

Frekvenciatartomány

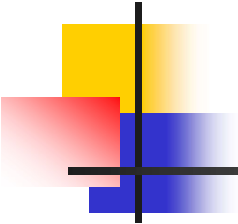
Gerzson Miklós

Pannon Egyetem, Villamosmérnöki és Információs
Rendszerek Tanszék

2019/2020 II. félév

- bevezetésének indoka:
 - általában időtartománybeli válasz kell
 - alkalmazott tesztjelek is ezt indokolják
 - információs rendszerek esetében a jelek szinuszos komponenseket tartalmaznak
 - másodrendű rendszerek alapján látszik, hogy a paraméterek meghatározása lényeges és nem egyszerű feladat
 - frekvenciatartományban sokféle módszer segíti az analízist és a tervezést

- lineáris rendszereknél szoros összefüggés van az időtartomány és a frekvenciatartomány között → a frekvenciatartománybeli adatokból következtetni lehet az időtartománybeli viselkedésre
- alkalmazásának indoka összefoglalva:
 - meglévő eszközök alkalmazhatósága
 - jól kiegészíti az időtartománybeli vizsgálatokat
 - érdemes elvégezni olyan rendszereknél is, amelyek soha nem kapnak szinuszos gerjesztést



Frekvenciatartomány bevezetése

- legyen a bemenet R amplitúdójú ω_0 frekvenciájú szinuszos jel:

$$u(t) = R \sin \omega_0 t$$

- az „állandósult” (kvázistacionárius) állapotbeli kimenet

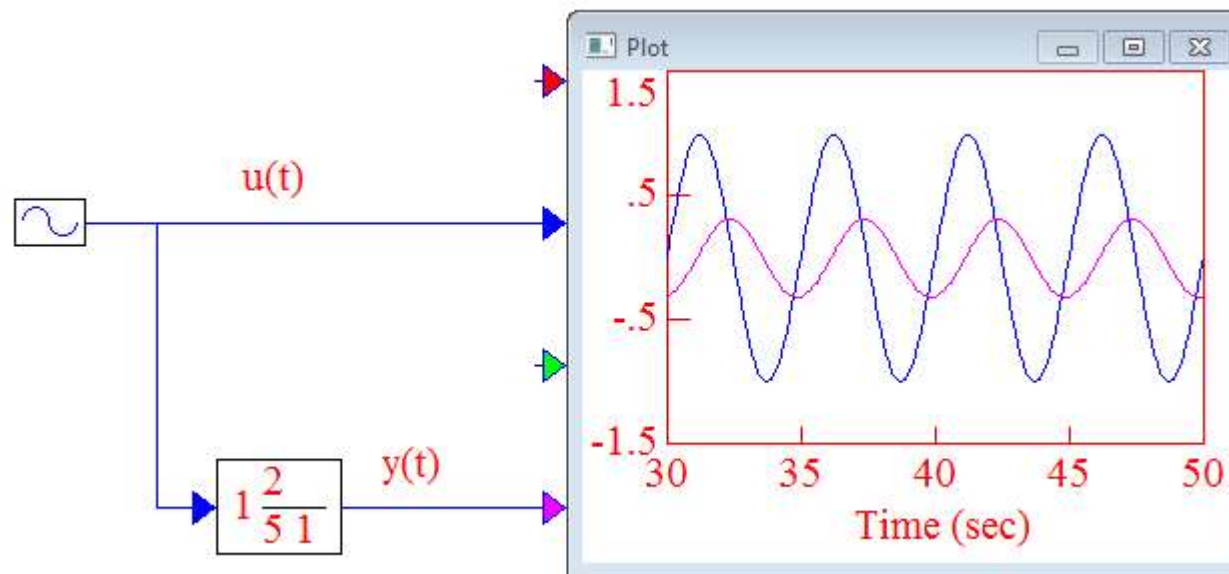
$$y(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

ahol C a kimenet amplitúdója, a φ fázissietés vagy fáziskésés

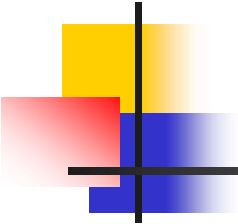
- lineáris rendszereknél **a kimenő jel és a bemenő jel frekvenciája megegyezik**

Frekvenciatartomány bevezetése

- lineáris tag gerjesztése szinuszos bemenettel



- $u(t) = R \sin w_0 t, \quad R=1, w_0 = 0,2\text{Hz}$
- $y(t) = C \sin (w_0 t + \varphi)$

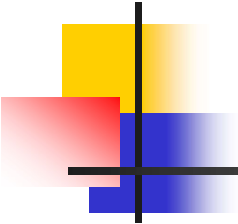


Frekvenciatartomány bevezetése

- a $u(t)$ bemenet általános alakja frekvencia-tartományban :

$$u(t) = R(\omega)\sin(\omega t + \varphi_b) = \text{Im}(R(\omega)e^{j\varphi_b(\omega)} e^{j\omega t}) = \text{Im}(U(j\omega) e^{j\omega t})$$

- ahol $R(\omega)$ bemenet konstans vagy frekvenciafüggő amplitúdója
 - $U(j\omega) = R(\omega)e^{j\varphi_b(\omega)}$ az amplitúdót és a kezdeti fáziseltolás szöget tartalmazó komplex kifejezés, a bemenő jel $t = 0$ időpillanathoz tartozó komplex vektora
 - a kimenet általános alakja
- $$y(t) = C(\omega)\sin(\omega t + \varphi_k) = \text{Im}(C(\omega)e^{j\varphi_k(\omega)} e^{j\omega t}) = \text{Im}(Y(j\omega) e^{j\omega t})$$



Frekvenciatartomány bevezetése

- Legyen $G(s)$ a tag átviteli függvénye, ekkor:

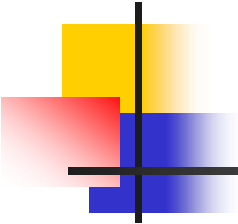
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = G(s)U(s)$$

- Analóg módon képezzük a szinuszos kimenő és bemenő jel exponenciális alakban felírt hányadosát:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)e^{j\omega t}}{U(j\omega)e^{j\omega t}} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

- ahol $A(\omega) = \frac{C(\omega)}{R(\omega)}$ az amplitúdóviszonyt kifejező abszolút érték

$$\varphi(\omega) = \varphi_k(\omega) - \varphi_b(\omega) \quad \text{a fáziseltolások különbségét megadó fázisszög}$$



Frekvenciatartomány bevezetése

- Frekvenciatartomány bevezetése az $s = j\omega$ kifejezés behelyettesítésével:

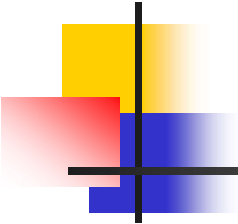
$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

- A frekvenciafüggvények szokásos felírása:

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)| \angle Y(j\omega)$$

ahol $|Y(j\omega)|$ a jel amplitúdója

$\angle Y(j\omega)$ a jel fázisa



Frekvenciatartomány bevezetése

- A kimenet meghatározása a

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

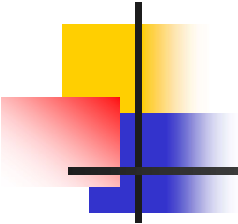
összefüggés alapján:

- a kimenőjel amplitúdója:

$$|Y(j\omega)| = |G(j\omega)| \cdot |U(j\omega)| \Rightarrow C(\omega) = A(\omega) \cdot R(\omega)$$

- a fázisa

$$\angle Y(j\omega) = \angle G(j\omega) + \angle U(j\omega) \Rightarrow \varphi_k(\omega) = \varphi(\omega) + \varphi_b(\omega)$$



Frekvenciatartomány bevezetése

- Legyen az átviteli függvény

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

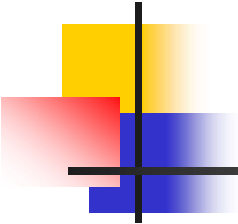
- legyen a bemenet

$$u(t) = \sin \omega t$$

azaz az amplitúdó 1, frekvencia ω rad/s

- a bemenet Laplace transzformáltja:

$$U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$



Frekvenciatartomány bevezetése

- a kimenet:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K\omega(s - z_1)(s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s^2 + \omega^2)(s - p_1)(s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

- átírva parciális törtekre

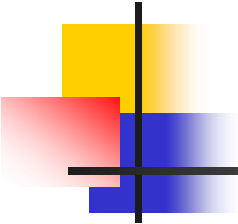
$$Y(s) = \frac{G(s) \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A_1}{s - j\omega} + \frac{A_2}{s + j\omega} + \frac{B_1}{s - p_1} + \dots + \frac{B_n}{s - p_n}$$

- inverz Laplace-transzformálva

$$y(t) = \underbrace{A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}}_{\text{„állandósult” állap-}} + \underbrace{B_1 e^{p_1 t} + \dots + B_n e^{p_n t}}_{\text{potbeli viselkedés}}$$

„állandósult” állap-
potbeli viselkedés

tranziens viselkedés
(stabil esetben)



Frekvenciatartomány bevezetése

- Ha $p_1, \dots, p_n$ negatív valós részű pólusok, akkor

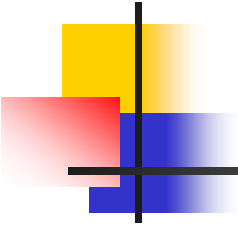
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A_1 e^{j\omega \cdot t} + A_2 e^{-j\omega \cdot t}$$

- Az együtthatók meghatározásához

$$\frac{G(s) \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A_1}{s - j\omega} + \frac{A_2}{s + j\omega}$$

egyenletet szorozzuk meg $(s - j\omega)$ -val és helyettesítsünk be $s = j\omega$ -t

$$\frac{(s - j\omega) \cdot G(s) \cdot \omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} = A_1 + \frac{A_2(s - j\omega)}{s + j\omega}$$



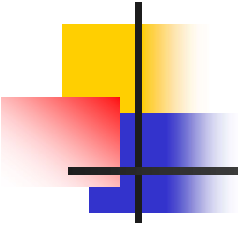
Frekvenciatartomány bevezetése

$$A_1 = \left. \frac{G(s) \cdot \omega}{s + j\omega} \right|_{s=j\omega} = \frac{G(j\omega)}{2j} = \frac{1}{2j} |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$$

- A_2 meghatározásához szorozzuk meg $(s+j\omega)$ -val és helyettesítsünk be $s=-j\omega$ -t :

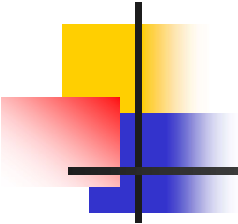
$$A_2 = \left. \frac{(s + j\omega) G(s) \omega}{s^2 + \omega^2} \right|_{s=-j\omega} = \frac{G(-j\omega)}{-2j} = -\frac{1}{2j} |G(j\omega)| e^{-j\angle G(j\omega)}$$

- azaz
$$y(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{2j} |G(j\omega)| \left(e^{j\omega t + j\angle G(j\omega)} - e^{-j\omega t - j\angle G(j\omega)} \right) =$$
$$= |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$



Frekvenciatartomány bevezetése

- A rendszer átviteli függvénye ismeretében, szinuszos bemenet esetén a kimenet a $|G(j\omega)|$ amplitúdó-karakterisztika és a $\angle G(j\omega)$ fáziskarakterisztika alapján meghatározható.



Zárt kör frekvenciatartománybeli válasza

- Legyen az eredő átviteli függvény:

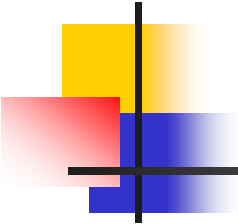
$$G_e(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- szinuszos bemenet esetén, állandósult állapotban $s = j\omega$ behelyettesítéssel:

$$G_e(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

- bontsuk fel G_e -t:

$$G_e(j\omega) = |G_e(j\omega)| \angle G_e(j\omega)$$



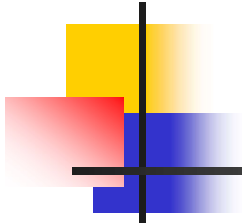
Zárt kör frekvenciatartománybeli válasza

- ekkor a zárt kör eredő átviteli függvényének amplitúdója:

$$|G_e(j\omega)| = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \right| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)H(j\omega)|}$$

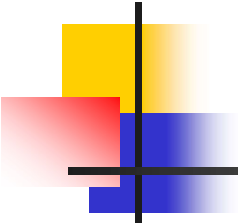
- fázisa:

$$\angle G_e(j\omega) = \phi(\omega) = \angle G(j\omega) - \angle(1 + G(j\omega)H(j\omega))$$



Frekvenciafüggvények ábrázolási módjai

- a bemenet: $u(t) = R(\omega) \sin \omega t$
- a jelformáló tag átviteli függvénye: $G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$
- a kvázistacionárius kimenet: $y(t) = C(\omega) \sin(\omega t + \varphi_k)$
$$C(\omega) = A(\omega)R(\omega) \quad \varphi_k(\omega) = \varphi(\omega) \quad (\varphi_b(\omega) = 0)$$
- lineáris rendszereknél **a kimenő jel és a bemenő jel frekvenciája megegyezik**
- frekvenciát $0 \leq \omega < \infty$ tartományban változtatva minden ω értékhez meghatározzuk $A(\omega)$ -t és $\varphi(\omega)$ -t és ezeket ábrázoljuk

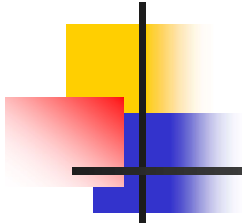


Frekvenciafüggvények ábrázolási módjai

- **Amplitúdó-fázis görbe, Nyquist-diagram**
 - frekvenciát $0 \leq \omega < \infty$ tartományban változtatva minden ω értékhez meghatározzuk és a komplex síkon ábrázoljuk a

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G(j\omega)| \angle G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \\ &= \operatorname{Re}(G(j\omega)) + j\operatorname{Im}(G(j\omega)) \end{aligned}$$

képletben szereplő $A(\omega)$ abszolút értéket és $\varphi(\omega)$ fáziseltolási szöveget.



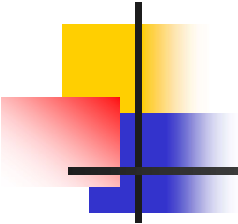
Frekvenciafüggvények ábrázolási módjai

- az így kapott pontokat összekötjük és jelöljük a növekvő frekvencia irányát
- A jelleg görbe egyes pontja állandósult (kvázistacionárius) állapotot adnak meg.
- Gyakorlati alkalmazása nehézkes:
 - egy pont meghatározása is sok munka
 - tag paramétere vagy rendszer elemeinek megváltozásakor újra kell szerkeszteni

- **Bode-diagram**

- cél a Nyquist-diagram hátrányainak kiküszöbölése
- az amplitúdó logaritmusát és a fázisszöget a frekvencia függvényében ábrázolva kapjuk a Bode-diagramot
 - $G(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$
 - $\ln G(j\omega) = \ln |G(j\omega)| + j\varphi(\omega)$
- gyakorlatban az amplitúdóviszonyt decibelben adjuk meg:

$$A(\omega)[\text{dB}] = 20 \lg |G(j\omega)|$$



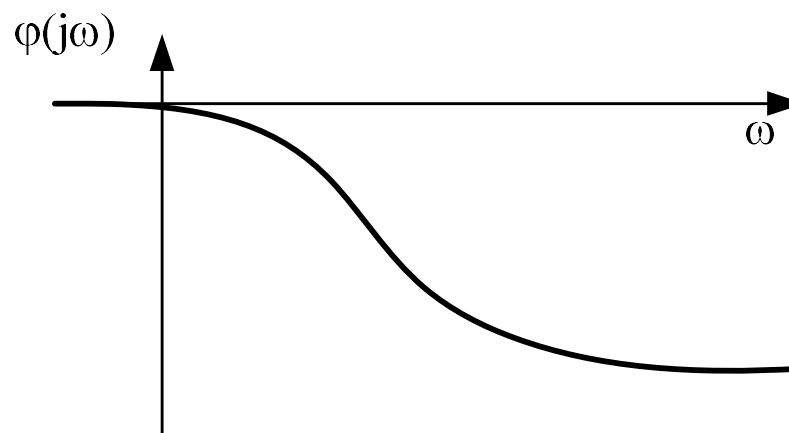
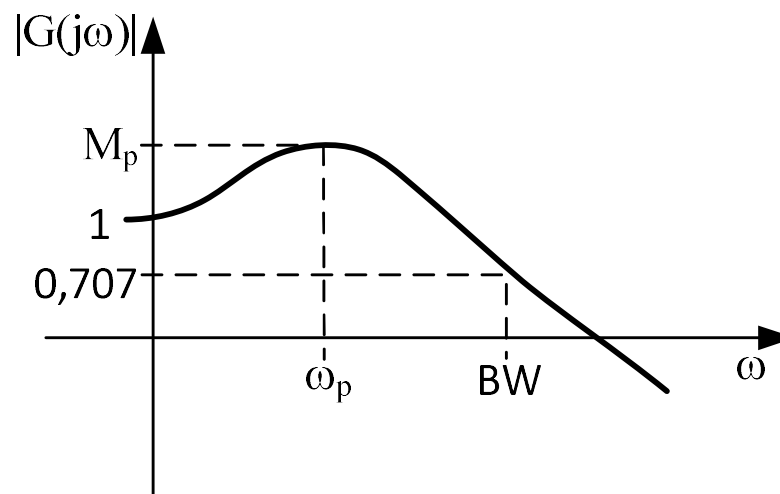
Frekvenciafüggvények ábrázolási módjai

- előnyei:
 - könnyen szerkeszthető görbék
 - szorzat függvények (soros kapcsolás) összeadásra vezethetők vissza:

$$20\lg(A_1 e^{j\varphi_1} \cdot A_2 e^{j\varphi_2}) = 20\lg A_1 + 20\lg A_2 + j(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot 20\lg e$$

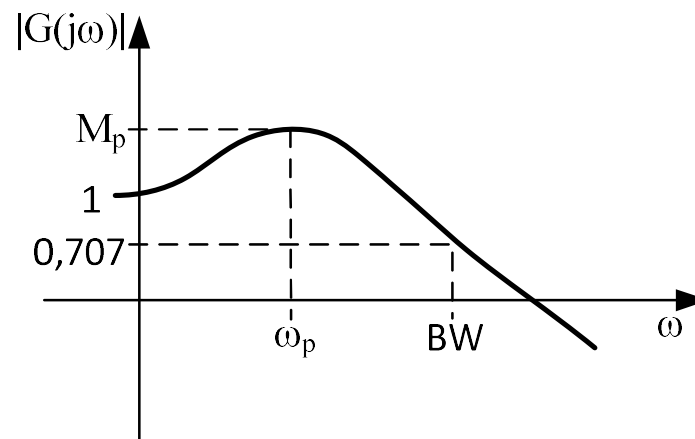
Frekvenciafüggvények jellemző pontjai

- Legyen egy visszacsatolt kör frekvenciafüggvénye az alábbi:

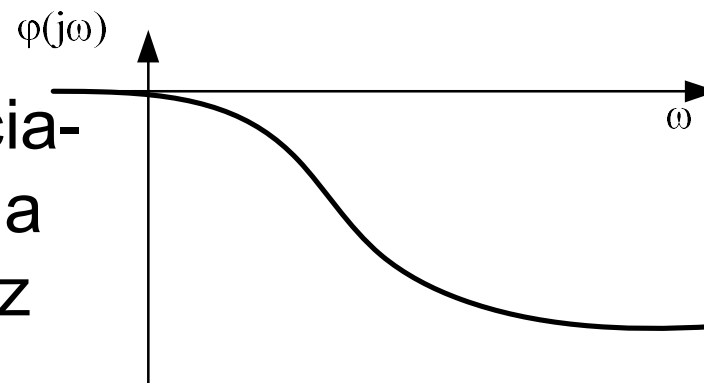


Frekvenciafüggvények jellemző pontjai

- M_p csúcsrezonancia, $G(j\omega)$ maximuma a relatív stabilitásra utal, nagy M_p nagy túllendülést jelez



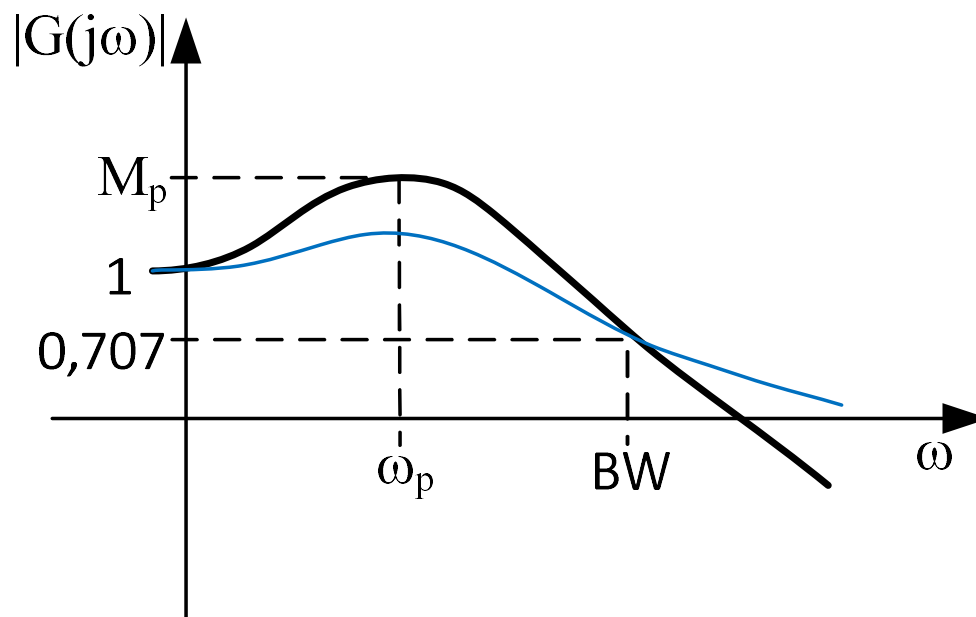
- ω_p rezonanciafrekvencia
- BW sávszélesség, az a frekvencia-érték, ahol az eredeti amplitúdó a 70,7%-ára csökken (3dB-lel lesz kisebb)



- nagy sávszélesség: gyorsabb felfutás
- kis sávszélesség: nagy frekvenciájú zajok kevésbé mennek át

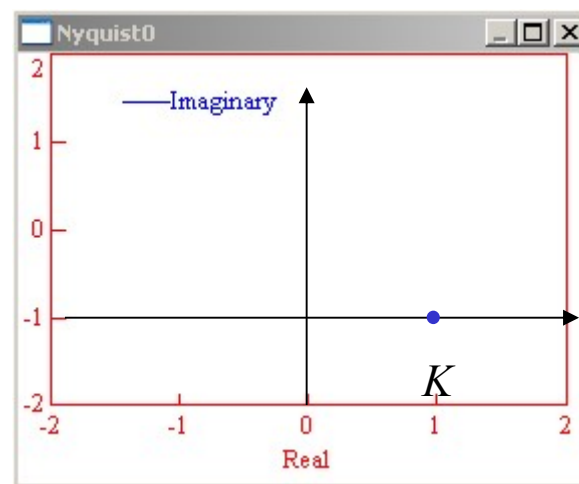
Frekvenciafüggvények jellemző pontjai

- vágási arány: a nagy frekvenciás tartományban a görbéhez húzott érintő meredeksége a szűrő tulajdonságok jobb jellemzésére



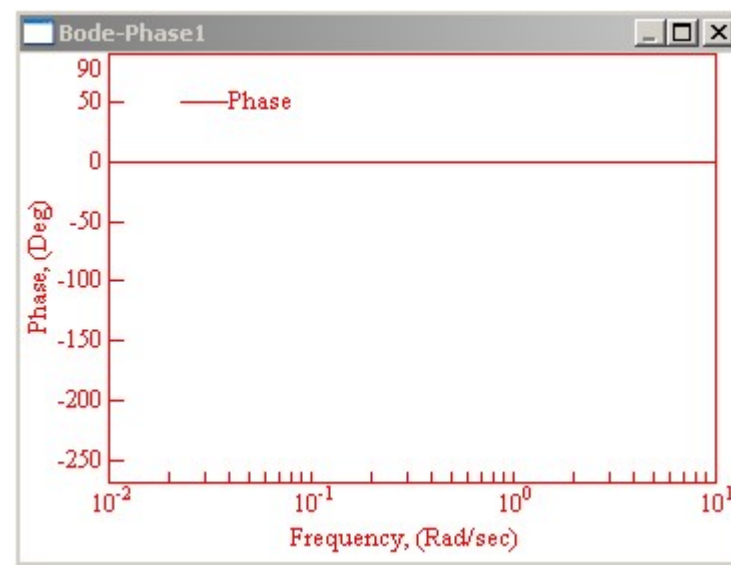
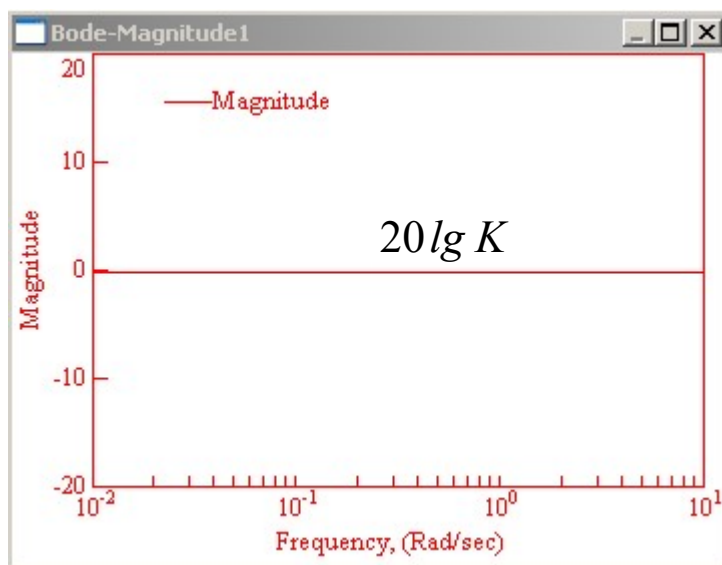
Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Nulladrendű tag
 - I/O modell: $y=Ku$
 - átviteli függvény: $G(s)=K$
 - frekvenciafüggvény: $G(j\omega)=K$
 - Nyquist diagram:



Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram:



azaz a nulladrendű tag sorba kapcsolás esetén az eredő amplitúdó görbét az erősítés logaritmusának megfelelően függőleges irányba eltolja, a fázis görbét változatlanul hagyja

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

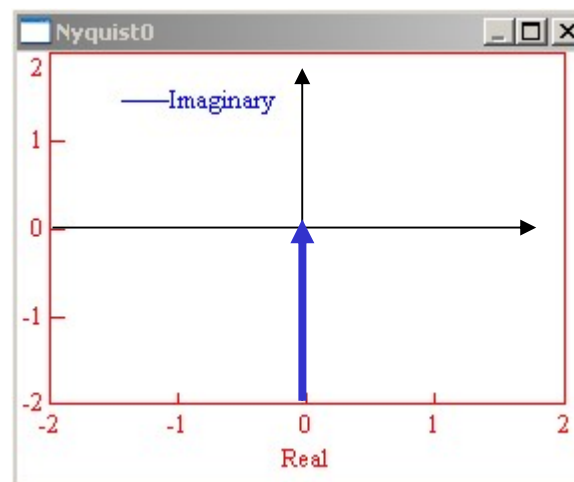
- **Integráló tag**

- I/O modell: $T_I y^{(1)} = u$

- átviteli függvény: $G(s) = \frac{1}{T_I s}$

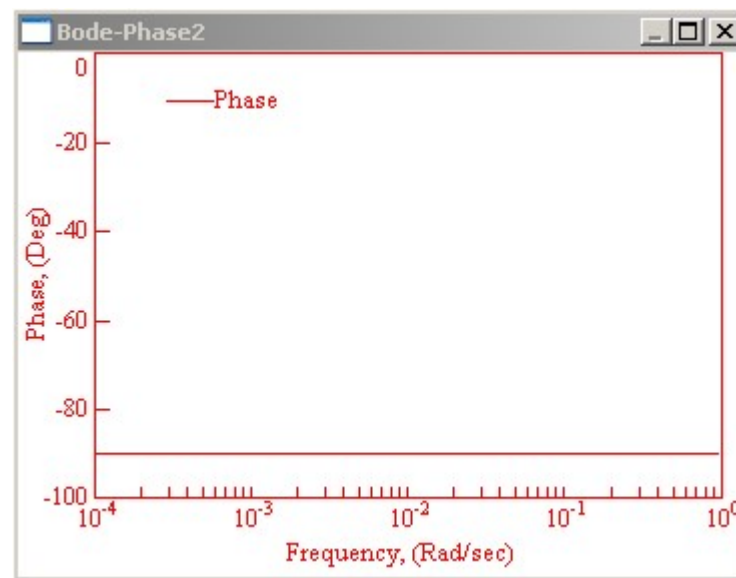
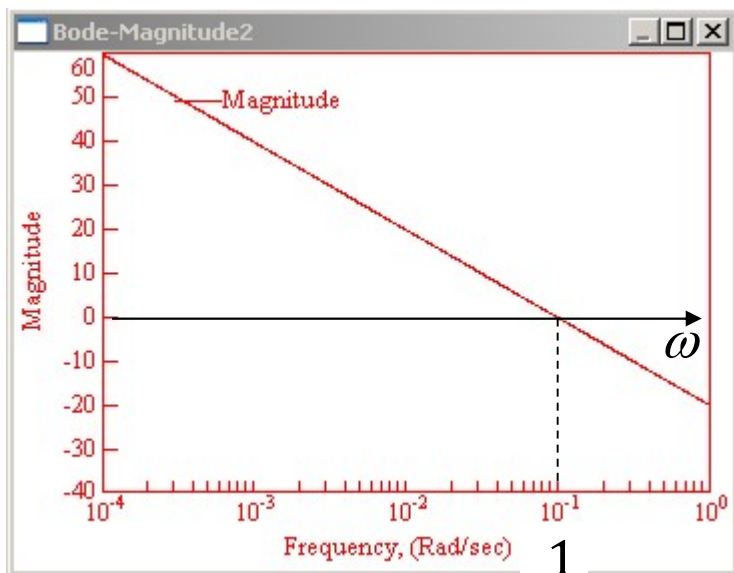
- frekvenciafüggvény: $G(j\omega) = \frac{1}{T_I j\omega}$

- Nyquist diagram:

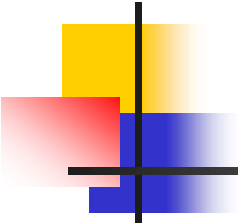


Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram



azaz a integráló tag, sorba kapcsolás esetén, az eredő amplitúdó görbét -20 dB meredekségű egyenessel eltolja, a fázis görbét -90°-kal sietteti



Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- **Elsőrendű tag**

- I/O modell: $\tau y^{(1)} + y = Ku$

- átviteli függvény: $G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$

- az $u(t) = R \sin \omega t$ bemenetre adott válasz:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{R\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$y(t) = \frac{RK}{\omega} \left[\frac{\tau \omega^2}{\tau^2 \omega^2 + 1} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\omega \sin(\omega t + \varphi)}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \right]$$

tranziens tag

$t \rightarrow \infty$ tag $\rightarrow 0$

„állandósult” állapotot

leíró tag

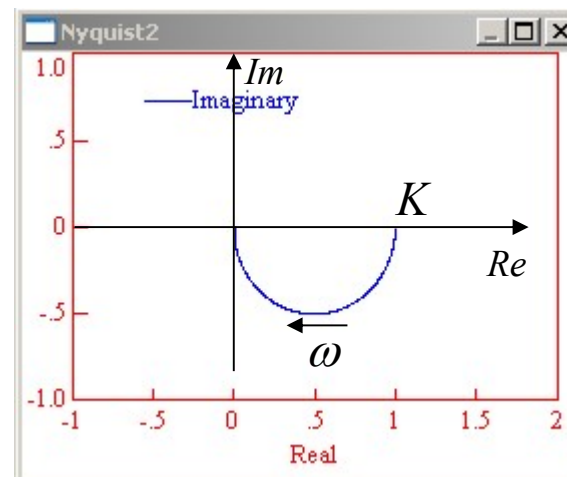
Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

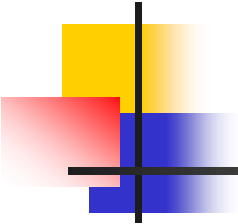
- frekvenciafüggvény:

$$G(j\omega) = \frac{K}{\tau j\omega + 1} = \frac{K}{\tau^2\omega^2 + 1} - \frac{Kj\omega\tau}{\tau^2\omega^2 + 1}$$

valós rész képzetes rész

- Nyquist diagram:





Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram ($K=1$):

$$20 \lg \left| \frac{1}{j\omega\tau + 1} \right| = -20 \lg \sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} \quad [dB]$$

- alacsony frekvenciánál $\omega \ll 1/\tau$

$$-20 \lg \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \cong -20 \lg 1 = 0 \quad [dB]$$

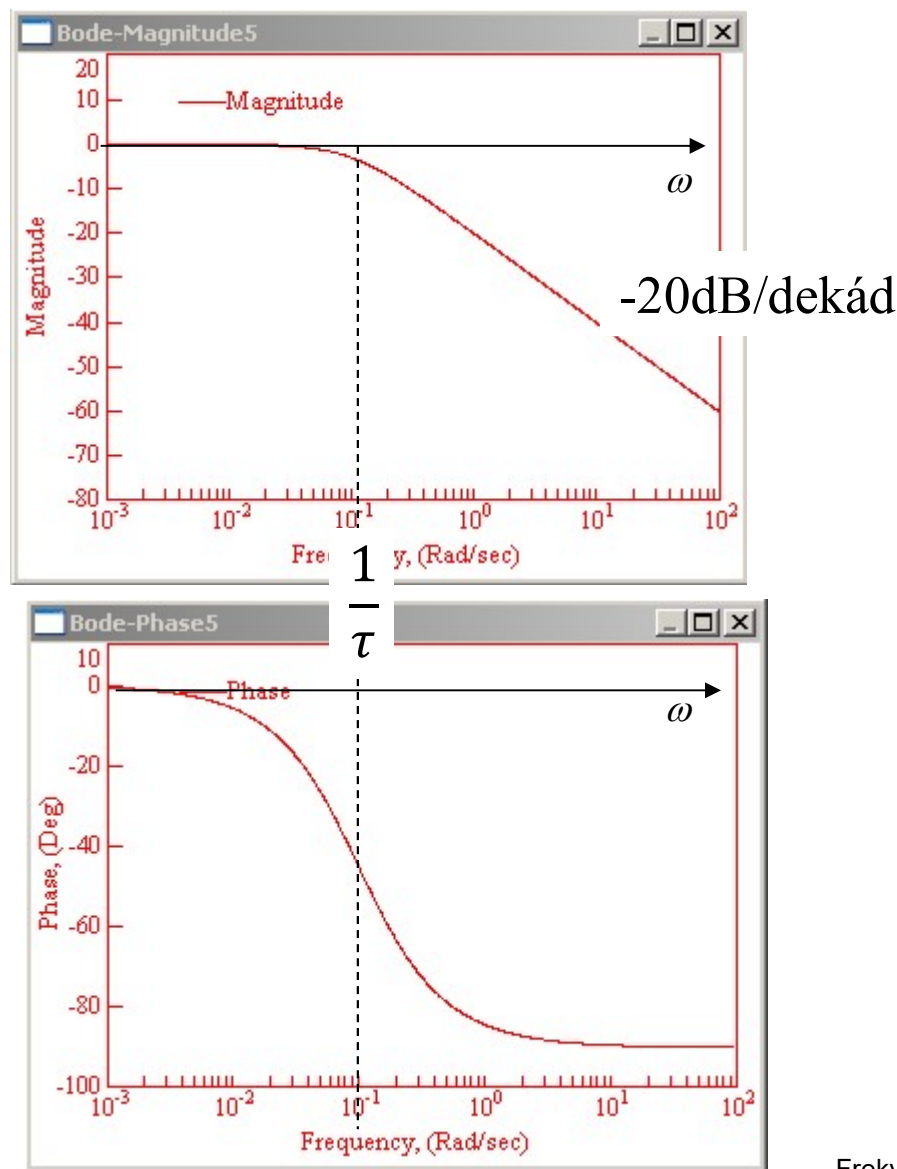
- magas frekvenciánál $\omega \gg 1/\tau$

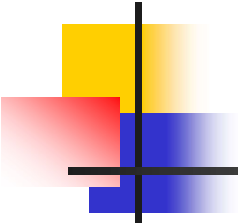
$$-20 \lg \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \cong -20 \lg \omega \tau \quad [dB]$$

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram:
($K=1$)

$$\varphi = -\arctg \omega \tau$$





Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- **Másodrendű tag**

- I/O modell: $T_2^2 y^{(2)} + T_1 y^{(1)} + y = Ku$

$$T^2 y^{(2)} + 2\xi T y^{(1)} + y = Ku$$

- átviteli függvény: $G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$

- **frekvenciafüggvény:** $G(j\omega) = \frac{K}{T^2 (j\omega)^2 + 2\xi T j\omega + 1}$

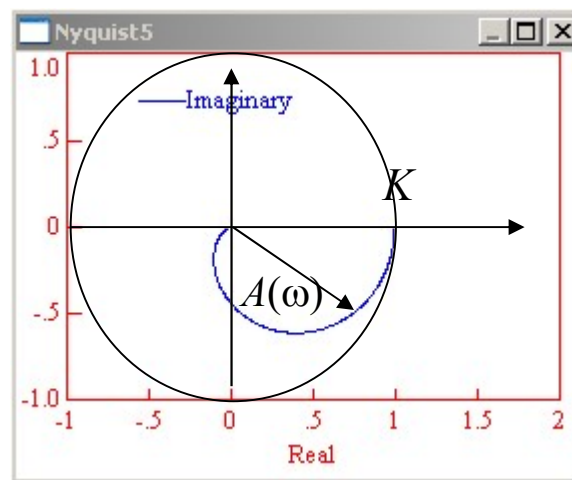
- az esetek szétválogatása ξ értéke alapján,
legyen $K = 1$

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- legyen $\xi > 1$, ekkor a másodrendű tag két elsőrendű sorba kapcsolt tagnak felel meg:

$$G(j\omega) = \frac{1}{T_a j\omega + 1} \cdot \frac{1}{T_b j\omega + 1} = G_a(j\omega) \cdot G_b(j\omega)$$

- Nyquist diagram:
($K=1$, $\xi > 1$)

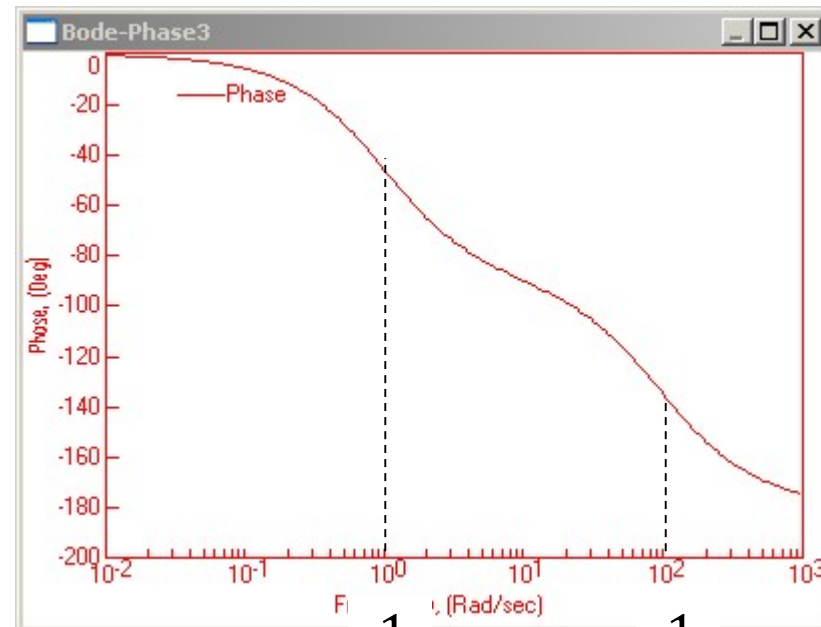
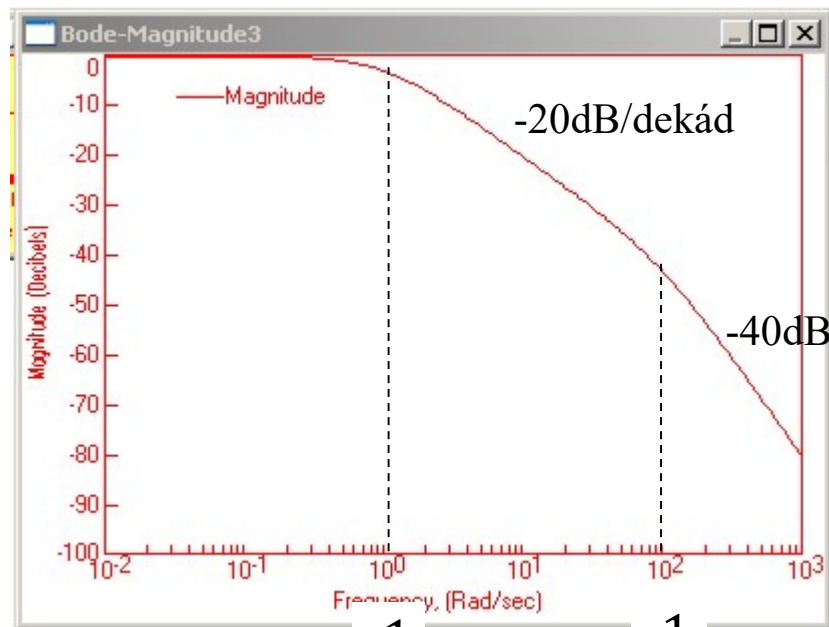


Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram ($K=1, \xi > 1$):

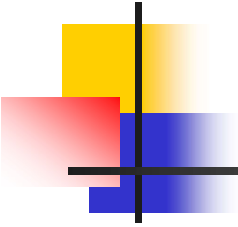
$$|G|[dB] = 20 \lg|G_a(j\omega) \cdot G_b(j\omega)| = 20 \lg|G_a(j\omega)| + 20 \lg|G_b(j\omega)| = \\ = |G_a|[dB] + |G_b|[dB]$$

$$\varphi_e = \varphi_a + \varphi_b = -\arctg\omega T_a - \arctg\omega T_b$$



Irányítástechnika – PE MI, v
 $\frac{1}{T_a}$ $\frac{1}{T_b}$

$\frac{1}{T_a}$ $\frac{1}{T_b}$ Frekvencia
 mány/35



Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

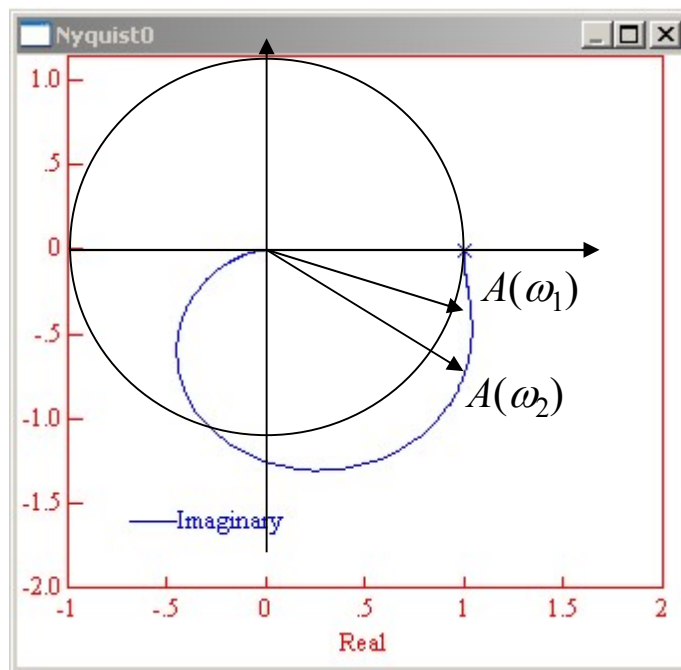
- legyen $0 < \xi < 1$, ekkor

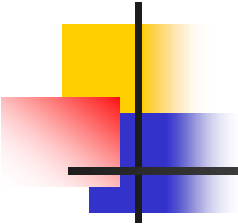
$$\begin{aligned} |G|[dB] &= 20 \lg \left| \frac{1}{(j\omega)^2 T^2 + 2T\xi j\omega + 1} \right| = \\ &= -20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} \end{aligned}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi T\omega}{1 - \omega^2 T^2}$$

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Nyquist diagram:
($K=1, 0 < \xi < 1$)





Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram:

$$|G|[dB] = -20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - \omega^2 T^2}$$

- alacsony frekvenciánál, $\omega \ll 1/T$ az ωT elhanyagolható az 1 mellett, így $|G|[dB] \approx 0$, $\varphi \approx 0$
- magas frekvenciánál, $\omega \gg 1/T$ az $\omega^4 T^4$ tag mellett a többi tag elhanyagolható, így

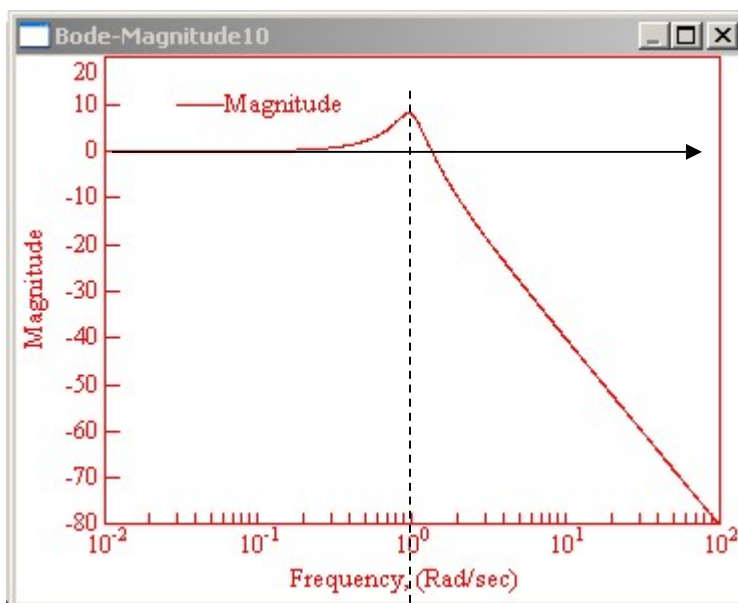
$$|G|[dB] \approx -20 \lg \sqrt{\omega^4 T^4} = -40 \lg \omega T \quad \varphi \approx -180^\circ$$

- legyen $\omega = 1/T$, itt a pontos érték:

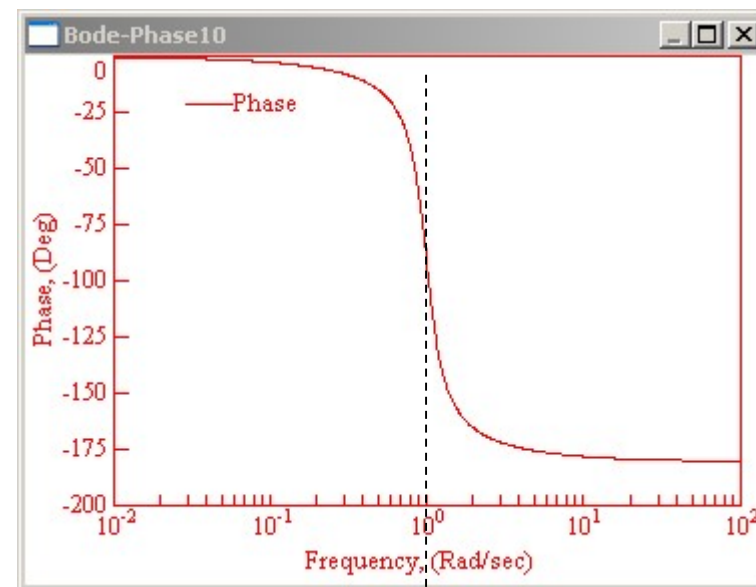
$$|G|[dB] = -20 \lg \sqrt{4\xi^2} = -20 \lg 2\xi \quad \varphi = -90^\circ$$

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

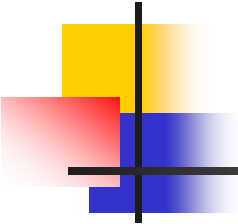
- Bode diagram ($K=1, 0 < \xi < 1$)



$$\frac{1}{T}$$



$$\frac{1}{T}$$



Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- **Magasabb rendű tag**

- I/O modell: $T_3^3 y^{(3)} + T_2^2 y^{(2)} + T_1 y^{(1)} + y = Ku$

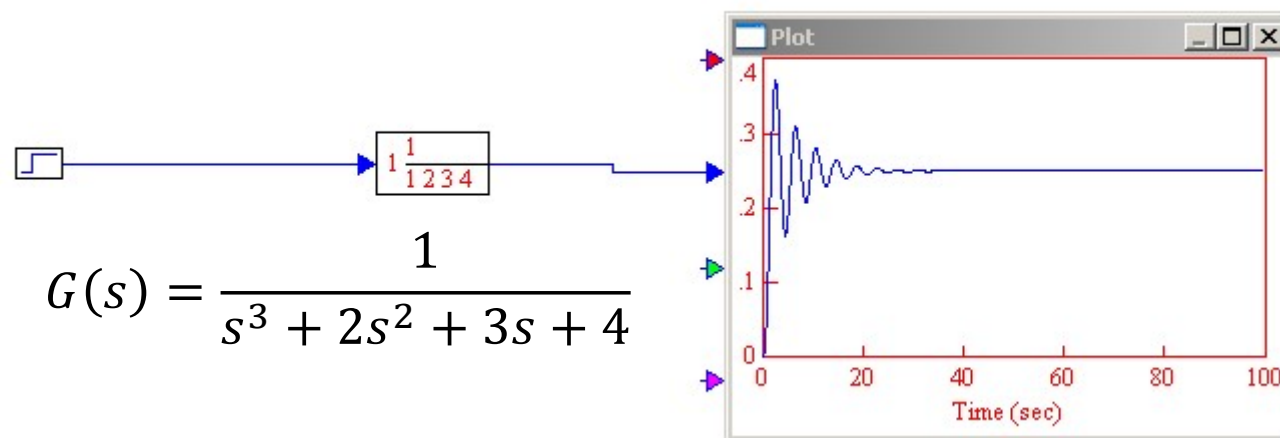
- átviteli függvény: $G(s) = \frac{K}{T_3^3 s^3 + T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}$

- frekvenciafüggvény:

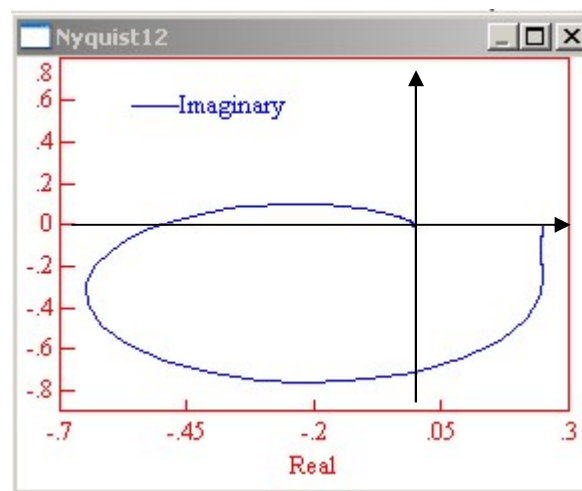
$$G(j\omega) = \frac{K}{T_3^3 (j\omega)^3 + T_2^2 (j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1}$$

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- átmeneti függvény:

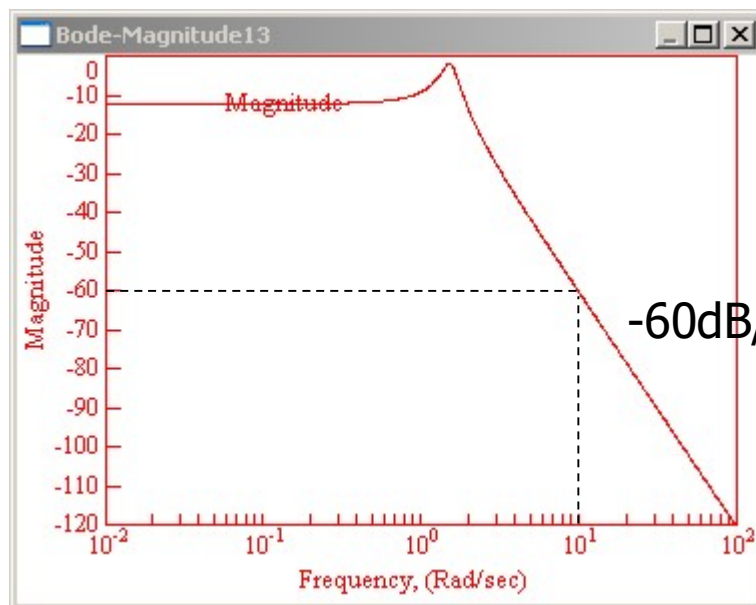


- Nyquist diagram



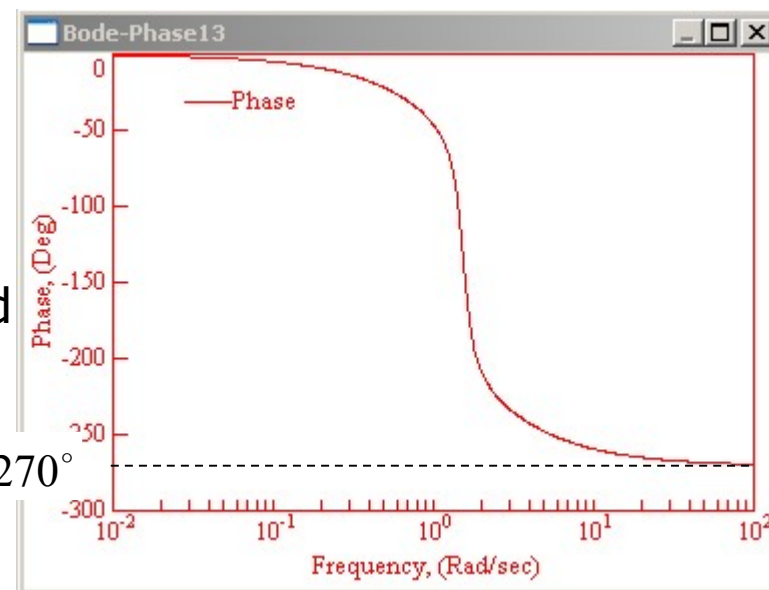
Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram



-60dB/dekád

-270°

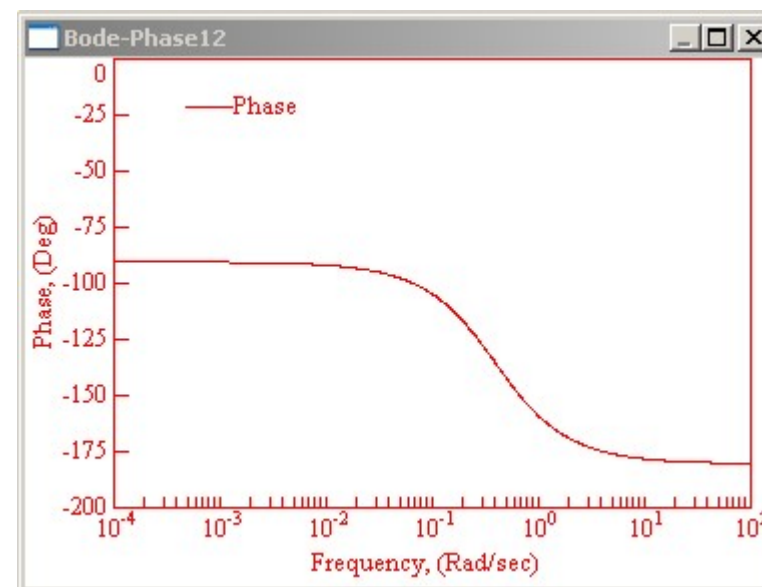
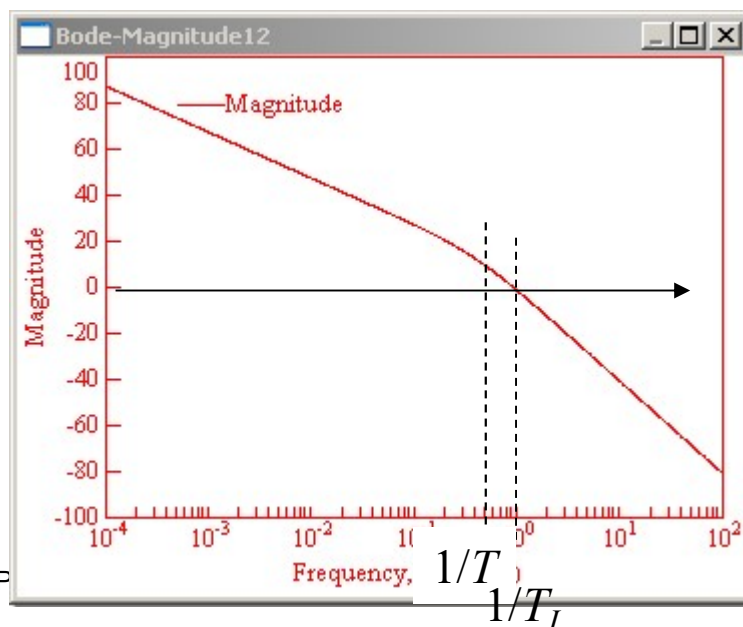
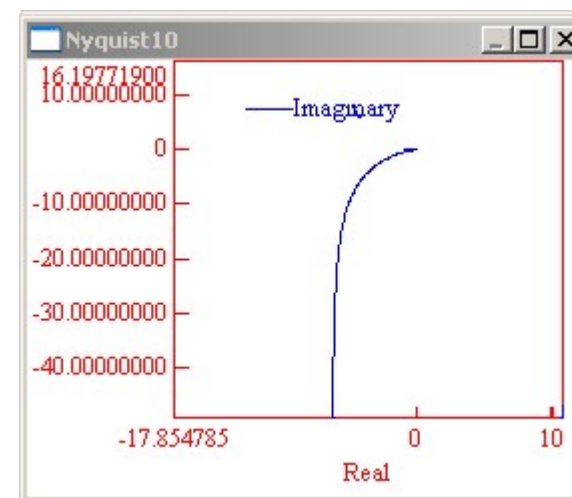


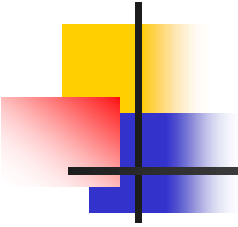
Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Egytárolós integráló tag

$$G(j\omega) = \frac{1}{T_2^2(j\omega)^2 + T_1j\omega} = \frac{1}{T_Ij\omega} \cdot \frac{1}{Tj\omega + 1}$$

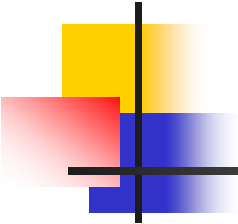
- Nyquist diagram
- Bode diagram





Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- **Deriváló tag**
 - I/O modell: $y = T_D u^{(1)}$
 - átviteli függvény: $G(s) = T_D s$
 - **frekvenciafüggvény:** $G(j\omega) = T_D j\omega$
 - Nyquist diagram:
 - Bode diagram:



Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Egytárolós deriváló tag

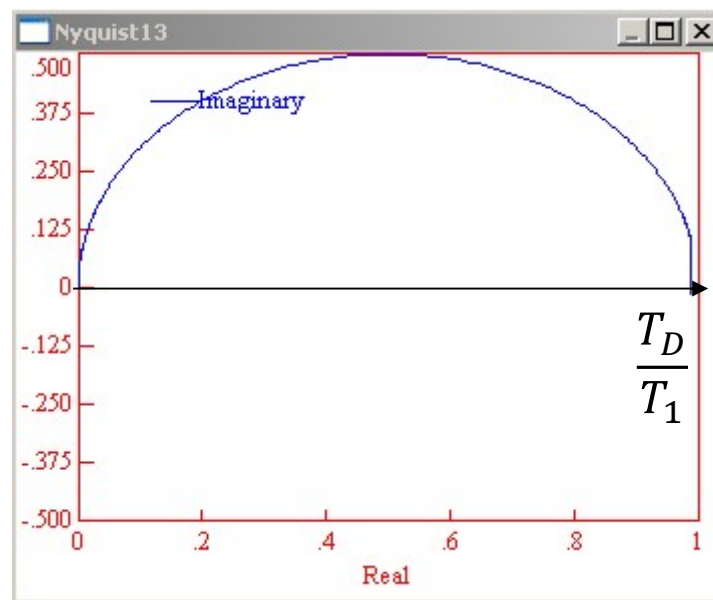
- I/O modell: $T_1 y^{(1)} + y = T_D u^{(1)}$

- átviteli függvény: $G(s) = \frac{T_D s}{T_1 s + 1}$

- frekvenciafüggvény: $G(j\omega) = \frac{T_D j\omega}{T_1 j\omega + 1}$

Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Nyquist diagram:



Dinamikus tagok frekvenciafüggvényei

- Bode diagram

