# *Modell Alapú Diagnosztika Diszkrét Módszerekkel*

## *Kvalitatív modellezés*

**Hangos Katalin**

PE Villamosmérnöki és Információs Rendszerek Tanszék

## Tartalomjegyzék

- **Intervallum aritmetika**
- **Konfluenciák**
  - konfluenciákból generált szabályrendszerek
- **Kvalitatív differenciálegyenletek**
  - származtatás a mérnöki modellekből
  - algebrai megoldás: jellemző eseménysorozatok (trace-ek)

*Intervallum aritmetika*

# Intervallum típusú érték-készletek

**Univerzum**: a változók és konstansok érték-készlete

- *Általános kvalitatív*: valós intervallumok fix vagy szabad végpontokkal

$$U_{\mathcal{I}} \;=\; \{[a_\ell, a_u] \mid a_\ell,\ a_u \in \mathcal{R},\ a_\ell \leq a_u\}$$

  és az alábbi **határpont halmazzal**

$$L_{\mathcal{I}} = \{a_i \mid a_i \leq a_{i+1}\ ,\ i \in I \subseteq \mathcal{N}\}$$

- ***Előjel***

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{S}} &= \{+\,,\,-\,,\,0\,;\,?\,\}\ ,\ ? = + \cup 0 \cup - \\ L_{\mathcal{S}} &= \{\,a_1 = -\infty\ ,\ a_2 = 0\ ,\ a_3 = \infty\} \end{aligned}$$

- *Logikai* (kiterjesztett)

$$U_{\mathcal{L}} \;=\; \{\,\mathbf{true}\ ,\ \mathbf{false}\ ;\ \mathbf{unknown}\,\}$$

# Intervallum algebra

Az **intervallum univerzum feletti algebra**

Műveletek: ***lehetőleg* a szokásos algebrai tulajdonságokkal** (Kommutativitás, associativitás, distributivitás **???**)

- intervallum összeadás ($\oplus_I$) és kivonás ($\ominus_I$)
- intervalum szorzás ($\otimes_I$) és osztás
- összetett műveletek és függvények

Az intervallum műveletek specifikációja (definiciója) **műveleti táblák** segítségével történik.

# Előjel összeadás - ismétlés

Műveleti tábla

| $a \oplus_S b$ | $+$ | $0$ | $-$ | ? |
|---|---|---|---|---|
| $+$ | $+$ | $+$ | **?** | ? |
| $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | ? |
| $-$ | **?** | $-$ | $-$ | ? |
| ? | ? | ? | ? | ? |

Tulajdonságok:

- **növekvő bizonytalanság**
- kommutatív

# Előjel szorzás - ismétlés

Műveleti tábla

| $a \otimes_S b$ | $+$ | $0$ | $-$ | ? |
|---|---|---|---|---|
| $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | ? |
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\mathbf{0}$ |
| $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | ? |
| ? | ? | $\mathbf{0}$ | ? | ? |

Tulajdonságok:

- **korrekció** a nulla operandusoknál
- kommutatív

# Intervallum műveletek – 1

*Fix végpontú* intervallumokra

- **Halmaz típusú definíció**: két intervallum $\mathcal{I}_1 = [a_{1\ell}, a_{1u}]$ és $\mathcal{I}_2 = [a_{2\ell}, a_{2u}]$ összege (vagy szorzata) az a legkisebb intervallum az $U_{\mathcal{I}}$ univerzumból, amely lefedi az alábbi intervallumot

$$\mathcal{I}^* = \{\ b = a_1 \ \mathbf{op}\ a_2 \mid a_1 \in \mathcal{I}_1\ ,\ a_2 \in \mathcal{I}_2\}$$

- **Végpont típusú definíció**: *monoton műveletekre* a fenti intervallum kiszámítható mint

$$\begin{aligned} E_{op} = \{\ & e_{\ell\ell} = a_{1\ell}\ \mathbf{op}\ a_{2\ell}\ ,\ e_{\ell u} = a_{1\ell}\ \mathbf{op}\ a_{2u}\ , \\ & e_{u\ell} = a_{1u}\ \mathbf{op}\ a_{2\ell}\ ,\ e_{uu} = a_{1u}\ \mathbf{op}\ a_{2u}\ \} \\ & \text{with} \quad \mathcal{I}^* \ = \ [\ min\ E_{op},\ max\ E_{op}\ ] \end{aligned}$$

  ahol $E_{op}$ a végpontokból képezhető.

## Intervallum műveletek – 2

A **szokatlan műveleti tulajdonságok** oka az, hogy az $\mathcal{I}^*$ intervallumot *le* ***kell fedni*** egy $U_{\mathcal{I}}$ univerzumbeli masik halmazzal.

- **növekvő bizonytalanság** minden műveletnél
- **distributivitás nem érvényes**: az eredmény függhet az algebrai formától
  *a minimális számú öszeadást tartalmazó változat a legjobb*

# Nagyságrendi intervallumok

**Univerzum**

- határpont halmaz:

$$L_{\mathcal{OM}} = \{\ a_1 = -\infty\ ,\ a_2 = -A\ ,\ a_3 = 0\ ,\ a_3 = A\ ,\ a_4 = \infty\}$$

- elemi (atomi) intervallumok:

$$LN = [-\infty, -A),\ \ SN = [-A, 0),\ \ 0 = [0, 0],\ \ SP = (0, A],\ \ LP = (A, \infty]$$

$$U_{\mathcal{OM}}\ =\ \{\ LN\ ,\ SN\ ,\ 0\ ,\ SP\ ,\ LP\ \}$$

Nem elemi (összetett) intervallumok és műveletek

- pszeudo-intervallumok: $[SP, LP] = (0, \infty]\quad or\quad [LN, LP] = [-\infty, \infty]$
- műveletek: $LP\ \oplus_{OM}\ LN\ =\ [LN, LP]$

## Nagyságrendi összeadás

A **nagyságrendi összeadás** műveleti táblája

| $a \oplus_{OM} b$ | $LN$ | $SN$ | $0$ | $SP$ | $LP$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $LN$ | $LN$ | $LN$ | $LN$ | $[LN, SN]$ | $[LN, LP]$ |
| $SN$ | $LN$ | $[LN, SN]$ | $SN$ | $[SN, SP]$ | $[SP, LP]$ |
| $0$ | $LN$ | $SN$ | $0$ | $SP$ | $LP$ |
| $SP$ | $[LN, SN]$ | $[SN, SP]$ | $SP$ | $[SP, LP]$ | $LP$ |
| $LP$ | $[LN, LP]$ | $[SP, LP]$ | $LP$ | $LP$ | $LP$ |

# Normalizált intervallumok

***Nem** fix végpontú* intervallumokra

**Kvalitatív érték-készlet** "normális" $N$ értékkel rendelkező változókra

$$\mathcal{Q} = \{H, N, L, 0\}, \;\; \mathcal{B} = \{0, 1\}, \;\; \mathcal{Q}_{\mathcal{E}} = \{H, N, L, 0, e+, e-\}$$

ahol *H*igh, *L*ow, *N*ormal, *e*rror.

A "normális" érték minden, egy adott egyenletben szereplő változóra "egyeztetve van", *az állandósult értékre centráljuk a változókat*

Például

$$[\hat{m}](k+1) = [m](k) + [v_{in}](k) - [v_{out}](k)$$

# Normalizált intervallumok összeadása

**Műveleti tábla**

| $[a]+[b]$ | $0$ | $L$ | $N$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $L$ | $N$ | $H$ |
| $L$ | $L$ | $N$ | $H$ | $e+$ |
| $N$ | $N$ | $H$ | $e+$ | $e+$ |
| $H$ | $H$ | $e+$ | $e+$ | $e+$ |

**Heurisztikus** definíció

Nincs lefedés $\Longrightarrow$ nincs növekvő bizonytalanság

## *Kvalitatív modellek*

## A kvalitatív modellek fogalma

**A változók és paraméterek intervalum érték-készletűek**

- *előjel érték-készletűek*
  - előjeles irányított gráf (SDG) modellek
  - Konfluenciák (előjeles kvalitatív differenciál-egyenletek)
- *intervallum érték-készletűek*
  - Kvalitatív differenciál-egyenletek (QDEs): megszorítás típusú, algebrai típusú

MI szempotból: a kvalitatív modellek **speciális tudás-ábrázolási formák** speciális következtetési módszerekkel

## A kvalitatív modellek származtatása

Mérnöki dinamikus modellek **állapottér modell formában**:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,u) \quad \text{(state eq.)} \\ y &= h(x,u) \quad \text{(output eq.)} \end{aligned}$$

A **kvalitatív modellek** levezethetők *szisztematikusan* a mérnöki modellekből

- intervallum értékű változók és paraméterek használatával
- az egyenletek egyszerűsítésével

*Konfluenciák*

## A konfluenciák származtatása

Kleer és Brown "Kvalitatív Fizika"-ja

**A nemlineáris állapottér modell egyenleteinek előjel értékű változata (tökételesen kevert mérlegelési tfogatokból álló dinamikus modellek)**

- ezekből *formálisan levezethetők*
- *előjel értékű változókat és műveleteket* használnak

A konfluenciákból **teljes és ellentmondás-mentes szabályrendszer vezethető le**

# A konfluenciák levezetése

1. **definiáljuk a** $[q]$ **kvalitatív változót és ennek** $\delta q$ **kvalitatív deriváltját minden egyes** $q(t)$ **modell-változóhoz a következőképpen**:

$$q \ \sim \ [q] = sign(q) \quad , \quad dq/dt \ \sim \ \delta q = sign(dq/dt)$$

2. a **műveleteket előjel műveletekkel helyettesítjük**, azaz

$$+ \ \sim \ \oplus_S \quad , \quad * \ \sim \ \otimes_S \quad etc.$$

3. **a paramétereket a** $+$ **vagy** $-$ **vagy** $0$ **értékekkel** (*előjel-konstansok*) helyettesítjük a konfluencia egyenletekben, így ezek látszólag eltűnnek az egyenletekből.

# A konfluenciák megoldása

A megoldást **általánosított igazságtábla** formájában adjuk meg (mint az előjel műveletek műveleti táblái)

- összegyűjtjük az összes *független (jobb-oldalon szereplő) változót* (időfüggő értékeik vannak!)
- felsoroljuk az összes lehetséges értékeiket
- szisztematikusan felsoroljuk a változók **összes lehetséges érték-kombinációit**
  $\Longrightarrow$ exponenciálisan növekvő méret a változók számában

## Szabályok generálása konfluenciákból

A **konfluencia igazság-táblájának sorai szabályokként értelmezheők** ha azokat jobbról balra olvassuk.

Például

$$\delta h = [\eta_I] \ominus_S [\eta_O]$$

az $\eta_I = 0$, $\eta_I = +$ érték-kombinációval $\delta h = -$-t eredményez

$$\Longrightarrow$$

$$\textbf{if} \;\; (\eta_I = \textbf{closed}) \textbf{ and } (\eta_O = \textbf{open}) \;\; \textbf{then} \;\; (h = \textbf{decreasing})$$

**Egy konfluencia igazság-táblájából így egy szabályrendszer állítható elő, amely teljes és ellentmondás-mentes** a konstrukciója miatt.

## Egyszerű példa – 1

Modell egyenlet: a kávéfőző tömegmérleg egyenlete

$$\frac{dh}{dt} = \frac{v}{A}\eta_I - \frac{v}{A}\eta_O$$

1. **kvalitatív változók**: $[\eta_I] \in \{0, +\} \quad , \quad [\eta_O] \in \{0, +\}$
2. valamennyi **előjel-constans** "$+$"
3. a kapott **konfluencia**

$$\delta h = [\eta_I] \ominus_S [\eta_O]$$

## Egyszerű példa – 2

### A **konfluencia igazság-táblája**

$$\delta h = [\eta_I] \ominus_S [\eta_O]$$

| $\delta h$ | $[\eta_I]$ | $[\eta_O]$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ |
| $-$ | $0$ | $+$ |
| $+$ | $+$ | $0$ |
| ? | $+$ | $+$ |

*Kvalitatív differenciál-egyenletek:*

*Algebrai megoldás*

## A diszkrét idejű kvalitatív differenciál-algebrai egyenletek (DAE) származtatása

A megmaradási elvekből levezetett mérnöki dinamikus modellek: folytonos idejű differenciál- és algebrai egyenletekből állnak

- a differenciál-egyenletek a dinamikus mérlegegyenletekből származnak: ezeket ***differencia-egyenletekké kell alakítani*** (időbeli diszkretizálással)
- a változóknak és paramétereknek ***kvalitatív érték-készletet*** (univerzum) kell választani
- le kell vezetni az egyenletek kvalitatív formáját

## Kvalitatív jelek

**Kvalitatív érték-készlet** "normális" $N$ értékkel rendelkező változókra

$$\mathcal{Q} = \{H, N, L, 0\}, \;\; \mathcal{B} = \{0, 1\}, \;\; \mathcal{Q}_{\mathcal{E}} = \{H, N, L, 0, e+, e-\}$$

ahol *H*igh, *L*ow, *N*ormal, *e*rror.

Egy **kvalitatív jel** egy olyan jel (bemenet, kimenet, állapot vagy ***zavarás (fault indicator!)***) amely értékeit minden időpillanatban egy véges kvalitatív érték-készletből veszi.

Egy **esemény** következik be, ha egy kvalitatív jel értéke megváltozik. Egy $e_X$ eseményt formálisan a $e_X(t, q_X) = (t, [x](t) = q_X)$ párral jellemezhetünk, ahol $t$ az az időpillanat, mikor az $[x]$ kvaltatív jel felveszi a $q_X$ értéket.

## Jel-nyomok – esemény-sorozatok

Egy $[x]$ kvalitatív jel **jel-nyoma (signal trace)** egy esemény-sorozat

$$\mathcal{T}_{(x)}(t_0, t_F) = \{(t_0, [x](t_0) = q_{x0}), (t_1, [x](t_1)] = q_{x1}), ..., (t_F, [x](t_F) =$$

a $(t_0, t_F)$ időintervallumon, ahol $q_* \in \mathcal{Q}_x$

Több jelnek együttesen is lehet jel-nyoma, például $\mathcal{T}_{(u,d,y)}(t_0, t_F)$

Diagnosztikai célra definiálhatunk

- nominális (normális viselkedést leíró) jel-nyomokat
- karakterisztikus (jellemző) jel-nyomokat (valamilyen adott meghibasodásra)

## Kvalitatív DAE-k megoldása

Megadása **megoldás-táblával** történik
(hasonlóan a konfluenciák igazság-táblájához)

- összegyűjtjük valamennyi *független (az egyenlet jobboldalán lévő) változót* (időben változó értékűek!)
- felsoroljuk mindegyikhez az ő összes karakterisztikus jel-nyomait
- szisztematikusan felsoroljuk az **összes lehetséges jel-nyom kombinációt**
  $\Longrightarrow$ exponenciálisan növekszik a táblázat mérete a változók számával és a jel-nyomok hosszával is!

# Statikus példa: érzékelő additív hibával

**Algebrai modell egyenlet**: $v^m = v + \chi \cdot E$

$[v] \in \mathcal{Q}$, $[v]^m \in \mathcal{Q}_e$, $\chi \in B_{-1} = \{-1, 0, 1\}$

| $[v^m]$ | $[\chi]$ | $[v]$ | mode |
|---|---|---|---|
| $N$ | 0 | $N$ | normal |
| $H$ | 0 | $H$ | normal |
| $L$ | 0 | $L$ | normal |
| $0$ | 0 | $0$ | normal |
| $e+$ | 1 | $H$ | faulty |
| $H$ | 1 | $N$ | faulty |
| $N$ | 1 | $L$ | faulty |
| $L$ | 1 | $0$ | faulty |
| $N$ | -1 | $H$ | faulty |
| $L$ | -1 | $N$ | faulty |
| $0$ | -1 | $L$ | faulty |
| $e-$ | -1 | $0$ | faulty |

## Dinamikus példa: a kávéfőző tömegmérlege

**A differencia-egyenlet**: $h^T = h + \chi_I \cdot v - \chi_O \cdot v$

$[h], [h]^T \in \mathcal{Q}_e, \chi_I, \chi_O \in \mathcal{B}$

Megoldás-tábla **azonosan konstans** inputokra

| $[h]^T$ | $[h](t_0)$ | $\chi_I$ | $\chi_O$ |
|---|---|---|---|
| $(N, N, N)$ | $N$ | (1,1,1) | (1,1,1) |
| $(L, L, L)$ | $L$ | (1,1,1) | (1,1,1) |
| ... | ... | ... | ... |
| $(N, N, N)$ | $N$ | (0,0,0) | (0,0,0) |
| ... | ... | ... | ... |
| $(e+, e+, H)$ | $N$ | (1,1,1) | (0,0,0) |
| $(e+, H, N)$ | $L$ | (1,1,1) | (0,0,0) |
| ... | ... | ... | ... |
| $(e-, 0, L)$ | $N$ | (0,0,0) | (1,1,1) |
| $(e-, e-, 0)$ | $L$ | (0,0,0) | (1,1,1) |
| ... | ... | ... | ... |