DINAMIKUS MODELLEK PARAMÉTEREINEK BECSLÉSE

Vizsgatételek

1. Tekintsük a következő modell-struktúrát

$$\hat{y}(k \mid \theta) = -ay(k-1) + bu(k-1)$$

és tegyük fel, hogy a valódi rendszer a következőképpen működik:

$$y(k) - 0.9y(k-1) = u(k-1) + e_0(k)$$

ahol $\{e_0(k)\}$ egységnyi szórásnégyzetű fehér zaj folyamat.

Határozzuk meg a és b paraméter becslésének Cramer-Rao korlátját! Hogyan függ a korlát a bemenet (u) tulajdonságaitól?

2. Írjunk Matlab-eljárást, amely az alábbi holtidő nélküli ARX modell IV (segédváltozós) paraméterbecslését végzi el:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_{na} y(k-na) = b_0 u(k) + \ldots + b_{nb-1} u(k-nb+1) + e(k)$$

Az eljárás bemenő paraméterei a következők legyenek:

y: mért output

u: mért input

na, nb

N,M: az IV-módszer lineáris szűrőinek paraméterei (együtthatók vektorban)

A visszaadott érték pedig legyen a becsült paramétervektor.

3. Szimuláljuk számítógéppel a következő rendszer működését:

$$y(k)=\frac{q^{-1}+0.5q^{-2}}{1-1.5q^{-1}+0.7q^{-2}}u(k)+e_0(k)$$

N mintavételen keresztül úgy, hogy u értéke véletlenszerűen 50-50%-os valószínűséggel legyen -1 vagy +1, e_0 pedig Gauss-eloszlású fehér zaj legyen, melynek szórásnégyzete 1!

Végezzük el a szimulációs adatokból különböző rendű (na, nb különböző) ARX modellstruktúrák (ld. a 2. feladatot) paramétereinek legkisebb négyzetes becslését (legalább 4 db), és rajzoljuk fel a becsült modellek diszkrét Bode-diagramját. Hasonlítsuk össze a diagramokat egymással és a szimulált (eredeti) rendszer Bode-diagramjával. Miért lesz nagyobb a hasonlóság a paraméterek számának (modell rendjének) növekedésével?

4. Szimuláljuk számítógéppel az alábbi rendszer működését (100 mintavételen keresztül):

$$y(k)-0.9y(k-1)=u(k-1)+0.5u(k-2)+e_0(k)$$

úgy, hogy *u* értéke véletlenszerűen 50-50%-os valószínűséggel legyen -1 vagy +1, e_0 pedig Gauss-eloszlású fehér zaj legyen, melynek szórásnégyzete 1!

Tekintsük a következő két modell-struktúrát:

a) $y(k)+ay(k-1)=u(k-1)+bu(k-2)+e(k)$

b) $y(k)=\dfrac{q^{-1}+bq^{-2}}{1+fq^{-1}}u(k)+e(k)$

Alkalmazzuk a négyzetes predikciós hibakritériumfüggvényt az a) és b) modellstruktúrákra, és ábrázoljuk a kritériumfüggvényt (a, b) illetve (f, b) függvényében.

5. Állítsa elő az alábbi 2-bemenetű 2-kimenetű rendszer (3.25) szerinti prediktív modell alakját:

$$y_1(k) = b_{11}u_1(k) + b_{12}u_2(k) + e_1(k)$$
$$y_2(k) = b_{12}u_1(k) + b_{22}u_2(k) + e_2(k)$$

ahol $\{e_1(k)\}$ és $\{e_2(k)\}$ ismert szórásnégyzetű, egymástól független fehér zaj folyamatok.

Hogyan (módszer, bemeneti sorozat, becslési formula) becsülné meg a modell paramétereit? Milyenek lesznek a becslés elméleti (aszimptotikus) tulajdonságai?

6. Adott az alábbi egybemenetű-egykimenetű modellstruktúra:

$$y(k) = a\ y(k-1) + b\ u(k) + e(k) + c\ e(k-1)$$

Hogyan (módszer, bemeneti sorozat, becslési formula) becsülné meg a modell paramétereit, ha

- ismert az $\{e(k)\}$ fehérzaj folyamat σ szórása és a $c < 1$ modellparaméter?
- ismert a σ szórás, de a $c < 1$ modellparaméter nem?

Milyenek lesznek a becslések elméleti (aszimptotikus) tulajdonságai?

7. Adott az alábbi egybemenetű-egykimenetű modellstruktúra:

$$y(k) = a\ y(k-1) + b\ u(k) + e(k) + c\ e(k-1)$$

ahol {e(k)} fehérzaj folyamat. Erre a rendszerre a modell paramétereinek becslése céljából az

$u(k)=e^*(k)$

fehérzaj folyamat bemenetet adjuk.

Számítsa ki az LKN becslés aszimptotikus tulajdonságainak vizsgálatához szükséges (3.15) és (3.16) egyenletekben szereplő mennyiségeket! Aszimptotikusan torzítatlan lesz-e a becslés az általános (minden lehetséges modellparaméter ismeretlen) esetben? Miért? Milyen feltételek mellett lesz a becslés mégis aszimptotikusan torzítatlan?

8. Legyen adott az alábbi modellstruktúra

$y(k) = a\ y(k\text{-}1) + e(k)$

ahol $\{e(k)\}$ normális eloszlású, nulla várható értékű σ szórású fehérzaj folyamat.

Tegyük fel, hogy az a paraméterre vonatkozó a priori becslésünk az, hogy a paraméter a_0 várható értékű σ_a szórású normális eloszlású valószínűségi változó.

Írja fel a rendszer Bayes féle modelljét, majd ezt felhasználva az (5.17) paraméterbecslő formulát a $k=1,2$ esetekre! Hasonlítsa össze ezt a becslést a LKN elvű becsléssel!

9. Adott az alábbi nemlineáris egybemenetű-egykimenetű rendszermodell struktúra:

$$\hat{y}(k) = a\, e^{-\frac{b}{u(k)}}$$

Hogyan (módszer lépések, bemeneti sorozat, becsléshez szükséges formulák) becsülné meg ennek paramétereit

- a gradiens módszerrel?
- linearizálást (!!) követő paraméterbecsléssel?

Milyenek a fenti paraméterbecslés elméleti tulajdonságai?

10. Adott a következő diszkrét idejű egybemenetű-egykimenetű rendszermodell

$$y(k+1) = \sin(a)\, y(k) + u(k) + e(k)$$

ahol u-t és y-t mérjük (utóbbit mérési hibával) és az a paraméter értékét szeretnénk megbecsülni.

Irjunk olyan MATLAB függvényt, amely rekurzív gradiens módszerrel végzi a becslést. Hogyan változik a becsült paraméter érték sorozat, ha különböző kezdőértékeket adunk a becslésnek? Próbálja ki becslő függvényét szimulált adatokkal és különböző kezdőértékekkel!

Hasonlítsa össze a rekurzív becslést a LKN módszerrel történt becsléssel!

11. Adott a következő diszkrét idejű egybemenetű-egykimenetű rendszermodell

$$y(k+1) = a_1\, y(k) + b_0\, u(k) + b_1\, u(k-1) + e(k)$$

ahol u-t és y-t mérjük (utóbbit mérési hibával) és a paraméterek értékét szeretnénk megbecsülni az alábbi két esetben:

- $e(k)$ fehérzaj folyamat,
- $e(k)$ színeszaj folyamat.

Irjunk olyan MATLAB függvényt, amely a segédváltozók módszerével végzi a becslést. Hogyan változik a becsült paraméter érték sorozat, ha különböző kezdőértékeket adunk a becslésnek? Próbálja ki becslő függvényét szimulált adatokkal és különböző kezdőértékekkel!

12. Adott a következő diszkrét idejű több bemenetű-egykimenetű rendszermodell az $u = [u_1\ u_2]^T$ bemenet vektorral:

$$y(k+1) = a_1\, y(k) + B_0\, u(k) + B_1\, u(k-1) + e(k)$$

- ahol u-t és y-t mérjük (utóbbit mérési hibával) és $e(k)$ fehérzaj folyamat.

Irja fel a fenti modell (3.25) szerinti prediktív alakját és készítsen MATLAB függvényt, amely a LKN módszerrel végzi a becslést. Próbálja ki becslő függvényét szimulált adatokkal az $e(k)$ fehérzaj folyamat különböző realizációival! Változtassa a felhasznált mérési adatok számát!

Milyenek a fenti paraméterbecslés elméleti tulajdonságai?

13. Adott egy diszkrét idejű SISO rendszer paraméteres input-output modellje a következő formában:

$$y(k+1)= \boldsymbol{a}y(k) + u(k) + e(k)$$

Tudjuk, hogy az *"**a**"* paraméter értéke a mérés során fokozatosan változott. Milyen módszert érdemes alkalmazni a paraméter változásának hatékony becslésére?

Végezzen MATLAB szimulációt 1000 input-output adatpárra úgy, hogy közben az ***"a"*** értéke lineárisan 0.2-ről 0.8-ra nőjön! Írjon olyan MATLAB eljárást, amely elvégzi a paraméterbecslést!

14. Tekintsük az alábbi paraméteres input-output modellt:

$$y(k) = a\, y(k-1) + b\, u(k) + e(k) + c\, e(k-1) \quad , \quad c<1$$

ahol $e(k)$ nulla várható értékű, ismert szórású fehérzaj-folyamat.

Hogyan (módszer, bemeneti sorozat, becslési formula) becsülné meg a modell paramétereit, ha $c=0$, illetve ha c nem egyenlő nullával?
Milyenek lesznek a becslések elméleti (aszimptotikus) tulajdonságai?

Írjon olyan MATLAB függvényt, amely a $c=0$ esetben elvégzi a paraméterbecslést!

15. Szimulálja a következő rendszer működését 1000 mérésen keresztül:

$$y(k+1) = p_1\ y(k) + \ p_2\ u_1(k) + e(k)$$

ahol $e(k)$ ismert szórású Gauss eloszlású fehérzaj-folyamat, p_1 és p_2 konstansok.

Írjon olyan MATLAB eljárást, amely csak az utolsó K darab mérés eredményét veszi figyelembe a p_1 és p_2 becsléséhez!

Hogyan befolyásolná K nagysága a becslést, ha p_1 és p_2 lassan változó paraméterek lennének?

16. Adott egy diszkrét idejű SISO rendszer paraméteres input-output modellje a következő formában:

$$y(k+1) = p\ y(k) + \ u(k) + e(k)$$

ahol a p paraméter értéke fokozatosan megváltozott.

Végezzen MATLAB szimulációt 1000 input-output adatpár segítségével úgy, hogy p értéke közben 1-ről 0-ra csökkenjen, és u értéke 50-50%-os valószínűséggel legyen +1 illetve -1 !

Írjon két olyan MATLAB eljárást, amelyek alkalmasak a p paraméter becslésére, és hasonlítsa össze a működésüket!

17. Tekintsük az alábbi paraméteres input-output modellt:

$$y(k) = a\, y(k-1) + b\, u(k) + e(k) + c\, e(k-1) \quad , \quad c<1$$

ahol $e(k)$ ismert szórású Gauss eloszlású fehérzaj-folyamat.

Hogyan (módszer, bemeneti sorozat, becslési formula) becsülné meg a modell paramétereit, ha $c=0$, illetve ha c nem egyenlő nullával?

Írjon olyan MATLAB függvényt, amely a c nem egyenlő nulla esetben elvégzi a paraméterbecslést!

18. Adott egy diszkrét idejű SISO rendszer paraméteres input-output modellje a következő formában:

$$y(k+1) + a\, y(k) = b\, u(k)$$

ahol a és b ismeretlen modellparaméterek, $u(k)$ pedig PRBS vizsgálójel. Írja fel a fenti modell maximum likelihood függvényét!

Végezzen MATLAB szimulációt 100 input-output adatpárra, megadott a és b paraméterek segítségével!

Írjon olyan MATLAB eljárást, amely ML módszerrel becsüli meg az a és b paraméterek értékét!