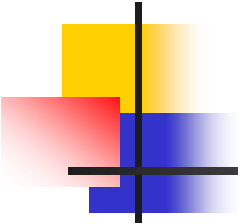


Frekvenciatartomány

- bevezetésének indoka:
 - általában időtartománybeli válasz kell
 - alkalmazott tesztjelek is ezt indokolják
 - információs rendszerek esetében a jelek szinuszos komponenseket tartalmaznak
 - frekvenciatartományban sokféle módszer segíti az analízist és a tervezést
 - *lineáris rendszerek*nél szoros összefüggés van az időtartomány és a frekvenciatartomány között → a frekvenciatartománybeli adatokból következtetni lehet az időtartománybeli viselkedésre

- alkalmazásának indoka összefoglalva:
 - meglévő eszközök alkalmazhatósága
 - jól kiegészíti az időtartománybeli vizsgálatokat
 - érdemes elvégezni olyan rendszereknél is, amelyek soha nem kapnak szinuszos gerjesztést



Frekvenciatartomány bevezetése

- legyen a bemenet R amplitúdójú ω_0 frekvenciájú szinuszos jel:

$$u(t) = R \sin \omega_0 t$$

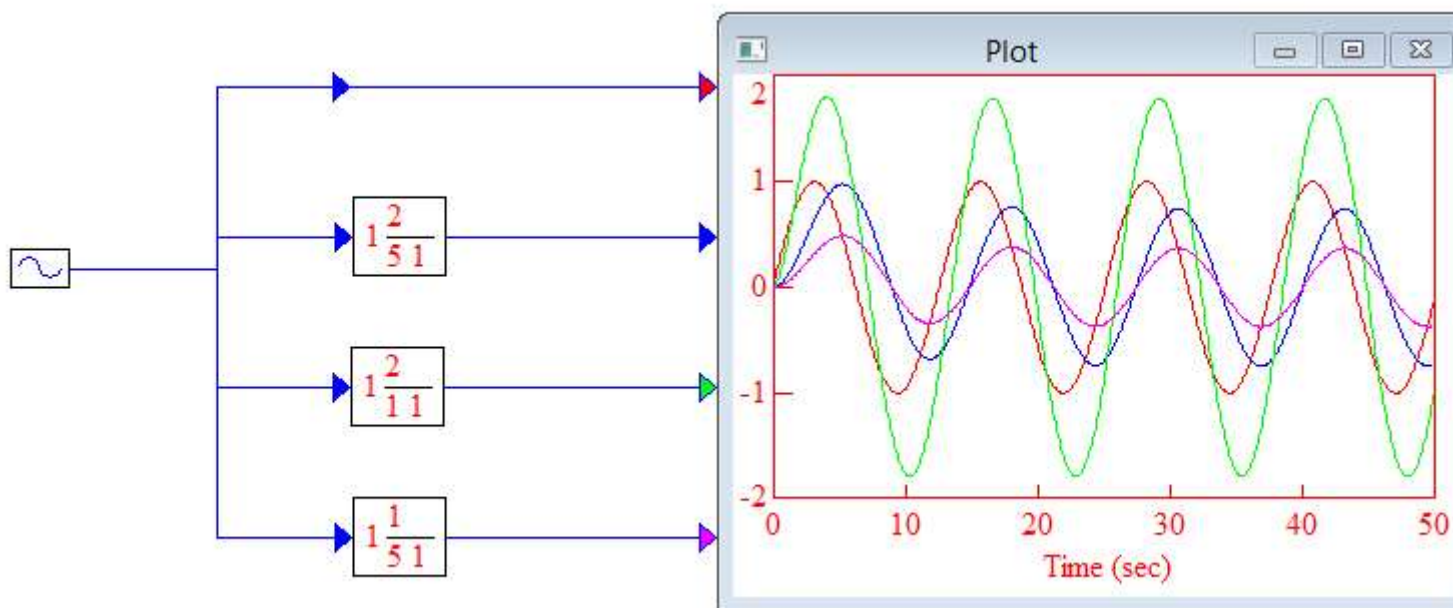
- az „állandósult” (kvázistacionárius) állapotbeli kimenet

$$y(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

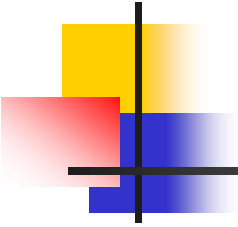
ahol C a kimenet amplitúdója, a φ fáziskésés vagy fázissietés

Frekvenciatartomány bevezetése

- lineáris tag gerjesztése szinuszos bemenettel



- $u(t) = R \sin \omega_0 t, \quad R=1, \omega_0 = 0,5\text{Hz}$
- $y(t) = C \sin (\omega_0 t + \varphi),$



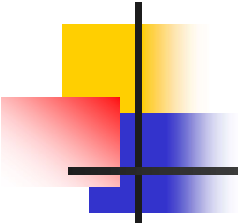
Frekvenciatartomány bevezetése

- a $u(t)$ bemenet általános alakja frekvenciatartományban:

$$u(t) = R(\omega)\sin(\omega t + \varphi_b) = \text{Im}(R(\omega)e^{j\varphi_b(\omega)} e^{j\omega t}) = \text{Im}(U(j\omega) e^{j\omega t})$$

- ahol $R(\omega)$ bemenet konstans vagy frekvenciafüggő amplitúdója
 - $U(j\omega) = R(\omega)e^{j\varphi_b(\omega)}$ az amplitúdót és a kezdeti fáziseltolás szöget tartalmazó komplex kifejezés, a bemenő jel $t = 0$ időpillanathoz tartozó komplex vektora
- a kimenet általános alakja

$$y(t) = C(\omega)\sin(\omega t + \varphi_k) = \text{Im}(C(\omega)e^{j\varphi_k(\omega)} e^{j\omega t}) = \text{Im}(Y(j\omega) e^{j\omega t})$$



Frekvenciatartomány bevezetése

- legyen egy *lineáris tag* átviteli függvénye $G(s)$:

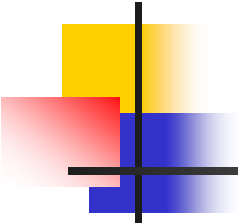
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = G(s)U(s)$$

- analóg módon képezzük a szinuszos kimenő és bemenő jel exponenciális alakban felírt hányadosát:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)e^{j\omega t}}{U(j\omega)e^{j\omega t}} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

- ahol $A(\omega) = \frac{C(\omega)}{R(\omega)}$ az amplitúdóviszonyt kifejező abszolút érték

$\phi(\omega) = \phi_k(\omega) - \phi_b(\omega)$ a fáziseltolások különbségét megadó fázisszög



Frekvenciatartomány bevezetése

- Frekvenciatartomány bevezetése az $s = j\omega$ kifejezés behelyettesítésével:

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

- A frekvenciafüggvények szokásos felírása:

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)| \angle Y(j\omega)$$

ahol $|Y(j\omega)|$ a jel amplitúdója

$\angle Y(j\omega)$ a jel fázisa

- A kimenet meghatározása a

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

összefüggés alapján:

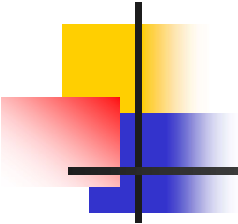
- a bemenő jel és a kimenő jel frekvenciája (ω) megegyezik

- a kimenőjel amplitúdója:

$$|Y(j\omega)| = |G(j\omega)| \cdot |U(j\omega)| \Rightarrow C(\omega) = A(\omega) \cdot R(\omega)$$

- fázisa

$$\angle Y(j\omega) = \angle G(j\omega) + \angle U(j\omega) \Rightarrow \varphi_k(\omega) = \varphi(\omega) + \varphi_b(\omega)$$



Frekvenciatartomány bevezetése

- Legyen az átviteli függvény

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

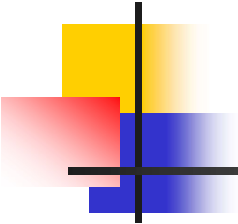
- legyen a bemenet

$$u(t) = \sin \omega t$$

azaz az amplitúdó 1, frekvencia ω rad/s

- a bemenet Laplace transzformáltja:

$$U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$



Frekvenciatartomány bevezetése

- a kimenet:

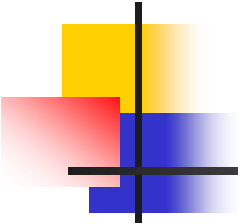
$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{K\omega(s - z_1)(s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s^2 + \omega^2)(s - p_1)(s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

- átírva parciális törtekre

$$Y(s) = \frac{G(s) \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A_1}{s - j\omega} + \frac{A_2}{s + j\omega} + \frac{B_1}{s - p_1} + \dots + \frac{B_n}{s - p_n}$$

- inverz Laplace-transzformálva

$$y(t) = \underbrace{A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}}_{\text{„állandósult” állapoti viselkedés}} + \underbrace{B_1 e^{p_1 t} + \dots + B_n e^{p_n t}}_{\text{transziens viselkedés (stabil esetben)}}$$



Frekvenciatartomány bevezetése

- Ha $p_1, \dots, p_n$ negatív valós részű pólusok, akkor

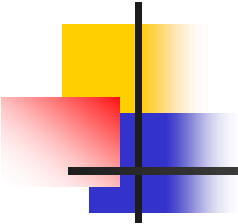
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A_1 e^{j\omega \cdot t} + A_2 e^{-j\omega \cdot t}$$

- Az együtthatók meghatározásához

$$\frac{G(s) \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A_1}{s - j\omega} + \frac{A_2}{s + j\omega}$$

egyenletet szorozzuk meg $(s - j\omega)$ -val és helyettesítsünk be $s = j\omega$ -t

$$\frac{(s - j\omega) \cdot G(s) \cdot \omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} = A_1 + \frac{A_2(s - j\omega)}{s + j\omega}$$



Frekvenciatartomány bevezetése

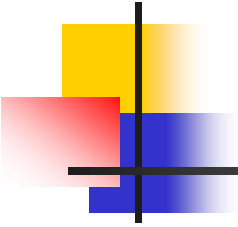
$$A_1 = \left. \frac{G(s) \cdot \omega}{s + j\omega} \right|_{s=j\omega} = \frac{G(j\omega)}{2j} = \frac{1}{2j} |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$$

- A_2 meghatározásához szorozzuk meg $(s+j\omega)$ -val és helyettesítsünk be $s=-j\omega$ -t :

$$A_2 = \left. \frac{(s + j\omega) G(s) \omega}{s^2 + \omega^2} \right|_{s=-j\omega} = \frac{G(-j\omega)}{-2j} = -\frac{1}{2j} |G(j\omega)| e^{-j\angle G(j\omega)}$$

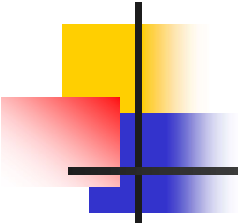
- azaz

$$\begin{aligned} y(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} &= \frac{1}{2j} |G(j\omega)| \left(e^{j\omega t + j\angle G(j\omega)} - e^{-j\omega t - j\angle G(j\omega)} \right) = \\ &= |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \end{aligned}$$



Frekvenciatartomány bevezetése

- A rendszer átviteli függvénye ismeretében, szinuszos bemenet esetén a kimenet a $|G(j\omega)|$ amplitúdó-karakterisztika és a $\angle G(j\omega)$ fáziskarakterisztika alapján meghatározható.



Zárt kör frekvenciatartománybeli válasza

- Legyen az eredő átviteli függvény:

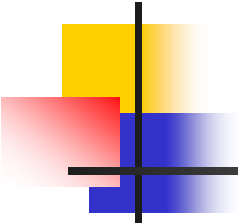
$$G_e(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- szinuszos bemenet esetén, állandósult állapotban $s = j\omega$ behelyettesítéssel:

$$G_e(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

- bontsuk fel G_e -t:

$$G_e(j\omega) = |G_e(j\omega)| \angle G_e(j\omega)$$



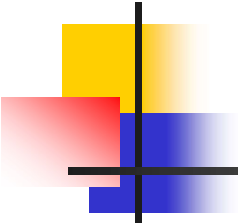
Zárt kör frekvenciatartománybeli válasza

- ekkor a zárt kör eredő átviteli függvényének amplitúdója:

$$|G_e(j\omega)| = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \right| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)H(j\omega)|}$$

- fázisa:

$$\angle G_e(j\omega) = \phi(\omega) = \angle G(j\omega) - \angle(1 + G(j\omega)H(j\omega))$$

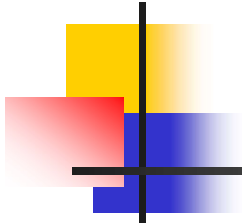


Frekvenciafüggvények ábrázolási módjai

- Amplitúdó-fázis görbe, Nyquist-diagram
 - frekvenciát $0 \leq \omega < \infty$ tartományban változtatva minden ω értékhez meghatározzuk és a komplex síkon ábrázoljuk a

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G(j\omega)| \angle G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \\ &= \operatorname{Re}(G(j\omega)) + j\operatorname{Im}(G(j\omega)) \end{aligned}$$

képletben szereplő $A(\omega)$ abszolút értéket és $\varphi(\omega)$ fáziseltolási szöveget.



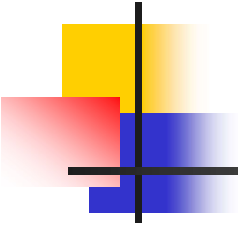
Frekvenciafüggvények ábrázolási módjai

- Az így kapott pontokat összekötjük és jelöljük a növekvő frekvencia irányát
- A jelleg görbe egyes pontja állandósult (kvázistacionárius) állapotot adnak meg.
- Gyakorlati alkalmazása nehézkes:
 - egy pont meghatározása is sok munka
 - tag paramétere vagy rendszer elemeinek megváltozásakor újra kell szerkeszteni

- **Bode-diagram**

- cél a Nyquist-diagram hátrányainak kiküszöbölése
- az amplitúdó logaritmusát és a fázisszöget a frekvencia függvényében ábrázolva kapjuk a Bode-diagramot
 - $G(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$
 - $\ln G(j\omega) = \ln |G(j\omega)| + j\varphi(\omega)$
- gyakorlatban az amplitúdóviszonyt decibelben adjuk meg:

$$A(\omega)[\text{dB}] = 20 \lg |G(j\omega)|$$



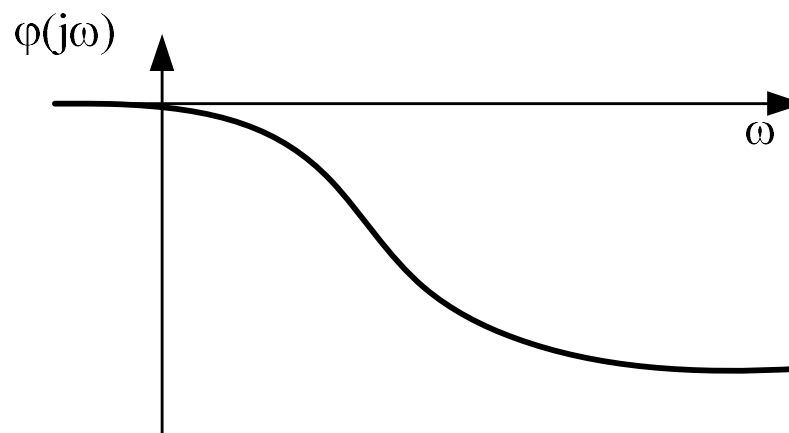
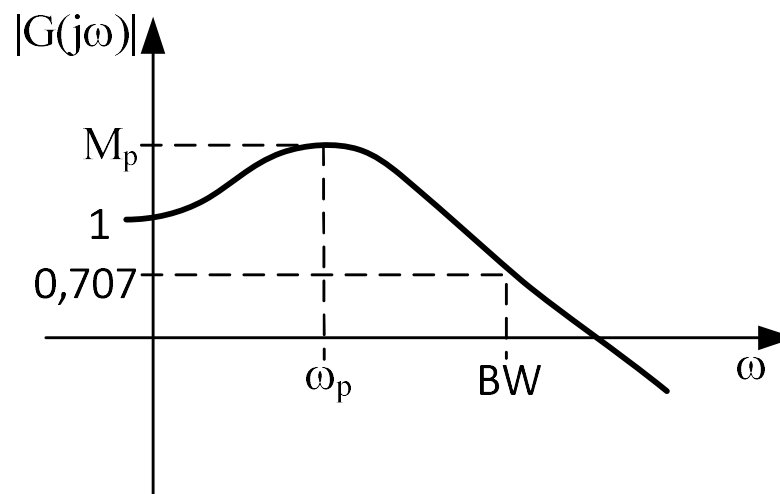
Frekvenciafüggvények ábrázolási módjai

- előnyei:
 - könnyen szerkeszthető görbék
 - szorzat függvények (soros kapcsolás) összeadásra vezethetők vissza:

$$20\lg(A_1 e^{j\varphi_1} \cdot A_2 e^{j\varphi_2}) = 20\lg A_1 + 20\lg A_2 + j(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot 20\lg e$$

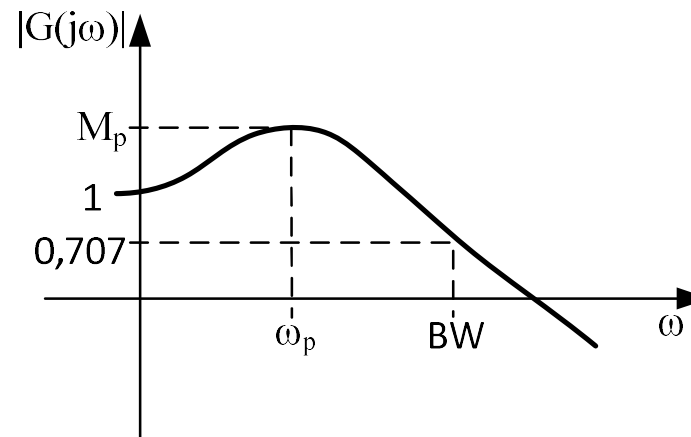
Frekvenciafüggvények jellemző pontjai

- Legyen egy visszacsatolt kör frekvenciafüggvénye az alábbi:

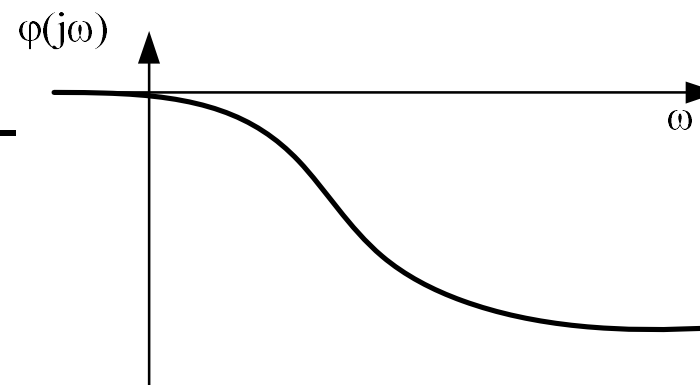


Frekvenciafüggvények jellemző pontjai

- M_p csúcsrezonancia, $G(j\omega)$ maximuma a relatív stabilitásra utal, nagy M_p nagy túllendülést jelez



- ω_p rezonanciafrekvencia
- BW sávszélesség, az a frekvencia-érték, ahol az eredeti amplitúdó a 70,7%-ára csökken (3dB-lel lesz kisebb)



- nagy sávszélesség: gyorsabb felfutás
- kis sávszélesség: nagy frekvenciájú zajok kevésbé mennek át

Frekvenciafüggvények jellemző pontjai

- vágási arány: a nagy frekvenciás tartományban a görbéhez húzott érintő meredeksége a szűrő tulajdonságok jobb jellemzésére

