Dinamikus rendszerek paramétereinek becslése

Identifikáció segédváltozók módszerével

Hangos Katalin

MTA SzTAKI, Folyamatirányítási Kutató Csoport

PE Számítástudomány Alkalmazása Tanszék

Tartalom

- Ismétlés: Legkisebb négyzetek módszere
- Segédváltozók módszere
- IV4 algoritmus
- Jármű dinamika paramétereinek becslése segédváltozók módszerével

ISMÉTLÉS

Ismétlés - Legkisebb négyzetek módszere I.

ARX modell prediktív alakja:

$$y(k+1) = -a_1 y(k) - \ldots - a_{n_a} y(k-n_a) + b_1 u(k) + \ldots + b_{n_b} u(k-n_b) + e(k)$$

ismeretlen paraméter vektorának:

$$\vartheta := \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_{n_a} & b_1 & \ldots & b_{n_b} \end{bmatrix}^T$$

meghatározása a mért értékek alapján:

$$D\,[1, N] = D^N = \{(y(k), u(k)) \mid k = 1, \ldots, N\}$$

Ismétlés - Legkisebb négyzetek módszere II.

Regreszor:

$$\varphi(t) := \left[\begin{array}{cccccc} -y(k-1) & \dots & -y(k-n_a) & u(k) & \dots & u(k-n_b+1) \end{array} \right]^T$$

A paraméterekben lineáris prediktor:

$$\hat{y}(k,\vartheta) = \varphi^T(k)\vartheta$$

Becslési hiba:

$$\varepsilon(k,\vartheta) = y(k) - \hat{y}^T(k)\varepsilon(k,\vartheta) = y(k) - \varphi^T(k)\vartheta$$

A minimalizálandó kritérium a becslési hiba kettes normája:

$$V_N(\vartheta, D^N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2} \mid y(k) - \varphi^T(k)\vartheta \mid^2$$

Ismétlés - Legkisebb négyzetek módszere III.

Az optimális paraméter becslés a szélsőértékre vonatkozó $V_N'(\vartheta, D^N) = 0$ feltételből számítható:

$$\hat{\vartheta}_N^{LKN} = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(k)\varphi(k)^T\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(k)y(k)$$

Ha a megfigyelt adatokat a valódi ϑ_0 paraméterhez tartozó zajos rendszer generálta:

$$y(k) = \varphi^T(k)\vartheta_0 + \nu_0(k)$$

akkor a becslés a következő alakban adódik:

$$\hat{\vartheta}_N^{LKN} = \vartheta_0 + \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(k)\varphi(k)^T\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(k)\nu_0(k)$$

Ismétlés - Legkisebb négyzetek módszere IV.

Az LKN becsléstől elvárjuk, hogy konvergáljon a valódi ϑ_0-hoz, a mérésszám növekedésével, $N \to \infty$. Ezzel ekvivalens:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi(k)\nu_0(k) = 0$$

Vagyis a $\varphi(k)$ megfigyeléseknek és a $\nu_0(k)$ zajnak korrelálatlannak kell lennie.
Az LKN becslés ezek után a következő alakban is megfogalmazható ($\nu_0(k) = y(k) - \varphi^T(k)\vartheta_0$ felhasználásával):

$$\hat{\vartheta}_N^{LKN} = sol \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi(k) \left[y(k) - \varphi^T(k)\vartheta_0 \right] = 0 \right\}$$

SEGÉDVÁLTOZÓK MÓDSZERE

Segédváltozók módszere - Alapötlet

- Gyengén csillapított vagy instabil rendszerek identifikációja
- korrelált megfigyelések és zaj
- LKN módszer ebben az esetben nem ad optimális megoldást
- Ötlet: $\varphi(k)$ lecserélése egy alkalmasan választott, $\nu_0(k)$-vel korrelálatlan $\xi(k)$ jelre, az ún. segédváltozóra

Segédváltozók módszere I.

Az LKN becslés eredményének analógiájára olyan $\xi(t)$ segédváltozót keresünk, amelyre teljesül:

$$\hat{\vartheta}_N^{SV} = sol\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi(k)\left[y(k) - \varphi^T(k)\vartheta_0\right] = 0\right\}$$

Ekkor az SV becslés alakja a következő lesz:

$$\hat{\vartheta}_N^{SV} = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\xi(k)\varphi(k)^T\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi(k)y(k)$$

Az LKN módszernél ismertetett lépésekkel, nagy N esetén a ϑ_N becslés valódi ϑ_0 paraméterhez való tartásának feltételei a következő alakban adódnak:

$$\mathcal{E}\left\{\xi(k)\varphi^T(k)\right\} \text{ nemszinguláris}$$

$$\mathcal{E}\left\{\xi(k)\nu_0(k)\right\} = 0$$

Segédváltozók módszere II.

Az ARX modell másik alakja:

$$A(q)y(k) = B(q)u(k)$$

ebből adódik az ötlet, hogy a segédváltozókat az ARX modellhez hasonlóan generáljuk:

$$\xi(k) = K(q)\begin{bmatrix} -z(k-1) & \dots & -z(k-n_a) & u(k) & \dots & u(k-n_b+1) \end{bmatrix}^T$$

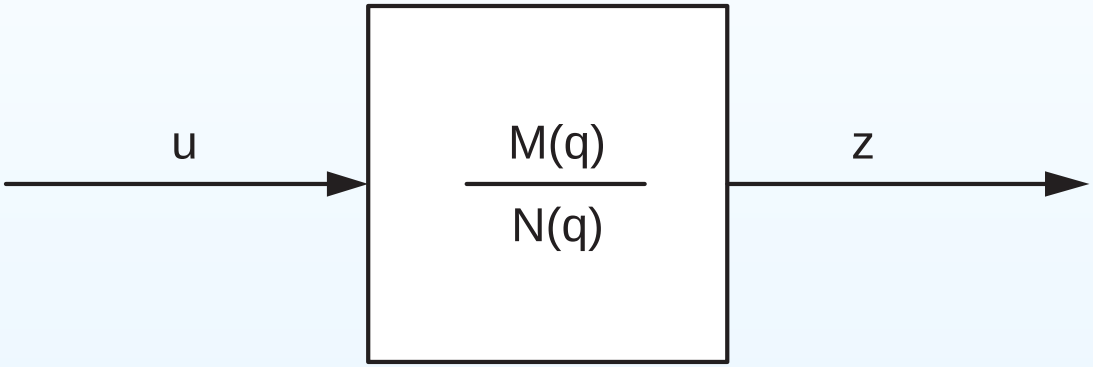
Ahol $K(q)$ alkalmasan megválasztott stabil lineáris szűrő, valamint $z(k)$ egy $u(k)$-vel gerjesztett lineáris rendszer kimeneteként generált:

$$N(q)z(k) = M(q)u(k)$$

és $N(q)$ és $M(q)$ szintén stabil lineáris szűrők.

Lineáris szűrők

- Lineáris szűrő: lineáris operátor
- Realizálás: lineáris rendszer kimeneteként, diszkrét időben



- Nem kívánatos frekvenciák levágása pl: alul áteresztő szűrő (1TP, A=1), band-stop filter
- Bizonyos frekvenciák kiválasztása pl: band-pass filter

Segédváltozók módszere III.

A legegyszerűbb alkalmazás esetén az LKN becslés által meghatározott polinomoknak választjuk $N(q)$-t és $M(q)$-t. A segédváltozókat ezek után $K(q) = 1$ választással képezhetjük.

Általában nem zárható ki, hogy $K(q)$, és így $\xi(k)$ is függ a ϑ paramétertől illetve $K(q)$ ezen kívül u-tól is. Az SV módszer elve ezért a következő:

$$
\begin{aligned}
\xi(k,\vartheta) &= K_u(q,\vartheta)u(k) \\
\varepsilon_F(k,\vartheta) &= L(q)\left[y(k) - \varphi^T(k,\vartheta)\vartheta\right] \\
f_N(\vartheta, D^N) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi(k,\vartheta)\varepsilon_F(k,\vartheta) \\
\hat{\vartheta}_N^S V &= sol\left[f_N(\vartheta, D^N) = 0\right]
\end{aligned}
$$

IV4 ALGORITMUS MATLAB-BAN

IV4 Algoritmus I.

MATLAB

1. a modell struktúrát lineáris regressziós alakban írjuk fel, majd meghatározzuk ϑ LKN becslését és a hozzátarozó átviteli függvényt:

$$\hat{\vartheta}_N^{(1)} = \hat{\vartheta}_N^{LKN}, \;\; \hat{G}_N^{(1)}(q) = \frac{\hat{B}_N^{(1)}(q)}{\hat{A}_N^{(1)}}$$

2. Képezzük a segédváltozókat:

$$z^{(1)}(k) = \hat{G}_N^{(1)}(q)u(k)$$

$$\xi^{(1)}(k) = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(k-1) & \ldots & -z^{(1)}(k-n_a) & u(t) & \ldots & u(k-n_b+1) \end{bmatrix}^T$$

majd meghatározzuk a hozzá tartozó SV becslést és a hozzátartozó átviteli függvényt:

$$\hat{\vartheta}_N^{(2)} = \hat{\vartheta}_N^{SV}, \;\; \hat{G}_N^{(2)}(q) = \frac{\hat{B}_N^{(2)}(q)}{\hat{A}_N^{(2)}(q)}$$

IV4 Algoritmus II.

3. Képezzük az ehhez tartozó modell esetén fellépő egyenlethibát:

$$\hat{w}_N^{(2)}(k) := \hat{A}_N^{(2)}(q)y(k) - \hat{B}_N^{(2)}(q)u(k)$$

és írjunk elő egy $n_a + n_b$ fokszámú AR modellt:

$$L(q)\hat{w}_N^{(2)}(k) = e(k)$$

LKN módszerrel határozzuk meg $L(q)$ becslését: $\hat{L}_N(q)$-t.
4. Képezzük az új segédváltozókat

$$z^{(2)}(k) = \hat{G}_N^{(2)}(q)u(k)$$

$$\xi^{(2)}(t) = \hat{L}_N(q) \begin{bmatrix} -z^{(2)}(k-1) & \dots & -z^{(2)}(k-n_a) & u(k) & \dots & u(k-n_b+1) \end{bmatrix}^T$$

IV4 Algoritmus III.

Végül alkalmazzuk az $\hat{L}_N(q)$ előszűrőt és az új segédváltozókat a végső SV becslés alkalmazására:

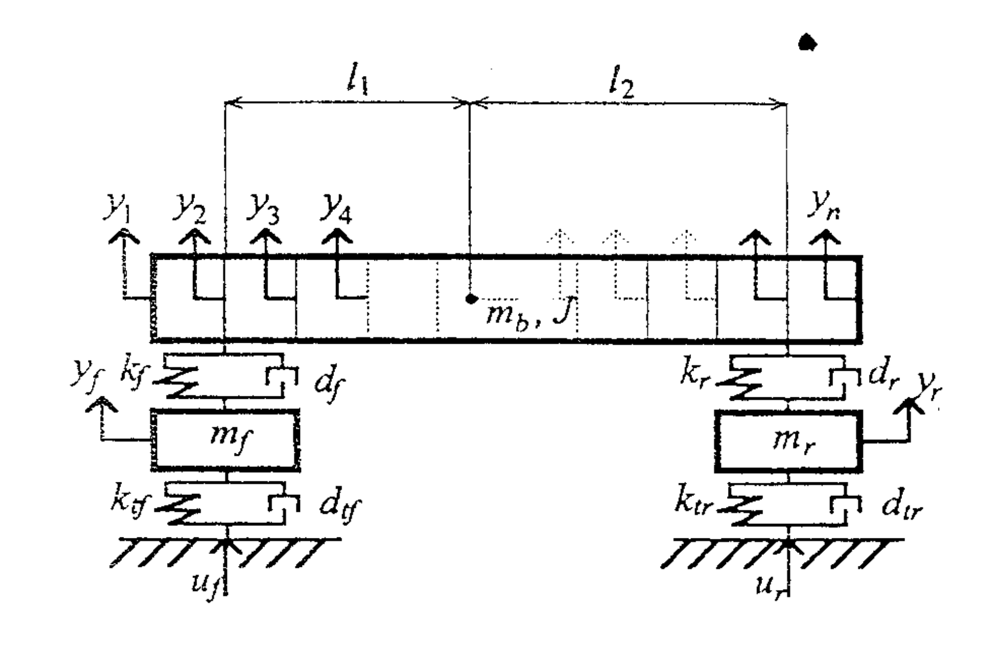
$$\begin{aligned}
\varphi_F(k) &= \hat{L}_N(q)\varphi(k) \\
y_F(k) &= \hat{L}_N(q)y(k) \\
\hat{\vartheta}_N &= \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\xi^{(2)}(k)\varphi_F(k)^T\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\xi^{(1)}(k)y_F(k)
\end{aligned}$$

JÁRMUDINAMIKA IDENTIFIKÁCIÓJA SEGÉDVÁLTOZÓK MÓDSZERÉVEL

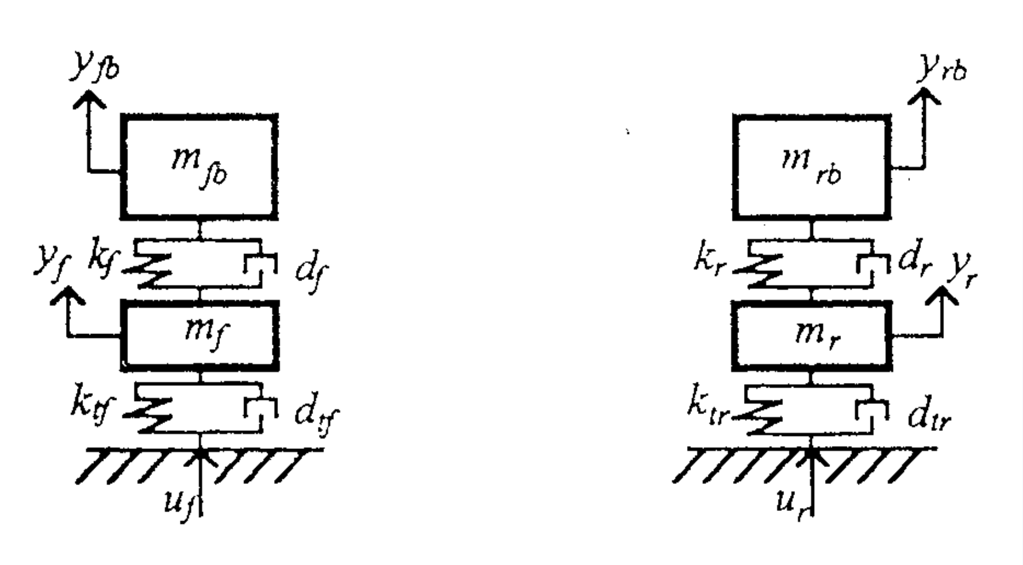
Járműdinamikai modell

$$M\ddot{y}(t) + K\dot{y}(t) + Sy(t) = K_2\dot{u}(t) + Su(t)$$

- y : járműtest elmozdulása
- u : útgerjesztés
- M : tömegmátrix
- K : csillapítás
- S : rugó merevség



Tengely modell I.



$$\begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_f \\ \ddot{y}_{fb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_f + d_{tf} & -d_f \\ -d_f & d_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_f \\ \dot{y}_{fb} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_f + k_{tf} & -k_f \\ -k_f & k_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_f \\ y_{fb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{tf} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_f \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{tf} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_f \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} k_f & k_{tf} & d_f & d_{tf} \end{bmatrix}^T$$

Tengely modell II.

$$T_f(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Ahol a polinomok a következőek:

$$B(s) = b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0, \qquad A(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$b_3 = \frac{d_{tf}}{m_f}, \qquad a_3 = b_3 + \frac{d_f}{m_f \times m_{fb}}$$

$$b_2 = \frac{d_f d_{tf}}{m_f m_{fb}} + \frac{k_{tf}}{m_f}, \qquad a_2 = b_2 + \frac{k_f}{m_f \times m_{fb}}$$

$$b_1 = \frac{k_f d_{tf} + d_f k_{tf}}{m_f m_{fb}}, \qquad a_1 = b_1$$

$$b_0 = \frac{k_f k_{tf}}{m_f m_{fb}}, \qquad a_0 = b_0$$

Diszkrét idejű modell

A $T_f(s)$-nek megfelelő, elsőrendű tartószervvel mintavételezett diszkrét idejű átviteli függvény a következő alakban írható:

$$
\begin{aligned}
T(q) &= \frac{Q(q)}{P(q)} \\
P(q) &= 1 + \alpha_1 q^{-1} + \alpha_2 q^{-2} + \alpha_3 q^{-3} + \alpha_4 q^{-4} \\
Q(q) &= \beta_1 q^{-1} + \beta_2 q^{-2} + \beta_3 q^{-3} + \beta_4 q^{-4}
\end{aligned}
$$

- Mintavételezett jelek alapján $\hat{\alpha}_i$ és $\hat{\beta}_i$ meghatározása, majd θ kiszámítása a becsült átviteli függvényből.
- Probléma: $\theta = \theta\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)$ nemlineáris függvénykapcsolat, illetve általánosan: $dim\theta < dim\left[\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T\right]^T$.

Segédváltozók módszere I.

Diszkrét idejű tengely modell:

$$y(k) = \frac{Q(q)}{P(q)} u(k)$$

Megj: $u(k)$ fehér zaj folyamat.
A már ismert jelöléseket bevezetve:

$$\begin{aligned}
\varphi(k) &= \begin{bmatrix} -y(k-1) & \dots & -y(k-n_p) \end{bmatrix}^T \\
\alpha &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_{np} \end{bmatrix}^T \\
\nu(k) &= Q(q)u(k)
\end{aligned}$$

Ezekkel a dinamika:

$$y(k) = \varphi(k)^T \alpha + \nu(k)$$

Segédváltozók módszere II.

$$\hat{\alpha} = \arg\min_{\alpha} \left\| \sum_{k=1}^{N} z(k)\nu(k) \right\|^2$$

ahol $z(k)$ jelöli a segédváltozót, melynek ki kell elégítenie a korrelálatlanság feltételét:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} z(k)\nu(k) = 0$$

Ezt a feltételt a következő választással biztosíthatjuk:

$$z(k)^T = G(q) \left[\begin{array}{ccc} u(k-nq-1) & \dots & -u(k-nq-m) \end{array} \right]^T$$

ahol $G(q)$ stabil lineáris szűrő, továbbá: $G(0) = 1$.

Segédváltozók módszere III.

A fizikai paraméterek meghatározása:

1.

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} z(k) \varphi(k)^T \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} z(k) y(k)$$

2. folytonos időbe történő transzformálással $a = [a_0 \; \ldots \; a_3]^T$ meghatározása
3. $a = f(\vartheta)$ nemlineáris egyenletrendszer megoldása, pl. LKN értelemben: $\hat{\vartheta} = \arg\min_{\vartheta} \|a - f\,(\vartheta)\|_2$

Eredmények

- 512 dimenziós segédváltozó sorozat, LKN becslésből számított előszűrőn
- valóságban a jármű rugalmas, ezért a szétcsatolási feltétel nem teljesül
- LKN becslés esetén az alul modellezett dinamika következtében torzult eredményt kapunk
- megfelelő segédváltozó választással az SV becslés jobb eredményt biztosított