Dinamikus rendszerek paramétereinek becslése

A legkisebb négyzetes becslés és tulajdonságai

Hangos Katalin

PE Villamosmérnöki és Információs Rendszerek Tanszék

ISMÉTLÉS

Kovariancia mártixok - 1

A ξ valószínűségi változó vektor értékű, azaz

$$\xi \;:\; \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad \xi(\omega) \in \mathbb{R}^{\mu} \tag{1}$$

A változó $m \in R^{\mu}$ várható értéke egy valós vektor.
Varianciája egy valós elemű négyzetes mátrix, az ún. *kovariancia mátrix*:

$$COV\{\xi\} = E\{(\xi - E\{\xi\})(\xi - E\{\xi\})^T\}$$

Két skalár értékű valószínűségi változó ξ_i és ξ_j *kovarianciája*:

$$COV\{\xi_i, \xi_j\} = E\{(\xi_i - E\{\xi_i\})(\xi_j - E\{\xi_j\})\}$$

A *kovariancia mátrixok pozitív definit szimmetrikus mátrixok*, azaz

$$z^T COV\{\xi\} z \geq 0 \quad , \quad \forall z \in \mathbb{R}^{\mu}$$

Kovariancia mártixok - 2

Lineárisan transzformált valószínűségi változókra

Egy $\xi(\omega) \in R^n$ vektor értékű valószínűségi változót a $T \in R^{n \times n}$ nemszinguláris négyzetes transzformációs mátrix alkalmazásával transzformáljuk:

$$\eta = T\xi$$

Az η valószínűségi változó statisztikái:

$$E\{\eta\} = TE\{\xi\} \quad , \quad COV\{\eta\} = TCOV\{\xi\}T^T$$

Lineáris regressziónál

$$\hat{p} = (X^T W X)^{-1} X^T W y$$

$p \sim \eta$, $y \sim \xi$ és $T = (X^T W X)^{-1} X^T W$

A PREDIKCIÓS HIBA MINIMALIZÁLÁSA

Prediktív input-output modellek: SISO eset

$$\hat{y}(k|\theta) = W_y(q^{-1},\theta)y(k) + W_u(q^{-1},\theta)u(k)$$

A fenti egyenletbeli $W_y(q^{-1},\theta)$ és $W_u(q^{-1},\theta)$ tényezok úgynevezett *lineáris szurok*, a θ az állandó, ismeretlen, becsülni kívánt paraméterek vektora.

A diszkrét ideju lineáris idoinvariáns egybemenetu-egykimenetu (DT-LTI SISO) sztochasztikus rendszerek általános alakú bemenet-kimenet modellje

$$A^*(q^{-1})y(k) = B^*(q^{-1})u(k) + C^*(q^{-1})e(k)$$

prediktív alakban:

$$\hat{y}(k|\theta) = y(k) - e(k) = (1 - H^{-1}(q^{-1},\theta))y(k) + (H^{-1}(q^{-1},\theta)G(q^{-1},\theta))u(k)$$

ahol

$$H^{-1}(q^{-1},\theta) = \frac{A^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} \quad , \quad G(q^{-1},\theta) = \frac{B^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}$$

ARX modellek prediktív alakja

Tekintsük a legegyszerubb esetet, amikor az általános

$$A^*(q^{-1})y(k) = B^*(q^{-1})u(k) + C^*(q^{-1})e(k)$$

alakú input-output modellben a mozgóátlag tag nulla, azaz *a kimeneti rendszerzaj fehér*.
Ebben az esetben $C^*(q^{-1}) = 1$.
Ekkor $H^{-1}(q^{-1}, \theta) = A^*(q^{-1})$ és így

$$W_y(q^{-1}, \theta) = 1 - A^*(q^{-1}) \;\; , \;\; W_u(q^{-1}, \theta) = B^*(q^{-1})$$

A becslo elemei:

$$\theta = [-a_1 \;\; -a_2 \;\; \ldots \;\; -a_n \;\; b_0 \; b_1 \;\; \ldots \;\; b_m]^T \;\; , \;\; N > n + m$$

$$\hat{y}(k|\theta) = -a_1 y(k-1) - ... - a_n y(k-n) + b_0 u(k) + ... + b_m u(k-m)$$

Nemlineáris idoinvariáns egykimenetu rendszerek

Mért érték sorozat

$$D[1,N] = D^N = \{(y(k),u(k)) \mid k = 1,\dots N\}$$

Az általános prediktív alak:

$$\hat{y}(k|\theta) = g(k, D[1,k-1];\theta)$$

Paraméterekben lineáris rendszerek:

$$\hat{y}(k|\theta) = \theta^T g^*(k, D[1,k-1])$$

Példa: ARX modell

$$\hat{y}(k|\theta) = -a_1 y(k-1) - ... - a_n y(k-n) + b_0 u(k) + ... + b_m u(k-m)$$
$$\theta = [-a_1 \ \dots \ -a_n \ \ b_0 \ \dots \ b_m]^T$$
$$g^*(k, D[1,k-1]) = \varphi(k) = [y(k-1) \ \ \dots \ -y(k-n) \ \ u(k) \ \ \dots \ \ u(k-m)]$$

Példa: paraméterben lineáris nemlineáris eset

Paraméterekben lineáris nemlineáris ARX modell, amikor *a kimeneti rendszerzaj fehér*.

$$y(k) = a_1 y^2(k-1) + b_0 u^4(k) + e(k)$$

Az általános nemlineáris prediktív alak:

$$\theta = [a_1 \ b_0]^T \ \ , \ \ \hat{y}(k|\theta) = y(k) - e(k)$$

Segédváltozókkal:

$$y^2(k-1) = z(k-1) \ \ , \ \ u^4(k) = w(k)$$

a modell teljesen ARX alakra hozható:

$$\hat{y}(k|\theta) = a_1 z(k-1) + b_0 w(k)$$
$$\theta = [a_1 \ b_0]^T$$

A predikciós hiba

Eloállítható a *predikciós hiba sorozat* a modellbol és a mért érték sorozatból:

$$\varepsilon(k,\theta) = y(k) - \hat{y}(k|\theta) \ \ , \ \ k = 1,\ldots,N$$

A paraméterbecslés elve: Egy paraméterbecslési módszer a mért érték sorozatból eloállít egy becsült paraméter vektort:

$$D^N \to \hat{\theta}_N$$

Egy modell "jó", azaz a becsült paraméterek "jók", ha a predikciós hibák "kicsik".

A predikciós hiba nagysága

Az $\varepsilon(k,\theta)$ predikciós hiba egy jelsorozat, nagyságát *jelnormá*val mérjük.

A predikciós hiba nagysága

Eloszurés

A predikciós hiba eloszurésére akkor van szükség, ha a predikciós hibasorozat tagjai korreláltak, azaz nem tekinthetok fehérzajnak.

A norma megválasztása

$$V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ell(\varepsilon(k,\theta))$$

ahol $\ell(.)$ egy pozitív skalár értéku függvény.

Egykimenetu eset: legegyszerubb és legelterjedtebb a négyzetes jelnorma

$$\ell(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

A predikciós hiba nagysága - 2

A norma megválasztása bonyolultabb esetekben

Súlyozott eset: nem egyenloen pontos mérések

$$V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \beta(N,k) \ell(\varepsilon(k,\theta))$$

ahol $\beta(N,k)$ idotol függo súlytényezo sorozat.

Többkimenetu eset: általánosított négyzetes jelnorma

$$\ell(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \Lambda^{-1} \varepsilon$$

A predikciós hiba minimalizálása

A paraméterbecslési módszer: $D^N \longrightarrow \hat{\theta}_N$

Az általános paraméterbecslési feladat:
Adottak

- mért értékek: $D[1,N] = D^N = \{(y(k), u(k)) \mid k = 1, \ldots N\}$
- prediktív parametrizált modell: $\hat{y}(k|\theta) = g(k, D[1, k-1]; \theta)$
  predikciós hiba sorozat (diszkrét ideju
  jel): $\varepsilon(k,\theta) = y(k) - \hat{y}(k|\theta) \;\; , \;\; k = 1, \ldots, N$
- norma a predikciós hibán: $V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \ell(\varepsilon(k,\theta))$ ahol
  $\ell(.)$ egy pozitív skalár értéku függvény, leggyakrabban: $\ell(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^2$

Az ismert D^N mért érték sorozatból és a θ paraméter vektor értékébol kiszámíthatjuk a $V_N(\theta, D^N)$ norma értéket. A $k = N$ idopillanatban válasszuk meg a becsült $\hat{\theta}_N$ paraméter vektort úgy, hogy

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(D^N) = \arg\min_{\theta} V_N(\theta, D^N)$$

Példa: SISO ARX modellek

ALAPESET: Az általános alakú input-output modellben a mozgóátlag tag nulla, azaz *a kimeneti rendszerzaj fehér*

$$A^*(q^{-1})y(k) = B^*(q^{-1})u(k) + e(k)$$

A modell prediktív alakja:

$$\hat{y}(k|\theta) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) \cdots - a_n y(k-n) + b_0 u(k) + \cdots + b_m u(k-m)$$

A paramétervektor:

$$\theta = [-a_1 \ \ -a_2 \ \ \ldots \ \ -a_n \ \ b_0 \ b_1 \ \ \ldots \ \ b_m]^T$$

A predikciós hiba (**fehérzaj!**):

$$\varepsilon(k) = \hat{y}(k|\theta) - y(k) = e(k)$$

A LEGKISEBB NÉGYZETES (LKN) BECSLÉS

A legkisebb négyzetes hibájú becslők

Egykimenetű eset, négyzetes jelnorma:

$$V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{2}\left[y(k) - \hat{y}(k|\theta)\right]^2$$

A keresett paramétervektor és a mért kimenetek vektora

$$\theta^T = [\theta_1 \; \theta_2 \; \ldots \; \theta_m] \quad , \quad y^T = [y(1) \; y(2) \; \ldots \; y(N)]$$

Prediktív modell:

$$\hat{y}(k|\theta) = f(\theta, k) \; , \; V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}\left[y(k) - f(k,\theta)\right]^2$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[y(k) - f(k,\theta)\right]\frac{\partial f(k,\theta)}{\partial \theta_j} = 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, m$$

(A fenti egyenletrendszert kell megoldani θ-ra.)

A prediktív modellek paramétereinek becslése lineáris regresszióval

Paraméterekben lineáris modell esetén:

$$\hat{y}(k|\theta) = \theta^T \varphi(k)$$

ahol $\varphi(.)$ az úgynevezett *regresszor*, a mért adatokat tartalmazza; θ a becsülni kívánt állandó modellparaméterek vektora.
A predikciós hiba:

$$\varepsilon(k,\theta) = y(k) - \theta^T \varphi(k)$$

A minimalizálandó kritériumfüggvény:

$$V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} \left[y(k) - \theta^T \varphi(k) \right]^2$$

LKN becslés paraméterekben lineáris esetben

Elvégezve a parciális deriválásokat a paramétervektor elemei szerint:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\left[y(k)-\varphi^T(k)\theta\right]=0$$

Ebből:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)y(k)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\varphi^T(k)\theta$$

aminek megoldása θ-ra adja az LS- vagy LKN-becslést:

$$\hat{\theta}_{LS}=\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\varphi^T(k)\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)y(k)$$

Példa: paraméterben lineáris nemlineáris eset

Paraméterekben lineáris ARX modell, amikor *a kimeneti rendszerzaj fehér*.

$$y(k) = a_1 y^2(k-1) + b_0 u^4(k) + e(k)$$

Az általános nemlineáris prediktív alak:

$$\theta = [a_1 \; b_0]^T \quad , \quad \hat{y}(k|\theta) = y(k) - e(k)$$

Segédváltozókkal:

$$y^2(k-1) = z(k-1) \quad , \quad u^4(k) = w(k)$$

a modell teljesen ARX alakra hozható.

Példa: ARX modellek paramétereinek LKN becslése

Az általános alakú input-output modellben a mozgóátlag tag nulla, azaz *a kimeneti rendszerzaj fehér*

$$A^*(q^{-1})y(k) = B^*(q^{-1})u(k) + e(k)$$

A modell prediktív alakja:

$$\hat{y}(k|\theta) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) \cdots - a_n y(k-n) + b_0 u(k) + \cdots + b_m u(k-m)$$

A paramétervektor:

$$\theta = [-a_1 \;\; -a_2 \;\; \ldots \;\; -a_n \;\; b_0 \; b_1 \;\; \ldots \;\; b_m]^T$$

A regresszor:

$$\varphi(k) = [y(k-1) \; y(k-2) \;\; \ldots \;\; y(k-n) \;\; u(k) \; u(k-1) \;\; \ldots \;\; u(k-m)]^T$$

A LKN BECSLÉS ASZIMPTOTIKUS TORZÍTATLANSÁGA

Prediktív modellek paraméterei LKN becslésének tulajdonságai 1.

Eltérés a standard lineáris regressziótól: a $\varphi(k)$ *regresszor vektorban szereplő jelek között a kimenet mért értékei is szerepelnek* $\Longrightarrow$ az egyes $y(k)$ mért értékeket még ARX modell esetén sem csak független fehér mérési hiba terheli a determinisztikus modellhez képest.

A becslés aszimptotikus viselkedése

$$y(k) = \theta_0^T \varphi(k) + \nu_0(k)$$

modellel leírható rendszer, $\{\nu_0(k)\}$ hibasorozattal, θ_0 a paraméter úgynevezett *nominális érték*e vagy "valódi érték"e.

LKN becslés és jelölés

$$\hat{\theta}_{LS} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi(k) y(k) \ , \ \ R(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi(k)\varphi^T(k)$$

Prediktív modellek paraméterei LKN becslésének tulajdonságai 2.

$$\hat{\theta}_{LS}(N) = [R(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi(k) \left[\varphi(k)^T \theta_0 + \nu_0(k)\right]$$

$$\hat{\theta}_{LS}(N) = \theta_0 + [R(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi(k) \nu_0(k)$$

A becslési hiba a fenti egyenlet második tagja. Azt szeretnénk,

- ha ez a tag "kicsi" lenne, hiszen ekkor lesz a becsült érték a valódi θ_0 értékhez közel, és azt,
- ha ez a tag tartana 0-hoz a minta elemszámának növelésével, azaz, ha $N \to \infty$.

Egy becslés viselkedését a mintaelemszám növelésével a becslés ***aszimptotikus viselkedés****-ének nevezik. Ilyen értelemben beszélhetünk például aszimptotikus torzítatlanságról*.

Prediktív modellek paraméterei LKN becslésének tulajdonságai 3.

Ha a $\nu_0(k)$ hiba kicsi a $\varphi(k)$ mért értékeket tartalmazó regresszorhoz képest, akkor a

$$[R(N)]^{-1}\,\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\nu_0(k)$$

becslési hiba is kicsi lesz.

Fontos: Ha mind az $(u(k), k=1,2,\dots)$ bemenet, mind a $(\nu_0(k), k=1,2,\dots)$ hiba stacionárius folyamat szerint változik egy AR(MA)X modellben, akkor az $(y(k), k=1,2,\dots)$ kimenet is stacionárius sztochasztikus folyamat lesz.

Az aszimptotikus viselkedés vizsgálatának feltételei

A becslési hiba aszimptotikus viselkedésének vizsgálatához tegyük fel, hogy

1. *a* $\{\nu_0(k)\}_{k=1}^N$ *hiba egy stacionárius sztochasztikus sorozat (azaz diszkrét idejű sztochasztikus folyamat) egy realizációja,*
2. *a rendszer maga egy ARX modellel írható le,*
3. *magát az* $\{u(k)\}_{k=1}^N$ *bemenetet is egy stacionárius sztochasztikus folyamat szerint változtatjuk.*

Az $R(N)$ mátrix elemei

$$R(N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\varphi^T(k)$$

ahol $\varphi(k) = [y(k-1)\ y(k-2)\ \ldots\ y(k-n)\ \ u(k)\ u(k-1)\ \ldots\ u(k-m)]^T$
$R(N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\cdot$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}
y(k-1)y(k-1) & \ldots & y(k-1)y(k-n) & y(k-1)u(k) & \ldots & y(k-1)u(k-m) \\
y(k-2)y(k-1) & \ldots & y(k-2)y(k-n) & y(k-2)u(k) & \ldots & y(k-2)u(k-m) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y(k-n)y(k-1) & \ldots & y(k-n)y(k-n) & y(k-n)u(k) & \ldots & y(k-n)u(k-m) \\
--- & - & --- & --- & - & --- \\
u(k)y(k-1) & \ldots & u(k)y(k-n) & u(k)u(k) & \ldots & u(k)u(k-m) \\
u(k-1)y(k-1) & \ldots & u(k-1)y(k-n) & u(k-1)u(k) & \ldots & u(k-1)u(k-m) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
u(k-m)y(k-1) & \ldots & u(k-m)y(k-n) & u(k-m)u(k) & \ldots & u(k-m)u(k-m)
\end{array}\right]$$

$R(N)$ mátrix elemeinek aszimptotikus viselkedése 1.

A $\varphi(.)$ regresszor AR(MA)X esetben csak régebbi diszkrét idejű bemeneteket és kimeneteket tartalmaz, ezért az $[R(N)]_{ij}$ elemek háromfélék lehetnek:

- *input autokovariancia*: $r_{uu}(\tau)$ az $\{u(k)\}_{k=1}^{N}$ sztochasztikus folyamat autokovariancia függvénye

$$\hat{R}_u^N(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u(k)u(k-\tau) \quad \rightarrow \quad R_u(\tau) = r_{uu}(\tau)$$

- *output autokovariancia*: $r_{yy}(\tau)$ az $\{y(k)\}_{k=1}^{N}$ sztochasztikus folyamat autokovariancia függvénye

$$\hat{R}_y^N(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y(k)y(k-\tau) \quad \rightarrow \quad R_y(\tau) = r_{yy}(\tau)$$

$R(N)$ mátrix elemeinek aszimptotikus viselkedése 2.

- *input-output kovariancia*: $r_{yu}(\tau)$ a két előző stacionárius sztochasztikus folyamat kereszt kovariancia fv-e

$$\hat{R}_{yu}^{N}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y(k)u(k-\tau) \quad \rightarrow \quad R_{yu}(\tau) = r_{yu}(\tau)$$

Így az $R(N)$ mátrix nagy mintaelemszámok esetén ($N \rightarrow \infty$) egy konstans R^* mátrixhoz tart
A $\{\nu_0(k)\}_{k=1}^{N}$ hiba folyamat is stacionárius, így

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \varphi(k)\nu_0(k) \quad \rightarrow \quad h^*$$

h^* *konstans vektor* az $\{u(k)\}_{k=1}^{N}$ és $\{\nu_0(k)\}_{k=1}^{N}$, illetve az $\{y(k)\}_{k=1}^{N}$ és $\{\nu_0(k)\}_{k=1}^{N}$ sztochasztikus folyamatok kereszt kovariancia függvényeinek elemeit tartalmazza.

Az aszimptotikus torzítatlanság feltételei

A becslési hiba aszimptotikusan torzítatlan ***az aszimptotikus viselkedés vizsgálatának feltételei*** *fennállása esetén, ha*

(i) *az R^* mátrix nemszinguláris (**elegendő gerjesztés**)*
Teljesül, ha az $\{u(k)\}_{k=1}^N$ és $\{\nu_0(k)\}_{k=1}^N$ folyamatok egymástól függetlenek, és az $R_u(i-j)$ autokorrelációkból alkotott R_{ij} mátrix nemszinguláris. (elegendően gerjesztő bemenetnek)

(ii) *a $h^* = 0$ fennállása esetén*

(iia) *A $\{\nu_0(k)\}_{k=1}^N$* ***hiba nulla várható értékű fehérzaj sorozat****: nincs modellezési hiba, és a mérési hiba nem színes (mérőrendszernek nincs dinamikája). Ekkor a $\nu_0(k)$ hiba, mint valószínűségi változó független a múlttól, így az $E[\varphi(k)\nu_0(k)]$ tagok mindegyike nulla.*

(iib) *Az $\{u(k)\}_{k=1}^N$ bemenet egy nulla várható értékű fehérzaj sorozat, és a* rendszer rendje *$n = 0$: jelen kimenet nem függ a múltbeli kimenetektől. Ekkor a $\varphi(k)$ regresszor csak a bemenet múltbeli értékeit tartalmazza, és így $E[\varphi(k)\nu_0(k)] = 0$.*

Prediktív modellek paraméterei LKN becslésének tulajdonságai 4.

Fontos megjegyezni, hogy a fenti *(i)* és *(iia)* feltételek fennállása esetén a

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_{LS}(N) - \theta_0)$$

valószínűségi változó aszimptotikus eloszlása olyan többdimenziós *normális* eloszlás lesz, amelynek várható értéke 0, kovariancia mátrixa pedig SISO esetben $\lambda_0[R^*]^{-1}$ ahol λ_0 a $\{\nu_0(k)\}_{k=1}^N$ hiba szórásnégyzete (varianciája).

A LKN BECSLÉS MIMO ESETBEN

LKN becslés a több bemenetű egy kimenetű esetben

A $\varphi(.)$ regresszor a skalár értékű $y(.)$ értékek mellett a vektor értékű $u(k) \in \mathbb{R}^r, k = 1, \ldots, N$ értékektől is függ. Ekkor az $u(k)$ vektor minden egyes $u_j(k)$ koordinátáját tekinthetjük egy-egy skaláris változónak, így a $\varphi(.)$ regresszor a

$$D^k = \{(y(i), u_1(i), \ldots, u_r(i)) \mid i = 1, \ldots, k\}$$

skaláris változóktól függőnek tekinthető és az egybemenetű egykimenetű esetre felírt LKN formula változtatás nélkül alkalmazható.

Példa: Két bemenetű ARX modell

$$A^*(q^{-1})y(k) = B^*(q^{-1})u(k) + C^*(q^{-1})e(k)$$

alakú input-output modellben a mozgóátlag tag nulla, azaz *a kimeneti rendszerzaj fehér*, de tegyük fel, hogy két bemenetünk van, azaz $u(k) \in \mathbb{R}^2$.

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) \cdots - a_n y(k-n) + b_0^T u(k) + \cdots + b_m^T u(k-m)$$

A paramétervektor:

$$\theta = [-a_1 \;\; -a_2 \;\; \ldots \;\; -a_n \;\; b_{01} \; b_{02} \; b_{11} \; b_{12} \;\; \ldots \;\; b_{m1} \; b_{m2} \;]^T$$

ahol b_{ij} az i-edik paramétervektor j-edik koordinátája, a regresszor pedig:

$$\varphi(k) = [y(k-1) \; y(k-2) \; \ldots \; y(k-n) \;\; u_1(k) \; u_2(k) \; u_1(k-1) \; u_2(k-1) \; \ldots \; u_1(k-m) \; u_2(k-m)]^T$$

LKN becslés a több bemenetű több kimenetű esetben

A diszkrét idejű időinvariáns paraméterekben lineáris egy bemenetű egy kimenetű rendszermodellek alakja általánosítható több kimenet, azaz vektor értékű $y(k) \in \mathbb{R}^p$ esetére is az alábbi formában ($\hat{y}(k|P) = P^T \varphi(k)$)

$$\begin{aligned} \hat{y}_1(k|P) &= P_{11}\varphi_1(k) + P_{21}\varphi_2(k) + \cdots + P_{m1}\varphi_m(k) \\ &\ldots \\ \hat{y}_p(k|P) &= P_{1p}\varphi_1(k) + P_{2p}\varphi_2(k) + \cdots + P_{mp}\varphi_m(k) \end{aligned}$$

ahol most a $P \in \mathbb{R}^{m \times p}$ mátrix j-edik oszlopába gyűjtöttük össze az $y(k)$ vektor j-edik koordinátájára vonatkozó θ^j modell paramétereket, azaz $P_{ij} = \theta_i^j$, és az egyes $y_j(k)$ koordinátákra vonatkozó részmodelleknek **ugyanaz a regresszora**.

Egyszerű példa

Két bemenetű két kimenetű eset, ARX modell

$$
\begin{aligned}
y_1(k) &= a_{11}y_1(k-1) + a_{12}y_2(k-1) + b_{11}u_1(k) + b_{12}u_2(k) + e_1(k) \\
y_2(k) &= a_{21}y_1(k-1) + a_{22}y_2(k-1) + b_{21}u_1(k) + b_{22}u_2(k) + e_1(k)
\end{aligned}
$$

A regresszor:

$$
\varphi(k) = [\; y_1(k-1) \;\; y_2(k-1) \;\; u_1(k) \;\; u_2(k) \;]^T
$$

A paraméter mátrix:

$$
P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}
$$

LKN becslés a MIMO esetben 2.

Becslés a több kimenetű esetben: 1. eshetőség

Ha az $y(k)$ vektor koordinátáira vonatkoztatott predikciós hibák egymástól teljesen függetlenek, akkor a paraméterbecslést egymástól függetlenül elvégezhetjük a részmodellekre az **egy kimenetű esetre vonatkozó LKN formulával**.

Ekkor a P paraméter mátrix oszlopaira (az abban szereplő θ^j részmodell paraméterekre) kapunk egymástól független becslést.

LKN becslés a MIMO esetben 3.

Becslés a több kimenetű esetben: 2. eshetőség

Ha az egyes koordinátákra vonatkozó predikciós hibák nem függetlenek, akkor együttes regressziós becslést kell végeznünk:

$$y^* = \begin{bmatrix} y_1(1) \\ \dots \\ y_p(1) \\ \dots \\ y_1(N) \\ \dots \\ y_p(N) \end{bmatrix} \quad , \quad p^* = \begin{bmatrix} P_{11} \\ \dots \\ P_{1m} \\ \dots \\ P_{p1} \\ \dots \\ P_{pm} \end{bmatrix} \quad , \quad X^* = \begin{bmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & X \end{bmatrix}$$

ahol $y_i(j)$ az j-edik mért kimenet vektor i-edik koordinátája.