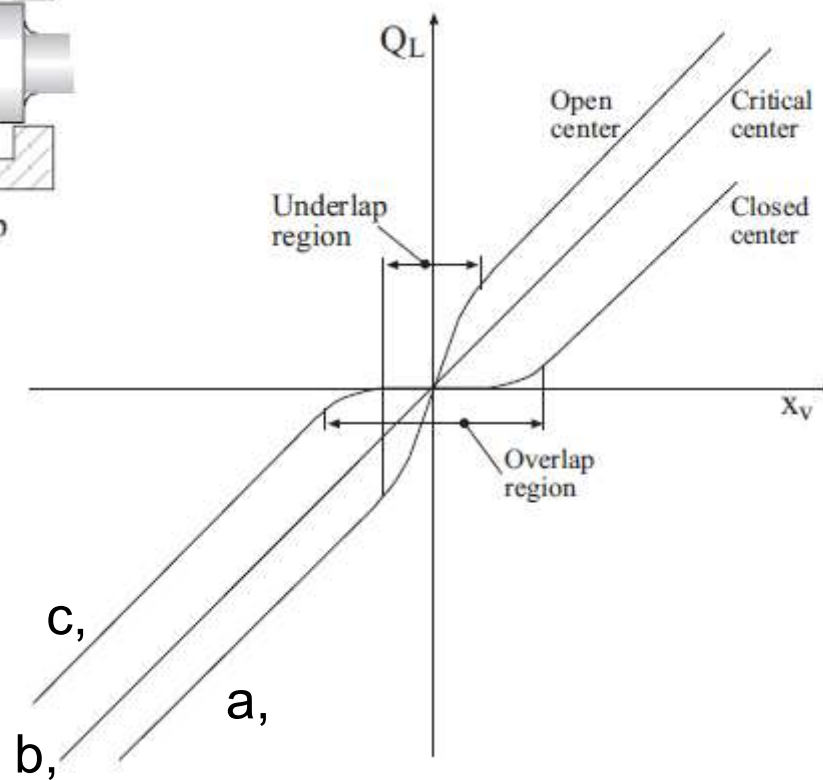
Zero-lap

b,



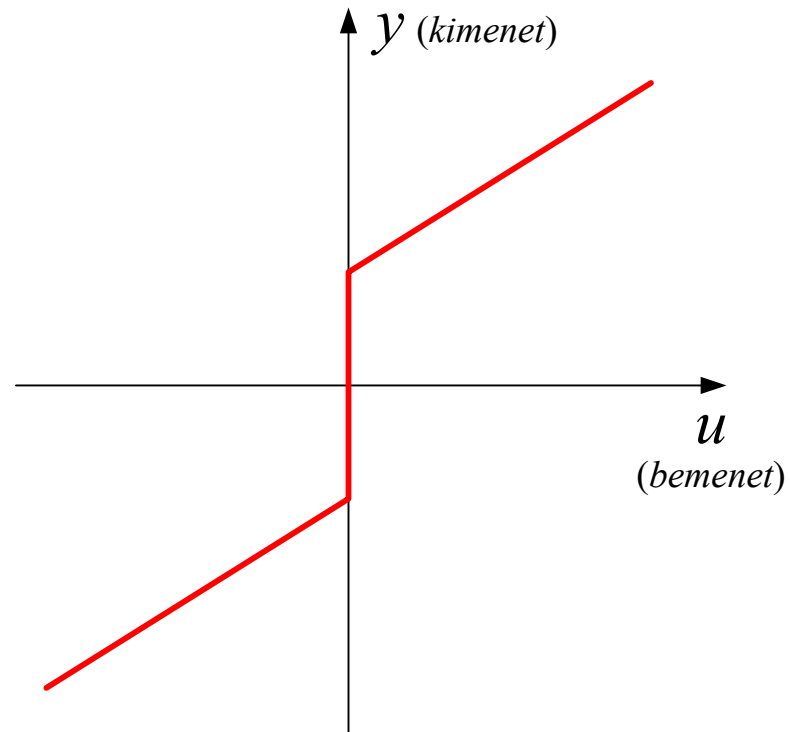
Over-lap

c,



Tipikus nemlineáris rendszerek

- Előfeszítés





Lineáris – nemlineáris rendszerek

- Nemlinearitások osztályozása:
 - egyértékű – több értékű
(kifolyási jelleggörbe – relé)
 - jelleggörbe tartalmaz-e töréspontot vagy nem
(kifolyási jelleggörbe – érzéketlenségi sáv)
differentiálható nemlinearitás
 - gyorsan, illetve lassan változó nemlinearitás az
együtthatók változási sebessége alapján (pl.
hőátadási tényező – rugóállandó)



Munkaponti linearizálás

- valós rendszerek többé-kevésbé nemlineárisak
- lehetséges kezelés: munkaponti linearizálás
- Legyen

$$Y = f(U_1, U_2, U_3, \dots)$$

- parciálisan deriválva az egyes változók szerint:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial U_1} dU_1 + \frac{\partial Y}{\partial U_2} dU_2 + \frac{\partial Y}{\partial U_3} dU_3 + \dots$$



Munkaponti linearizálás

- legyen adott egy tetszőleges munkapont, aminek viszonylag szűk környezetében vizsgáljuk a rendszer működését

- jelölje a munkaponti értékeket $_0$ index, így

$$[Y]_0, [U_1]_0, [U_2]_0, \dots$$

- a munkapont környezetében legyen a függő változó (Y) viselkedése lineáris
- jelölje a változóknak a munkapont körüli relatív megváltozásait:

$$y, u_1, u_2, u_3, \dots$$



Munkaponti linearizálás

- ekkor a linearizált egyenlet a következő alakú lesz:

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 + \dots$$

ahol

$$C_1 = \left[\frac{\partial Y}{\partial U_1} \right]_0, \quad C_2 = \left[\frac{\partial Y}{\partial U_2} \right]_0, \dots$$



Munkaponti linearizálás

- MIMO rendszerekre általánosítva:

$$\underline{y} = \underline{C} \underline{u}$$

ahol

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nm} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = \left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_0$$



Munkaponti linearizálás

- linearizálás előnyei:
 - egy állandósult állapotban ismerjük a be- és kimenő jelek összetartozó értékeit, egy attól nem nagyon eltérő állapotban az új bemenő jelek ismeretében meghatározható a kimenő jeleknek a bemenő jelek megváltozásához tartozó változásai, majd ezeket hozzáadva az eredeti állapot kimenő jeleinek értékéhez, meghatározható a kimenet



Fázissík módszer

- a rendszer kimenetének grafikus vizsgálatán alapul
- segítséget ad a rendszer természetének megértéséhez
- a módszer az állapotteres rendszer leíráson alapul
- másodrendű rendszerekre tárgyaljuk, így a vizsgálathoz szükséges görbék síkban ábrázolhatók



Fázissík módszer

- a tengelyekhez a kimenetet (pl. a hibajeleket) és annak első deriváltját rendeljük
- a görbék – trajektóriák – a magára hagyott rendszer válaszát adják meg adott kezdeti feltétel esetén
 - adott görbe a rendszer kimenetének és a kimenet deriváltjának az értékét adja meg egy adott időpontban (az idő a görbe mentén változik)
- a görbesereget (különböző kezdeti feltételek melletti válaszok összességét) *fáziskép*nek nevezzük



Fázissík módszer

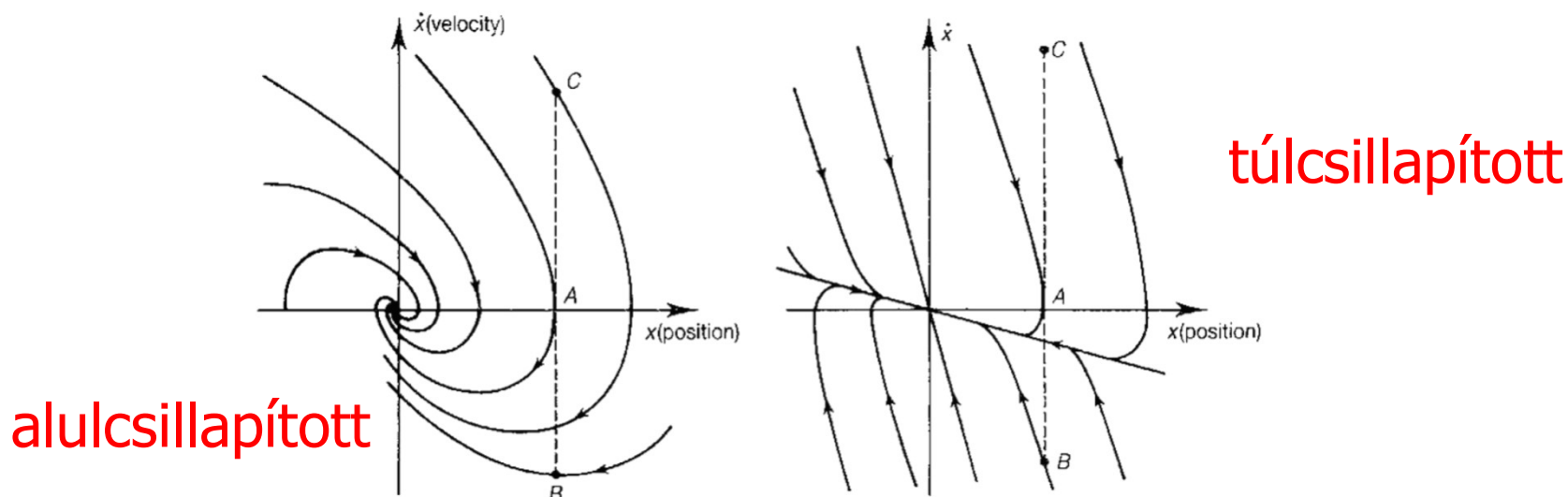
- Induljunk ki egy másodrendű rendszer I/O modelljéből:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

- ahol ω_n a természetes frekvencia, ξ a csillapítási tényező
- gerjesztetlen rendszer
- ábrázoljuk a megoldásgörbéket – trajektóriákat – a hely és a sebesség függvényében

Fázissík módszer

- ξ függvényében lehet alul- és túlcsillapított eset



- az így kapott görbesereg a fáziskép, ahol
 - az origó az egyensúlyi pont
 - az idő a görbék mentén változik!
 - a kezdőállapot határozza meg a lefutás menetét



Fázissík módszer

- A felírt lineáris modell $\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$

helyett vizsgáljuk a következő nemlineáris esetet:

$$\ddot{x} + a(x, \dot{x})\dot{x} + b(x, \dot{x})x = 0$$

azaz az együtthatók függjenek a jeltől, de legyenek függetlenek az időtől.

- Egy adott rendszer fázisképét vagy analitikai megoldással vagy grafikus módszerrel, az ún. *izoklinák* megszerkesztésével lehet előállítani.
- Izoklina az azonos meredekségű pontokat tartalmazó görbe.



Fázissík módszer

- Induljunk ki a lineáris modellből:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

- Legyen $\dot{x} = y$, vagyis y szerepel az ordinátán, és

$$\ddot{x} = \dot{y} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} y$$

- Így x és y változókkal a modell:

$$y \frac{dy}{dx} + 2\xi\omega_n y + \omega_n^2 x = 0$$



Fázissík módszer

- Ebből:
 - a trajektória meredeksége, m :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\xi\omega_n y + \omega_n^2 x}{y} = m$$

- az adott m értékhez tartozó izoklina egyenes egyenlete:

$$y = -\frac{\omega_n^2}{2\xi\omega_n + m} x$$

Minden trajektória ezt az egyenest m meredekséggel metszi.



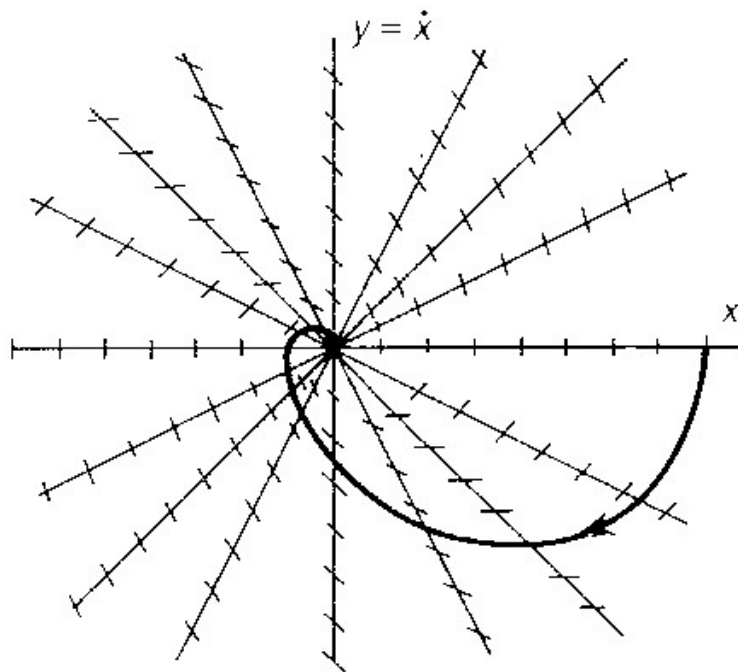
Fázissík módszer

- Az $m = 0$ meredekséghez az $y = -(\omega_n / 2\xi)x$;
- az $m \rightarrow \infty$ -hez az $y = 0$ (azaz az x tengely);
- az $m = -2\xi\omega_n$ -hez az $x = 0$ (azaz az y tengely) tartozik,
- míg az origóban a meredekség nemdefiniált (0/0).

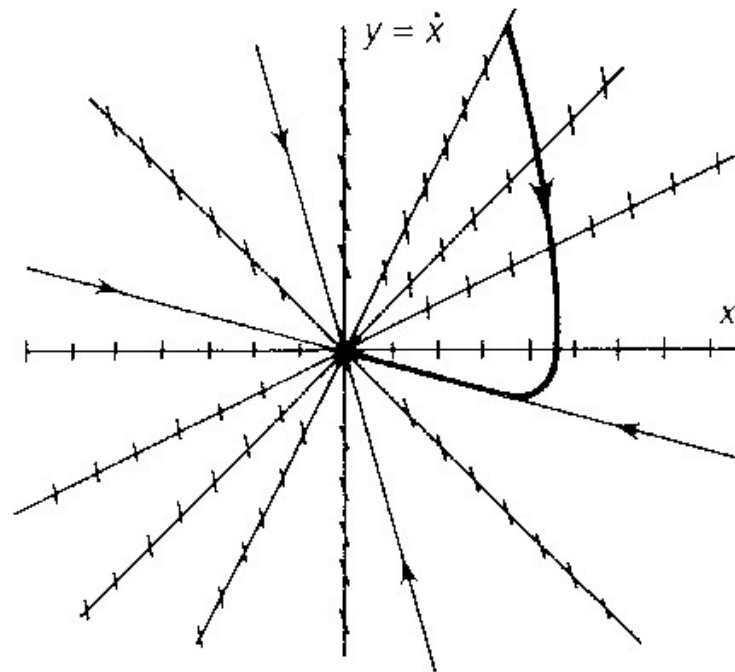
- A következő ábrák tartalmazzák az izoklina egyeneseket az alul és a túlcillapított másodrendű modellre. A pontokat összekötő egyenesen lévő szakaszok jelzik a meredekség értékét.

Fázissík módszer

- Másodrendű rendszerhez tartozó izoklinák



alulcsillapított rendszer



túlcsillapított rendszer



Fázissík módszer

- Mindkét grafikonon egy-egy trajektória lett berajzolva.
- Adott induló állapotból kiindulva a megoldás görbék megszerkeszthetők.
- Túlcsillapított tagnál két esetben az izoklinák értéke megegyezik az egyenes meredekségével, így a trajektória tangenciálisan ehhez simulva fut az origóba.
- Megfigyelhető, hogy a trajektóriák balra tartanak az x -tengely alatt, mivel ha \dot{x} negatív, akkor x -nek csökkennie kell, és jobbra az x -tengely felett (növekvő sebességnél a távolság is nő).



Fázissík módszer

- Nemlineáris esetre az izoklina pontok egyenlete:

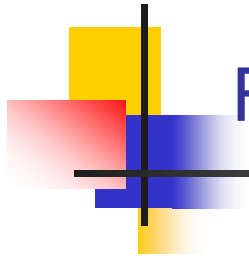
$$y = -\frac{b(x, \dot{x})}{m + a(x, \dot{x})} x$$

ami általában nem egy egyenes egyenlete.



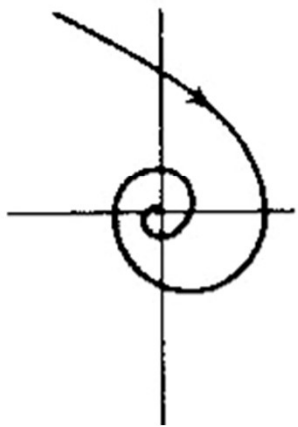
Fázissík módszer

- A fáziskép megrajzolása és értelmezése szempontjából fontosak
 - szinguláris pontok
 - határciklusok.
- A szinguláris pont a rendszer egyensúlyi pontja, ahol mind a sebesség, mind a gyorsulás zérus.
- A határ ciklusban állandósult lengések maradnak fenn adott amplitúdóval és frekvenciával.
- Valamennyi trajektória vagy ezekben, vagy a végtelenben kezdődik vagy végződik.

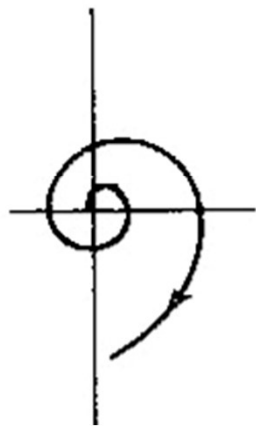


Fázissík módszer

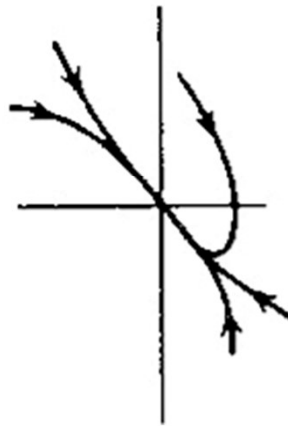
- Szingularitások típusai



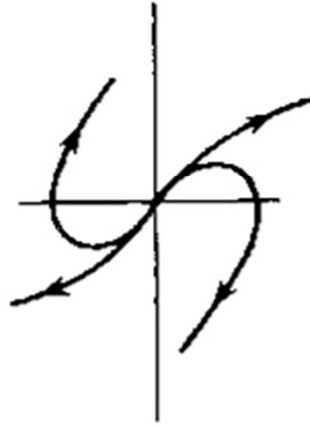
stabil
fókus



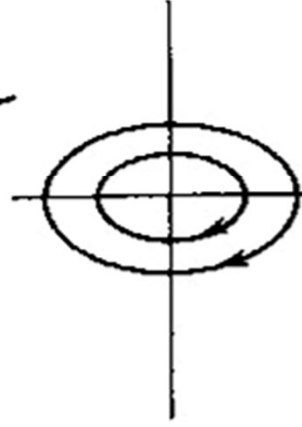
instabil
fókus



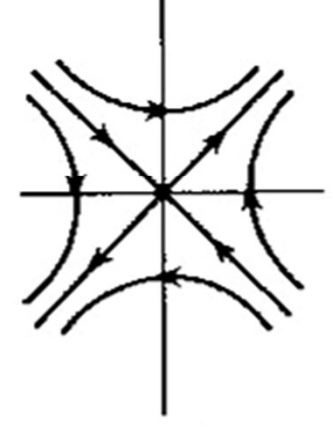
stabil



instabil
csomópont



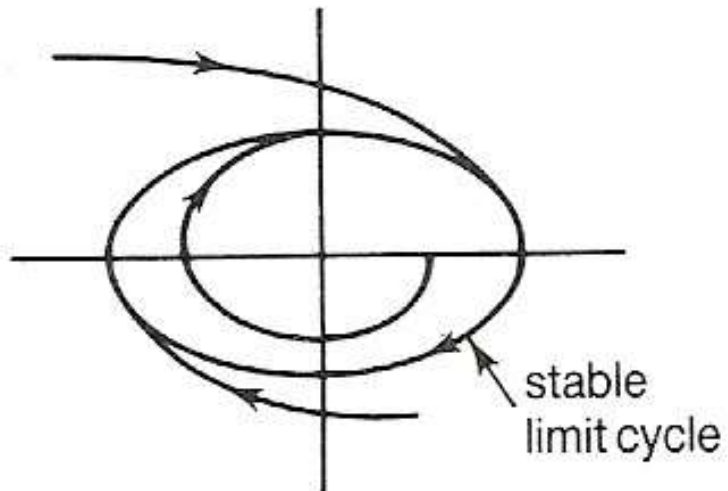
vortex /
centrum



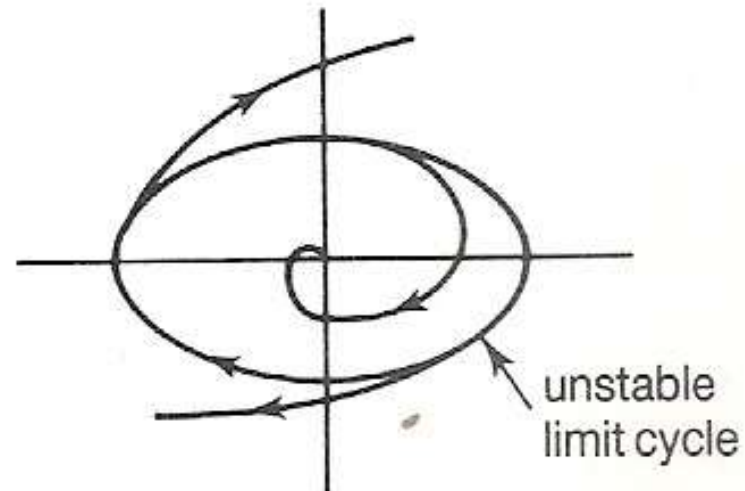
nyeregpon

Fázissík módszer

- Határciklusok



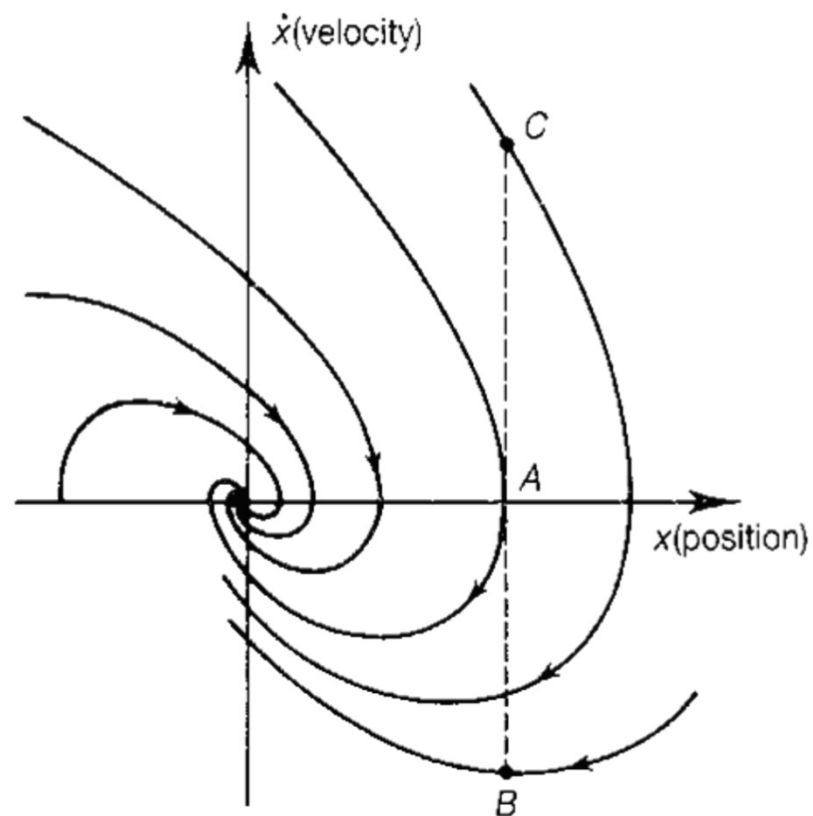
konvergens/stabil
határciklus



divergens/instabil
határciklus

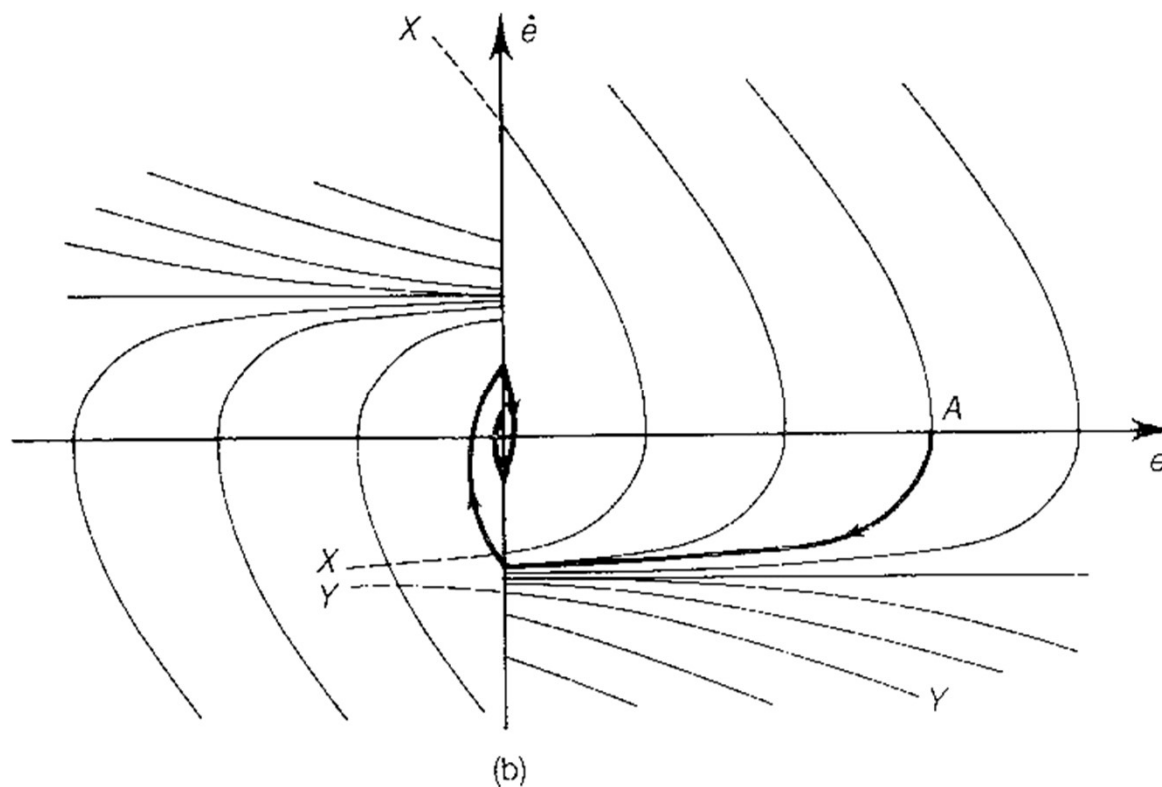
Példa

- Egyenáramú motor negatív visszacsatolással – izoklina görbék



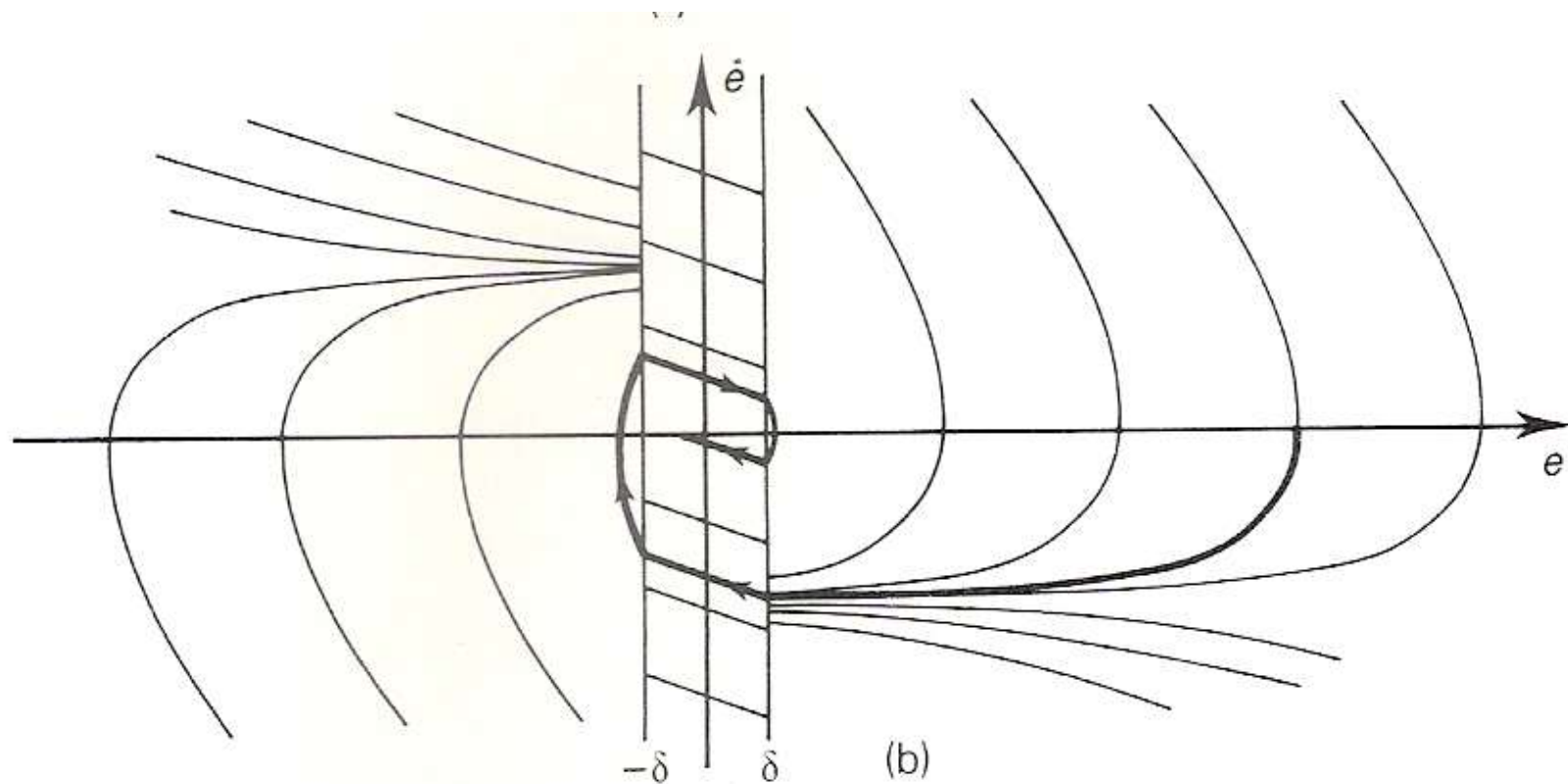
Példa

- Egyenáramú motor szabályozása ideális relével izoklina görbék



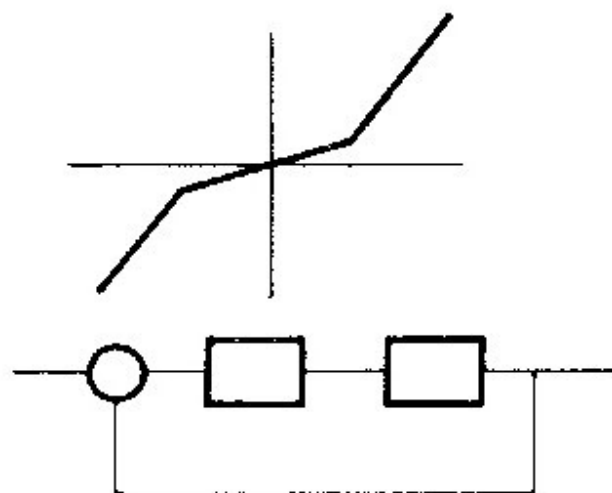
Példa

- Egyenáramú motor szabályozása érzéketlenségi sávval rendelkező relével – izoklina görbék

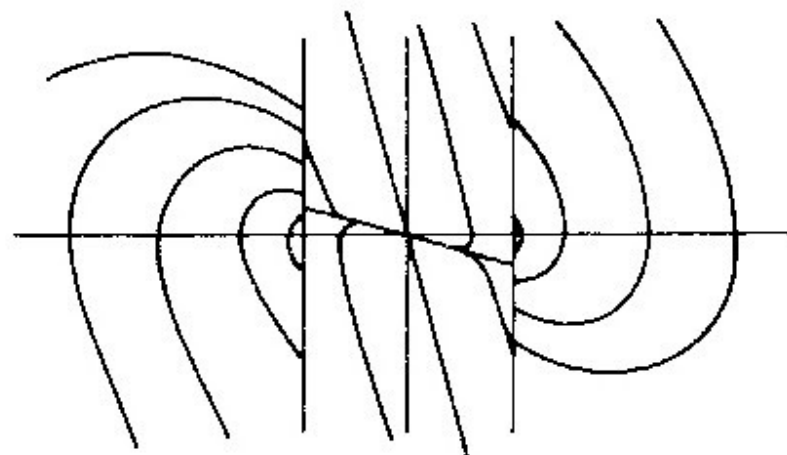


Példa

- Egyenáramú motor szabályozása tartományonként eltérő erősítésű szabályozóval – izoklina görbék



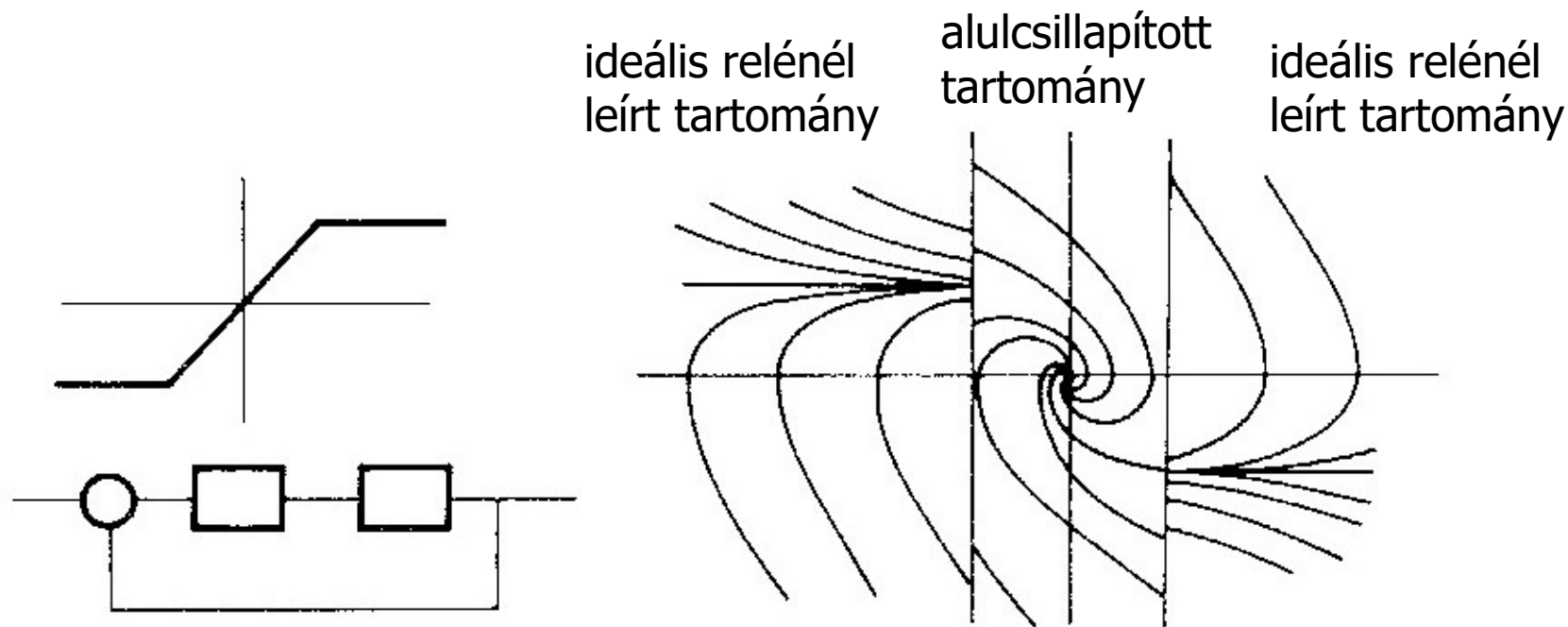
alulcsillapított tartomány túlcsillapított tartomány alulcsillapított tartomány



(a)

Példa

- Egyenáramú motor szabályozása olyan erősítővel, melynek korlátozása/telítődése van – izoklina görbék



Példa

- Egyenáramú motor szabályozása optimális kapcsolású relével – izoklina görbék

