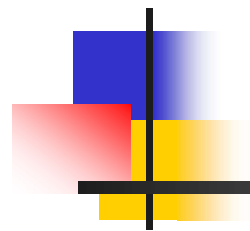


Figyelem!

A következő előadás a koronavírus miatt elrendelt távoktatáshoz készült segédanyagként a Méréselmélet kurzust a 2019/20-as tanév tavaszi félévében felvett hallgatók számára.

A felvétel sokszorosításához és terjesztéséhez az előadó nem járul hozzá.

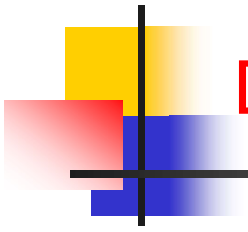


Mintavételezett rendszerek stabilitása

Gerzson Miklós

Pannon Egyetem, Villamosmérnöki és Információs
Rendszerek Tanszék

2019/2020 II. félév



Diszkrét idejű rendszerek stabilitása

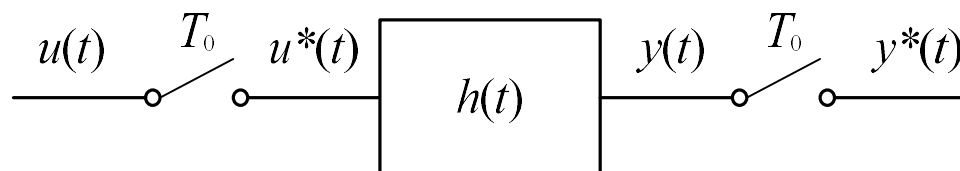
- Def.: Diszkrét BIBO stabilitás

Egy lineáris mintavételező rendszert BIBO stabilitásúnak nevezünk, ha korlátos bemenő impulzussorozat hatására keletkező kimenő impulzussorozat is korlátos.

Labilis, ha korlátos bemenő jelsorozat esetén a kimenő jelsorozat nem korlátos.

Diszkrét idejű rendszerek stabilitása

- BIBO stabilitás feltétele
 - a vizsgálandó rendszer

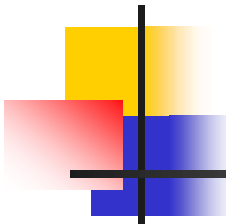


- az impulzus átviteli függvényről leírtak szerint:

$$y(nT_0) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_0) \cdot u(nT_0 - kT_0)$$

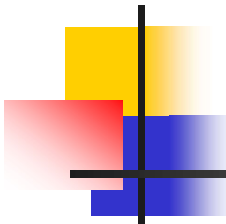
- mindkét oldal abszolút értékét véve

$$|y(nT_0)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_0) \cdot u(nT_0 - kT_0) \right|$$



Diszkrét idejű rendszerek stabilitása

- ha $u(t)$ korlátos: $u(nT_0 - kT_0) \leq M_1$
- akkor $|y(nT_0)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_0) \cdot u(nT_0 - kT_0) \right| \leq$
$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT_0)| \cdot |u(nT_0 - kT_0)| \leq M_1 \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT_0)|$$
- azaz $y(nT_0)$ (vagy $y^*(t)$) korlátos $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT_0)| \leq M_2 < \infty$
- A lineáris mintavételező rendszer BIBO stabilitásának elégséges feltétele, hogy a zárt rendszer súlyfüggvényének mintavételezési időpontokban vett abszolút értékeiből alkotott végtelen sor korlátos.

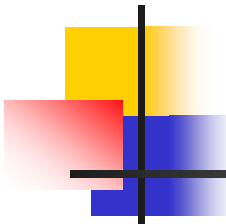


Diszkrét idejű rendszerek stabilitása

- Ez nem csak elégséges, hanem szükséges feltétel is:
- Legyen $u(kT_0)$ olyan, hogy $|u(nT_0 - kT_0)| > 1$ és $u(nT_0 - kT_0)$ és $h(kT_0)$ előjelei egyezzenek meg.
- Így

$$|y(nT_0)| = \sum_{k=0}^n |h(kT_0)| \cdot |u(nT_0 - kT_0)| \geq \sum_{k=0}^n |h(kT_0)|$$

azaz ha $\sum |h(kT_0)|$ nem korlátos, midőn $n \rightarrow \infty$, akkor $y(nT_0)$ sem lesz korlátos

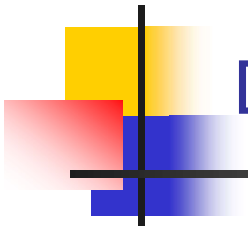


Diszkrét idejű rendszerek stabilitása

- Összehasonlítva a folytonos rendszerekkel a BIBO stabilitás feltételét:

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT_0)| < \infty$$

- A diszkrét BIBO stabilitás eldöntéséhez végtelen sorok konvergenciáját kell vizsgálni.



Diszkrét idejű rendszerek stabilitása

- Def.: **Aszimptotikus stabilitás**

Lineáris mintavételező rendszert aszimptotikusan stabilnak nevezünk, $u(kT_0) = 0$ bemeneti sorozat és $y(-1T_0), y(-2T_0), \dots, y(-(n-1)T_0) \neq 0$ kezdeti feltételek esetén a kimeneti sorozat nullához tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(nT_0) = 0$$

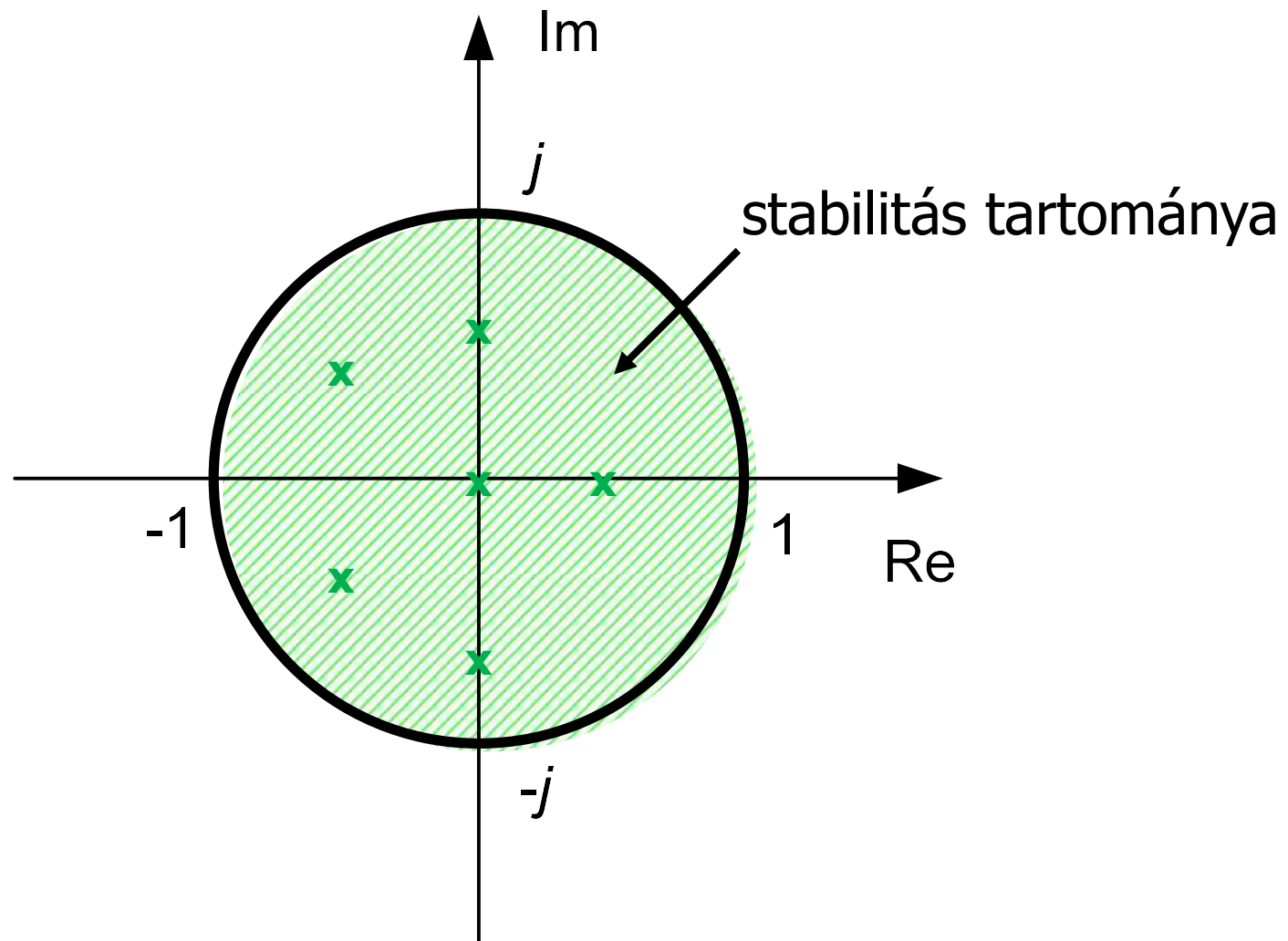
- Tétel: **Aszimptotikus stabilitás**

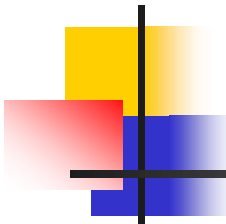
a) Egy mintavételezett rendszer akkor és csak akkor asimptotikusan stabil, ha az eredő impulzus átviteli függvényének valamennyi pólusának abszolút értéke 1-nél kisebb:

$$\text{a rendszer stabil} \iff \forall p_i: |p_i| < 1$$

azaz a komplex síkon ábrázolva a pólusokat valamennyi az origó középpontú, egység sugarú körön belül van.

Diszkrét I/O modellek stabilitása





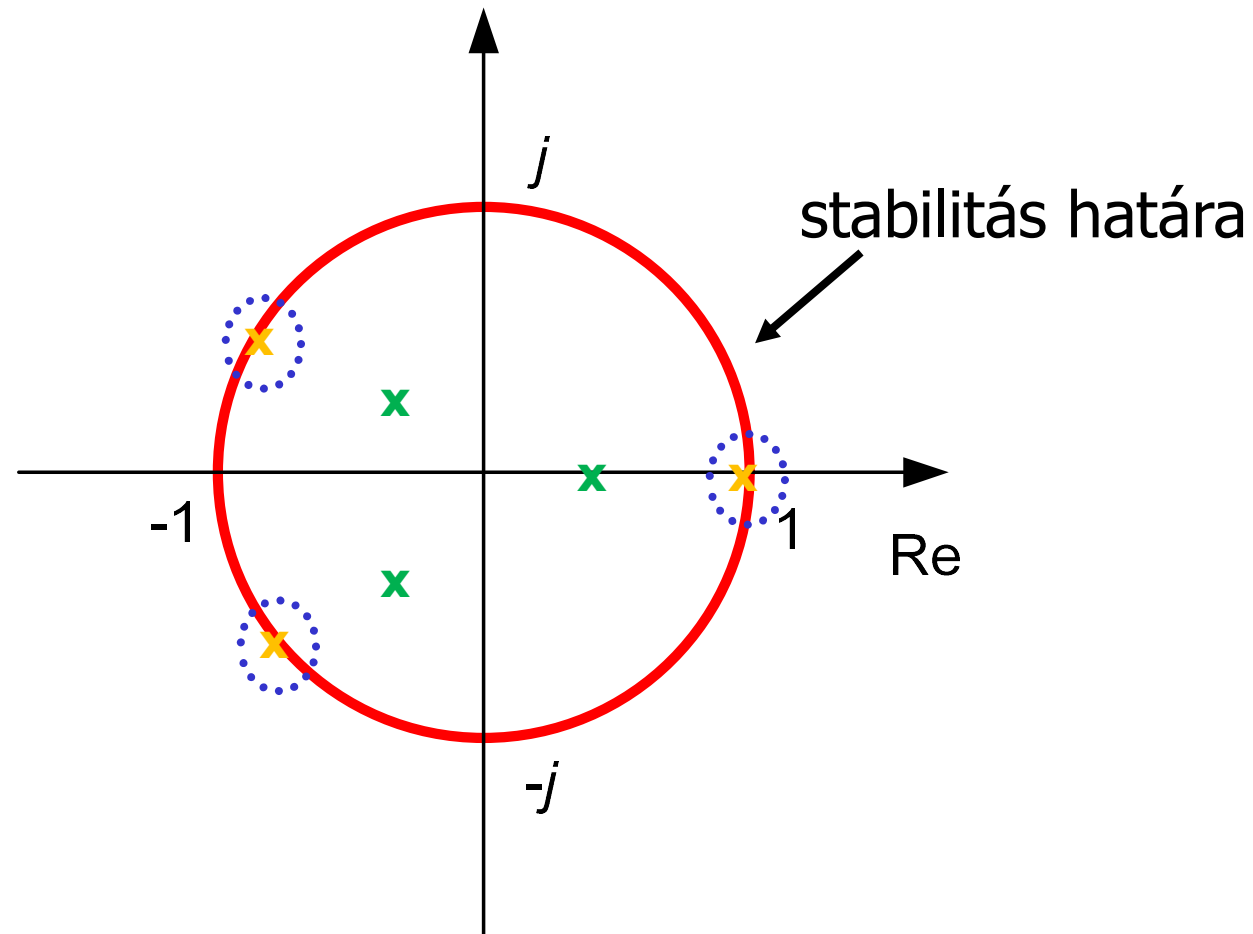
Diszkrét I/O modellek stabilitása

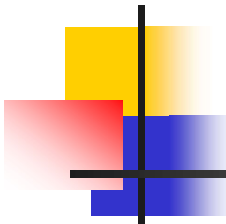
b) ha van(nak) a rendszer eredő impulzus átviteli függvényének olyan pólusa(i), amely(ek)nek az abszolút értéke 1, de esetlegesen létező minden más pólus abszolút értéke 1-nél kisebb, akkor a rendszer a stabilitás határán van:

a rendszer stabilitás
határán van $\Leftrightarrow \exists p_k: |p_k| = 1, \forall p_i (i \neq k): |p_i| < 1$

azaz a komplex síkon ábrázolva a pólusokat, van(nak) olyan(ok) ami egység sugarú kör körívén van(nak), a esetlegesen létező többi pedig a körön belül van.

Diszkrét I/O modellek stabilitása





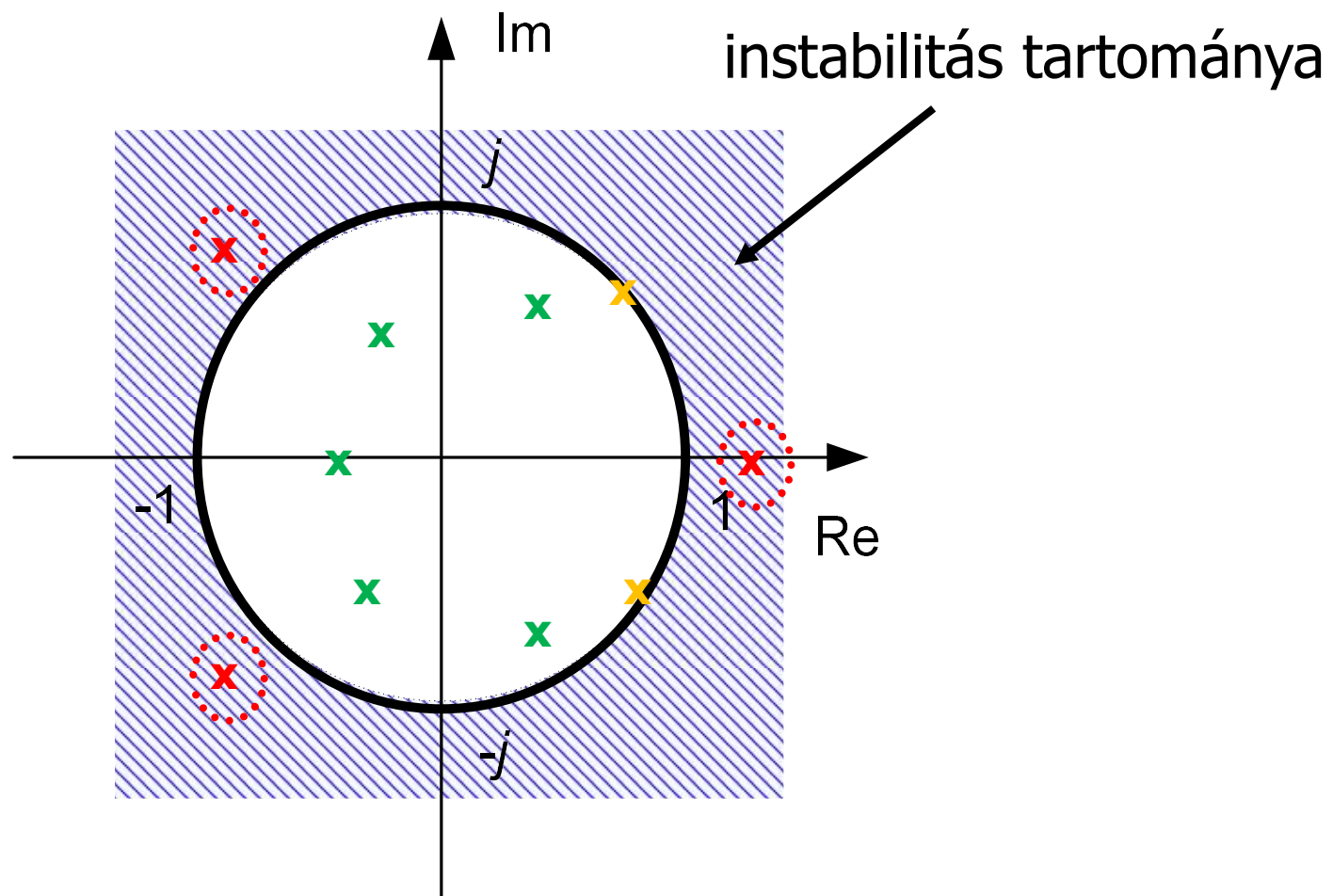
Diszkrét I/O modellek stabilitása

- c) ha van a rendszer eredő impulzus átviteli függvényének legalább egy olyan pólusa, amelynek az abszolút értéke 1-nél nagyobb, akkor a rendszer instabil:

$$\text{a rendszer instabil} \Leftrightarrow \exists p_i: |p_i| > 1$$

azaz a komplex síkon ábrázolva a pólusokat, van(nak) olyan(ok) ami egység sugarú körön kívül van(nak), a többi pólus elhelyezkedése lényegtelen.

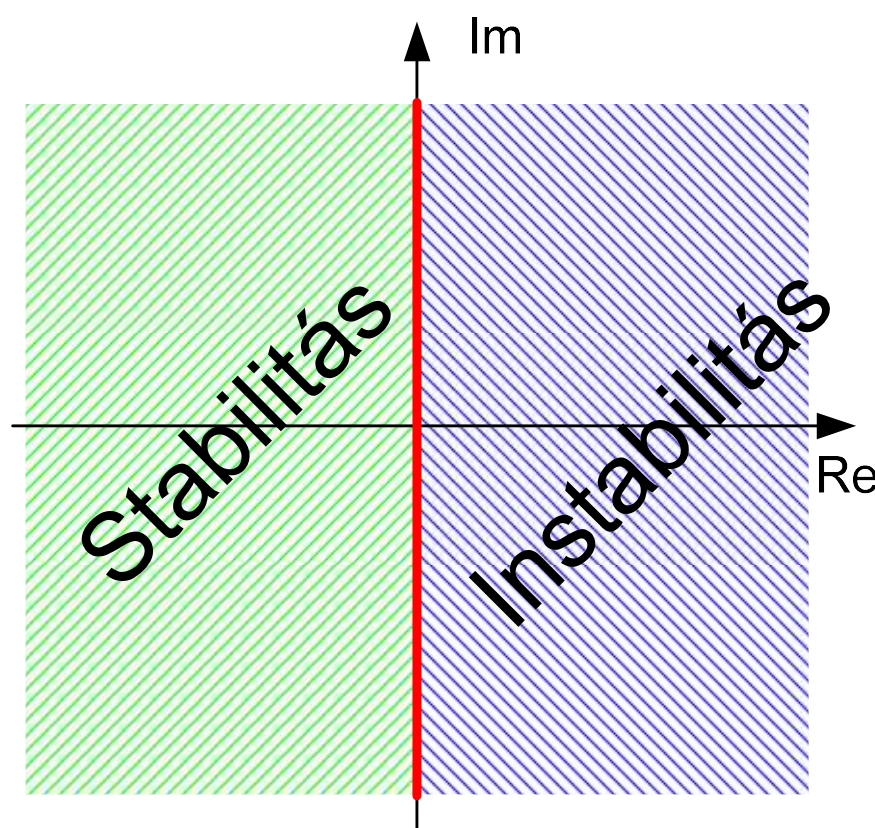
Diszkrét I/O modellek stabilitása



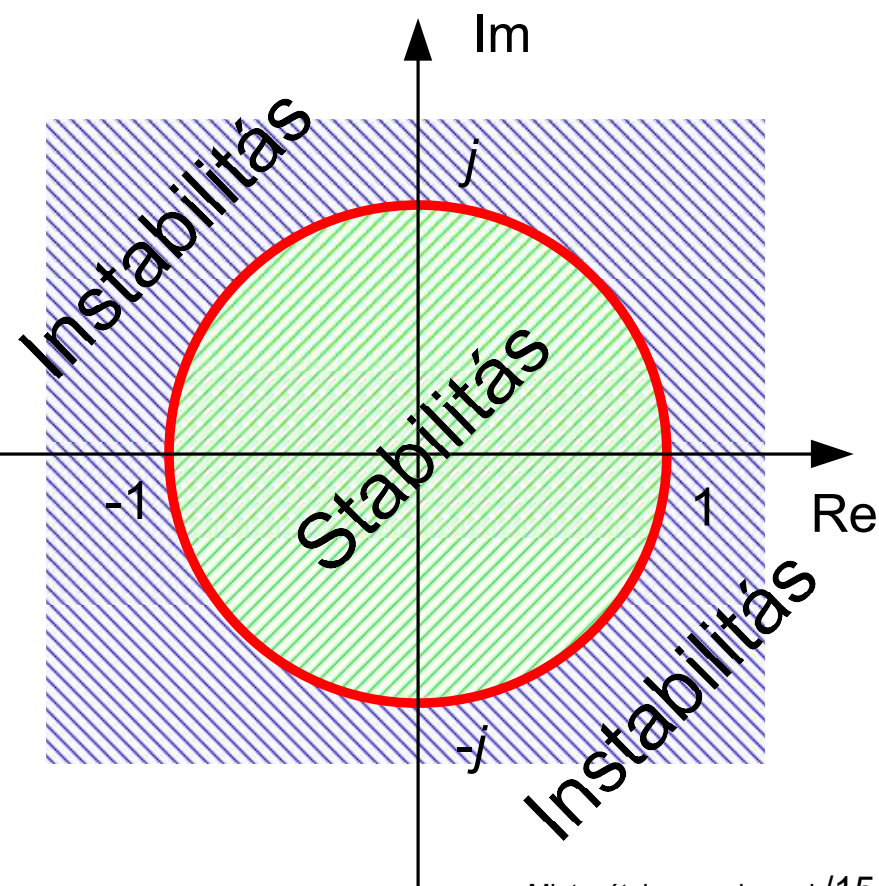
Diszkrét I/O modellek stabilitása

- Stabilitási tartományok összehasonlítása

folytonos idejű rendszer



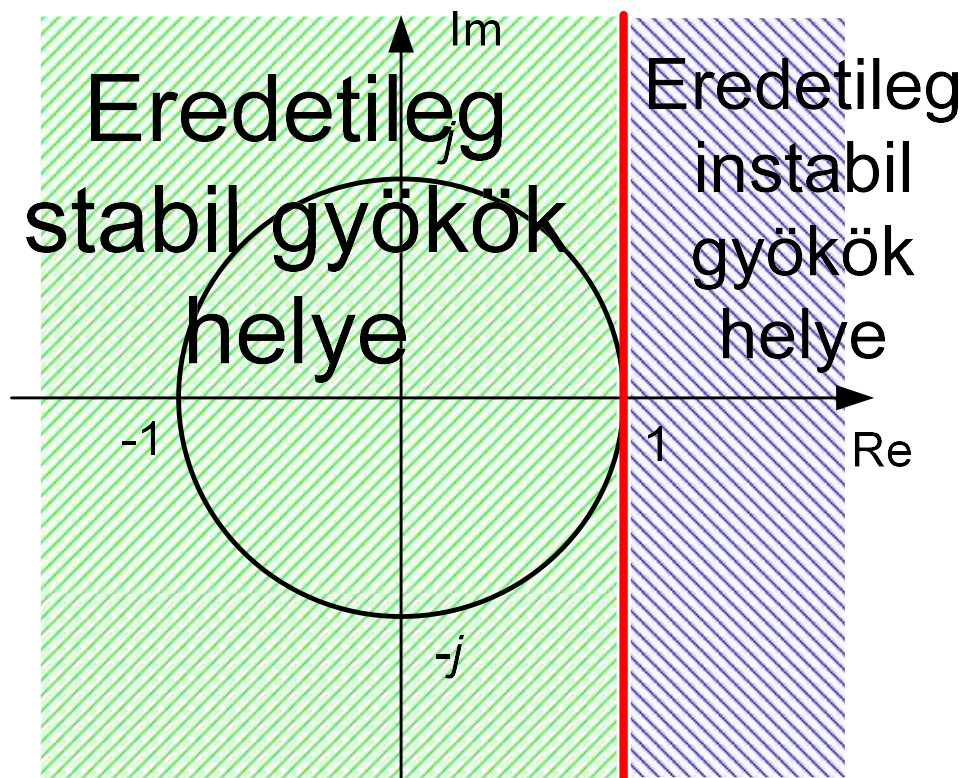
diszkrét idejű rendszer



Diszkrét I/O modellek stabilitása

- közelítő módszerek alkalmazásának hatása
előrefelé vett differenciák

$$s \approx \frac{z - 1}{T_0} \quad (z \approx 1 + sT_0)$$



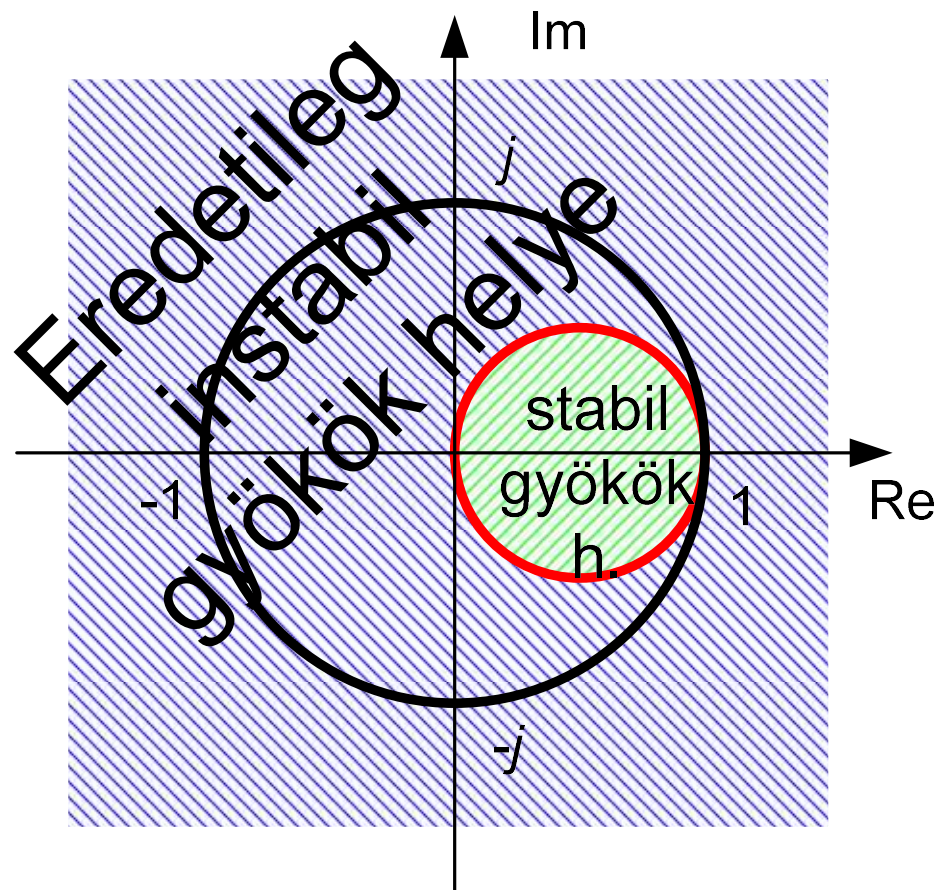
azaz ami instabil volt
a diszkretizálás előtt,
az az is marad,

ami stabil volt
diszkretizálás előtt az
vagy stabil lesz, vagy
instabil lesz

Diszkrét I/O modellek stabilitása

visszafelé vett differenciák

$$s \approx \frac{z - 1}{zT_0} \quad \left(z \approx \frac{1}{1 - sT_0} \right)$$



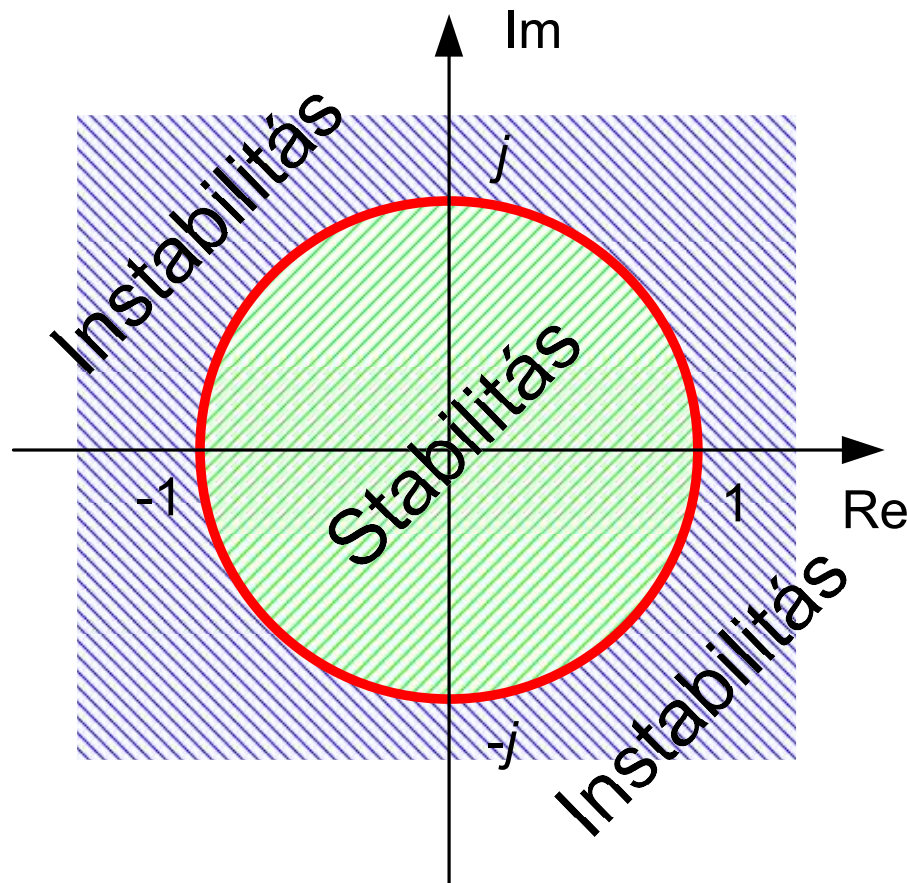
azaz ami stabil volt a
diszkretizálás előtt,
az az is marad,

ami instabil volt
diszkretizálás előtt az
vagy stabil lesz, vagy
instabil lesz

Diszkrét I/O modellek stabilitása

Tustin módszer

$$s \approx \frac{2}{T_0} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} \quad \left(z \approx \frac{1 + sT_0/2}{1 - sT_0/2} \right)$$

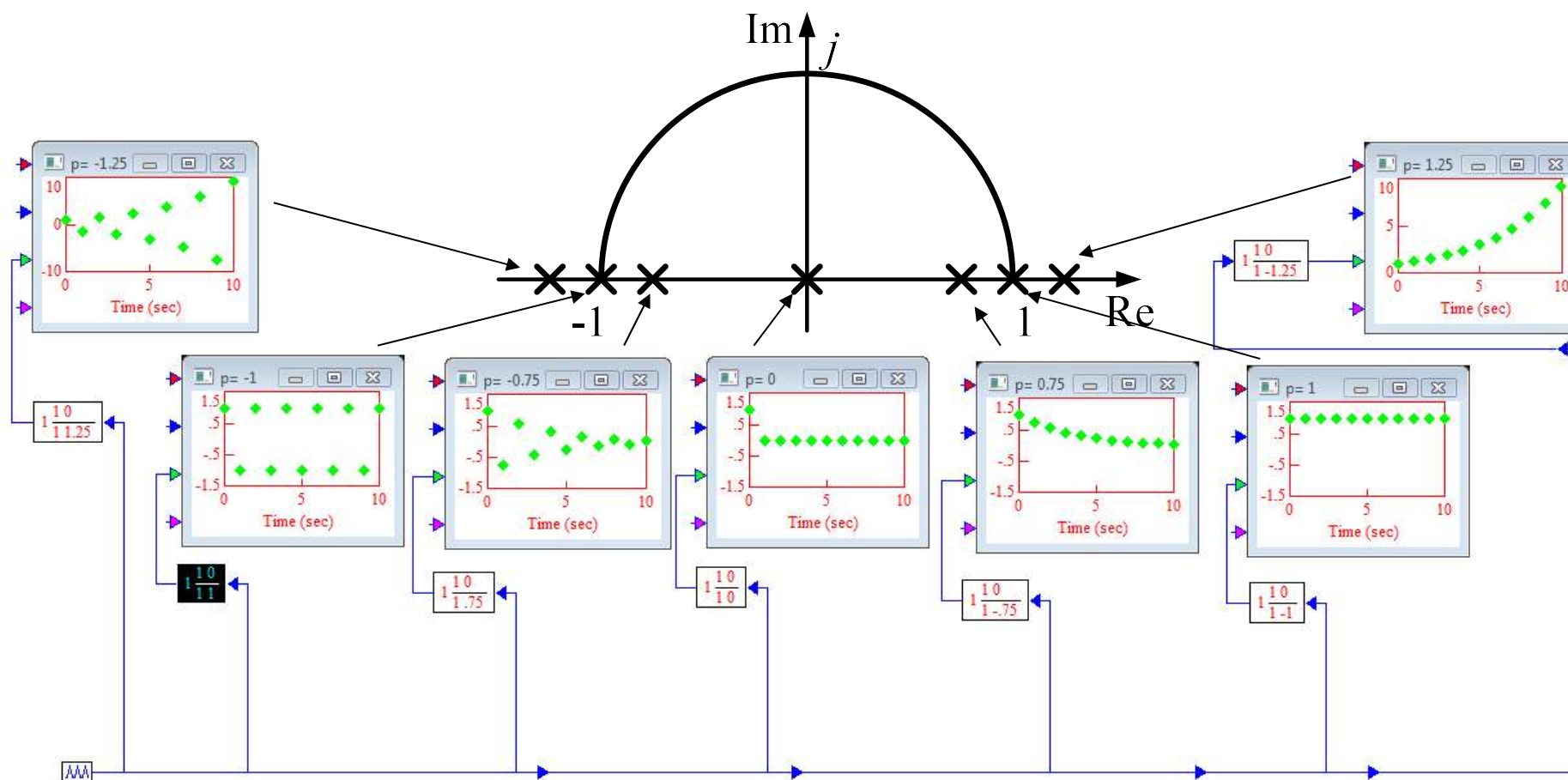


azaz ami stabil volt a diszkrétizálás előtt, az az is marad, (de a tranziens jellege változhat!)

ami instabil volt diszkrétizálás előtt az instabil is marad

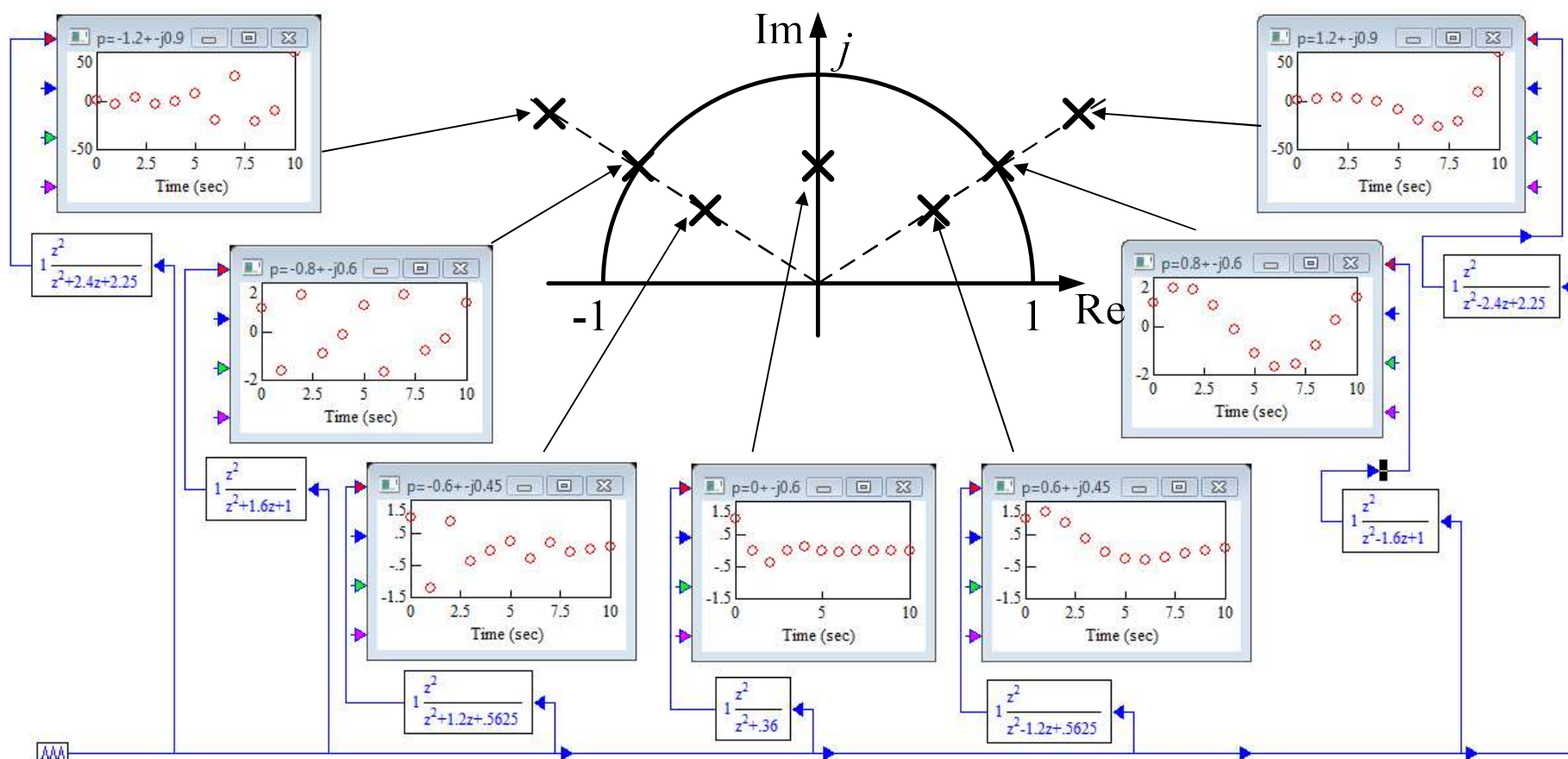
Diszkrét I/O modellek stabilitása

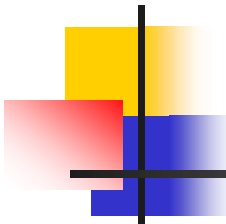
- Pólusok elhelyezkedésének hatása – valós pólusok



Diszkrét I/O modellek stabilitása

- Pólusok elhelyezkedésének hatása – komplex pólusok





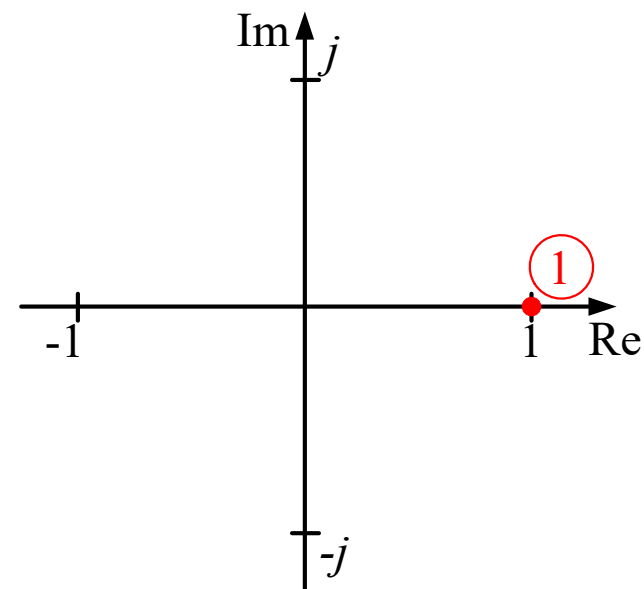
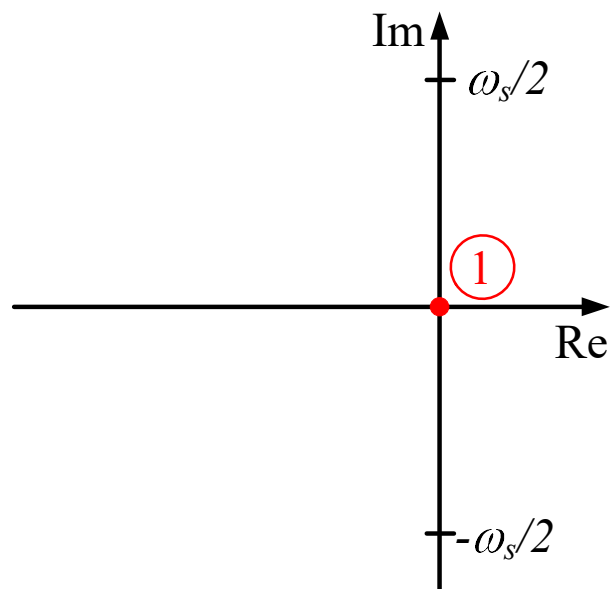
Diszkrét I/O modellek stabilitása

- A folytonos és a diszkrét rendszerek stabilitása közötti kapcsolat
 - definíció: $z = e^{sT_0}$
 - mintavételezési idő: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_s}$
 - komplex változó felbontása: $s = \sigma + j\omega$
 - definíció átírása: $z = e^{\frac{2\pi}{\omega_s}(\sigma + j\omega)}$

Diszkrét I/O modellek stabilitása

- 1. pont

$$s = 0$$

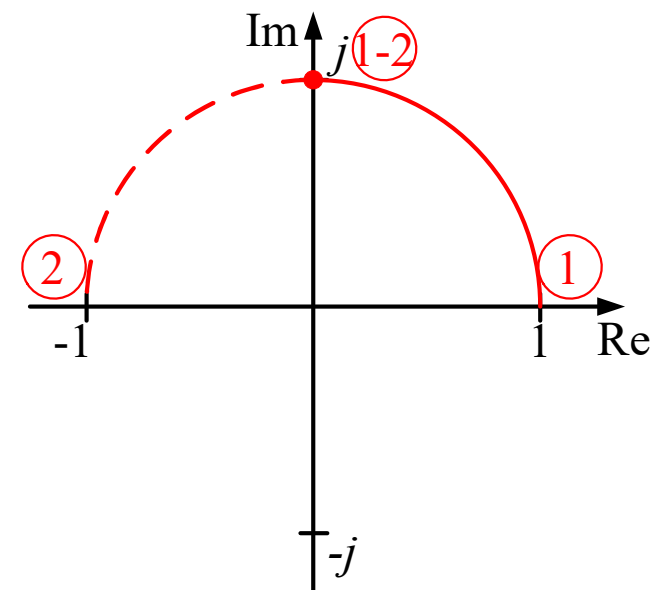
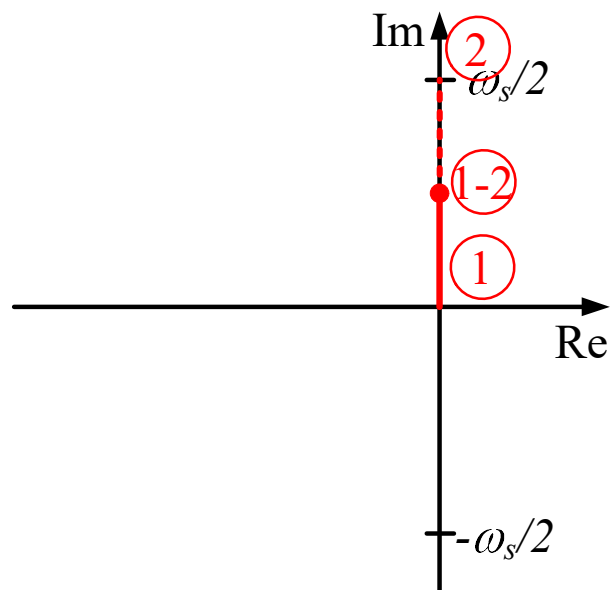


$$z = e^{\frac{2\pi}{\omega_s} \cdot 0} = 1$$

Diszkrét I/O modellek stabilitása

- 1.– 2. átmenet

$$s: 0 \rightarrow 0 + \frac{j\omega_s}{2}$$



$$\omega = \frac{1}{4} \omega_s$$

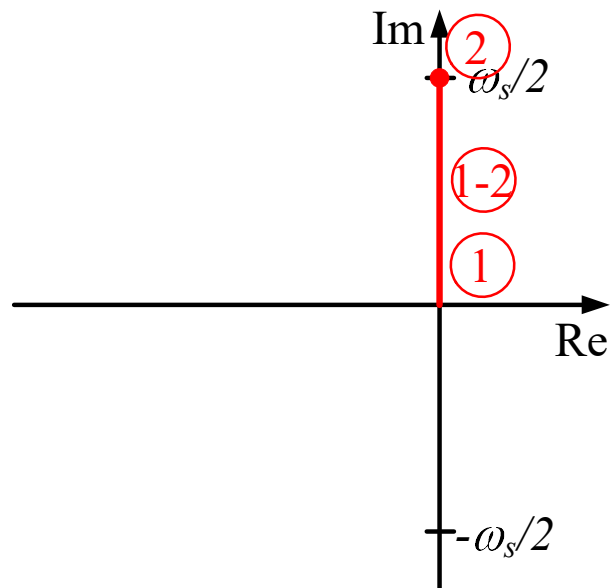
$$z = e^{\frac{2\pi \cdot j\omega_s}{4}} = \cos(2\pi/4) + j \sin(2\pi/4) = j$$

$$\cos(\pi/2) = 0 \quad \sin(\pi/2) = 1$$

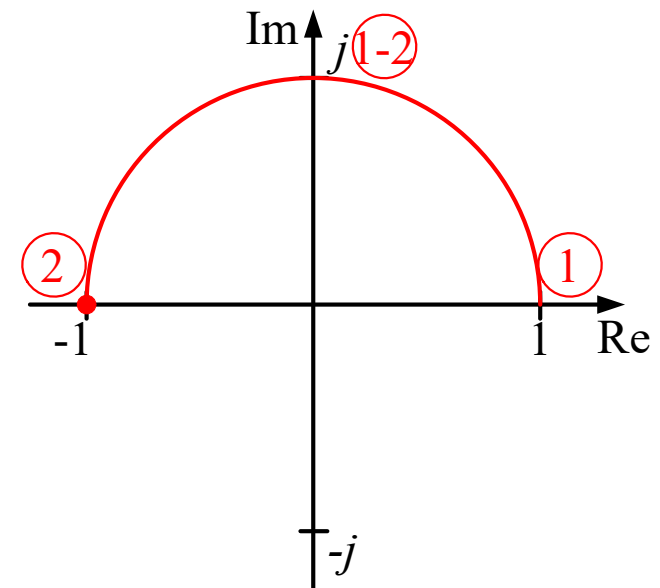
Diszkrét I/O modellek stabilitása

- 2. pont

$$s = 0 + \frac{j\omega_s}{2}$$



$$\omega = \frac{1}{2} \omega_s$$



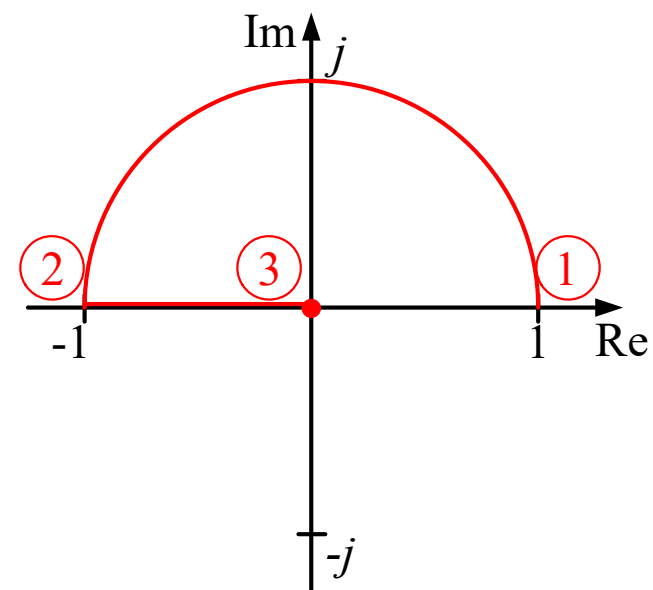
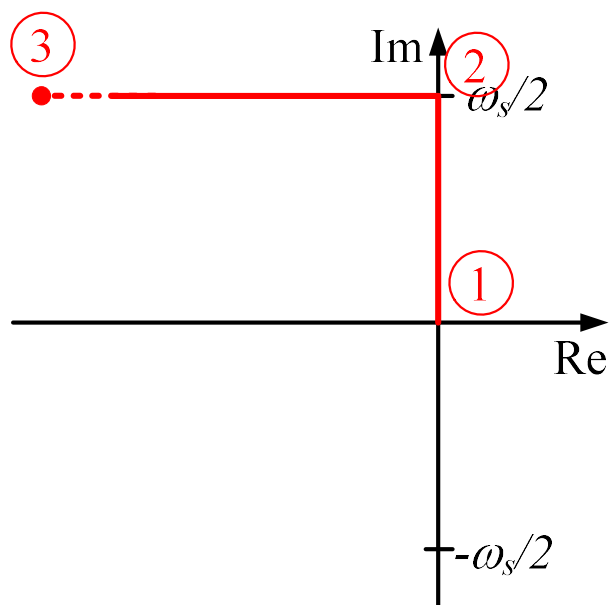
$$z = e^{\frac{2\pi}{\omega_s} \cdot \frac{j\omega_s}{2}} = \cos(2\pi/2) + j \sin(2\pi/2) = -1$$

$$\cos(\pi) = -1 \quad \sin(\pi) = 0$$

Diszkrét I/O modellek stabilitása

- 3. pont

$$s \rightarrow -\infty + \frac{j\omega_s}{2}$$



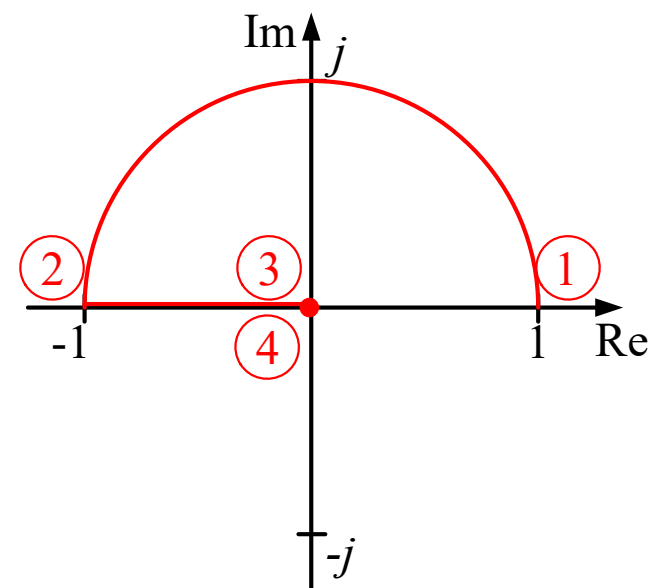
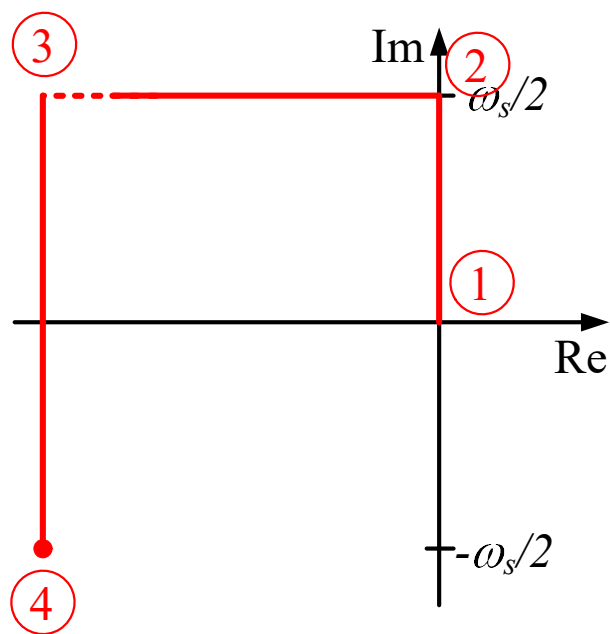
$$z = e^{\frac{2\pi}{\omega_s} \cdot \left(\sigma + \frac{j\omega_s}{2}\right)} = e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_s}} \cdot e^{\pi j} \Rightarrow 0$$

$$\sigma \rightarrow -\infty \Rightarrow e^x \rightarrow 0$$

Diszkrét I/O modellek stabilitása

- 4. pont

$$s \rightarrow -\infty - \frac{j\omega_s}{2}$$



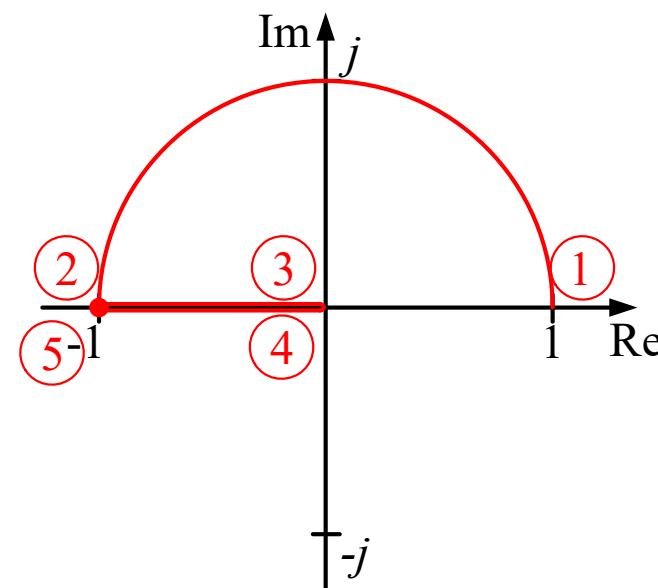
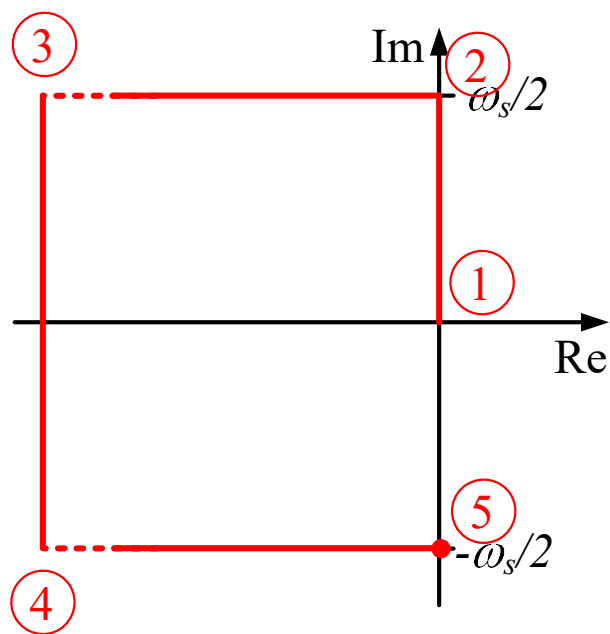
$$z = e^{\frac{2\pi}{\omega_s} \cdot \left(\sigma - \frac{j\omega_s}{2} \right)} = e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_s}} \cdot e^{-\pi j} \Rightarrow 0$$

$$\sigma \rightarrow -\infty \Rightarrow e^x \rightarrow 0$$

Diszkrét I/O modellek stabilitása

- 5. pont

$$s = 0 - \frac{j\omega_s}{2}$$

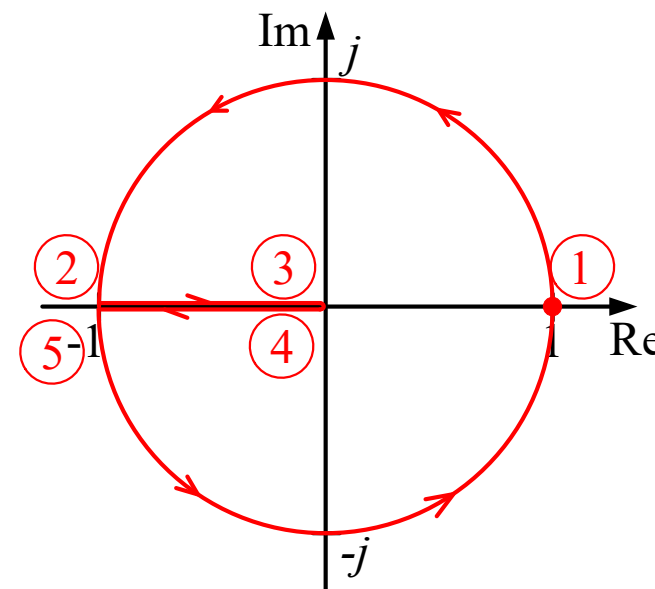
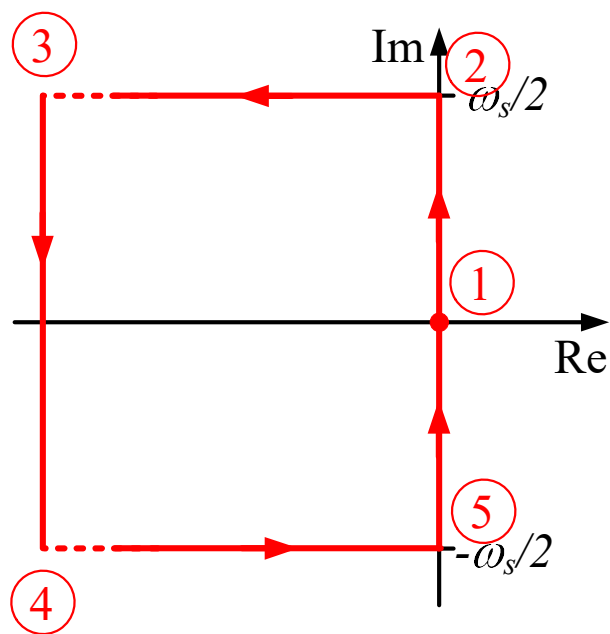


$$z = e^{\frac{2\pi - j\omega_s}{2}} = \cos(2\pi/2) - j \sin(2\pi/2) = -1$$

$$\cos(\pi) = -1 \quad \sin(\pi) = 0$$

Diszkrét I/O modellek stabilitása

- A stabilitási tartományok közötti összefüggés

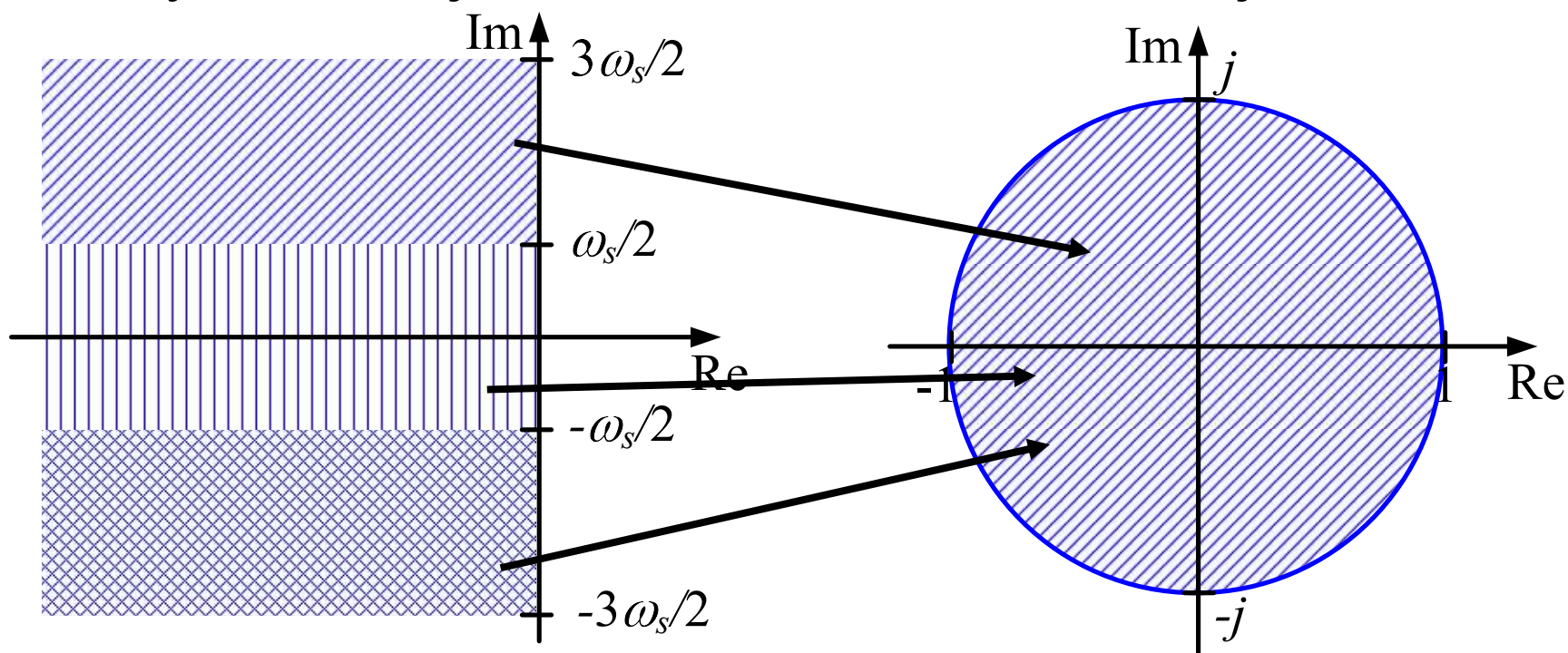


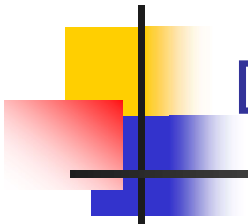
Diszkrét I/O modellek stabilitása

- Stabilitási tartományok összehasonlítása

folytonos idejű rendszer

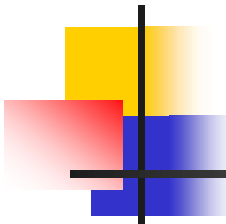
diszkrét idejű rendszer





Diszkrét I/O modellek stabilitása

- Stabilitásvizsgálati módszerek
 - Jury teszt
 - w -transzformáció



Diszkrét I/O modellek stabilitása

- Jury-teszt
 - legyen a példaként vizsgálandó rendszer eredő impulzus átviteli függvénye

$$G(z) = \frac{1}{a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

- a teszt a nevező a_i együtthatóinak vizsgálatán alapul

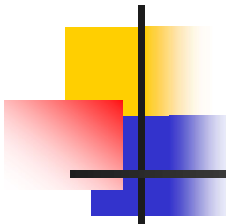
Diszkrét I/O modellek stabilitása

- a teszt menete

a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	
a'_4	a'_3	a'_2	a'_1	0	$\alpha_4 = \frac{a_0}{a_4}$
a'_1	a'_2	a'_3	a'_4		
a''_4	a''_3	a''_2	0		$\alpha_3 = \frac{a'_1}{a'_4}$
a''_2	a''_3	a''_4			
a'''_4	a'''_3	0			$\alpha_2 = \frac{a''_2}{a''_4}$
a'''_3	a'''_4				
a''''_4	0				$\alpha_1 = \frac{a'''_3}{a'''_4}$

$a'_i = a_i - \alpha_4 a_{4-i}$	$i = 4, 3, 2, 1, 0$
$a''_i = a'_i - \alpha_3 a'_{4-i+1}$	$i = 4, 3, 2, 1$
$a'''_i = a''_i - \alpha_2 a''_{4-i+2}$	$i = 4, 3, 2$
$a''''_i = a'''_i - \alpha_1 a'''_{4-i+3}$	$i = 4, 3$

a rendszer stabil, ha valamennyi bekeretezett érték pozitív



Diszkrét I/O modellek stabilitása

- w -teszt
 - bilineáris transzformáció:

$$z = \frac{w + 1}{w - 1}$$

- a transzformált átviteli függvényen Hurwitz-módszer alkalmazása