Dinamikus rendszerek paramétereinek becslése

Rendszer- és irányításelméleti alapfogalmak (ismétlés)

Hangos Katalin

MTA SzTAKI, Folyamatirányítási Kutató Csoport

PE Számítástudomány Alkalmazása Tanszék

Tartalom

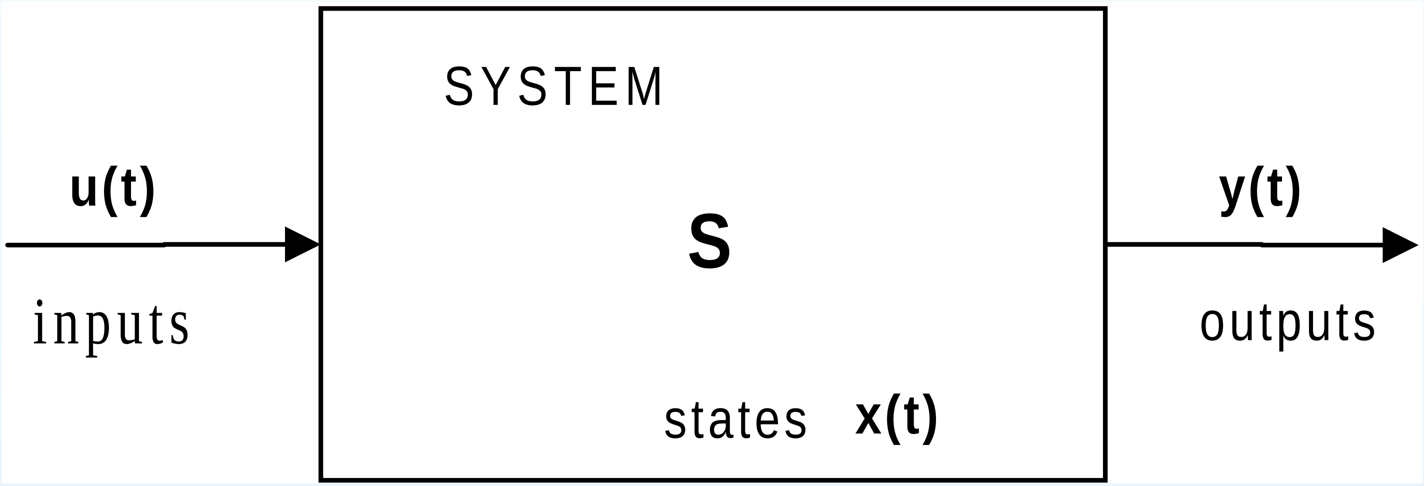
1. Jelek és rendszerek
2. Rendszertulajdonságok, rendszerosztályok
   - lineáris - nemlineáris
   - foytonos és diszkrét ideju
   - determinisztikus - sztochasztikus
3. sztochasztikus DT-LTI állapottér és input-output modell
4. Paraméterekben lineáris és nemlineáris modellek

Jelek és rendszerek

(**S**) rendszer: jeleken végez műveletet

$$y = \mathbf{S}[u]$$

- bemenetek (u) és kimenetek (y); állapotok (x)



Rendszer jelfolyam-ábrája

Rendszertulajdonságok – 1

Linearitás

$$\mathbf{S}[c_1 u_1 + c_2 u_2] = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

ahol
$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok
$u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ bemenetek
$y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ kimenetek úgy, hogy $\mathbf{S}[u_1] = y_1 \quad , \quad \mathbf{S}[u_2] = y_2$

Linearitás ellenőrzése: definíció szerint

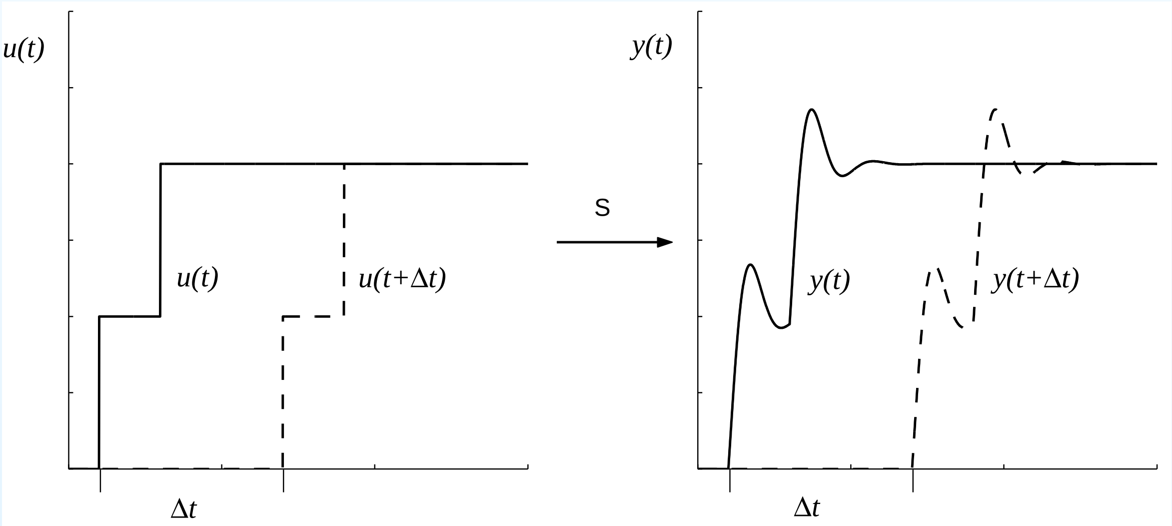
Rendszertulajdonságok – 2

Idő-invariancia

$$\mathbf{T}_\tau \circ \mathbf{S} = \mathbf{S} \circ \mathbf{T}_\tau$$

ahol $\mathbf{T}_\tau$ az időeltolás-operátor

Idő invariancia ellenőrzése: **konstans paraméterek a modellben**



Rendszertulajdonságok – 3

Folytonos és diszkrét idejű rendszerek
folytonos idő: ($\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$)
diszkrét idő: $\mathcal{T} = \{\cdots, t_0, t_1, t_2, \cdots\}$

Egy bemenetű – egy kimenetű (SISO)
több bemenetű – több kimenetű (MIMO) rendszerek

kauzális rendszerek

CT-LTI állapottér modellek

ALAPESET - folytonos idejű LTI modellek: általános alak

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \text{(allapot egyenlet)}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad \text{(kimeneti egyenlet)}$$

- adott $x(t_0) = x(0)$ kezdeti feltétellel és $x(t) \in \mathbb{R}^n$,
- $y(t) \in \mathbb{R}^p \; , \; u(t) \in \mathbb{R}^r$
- rendszerparaméterek

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \; , \; B \in \mathbb{R}^{n \times r} \; , \; C \in \mathbb{R}^{p \times n} \; , \; D \in \mathbb{R}^{p \times r}$$

DT-LTI állapottér modellek

ALAPESET - diszkrét idejű LTI modellek: pl. mintavételezéssel

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \qquad (allapot\ egyenlet)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \qquad (kimeneti\ egyenlet)$$

adott $x(0)$ kezdeti feltétellel és

$$x(k) \in \mathcal{R}^n\ ,\ y(k) \in \mathcal{R}^p\ ,\ u(k) \in \mathcal{R}^r$$

véges dimenziós vektorok és

$$\Phi \in \mathcal{R}^{n \times n}\ ,\ \Gamma \in \mathcal{R}^{n \times r}\ ,\ C \in \mathcal{R}^{p \times n}\ ,\ D \in \mathcal{R}^{p \times r}$$

mátrixok

Nemlineáris állapottér modellek

Koncentrált paraméterű folytonos idejű LTI modellek

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \qquad \text{(allapot egyenlet)}$$
$$y(t) = G(x(t), u(t)) \qquad \text{(kimeneti egyenlet)}$$

adott $x(0)$ kezdeti feltétellel és

$$x(k) \in \mathcal{R}^n \ , \ y(k) \in \mathcal{R}^p \ , \ u(k) \in \mathcal{R}^r$$

véges dimenziós vektorok és

$$F : \mathcal{R}^{n+r} \ \mapsto \ \mathcal{R}^n$$

$$G : \mathcal{R}^{n+r} \ \mapsto \ \mathcal{R}^p$$

nemlineáris függvények

Sztochasztikus DT-LTI állapottér modellek

A diszkrét idejű LTI modell kibővitett esete:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) + v(k) \qquad (allapot\ egyenlet)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k) + e(k) \qquad (kimeneti\ egyenlet)$$

adott $x(0)$ kezdeti feltétellel,

$$x(k) \in \mathcal{R}^n \ , \ y(k) \in \mathcal{R}^p \ , \ u(k) \in \mathcal{R}^r$$

véges dimenziós vektorok és

$$\{v(k)\}_{k=0}^{\infty} \ , \ \{e(k)\}_{k=0}^{\infty}$$

egymástól független (általában normális eloszlású) fehérzaj folyamatok

Paraméterekben lineáris: $\Phi, \ \Gamma, \ C, \ D$ és zaj-paraméterek

Sztochasztikus bemenet-kimenet modellek

ALAPESET PARAMÉTERBECSLÉSHEZ: diszkrét idejű sztochasztikus LTI-SISO modell: ARMAX folyamat

$$A^*(q^{-1})y(k) = B^*(q^{-1})u(k) + C^*(q^{-1})e(k)$$

az alábbi polinomokkal:

$$\begin{aligned} A^*(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_n q^{-n}, \\ B^*(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + b_m q^{-m}, \\ C^*(q^{-1}) &= 1 + c_1 q^{-1} + c_n q^{-n} \end{aligned}$$

úgy, hogy $m < n$, ahol $q^{-1}u(k) = u(k-1)$ az *időbeli eltolás operátor* és $\{e(k)\}_{k=0}^{\infty}$ egy (általában normális eloszlású) fehérzaj folyamat

Paraméterekben lineáris: $a_1, ..., a_n;\ b_0, ..., b_m$ és zaj-paraméterek $c_1, ..., c_n$

Általánosított CT-LTI állapottér modellek - 1

Lineáris Ido-Változózós (LTV) rendszerek
Alap model: CT-LTI eset *általánosítva*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad (allapot\ egyenlet)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \qquad (kimeneti\ egyenlet)$$

- adott $x(t_0) = x(0)$ kezdeti feltételekkel és $x(t) \in \mathcal{R}^n$,
- $y(t) \in \mathcal{R}^p$, $u(t) \in \mathcal{R}^r$
- modell paraméterek: idofüggo mátrixok

$$A(t) \in \mathcal{R}^{n \times n} \ , \ B(t) \in \mathcal{R}^{n \times r} \ , \ C(t) \in \mathcal{R}^{p \times n} \ , \ D(t) \in \mathcal{R}^{p \times r}$$

Általánosított CT-LTI állapottér modellek - 2

Lineáris Paraméter Változós (LPV) rendszerek
Alap model: CT-LTI eset *tovább általánosítva*
Adott a $\theta(t) \in \mathbb{R}^{\ell}$ paraméter

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \qquad (allapot\ egyenlet) \\ y(t) &= C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \qquad (kimeneti\ egyenlet) \end{aligned}$$

Interpretációk

- egy LTV rendszer az LPV modell speciális esete mikor $\theta(t) = t \ , \ \ell = 1$,
- lineáris ido-invariáns (LTI) rendszerek, amelyekben a $\theta(t)$ paraméterben idofüggo bizonytalanság van
- nemlineáris rendszerekbol linearizálással kapott rendszerek, ahol a linearizálási pont a θ paraméterrel jellemzett az állapottérbeli trajektória mentén

Affin LPV rendszerek

LPV rendszerek, ahol a rendszer-mátrixok *affin módon függenek* θ-tól, azaz

$$\begin{aligned} A(\theta) &= A_0 + \theta_1 A_1 + \cdots + \theta_\ell A_\ell \\ B(\theta) &= B_0 + \theta_1 B_1 + \cdots + \theta_\ell B_\ell \\ C(\theta) &= C_0 + \theta_1 C_1 + \cdots + \theta_\ell C_\ell \\ D(\theta) &= D_0 + \theta_1 D_1 + \cdots + \theta_\ell D_\ell \end{aligned}$$

θ egy Θ convex matrix politóp egy eleme, azaz

$$\theta(t) \in \Theta := Co\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\ell\} := \{\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \omega_i \; : \; \alpha_i \geq 0 \, , \; \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1\}$$

speciális nemlineáris rendszerek, pl. *bilineáris rendszerek*, leírhatók affin LPV rendszerekként, ha feltételezheto, hogy valamely állapot és/vagy input input jel idoben változó korlátos paraméter

Speciális nemlineáris rendszerek – 1

Bilináris rendszerek: input-affin rendszerek, ahol

$$\dot{x}_\ell(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{\ell j}^{(0)} x_j(t) \qquad + \textstyle\sum_{j=1}^{m} b_{\ell j}^{(0)} u_j(t) +$$

$$+ \textstyle\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_{ij}^{(\ell)} x_i(t) u_j(t)$$

$$\ell = 1, \ldots, n \quad (allapot\ egyenlet)$$

$$y_k(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}^{(0)} x_j(t)$$

$$k = 1, \ldots, p \quad (kimeneti\ egyenlet)$$

Paraméterekben lineáris

Speciális nemlineáris rendszerek – 2

Kvázi-polinomiális (QP) rendszerek: input-affin nemlineáris rendszerek, ahol az állapot egyenlet

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_i \left(L_i + \textstyle\sum_{j=1}^{m} A_{ij} \prod_{k=1}^{n} x_k^{B_{jk}} \right) + \\ &\quad + \textstyle\sum_{l=1}^{p} x_i \left(\Lambda_{l_i} + \sum_{j=1}^{m} \Gamma_{l_{ij}} \prod_{k=1}^{n} x_k^{B_{jk}} \right) u_l \end{aligned}$$

Értelmezési tartomány: $x_i > 0,\ u_k > 0$

Paraméterekben lineáris:

$$L,\ A,\ B;\ \ \Lambda,\ \Gamma$$

Rendszer- és irányításelmélet – Részterületek

- **rendszermodellezés** (realizáció-elmélet)
- identifikáció
  - kísérlettervezés, jelfeldolgozás
  - **modell paraméter és struktúra becslés**
- **rendszer-analízis**: megfigyelhetőség, irányíthatóság, stabilitás
- irányítástervezés
  - **szabályozások**: értéktartó, zavarelnyomó, stabilizáló stb.
  - optimális irányítások
  - diszkrét vezérlési szekvenciák
- diagnosztika

Modell paraméter becslés - Feladat kitűzés

Adott:

- Egy parametrizált explicit dinamikus rendszermodell:

$$y^{(M)} = M(x;\ p^{(M)}) \tag{1}$$

  ahol $p^{(M)} \in \mathbb{R}^{\nu}$ az ismeretlen modell paraméterek, $x \in \mathbb{R}^n$ a jelen és múltbeli bemenetek és kimenetek és $y^{(M)} \in \mathbb{R}^{\mu}$ jövőbeli kimenet vektora.
- A mért adatok egy rekordja

$$D[0,k] = \{\ (x(i), y(i))\ |\ i = 0, \cdots, k\ \} \tag{2}$$

- Egy $||.||$ jelnorma és a veszteségfüggvény:

$$L = ||y - y^{(M)}|| \tag{3}$$

Feladat:
Számítsuk ki a $p^{(M)}$ ismeretlen modell paraméterek egy $\hat{p}^{(M)}$ becslését úgy, hogy az L veszteségfüggvény minimális legyen.