

Dinamikus rendszerek paramétereinek becslése
A paraméterbecslés gyakorlati kivitelezése

Hangos Katalin

MTA SzTAKI, Folyamatirányítási Kutató Csoport
PE Számítástudomány Alkalmazása Tanszék

Témakörök

1. A mért adatok előkészítése és előszűrése
 - az adatok vizuális áttekintése
 - trendfigyelés, állandósult állapot figyelése
 - szórás és korrelációk
 - kiugró értékek
2. Kísérlettervezés
 - mintavételezési idő megválasztása
 - mintaelemszám megválasztása
 - elegendő gerjesztés biztosítása, tesztjelek
3. A paraméterbecslés minőségének jellemzése
 - predikciós hiba (reziduál) vizsgálata
 - a paraméterek kovariancia mártixa

Alapelv

A mért adatok előkészítésével és előszűrésével kapcsolatos **általános szabály**, hogy a nem megfelelő minőségű adatsorozatot általában célszerűbb eldobni, és megismételni a paraméterbecslésre szánt adatok gyűjtését javított körülmények között, mint a "javításukkal" kísérletezni.

A MÉRT ADATOK ELŐKÉSZÍTÉSE ÉS ELLENŐRZÉSE

Az adatok áttekintése

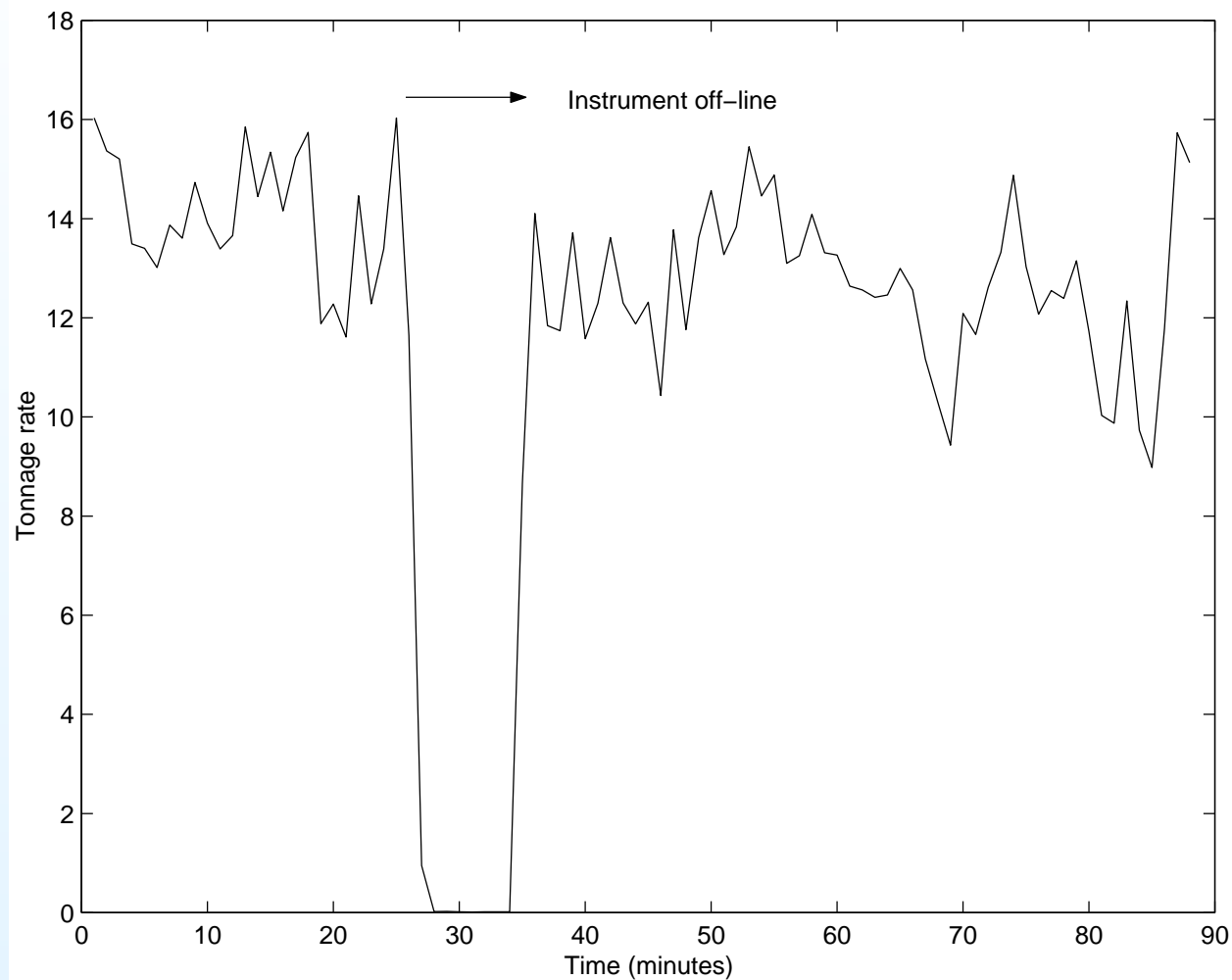
Az **adat áttekintési módszerek**-kel az alábbi "elváltozásokat" ismerhetjük fel:

- trendek,
- kiugró értékek,
- durva hibák.

A **vizuális áttekintés**hez ábrázoljuk a mért adatokat

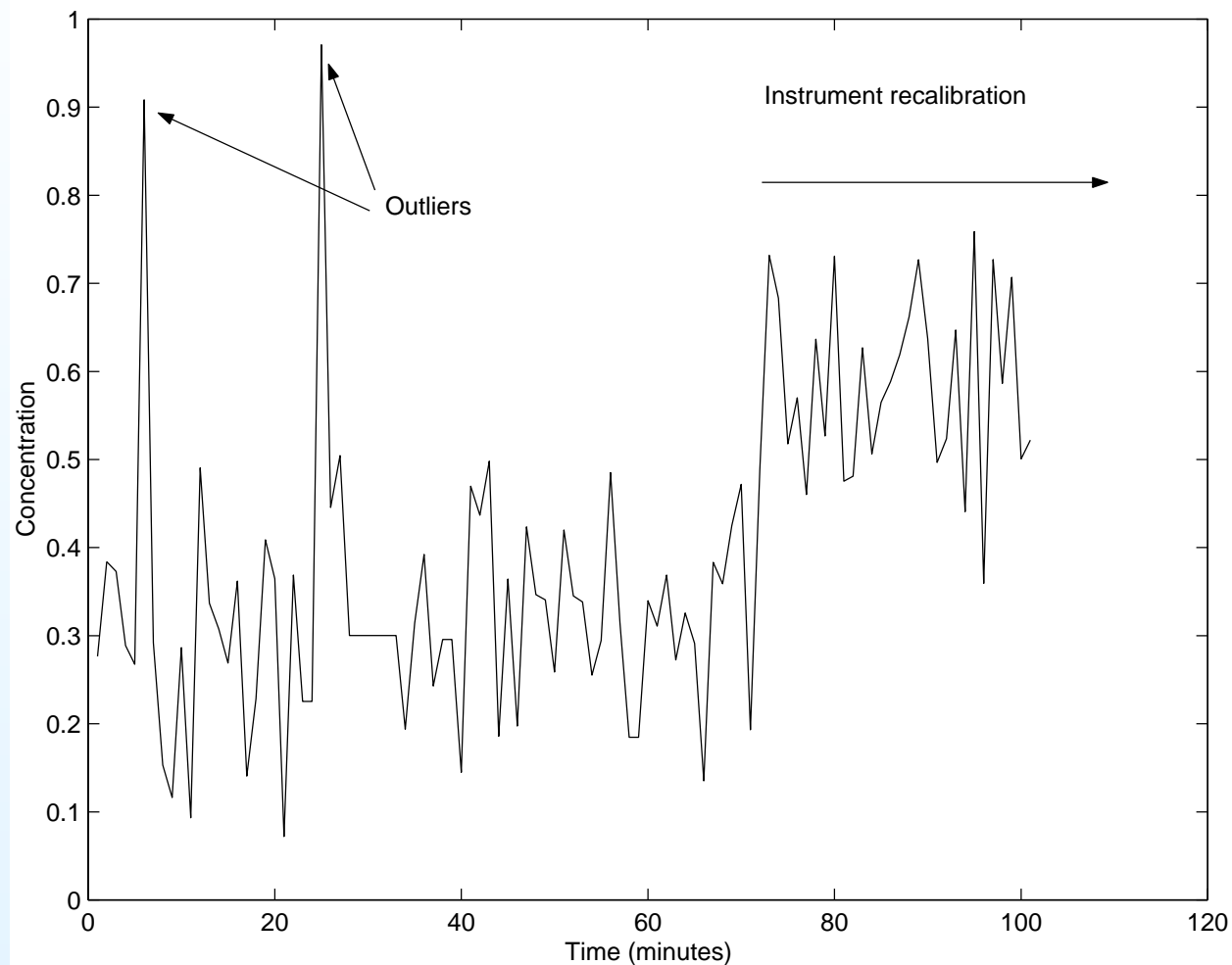
1. a mérési idő függvényében (idősorozatok),
2. egymás függvényében.

Az adatok vizuális áttekintése 1.



Adatsor durva hibával

Az adatok vizuális áttekintése 2.



Adatsor kiugró értékekkel és durva hibával

A mért adatok áttekintése 1.

Trendfigyelés, állandósult állapot figyelése

A mért adatokban megfigyelhető trendek okai:

1. mérőműszerek meghibásodása, amelyet igen lassú, egyirányú változás, úgynevezett "drift" jelezhet,
2. lassú, nem modellezett folyamat (például vízkövesedés, öregedés stb.), amely szintén leggyakrabban "drift" formájában látható,
3. lassú, általában periodikus zavarás szezonális, heti vagy napi rendszeres ingadozás (pl. hőmérsékletingadozás, műszakváltás hatása, hétvége, éjszakai műszak mássága) következtében.

A mért adatok áttekintése 2.

A trendek és állandósult állapotok detektálása:

1. *egyenes illesztése az adatokra* (egyirányú trend esetén),
2. standard *hipotézisvizsgálat az eloszlásra* (normalitásvizsgálat) ismert független, azonos eloszlású mérési hibák esetén,
3. *CUSUM módszer*: mintamintaközép rekurzívan

$$s[k] = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k d(i) = \frac{1}{k} ((k-1)s[k-1] + d(k))$$

A számított $s[k]$ értékeket a k idő függvényében ábrázoljuk és trendet figyelünk. Az $s[k]$ statisztika szórása csökken a mintaelemszám növekedésével.

A mért adatok áttekintése 3.

Szórás és korrelációk: csak trend nélküli adatmintákra!

A mért $D[1, k] = D^k$ mintabeli két $d_i(r)$ és $d_j(s)$ adatelem (mint skalárértékű valószínűségi változó) korrelációja (a kovariancia normalizálásával):

$$\rho\{d_i(r), d_j(s)\} = \frac{E\{(d_i(r) - E\{d_i(r)\})(d_j(s) - E\{d_j(s)\})\}}{\sqrt{\sigma^2\{d_i(r)\}\sigma^2\{d_j(s)\}}}$$

ahol $\sigma^2\{d_i(r)\}$ és $\sigma^2\{d_j(s)\}$ a két adatelem szórásnégyzete.

$$0 \leq \rho\{d_i(k), d_j(s)\} \leq 1$$

A becslésben az E várható érték operátort minden előfordulása helyett mintaközéppel helyettesítjük:

$$\bar{d} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k d(i)$$

Kiugró értékek

Normális eloszlású valószínűségi változóból vett minták nem nulla (igen kis) valószínűséggel elvben bármilyen nagy és bármilyen kicsi értéket felvehetnek.

Ezért **gyakorlati szempontból** kiugró értéknek tekinthetünk egy mért adatot, ha annak relatíve nagysága, azaz $\|d(i) - \bar{d}\|$ a mintaközepet \bar{d} -vel jelölve és az eltérést egy alkalmas $\|\cdot\|$ vektornormában mérve, **sokkal** nagyobb, mint a mérési hibák szórása.

Meghatározása:

- az adatok egyszerű vizuális áttekintésével
- a mintaelemek normalitásvizsgálata χ^2 próbával

KÍSÉRLETTERVEZÉS

Kísérlettervezés 1.

Célja: a paraméterbecslés szempontjából optimális bemenet meghatározása

- aszimptotikus torzítatlanság
- minimális szórás, korrelálatlanság

A mintavételezési idő megválasztása

Arra törekszünk, hogy

- elegendően gyors mintavételezést biztosítsunk elegendően hosszú ideig,
- a rendszer valamennyi jellegzetes és modellezni kívánt időállandójára (valamennyi pólusának megfelelő karakterisztikus idejére) tartalmazzon információt a mért minta.

Mintavételezési idő megválasztása

A fentiek alapján

- a mintavételezési időt úgy célszerű megválasztani, hogy az a leggyorsabb (legkisebb) karakterisztikus időnek legalább az egynegyede,
- a mérési idő hosszát, azaz a mintaelemszám és a mintavételezési idő szorzatát pedig úgy, hogy az a leglassúbb időállandójának legalább a négyszerese legyen.

Kísérlettervezés 2.

A mintaelemszám megválasztása

A paraméterbecsléshez szükséges mérések száma függ

- az egy mérési sorozatban (mintában) lévő mérések k_P számától
- az adott teszt input-sorozat ismétléseinek k_R számától

A mintaelemek számának sokkal nagyobbnak kell lennie, mint a rendszer rendje, illetve a becsülni kívánt paraméterek száma.

Kísérlettervezés 3.

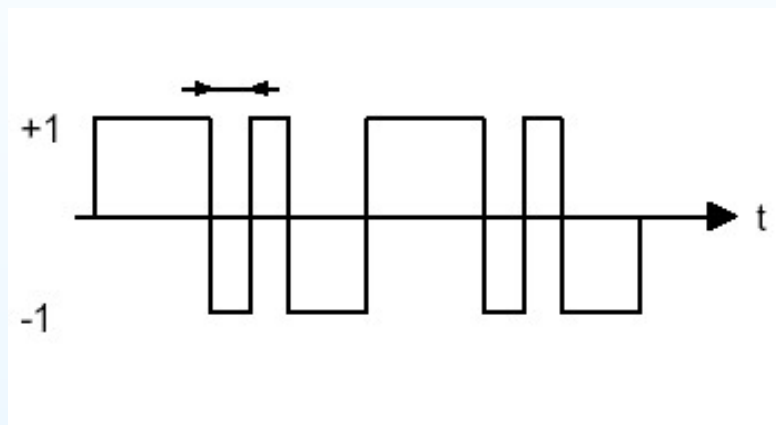
Elegendő gerjesztés biztosítása, tesztlelek

Szemponatok:

- *megfelelő "jel/zaj viszony"*
Ezért majdnem minden esetben valamilyen alkalmas tesztlelek-sorozatot adunk additíven a rendszer "szokásos" bemenetéhez, hogy a kellő és elegendő gerjesztést biztosítsuk
- *aszimptotikus torzítatlanság*
A bemenetek legyenek függetlenek a rendszert ért egyéb zajoktól és zavarásoktól, valamint, hogy önmagában a bemenet fehérzaj, vagy legalább közelítőleg fehérzaj legyen.

A PRBS vizsgálójel

Csak két különböző, általunk előre meghatározott értéket vesz fel, amelyek között véletlenszerűen megválasztott időpillanatokban ugrál.



A veszteségfüggvény és szintvonalai

A PRBS vizsgálójelet paraméterbecslési célra egy adott rendszerhez úgy kell megválasztani, hogy

- az alap ugrási intervallum és a mintavételezési idő a becsülni kívánt rendszermodell legkisebb időállandójának egyötöde legyen,
- a mintaelemek száma, azaz a PRBS sorozat hossza körülbelül a legnagyobb időállandó ötszöröse legyen.

A BECSLÉS MINŐSÉGE

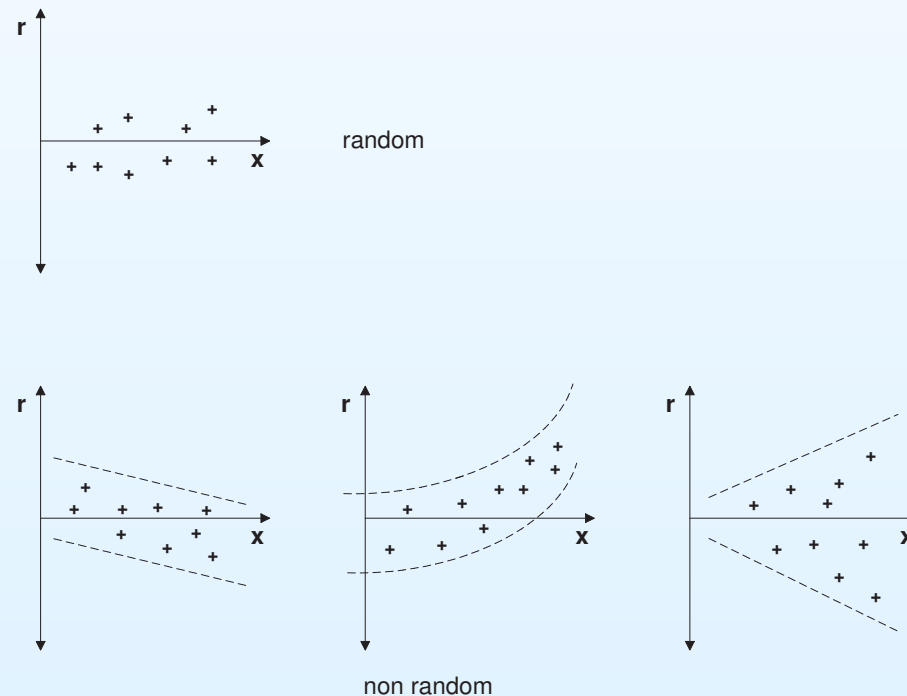
A becsült értékek minősége 1.

A reziduálok vizsgálata

Reziduálok: a predikciós hiba sorozat egy empirikus realizációja

$$\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k|\theta) \quad , \quad k = 1, \dots, N$$

Torzítatlan becslésnél a reziduálok **korrelálatlanok és 0 várható értékűek**



Lehetséges reziduál minták

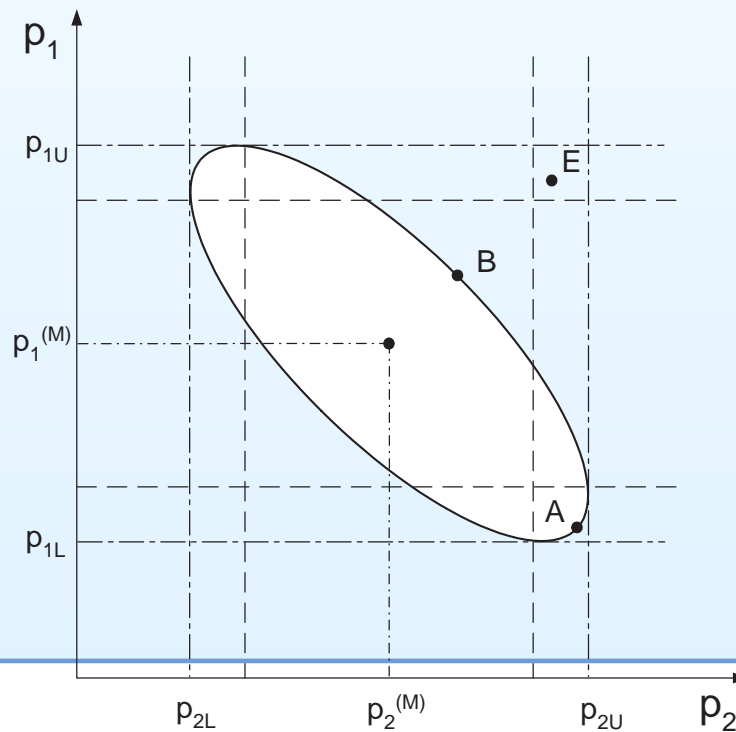
A becsült értékek minősége 2.

A kovariancia mátrix vizsgálata

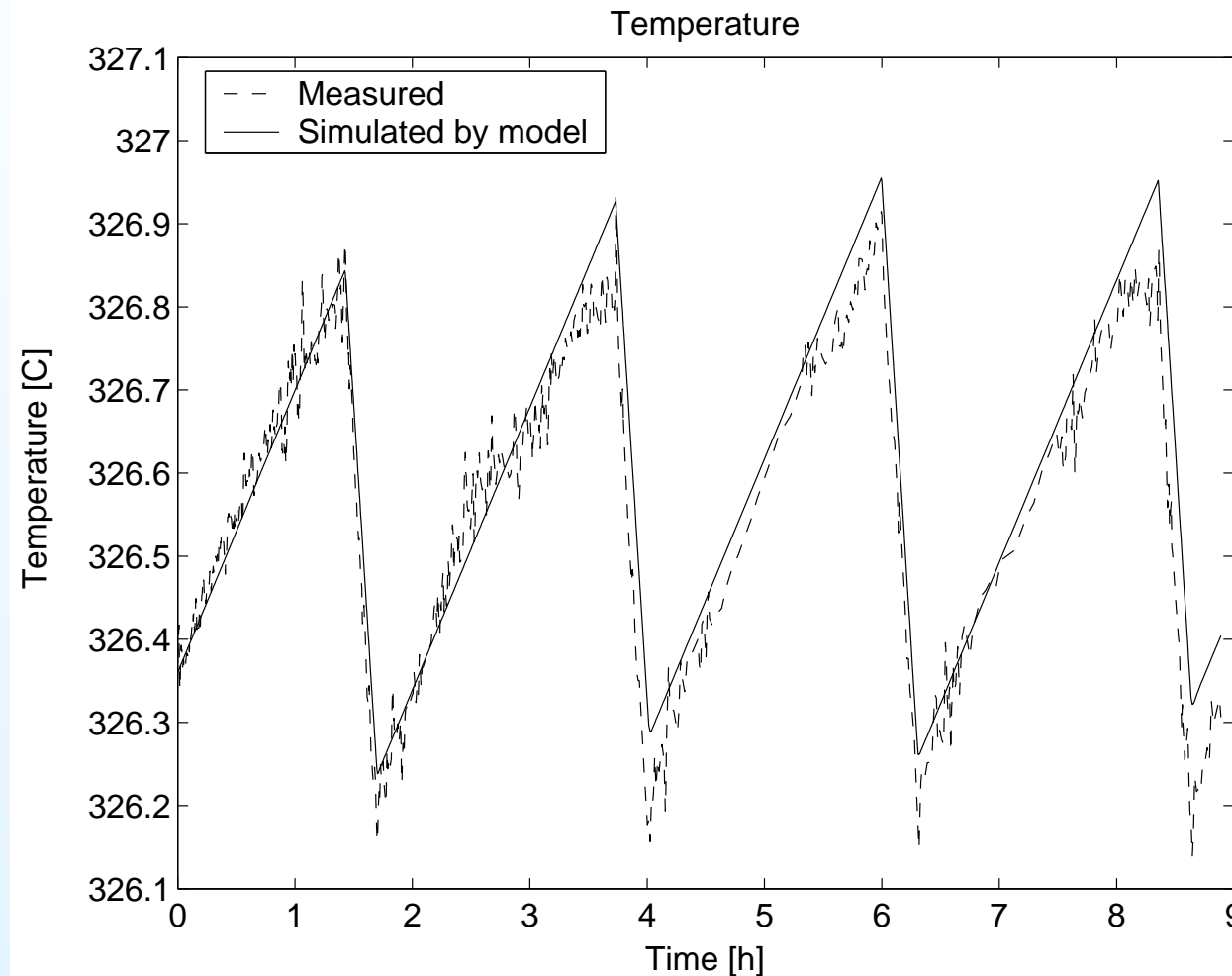
Kovariancia mátrix becslése:

$$R(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \Delta_{\text{varepsilon}}$$

Jó minőségű becslésnél a becsült értékek **korrelálatlanok**

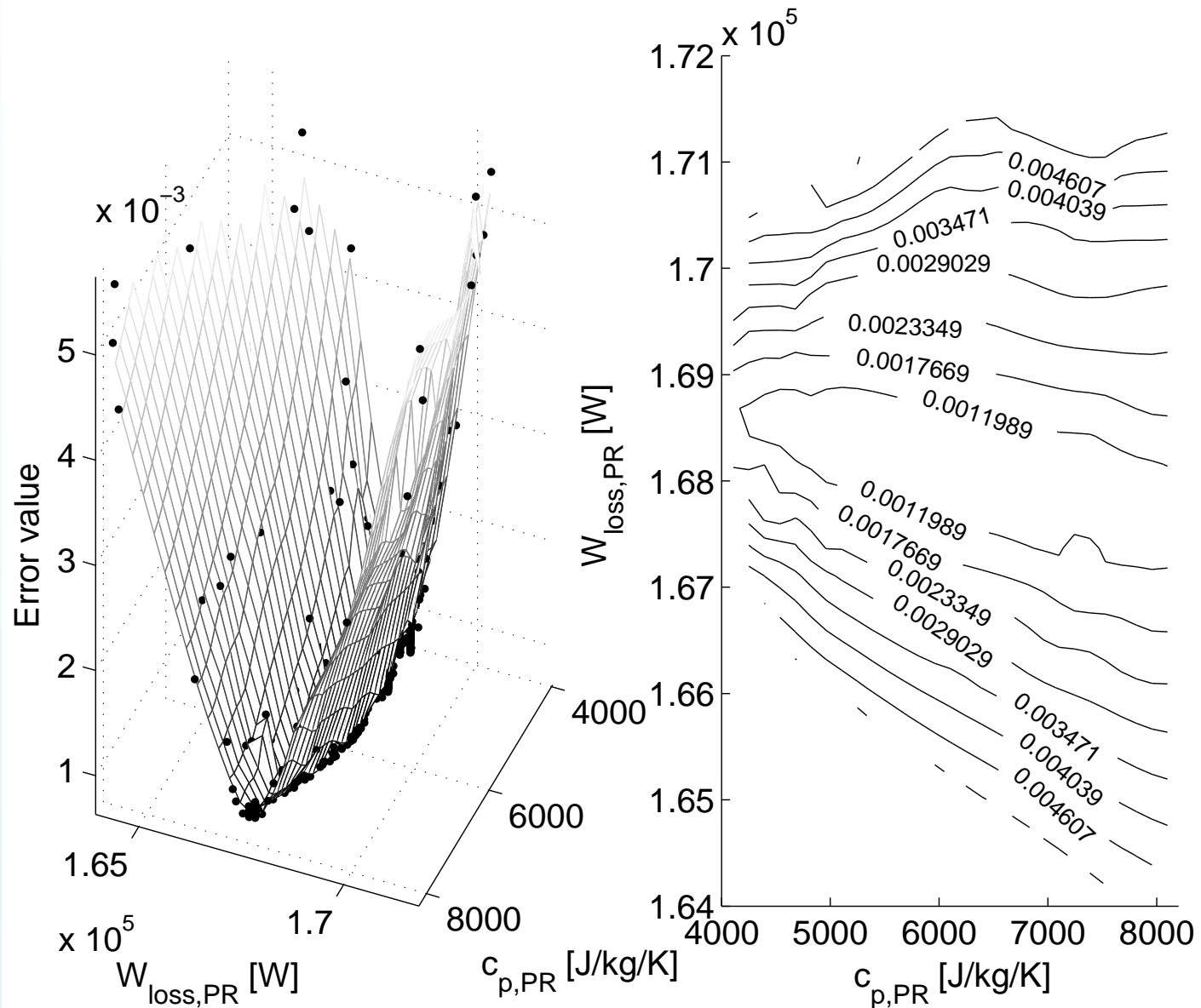


Példa: a becslés minősége - predikciós hiba



Mért és becstt értékek

Példa: becsült konfidencia tartomány



A veszteségfüggvény és szintvonalai