

DINAMIKUS RENDSZEREK
PARAMÉTEREINEK BECSLÉSE
(Tantárgyi segédlet)

Hangos Katalin, Szederkényi Gábor
MTA SzTAKI Rendszer- és Irányításelméleti Kutató Laboratórium
H-1518 Budapest Pf. 63

Fax: 36 14 667 503, E-mail: hangos@scl.sztaki.hu , szeder@scl.sztaki.hu

VE Számítástudomány Alkalmazása Tanszék

2017. január 18.

Tartalomjegyzék

1. Alapismeretek	8
1.1. Valószínűségi változók és tulajdonságaik	8
1.1.1. Skalár értékű valószínűségi változók	8
1.1.1.1. Eloszlásfüggvény	8
1.1.1.2. Sűrűségfüggvény	9
1.1.1.3. Együttes eloszlás- és sűrűségfüggvény	9
1.1.1.4. Feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvény	9
1.1.1.5. Normális eloszlás	9
1.1.1.6. Várható érték	11
1.1.1.7. Kovariancia és variancia	11
1.1.2. Vektor értékű valószínűségi változók	11
1.1.3. Normális valószínűségi változók lineáris transzformációja	13
1.2. Statisztikai becslések és tulajdonságaik	13
1.2.1. Statisztikai becslések	13
1.2.2. Hipotézisek tesztelése	14
1.3. Lineáris regresszió és a becsült paraméterek statisztikai tulajdonságai	15
1.3.1. Paraméterbecslés lineáris regresszióval	15
1.3.2. A regresszióval kapott paraméterek tulajdonságai	16
1.4. Diszkrét idejű input-output modellek	17
1.4.1. Diszkrét idejű fehérzaj folyamat és a belőle származtatott sztochasztikus folyamatok	17
1.4.2. Diszkrét idejű determinisztikus input-output modellek	18
1.4.3. Diszkrét idejű sztochasztikus input-output modellek	18
2. Dinamikus modellek paraméterbecslésének elve	19
2.1. A predikciós hiba	19
2.1.1. Prediktív input-output modellek	19
2.1.1.1. Lineáris időinvariáns egybemenetű-egykimenetű rendszerek	19
2.1.1.2. A mért érték sorozat	20
2.1.1.3. Nemlineáris időinvariáns egykimenetű rendszerek	21
2.1.1.4. A predikciós hiba	21
2.1.2. A paraméterbecslés elve	22
2.1.3. A predikciós hiba nagysága	22
2.1.3.1. Előszűrés	22

2.1.3.2.	A norma megválasztása egykimenetű esetben	22
2.1.3.3.	A norma megválasztása többkimenetű esetben	23
2.1.3.4.	A paraméterbecslés, mint optimálási feladat	23
3.	A legkisebb négyzetek elvén alapuló módszerek	24
3.1.	A legkisebb négyzetes hibájú becslők származtatása általános esetben	24
3.2.	A prediktív modellek paramétereinek becslése lineáris regresszióval	25
3.3.	A becslés tulajdonságai	26
3.4.	A több bemenetű több kimenetű eset	30
3.4.1.	Több bemenetű egy kimenetű eset	30
3.4.2.	Több kimenetű eset	31
4.	A becslési módszerek elméleti tulajdonságai	32
4.1.	Maximum likelihood becslések	32
4.1.1.	A maximum likelihood becslés elve	32
4.1.2.	A maximum likelihood becslés független megfigyelések esetén	33
4.1.3.	Prediktív modellek paramétereinek maximum likelihood becslése	35
4.1.3.1.	A teljes valószínűségi modell	35
4.1.3.2.	A likelihood függvény és a maximum likelihood becslés	35
4.1.3.3.	A maximum likelihood becslés általános esetben	37
4.2.	A paraméterbecslések kovariancia mátrixa	37
4.2.1.	A Cramér-Rao egyenlőtlenség és a Fisher információs mátrix	37
4.2.2.	A maximum likelihood becslés aszimptotikus tulajdonságai	38
4.2.3.	A Cramer-Rao egyenlőtlenség és a Fisher információs mátrix dinamikus rendszerek paramétereinek becslése esetén	39
5.	A Bayes becslés és a segédváltozók módszere	41
5.1.	Bayes-becslések	41
5.1.1.	A véletlen Bayes féle fogalma	41
5.1.2.	A Bayes formula és a láncszabály	42
5.1.2.1.	Bayes formula a klasszikus esetben	42
5.1.2.2.	Bayes formula feltételes valószínűségi sűrűségfüggvényekre	42
5.1.2.3.	A láncszabály	43
5.1.3.	Dinamikus rendszerek prediktív Bayes modellje	44
5.1.4.	Rekurzív paraméterbecslés a Bayes formulával	44
5.1.4.1.	A Bayes paraméterbecslés tulajdonságai	45
5.1.5.	Maximum a posteriori becslés	46
5.2.	A segédváltozók módszere (Instrumental variable method)	46
5.2.1.	A predikciós hiba és a múltbeli adatok korreláltsága	46
5.2.2.	A segédváltozók és megválasztásuk	47
5.2.3.	A segédváltozók megválasztása a modell alapján	48

6. Nemlineáris modellek paramétereinek becslése	50
6.1. A becslés alapelve	50
6.1.1. A paraméterbecslés, mint nemlineáris optimalizálási feladat . . .	50
6.1.2. Az optimalizálási feladat lehetséges megoldási útjai	52
6.2. Megoldás a gradiens módszerrel	52
6.2.1. A gradiens módszer	52
6.2.2. A veszteségfüggvény minimalizálása gradiens módszerrel	54
6.3. Nemlineáris modellek munkapont körüli linearizálása	55
7. Rekurzív paraméterbecslés	57
7.1. Bevezetés	57
7.1.1. A rekurzív paraméterbecslő algoritmusok általános alakja	57
7.1.2. A rekurzív paraméterbecslés előnyei és hátrányai	57
7.2. A rekurzív legkisebb négyzetek módszere	58
7.2.1. A kezdeti feltételek megválasztása	60
7.3. A rekurzív gradiens módszer	61
7.3.1. Problémafelvetés	61
7.4. Időben változó paraméterek becslése	61
7.4.1. Problémafelvetés	61
7.4.2. Csúszóablakos paraméterbecslés	62
7.4.3. Fokozatos "felejtés"	62
7.4.3.1. Rekurzív legkisebb négyzetek módszere	62
7.4.3.2. Rekurzív gradiens módszer exponenciális felejtéssel . .	64
8. A paraméterbecslés gyakorlati kivitelezése	65
8.1. A mért adatok előkészítése és előszűrése	65
8.1.1. Az adatok vizuális áttekintése	66
8.1.2. Trendfigyelés, állandósult állapot figyelése	66
8.1.3. Szórás és korrelációk	67
8.1.4. Kiugró értékek	68
8.2. Kísérlettervezés	68
8.2.1. A mintavételezési idő megválasztása	69
8.2.2. A mintaelemszám megválasztása	69
8.2.3. Elegendő gerjesztés biztosítása, tesztjelek	70
9. Gyakorlat anyaga, példatár	71
9.1. A legkisebb négyzetek módszere	71
9.1.1. ARX modellstruktúra paramétereinek legkisebb négyzetes becslése	71
9.1.2. Állapotváltozóiban nemlineáris rendszer paramétereinek legkisebb négyzetes becslése	72
9.1.3. Paraméterében nemlineáris modell identifikációja numerikus módszerek segítségével	74
9.2. Rekurzív paraméterbecslő eljárások	75

TARTALOMJEGYZÉK

4

9.2.1. A rekurzív gradiens módszer alkalmazása időben állandó paraméter becsléséhez	75
---	----

Bevezetés

Identifikáció: a dinamikus rendszerek paramétereinek és modellstruktúrájának becslése

A dinamikus rendszerek paramétereinek becslése a rendszer- és irányításelmélet egyik fontos feladatosztálya. Az irányítási feladatok megoldásához, szabályozók és irányítók tervezéséhez, előrebecsléshez és diagnosztikához az irányítási cél ismeretén túlmenően ugyanis az irányítandó rendszer dinamikus modelljére is szükség van, amelyet a gyakorlatban a rendszerről rendelkezésre álló előzetes mérnöki ismeretek, valamint mért adatok birtokában meg kell határoznunk, azaz *identifikálnunk* kell. A modell alakjának, azaz *struktúrájának* meghatározása az első lépés, ezt követi a modell *paramétereinek* becslése.

A paraméterbecslési probléma

A dinamikus modellek paramétereinek becslése elvi problémakitűzése az alábbi szabványos algoritmikus feladat formájában fogalmazható meg.

MODELL PARAMÉTER BECSLÉS

Adott:

- Egy parametrizált explicit dinamikus rendszermodell az alábbi formában:

$$y^{(M)} = M(x; p^{(M)}) \quad (1)$$

ahol $p^{(M)} \in \mathbb{R}^\nu$ az ismeretlen modell paraméterek, $x \in \mathbb{R}^n$ a független változók (jelen és múltbeli bemenetek és kimenetek) és $y^{(M)} \in \mathbb{R}^\mu$ a függő változók (leggyakrabban a jövőbeli kimenet) vektora. **TODO: M micsoda?**

- A mért adatok egy rekordja (időtől függő sorozata)

$$D[0, k] = \{ (x(i), y(i)) \mid i = 0, \dots, k \} \quad (2)$$

ahol feltételezzük, hogy az $y(i)$ függő változó értéke mérési hibával terhelt, míg az $x(i)$ független változók értékét hiba nélkül beállíthatjuk.

- Egy alkalmas $\|\cdot\|$ jelnorma, amellyel az $y^{(M)}$ modell kimenet és az y mért kimenet közötti különbség nagyságát mérjük, hogy megkapjuk a paraméterbecslés jóságát jellemző alábbi veszteségfüggvény értékét :

$$L = \|y - y^{(M)}\| \quad (3)$$

Feladat:

Számítsuk ki a $p^{(M)}$ ismeretlen modell paraméterek egy $\hat{p}^{(M)}$ becslését úgy, hogy a

$$\|y - y^{(M)}\| \rightarrow \min$$

veszteségfüggvény minimális legyen.

A dinamikus modellek paramétereinek becslésére bemenet-kimenet modelleket használunk, mert a rendszer jelei közül csak a bemenetek és a kimenetek mérhetőek közvetlenül. Ebből a modellosztályból a diszkrét idejű, időinvariáns, paraméterekben lineáris eset az, amely a paraméterbecslési módszerekkel jól kezelhető. A tankönyv röviden tárgyalja a módszerek kiterjesztésének kérdéseit és problémáit paraméterekben nemlineáris és nem időinvariáns esetre is.

A dinamikus modellek paramétereinek becslése matematikai szempontból egy olyan paraméterbecslési feladat, amely megfogalmazható optimalizálási feladat formájában is. Így a dinamikus rendszerek paraméterbecslési módszereinek elsajátításához és sikeres alkalmazásához több más tudományág, a rendszer- és irányításelméleten kívül a matematikai statisztikai és az optimumszámítás, valamint a jelfeldolgozás alapfogalmainak és alapvető módszereinek aktív ismeretére van szükség.

A tankönyv részeként külön fejezetben a tárgykörhöz kapcsolódó számítógépes gyakorlatok anyaga is helyet kapott feladatok, és ezek megoldását a rendszer- és irányításelméletben szabványosnak számító MATLAB nyelvű script-ekkel megadó megoldások formájában.

A tankönyv szerkezete

A tankönyv szerkezete jól követhető a **Tartalomjegyzék** alapján. A tankönyvben tárgyalt témakörök két alapvető részre tagolódnak.

1. *Törzsanyag (1. - 4. fejezetek)*

A törzsanyag a szükséges alapismeretek összefoglalását, a dinamikus modellek paraméterbecslésének elvét és a predikciós hiba nagyságának minimalizálásán alapuló módszereket, a legkisebb négyzetek elvén alapuló módszereket, valamint a paraméterbecslési módszerek elméleti tulajdonságainak tárgyalását foglalja magában. Ezen fejezetek szorosan egymásra épülnek, ismeretük nélkül a későbbi fejezetek nem megérthetőek.

2. *Kiegészítő anyag (5. - 9. fejezetek)*

A kiegészítő anyag fejezetei az törzsanyag ismeretében önállóan, lényegében tetszőleges sorrendben feldolgozhatóak, egyik-másik speciális módszer elhagyása

nem befolyásolja lényegesen az egész témakör feletti áttekintést. Ebben a részben tárgyaljuk a Bayes becsléseket, a segédváltozók módszerét, a nemlineáris rendszerek paramétereinek becslését, a dinamikus rendszerek paramétereinek rekurzív becslését, valamint a paraméterbecslés gyakorlati kivitelezésével kapcsolatos adatelőkészítést, szűrést és kísérlettervezést. Itt kapott helyet a gyakorlat anyaga és a példatár is.

1. fejezet

Alapismeretek

A szükséges alapismeretek köre felöleli a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika szükséges alapfogalmait és tételeit a valószínűségi változókról, a statisztikai becslésekről és hipotézisvizsgálatról, valamint a lineáris regresszióról. Itt kapott helyett a rendszer- és irányításelméleti modellek közül felhasznált diszkrét idejű, sztochasztikus, lineáris, állandó paraméterű input- output modellekkel kapcsolatos ismeretek rövid összefoglalása is.

1.1. Valószínűségi változók és tulajdonságaik

Egy véletlen kísérlet kimenetelével kapcsolatos mennyiségek jellemzésére valószínűségi változókat használunk. Egy ξ valószínűségi változó olyan függvény, amely az $x \in \Omega$ eseményhez valós számot rendel. A ξ diszkrét valószínűségi változó, ha diszkrét értékeket vehet fel, folytonos valószínűségi változó, ha értéke folytonos értékalmazból származik.

1.1.1. Skalár értékű valószínűségi változók

A ξ valószínűségi változó skaláris, ha

$$\xi : \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad \xi(\omega) \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

1.1.1.1. Eloszlásfüggvény

A ξ valószínűségi változó F_ξ eloszlásfüggvénye a valószínűségi változó értékészletét a $[0, 1]$ intervallumra képezi le:

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x) \quad (1.2)$$

Az F_ξ eloszlásfüggvény monoton növekvő és minden pontban balról folytonos, határértéke $-\infty$ -ben 0, ∞ -ben 1.

1.1.1.2. Sűrűségfüggvény

A ξ valószínűségi változó valószínűség sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx} \quad (1.3)$$

1.1.1.3. Együttes eloszlás- és sűrűségfüggvény

A ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye:

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = P((\xi \leq x) \cap (\eta \leq y)) \quad (1.4)$$

Ha létezik a derivált, az együttes sűrűségfüggvény:

$$f_{\xi,\eta} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi,\eta}(x, y) \quad (1.5)$$

Adott $F_{\xi,\eta}$ és $f_{\xi,\eta}$ esetén $F_{\xi}(x) = F_{\xi,\eta}(x, \infty)$, és

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dy \quad (1.6)$$

1.1.1.4. Feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvény

Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók: [diszkrét esetben letezik \$f_{\xi,\eta}, f_{\eta}\$?](#)

$$f_{\xi|\eta}(x_i, y_j) = P(\xi = x_i | \eta = y_j) = \frac{f_{\xi,\eta}(x_i, y_j)}{f_{\eta}(y_j)} \quad (1.7)$$

Ha ξ folytonos valószínűségi változó, B pedig egy tetszőleges esemény, akkor

$$F_{\xi}(x|B) = P(\xi \leq x|B) = \frac{P((\xi \leq x) \cap B)}{P(B)} \quad (1.8)$$

Ha létezik a derivált, a feltételes sűrűségfüggvény:

$$f_{\xi}(x|B) = \frac{dF_{\xi}(x|B)}{dx} \quad (1.9)$$

1.1.1.5. Normális eloszlás

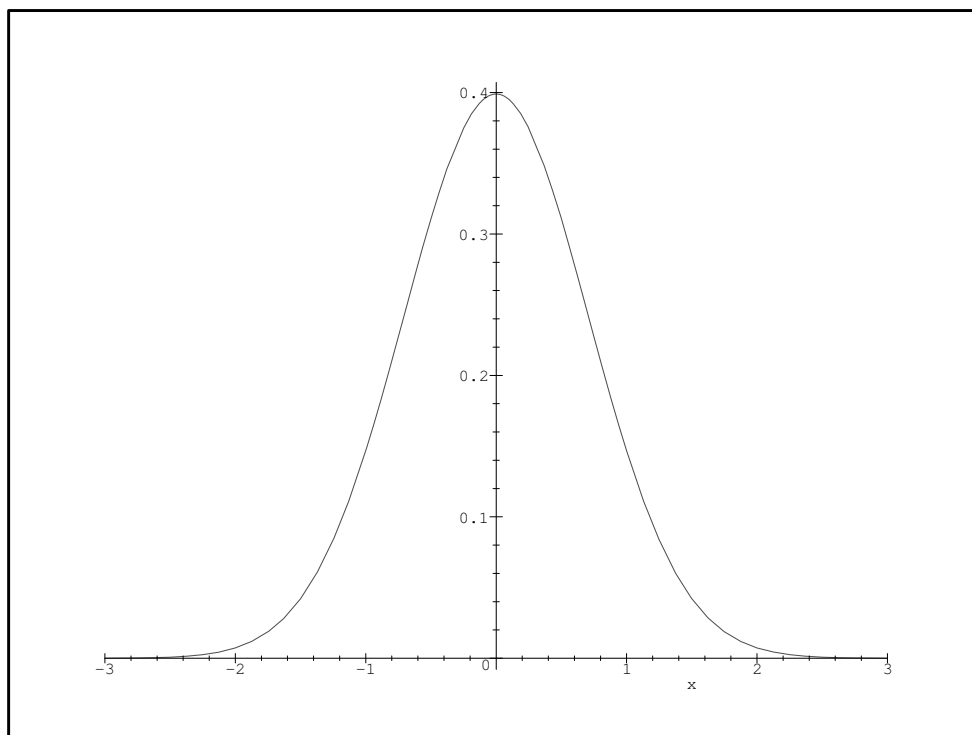
A ξ valószínűségi változó *normális vagy Gauss eloszlású*, jelölésben

$$\xi \sim N(m, \sigma^2) \quad (1.10)$$

ha a változó f_{ξ} valószínűségi sűrűségfüggvénye az alábbi alakú:

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.11)$$

ahol m a ξ valószínűségi változó *várható értéke* és σ^2 a *szórásnégyzete*. Mind m mind σ^2 valós számok. Az egydimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye a 1.1. ábrán látható.



1.1. ábra. Egydimenziós Gauss eloszlás sűrűségfüggvénye $m = 0$, $\sigma = ?$ értékek mellett

1.1.1.6. Várható érték

Az f_ξ sűrűségfüggvényű ξ valószínűségi változó várható értékét a

$$E\{\xi\} = \int x f_\xi(x) dx \quad . \quad (1.12)$$

integrál kiszámításával kaphatjuk meg.

1.1.1.7. Kovariancia és variancia

Két skalár értékű valószínűségi változó ξ és θ *kovarianciáját* az alábbi egyenlet definiálja:

$$COV\{\xi, \theta\} = E\{(\xi - E\{\xi\})(\theta - E\{\theta\})\} \quad (1.13)$$

A ξ skalár értékű valószínűségi változó varianciája pedig a változó önmagával vett kovarianciája, azaz

$$\sigma^2\{\xi\} = COV\{\xi, \xi\} = E\{(\xi - E\{\xi\})^2\} \quad (1.14)$$

1.1.2. Vektor értékű valószínűségi változók

Tegyük fel most, hogy a ξ valószínűségi változó vektor értékű, azaz

$$\xi : \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad \xi(\omega) \in \mathbb{R}^\mu \quad (1.15)$$

Ekkor $m \in \mathbb{R}^\mu$ várható értéke is egy valós vektor, az ő varianciája pedig egy valós elemű négyzetes mátrix, az ún. *kovariancia mátrix*:

$$COV\{\xi\} = E\{(\xi - E\{\xi\})(\xi - E\{\xi\})^T\} \quad (1.16)$$

Fontos megjegyezni, hogy a *kovariancia mátrixok pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrixok*, azaz

$$z^T COV\{\xi\} z \geq 0 \quad , \quad \forall z \in \mathbb{R}^\mu$$

Egy vektor értékű valószínűségi változó f_ξ valószínűségi sűrűségfüggvénye egy skalár-értékű többváltozós függvény:

$$f_\xi : \mathbb{R}^\mu \rightarrow \mathbb{R}$$

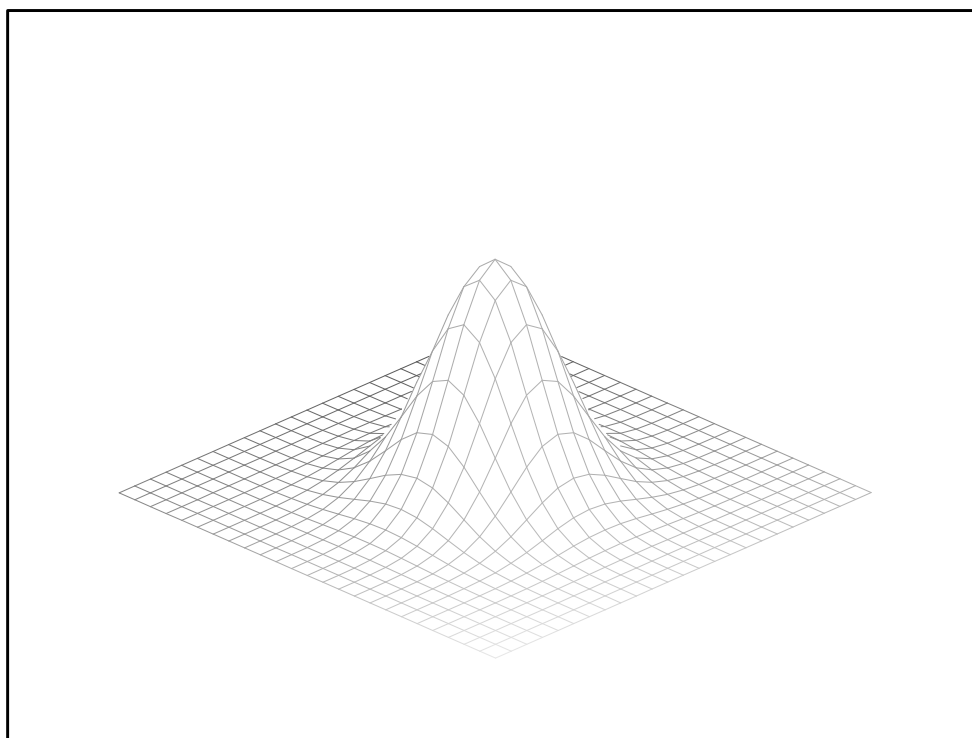
A normális vagy Gauss eloszlású m várható értékű és Σ kovariancia mátrixú valószínűségi változó

$$\xi \sim N(m, \Sigma) \quad (1.17)$$

egy olyan valószínűségi változókból álló vektor, amelynek minden $\xi_i, i = 1, \dots, \mu$ komponense egy normális eloszlású skalár értékű valószínűségi változó.

Fontos megjegyezni, hogy a (m, Σ) pár a többdimenziós Gauss eloszlásnak egy elegendő statisztikája, azaz ezek ismerete szükséges és elegendő, hogy teljesen leírjuk az eloszlásfüggvényt.

A két dimenziós normális vagy Gauss eloszlás sűrűségfüggvényének képe a 1.2. ábrán látható.



1.2. ábra. Kétdimenziós Gauss eloszlás sűrűségfüggvénye $m = 0$, $\Sigma = I$ értékek mellett

A normális eloszlás egyik legfontosabb tulajdonsága az *önreprodukáló tulajdonság*. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges paraméterű független normális eloszlású valószínűségi változók tetszőleges lineáris kombinációja is normális eloszlású valószínűségi változó lesz.

1.1.3. Normális valószínűségi változók lineáris transzformációja

Legyen adott egy $\xi(\omega) \in R^n$ vektor értékű valószínűségi változó. Ezt a változót a $T \in R^{n \times n}$ nemszinguláris négyzetes transzformációs mátrix alkalmazásával transzformálhatjuk a következőképpen:

$$\eta = T\xi \quad (1.18)$$

Ekkor a transzformáció eredményeképpen kapott η valószínűségi változónak az alábbiak a paraméterei:

$$E\{\eta\} = TE\{\xi\} \quad , \quad COV\{\eta\} = TCOV\{\xi\}T^T \quad (1.19)$$

Ha a ξ valószínűségi változó $N(m_\xi, \Sigma_\xi)$ normális eloszlású volt, m_ξ várható értékkel és Σ_ξ kovariancia mátrixszal, akkor η transzformált valószínűségi változó is $N(m_\eta, \Sigma_\eta)$ normális eloszlású lesz, ahol

$$m_\eta = Tm_\xi \quad , \quad \Sigma_\eta = T\Sigma_\xi T^T$$

1.2. Statisztikai becslések és tulajdonságai

1.2.1. Statisztikai becslések

A statisztikai becsléseket valószínűségi változók eloszlása jellemzőinek vagy statisztikáinak (például várható érték, szórás) meghatározására használjuk a változókra vonatkozó mérési eredmények felhasználásával.

Egy ξ valószínűségi változóra vonatkozó mérések halmazát egy úgynevezett *mintában* gyűjtjük össze,

$$S(\xi) = \{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \} \quad (1.20)$$

amelynek ξ_i , $i = 1, \dots, n$ független és azonos eloszlású elemei a közös ξ valószínűségi változóból származnak. A mintaelemek egy ϕ függvénye a közös eloszlás egy Φ statisztikájának egy becslése

$$\phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (1.21)$$

Fontos megjegyezni, hogy a ϕ becslés maga is egy valószínűségi változó.

Egy Φ statisztika ϕ becslése *torzítatlan*, ha $E(\phi) = \Phi$. Egy Φ statisztika ϕ becslése *hatásos*, ha az összes lehetséges torzítatlan becslések közül a lehető legkisebb szórású.

A gyakorlatban előforduló legfontosabb becslések az alábbiak:

1. mintaközép (M) a várható érték becslésére

$$m = E\{\xi\} \simeq M\{S(\xi)\} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} \quad (1.22)$$

2. korrigált empirikus szórásnégyzet (s^2) a szórásnégyzet becslésére, amely skalár értékű valószínűségi változókból álló mintára:

$$\sigma^2 \simeq s^2\{S(\xi)\} = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - M)^2}{n - 1} \quad (1.23)$$

1.2.2. Hipotézisek tesztelése

A statisztikai hipotézisek tesztelése a matematikai statisztika egyik alapfeladata annak meghatározására, hogy vajon egy megadott reláció vagy állítás érvényes-e egy valószínűségi változóra vagy változókra.

A hipotézis tesztelés feladatkitűzését és a tesztelés elvi menetét az alábbiakban ismertetjük egy skalár értékű normális eloszlású valószínűségi változó várható értékére vonatkozó legegyszerűbb hipotézis példáján.

HIPOTÉZIS TESZTELÉS

Adott:

- egy statisztikai *mint*a a (1.20) egyenlet szerint,
- egy *hipotézis*, amely a mintában szereplő valószínűségi változók egy statisztikájára vonatkozó állítás, például

$$H_0 : m = m_0 \quad (1.24)$$

ahol m_0 egy adott állandó, az m várható érték mint statisztika feltételezett értéke,

- *feltételezés a mintaelemek közös valószínűségi változójának eloszlására vonatkozóan*, például normális eloszlású ismert Σ kovariancia mátrixszal,
- egy *szignifikancia szint* $0 \leq \varepsilon \leq 1$ amely egy valószínűség jellegű megbízhatósági mutató, amely szinten szeretnénk tesztelni a hipotézist.

Kérdés:

Igaz-e a H_0 hipotézis a ε szignifikancia szinten az $S(\xi)$ mintában szereplő mintaelemek (mérések) alapján?

A megoldás elvi lépései:

A hipotézis tesztelése általában az alábbi három, egymást követő lépésben történik.

1. *Kiszámítjuk a hipotézis relációban szereplő statisztika egy becslését, a várható érték becslésére például az M mintaközepet a (1.22) egyenlet szerint.*
2. *Konstruálunk egy normalizált ismert eloszlású valószínűségi változót a fenti becslésből és a hipotézis tesztelési feladat egyéb adataiból, példánkban ez*

$$u = \frac{M\{S(\xi)\} - m_0}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad (1.25)$$

3. *Összehasonlítjuk a kiszámított normalizált ismert eloszlású valószínűségi változó mintából becsült értékét az ún. kritikus értékével (példánkban u_{crit}), amelyet a vonatkozó statisztikai táblázatban találhatunk meg az adott ε szignifikancia szintet is figyelembe véve. Ha $u \leq u_{crit}$ akkor elfogadjuk, egyébként elvetjük a hipotézist.*

1.3. Lineáris regresszió és a becsült paraméterek statisztikai tulajdonságai

1.3.1. Paraméterbecslés lineáris regresszióval

A gyakorlatban sokszor fordul elő az az eset, amikor a mérési eredmények, azaz a statisztikai minta elemei nem egy közös valószínűségi változóból származnak, hanem valamely x_i ismert determinisztikus változótól függő, de véletlen, azonos eloszlású és független mérési hibával terhelt mért értékekkel $y^{(M)}$ rendelkezünk. Ez esetben a változók közötti determinisztikus, leggyakrabban lineáris függvény paramétereit lineáris regresszióval becsülhetjük meg. A lineáris regresszió az eltérések négyzetösszegét minimalizálva állítja elő a becslést a következő feladatspecifikáció alapján.

PARAMÉTEREK BEN LINEÁRIS MODELLEK PARAMÉTEREINEK LEGKISEBB NÉGYZETES BECSLÉSE

Adott:

- Egy paraméterekben lineáris determinisztikus modell

$$y^{(M)} = M(x, p) = x^T p \quad (1.26)$$

amelyben $p \in R^n$ az ismeretlen modell paraméterek, a determinisztikus független változók $x \in R^{n \times \mu}$ mátrixa és az $y^{(M)} \in R^\mu$ vektor értékű függő változó.

- Az m ($m \geq \mu$) mérésből álló mért értékek halmaza $(y(i), x(i))$ $i = 1, \dots, m$, amelyet az alábbi alakú mérési vektor-mátrix formába rendezünk:

$$Y = Xp, \quad (1.27)$$

ahol

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(m) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x^T(1) \\ x^T(2) \\ \vdots \\ x^T(m) \end{bmatrix}, \quad (1.28)$$

ahol $Y \in R^{\mu \cdot m}$ és $X \in R^{(\mu \cdot m) \times n}$. Az $y(i)$ mért értékek mérési hibával terhelték.

- Egy L veszteségfüggvény

$$L(p) = (Y - Xp)^T W (Y - Xp) \quad (1.29)$$

ahol $W \in R^{(\mu \cdot m) \times (\mu \cdot m)}$ egy alkalmas pozitív definit súlymátrix.

Feladat:

Számítsuk ki a p paraméterek egy \hat{p} becslését úgy, hogy az L veszteségfüggvény minimális legyen.

Módszer:

A p paraméterek legkisebb négyzetes (LS) becslése az alábbi alakú:

$$(X^T W X) \hat{p} = X^T W Y \quad \text{or} \quad \hat{p} = (X^T W X)^{-1} X^T W Y \quad (1.30)$$

A fenti feladattal és módszerrel kapcsolatban néhány fontos megfigyelést és megjegyzést tehetünk.

1. Az esetek döntő többségében feltételezzük, hogy mért függő változók értékét *additív, nulla várható értékű mérési hiba* terheli, azaz

$$y(i) = y^{(M)}(i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.31)$$

$$E\{\varepsilon_i\} = 0, \quad (1.32)$$

ahol $y^{(M)}(i) = M(x(i), p)$ a rendszer M modell szerinti kimenete az i . mérési pontban. Ha ezen túlmenően az egyes *mérési hibák egymástól statisztikailag függetlenek és azonos normális eloszlásúak* Σ_ε kovariancia mátrixszal, akkor a mért értékek eloszlása is normális lesz:

$$y(i) \sim N(y^{(M)}(i), \Sigma_\varepsilon) \quad (1.33)$$

2. A fenti súlyozot legkisebb négyzetes becslési probléma megadásánál legnagyobb problémát a súlyok meghatározása okozza. Az (1.29) egyenlet szerinti L veszteségfüggvény W súlymátrixát arra használjuk, hogy az egyes mérési pontokban észlelhető eltérést a megfelelő súllyal vegye figyelembe. Ha bizonyos mérési pontokat megbízhatatlanabbnak ítélünk másoknál, azaz az ott tapasztalható mérési hibának nagy a varianciája, akkor ezekhez kisebb súlyt kell rendelnünk. Ezek alapján a súlymátrix egy kézenfekvő választása, ha azt a mérési hibák ismert vagy becsült kovariancia mátrixából a következőképpen konstruáljuk meg:

$$W = \text{diag}(\Sigma_\varepsilon^{-1}, \Sigma_\varepsilon^{-1}, \dots, \Sigma_\varepsilon^{-1}). \quad (1.34)$$

Megjegyezzük, hogy a fenti inverz mindig létezik, hiszen a kovariancia mátrixok pozitív definit mátrixok.

1.3.2. A regresszióval kapott paraméterek tulajdonságai

Ezt at kell nezni!! pl. T nem szingularis Az (1.30) becslési egyenletet tekinthetjük úgy is, mint az Y valószínűségi változó egy lineáris transzformációját az alábbi konstans determinisztikus mátrixszal:

$$T = (X^T W X)^{-1} X^T \quad (1.35)$$

és a transzformáció eredménye a paraméterek becslésére konstruált \hat{p} valószínűségi változó. Ennek alapján meghatározhatjuk a \hat{p} becslés várható értékét és szórását a (1.19) egyenlet alapján:

$$\text{COV}\{\hat{p}\} = T \text{COV}\{Y\} T^T \quad (1.36)$$

Ha a mérési hibák normális eloszlásúak nulla várható értékkel és Δ_ε kovariancia mátrixszal, valamint a (1.29) veszteségfüggvény egyenletbeli súlymátrixot az (1.34) egyenlet szerint választottuk meg, akkor a \hat{p} becslés az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- *A becslés normális eloszlású.*
- *A becslés várható értéke $E\{\hat{p}\} = p$, tehát a becslés torzítatlan.*
- *A becslés kovariancia mátrixa*

$$COV\{\hat{p}\} = (X^T W X)^{-1} \quad (1.37)$$

- *A becslés egy maximum likelihood vagy legnagyobb valószínűségű becslés, és így egy hatásos optimális becslés*

1.4. Diszkrét idejű input-output modellek

1.4.1. Diszkrét idejű fehérzaj folyamat és a belőle származtatott sztochasztikus folyamatok

A dinamikus rendszerek paramétereinek becslése szempontjából a diszkrét idejű sztochasztikus folyamatok valószínűségi változók (végtelen) sorozataként tekinthetők. Ebben a pontban csak skalár értékű diszkrét idejű sztochasztikus folyamatokkal foglalkozunk, de a fogalmak és az eredmények általánosíthatóak vektor értékű folyamatokra is a valószínűségi változóknál a 1.1 pontban megismert módon.

Egy $\{e(k)\} k = -\infty^{\infty}$ diszkrét idejű sztochasztikus folyamat, amelynek $e(k)$ elemei valószínűségi változók minden k -ra. *Diszkrét idejű fehérzaj folyamatról beszélünk*, ha elemei független, azonos eloszlású valószínűségi változók.

A diszkrét idejű fehérzaj folyamat stacionárius. Általában feltételezzük, hogy várható érték függvénye azonosan nulla minden időpillanatban, azaz $m(k) = 0$. A diszkrét idejű fehérzaj folyamat $r(k)$ kovariancia függvénye a következő:

$$r(k) = \begin{cases} \sigma^2 & k = 0 \\ 0 & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (1.38)$$

Fontos megjegyezni, hogy a fenti kovariancia függvény, azaz a sztochasztikus folyamat elemei páronkénti kovarianciájának nulla volta csak *normális eloszlású* fehérzaj folyamat esetén biztosítja az elemek függetlenségét.

Az $\{e(k), k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ diszkrét idejű fehérzaj folyamatból származtatható az úgynevezett *mozgó átlag (moving average, MA) folyamat* a következőképpen:

$$y(k) = e(k) + b_1 e(k-1) + \dots + b_{n_b} e(k-n) = B^*(q^{-1})e(k) \quad (1.39)$$

A MA folyamat várható érték és autokovariancia függvénye az alábbi egyszerű módon számítható:

$$m_y(k) = 0, \quad r_{yy}(0) = 1 + b_1^2 + \dots + b_{n_b}^2, \quad r_{yy}(1) = b_1 + b_1 b_2 + \dots + b_{n-1} b_{n_b}, \quad \dots$$

Az *autoregressziós (AR) folyamat* szintén egy $\{e(k), k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ diszkrét idejű fehérzaj folyamatból származtatható az alábbi egyenlet szerint:

$$A^*(q^{-1})y(k) = y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_{n_a}y(k-n_a) = e(k) \quad (1.40)$$

Az *autoregressziós - mozgóátlag folyamat külső jellel (ARMAX folyamat)* a fenti két folyamat lineáris kombinációja, azaz

$$A^*(q^{-1})y(k) = B^*(q^{-1})u(k) + C^*(q^{-1})e(k) \quad (1.41)$$

az $A^*(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_{n_a}q^{-n_a}$, $B^*(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + b_{n_b}q^{-n_b}$, $C^*(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + c_{n_c}q^{-n_c}$ polinomokkal.

1.4.2. Diszkrét idejű determinisztikus input-output modellek

A lineáris időinvariáns egybemenetű-egykimenetű (SISO) rendszerek dinamikus bemenet-kimenet modelljének általános alakja az alábbi magasabbrendű differencia egyenlet alakjában írható:

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_{n_a}y(k-n_a) = b_0u(k-d) + \dots + b_{n_b}u(k-d-n_b)$$

ahol $d = n_a - n_b$ az úgynevezett *holtidő*, n_a és n_b a modell rendje, $y(k)$, $u(k)$ a diszkrét idejű rendszer kimenete illetve bemenete. A fenti egyenlet kompakt formája az

$$A^*(q^{-1})y(k) = B^*(q^{-1})u(k-d) \quad (1.42)$$

egyenlet, ahol $A^*(q^{-1})$, $B^*(q^{-1})$ a q^{-1} visszafelé ható eltolási operátor (backward shift operator) polinomjai.

1.4.3. Diszkrét idejű sztochasztikus input-output modellek

A lineáris időinvariáns egybemenetű-egykimenetű (SISO) rendszerek sztochasztikus bemenet-kimenet modelljének általános alakja a fenti determinisztikus modell és egy ARMA folyamat kombinációja, egy úgynevezett *autoregressziós-mozgó átlag folyamat külső jelsorozattal (ARMAX process)*, azaz képletben

$$A^*(q^{-1})y(k) = B^*(q^{-1})u(k) + C^*(q^{-1})e(k) \quad (1.43)$$

az alábbi polinomokkal:

$$A^*(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a}, \quad (1.44)$$

$$B^*(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b}, \quad (1.45)$$

$$C^*(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_c}q^{-n_c}. \quad (1.46)$$

2. fejezet

A dinamikus modellek paraméterbecslésének elve, a predikciós hiba nagyságának minimalizálásán alapuló módszerek

A dinamikus rendszerek input-output modelljei felfoghatóak úgy is, mint a jövőbeli kimenetek becslésére használható formulák, hiszen a bemenetek ismert jelek, szabadon megválaszthatóak. A predikciós hiba ezután a modellel jósolt és a valódi mért kimenet érték valamilyen különbsége, amely maga is jelsorozat. A predikciós hiba minimalizálásán alapuló paraméterbecslési módszerek ezen predikciós hibajel valamilyen normában mért nagyságát minimalizálják.

2.1. A predikciós hiba

2.1.1. Prediktív input-output modellek

A dinamikus modellek paramétereinek becslésére bemenet-kimenet modelleket használunk, mert a rendszer jelei közül csak a bemenetek és a kimenetek mérhetőek közvetlenül.

2.1.1.1. Lineáris időinvariáns egybemenetű-egykimenetű rendszerek

Egy bemenet-kimenet modell felfogható úgy is, mint a jövőbeli kimenetek becslésére használható formula, hiszen a bemenetek ismert jelek, szabadon megválaszthatóak. A modelleknek ezt az alakját *prediktív input-output modellnek* nevezzük. Lineáris időinvariáns egybemenetű-egykimenetű rendszerek bemenet-kimenet modelljének prediktív alakja az alábbi:

$$\hat{y}(k|\theta) = W_y(q^{-1}, \theta)y(k) + W_u(q^{-1}, \theta)u(k) \quad (2.1)$$

A fenti egyenletbeli $W_y(q^{-1}, \theta)$ és $W_u(q^{-1}, \theta)$ tényezők úgynevezett *lineáris szűrők*, a q^{-1} visszafelé ható eltolási operátor racionális törtfüggvényei és a θ vektor tartalmazza az állandó, ismeretlen, becsülni kívánt paramétereket.

Nézzük meg, hogy a diszkrét idejű lineáris időinvariáns egybemenetű-egykimenetű sztochasztikus rendszerek általános alakú bemenet-kimenet modellje, a

$$A^*(q^{-1})y(k) = B^*(q^{-1})u(k) + C^*(q^{-1})e(k) \quad (2.2)$$

kifejezés, hogyan hozható erre a fenti prediktív alakra.

Először kifejezzük az $e(k)$ kimeneti rendszerzajt az (2.2) egyenletből:

$$e(k) = H^{-1}(q^{-1}, \theta)y(k) - H^{-1}(q^{-1}, \theta)G(q^{-1}, \theta)u(k) \quad (2.3)$$

ahol

$$H^{-1}(q^{-1}, \theta) = \frac{A^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})}, \quad G(q^{-1}, \theta) = \frac{B^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} \quad (2.4)$$

A kimenet becsült értéke $\hat{y}(k|\theta)$ ezután

$$\hat{y}(k|\theta) = y(k) - e(k) = (1 - H^{-1}(q^{-1}, \theta))y(k) + (H^{-1}(q^{-1}, \theta)G(q^{-1}, \theta))u(k)$$

amiből a képletek összehasonlításával látható, hogy

$$W_y(q^{-1}, \theta) = 1 - H^{-1}(q^{-1}, \theta) = 1 - \frac{A^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})}$$

$$W_u(q^{-1}, \theta) = H^{-1}(q^{-1}, \theta)G(q^{-1}, \theta) = \frac{B^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})}$$

Fontos megjegyezni, hogy a fenti szűrők az általános esetben végtelen rendűek, azaz visszamenőleg végtelen sok mért bemenet-kimenet párra lenne szükség a pontos szűréshez. A gyakorlatban ezek véges hosszúságúra csonkolt alakjával dolgozunk. Vannak azonban olyan rendszerosztályok, amelyeknél a prediktív alak véges rendű, ezt mutatja az alábbi példa.

2.1.1. Példa. ARX modellek prediktív alakja

Tekintsük a legegyszerűbb esetet, amikor az általános (2.2) alakú input-output modellben a mozgóátlag tag nulla, azaz a *kimeneti rendszerzaj fehér*. Ebben az esetben $C^*(q^{-1}) = 1$. Ekkor $H^{-1}(q^{-1}, \theta) = A^*(q^{-1})$ és így

$$W_y(q^{-1}, \theta) = 1 - A^*(q^{-1}), \quad W_u(q^{-1}, \theta) = B^*(q^{-1}) \quad (2.5)$$

$$\theta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m]^T, \quad N > n + m \quad (2.6)$$

2.1.1.2. A mért érték sorozat

A gyakorlatban mindig véges mérési sorozat áll rendelkezésünkre a rendszer bemenet-kimenet páryairól egymást követő ekvidisztáns időpillanatokban, amelyeket az úgynevezett *mért érték sorozatba* vagy *mérési rekordba* rendezünk:

$$D[1, N] = D^N = \{(y(k), u(k)) \mid k = 1, \dots, N\} \quad (2.7)$$

2.1.1.3. Nemlineáris időinvariáns egykimenetű rendszerek

Nemlineáris időinvariáns egybemenetű-egykimenetű rendszerek prediktív alakjának meghatározásához a lineáris eset (2.1) egyenletét általánosítjuk a következőképpen:

$$\hat{y}(k|\theta) = g(k, D[1, k-1]; \theta) \quad (2.8)$$

ahol $g(\cdot)$ adott nemlineáris skalár értékű függvény, a nemlineáris bemenet-kimenet modellből származtatható.

A nemlineáris időinvariáns egykimenetű rendszerek egy fontos speciális osztálya az úgynevezett *paraméterekben lineáris* rendszereké. Ez esetben a fenti (2.8) egyenlet az alábbi speciális alakot ölti:

$$\hat{y}(k|\theta) = \theta^T g^*(k, D[1, k-1]) \quad (2.9)$$

ahol $g^*(\cdot)$ adott nemlineáris vektor értékű függvény.

2.1.2. Példa. Egy egyszerű paraméterekben lineáris nemlineáris időinvariáns egykimenetű rendszer

Tekintsünk egy paraméterekben lineáris ARX esetet, amikor *a kimeneti rendszerzaj fehér.*

$$y(k) = a_1 y^2(k-1) + b_0 u^4(k) + e(k) \quad (2.10)$$

A fenti egyenlet könnyűszerrel átírható az általános (2.9) alakra az alábbi megfeleltetésekkel

$$\theta = [a_1 \ b_0]^T, \quad \hat{y}(k|\theta) = y(k) - e(k) \quad (2.11)$$

Megjegyezzük, hogy segédváltozók

$$y^2(k-1) = z(k-1), \quad u^4(k) = w(k) \quad (2.12)$$

bevezetésével a modell teljesen ARX alakra hozható.

2.1.1.4. A predikciós hiba

Tételezzük fel, hogy adott egy lineáris vagy nemlineáris prediktív modell θ_* paraméterekkel. Ekkor előállítható a *predikciós hiba sorozat* a modelltől és a mért érték sorozatból az alábbi módon:

$$\varepsilon(k, \theta_*) = y(k) - \hat{y}(k|\theta_*) \quad , \quad k = 1, \dots, N \quad (2.13)$$

2.1.2. A paraméterbecslés elve

Egy paraméterbecslési módszer a mért érték sorozatból előállít egy becsült paraméter vektort, azaz formálisan egy leképezés a mért érték sorozatok teréből a becsült paraméter vektorok terébe:

$$D^N \rightarrow \hat{\theta}_N \quad (2.14)$$

Egy modell "jó", azaz a becsült paraméterek "jóak", ha a (2.1) predikciós hibák "kicsik".

A paraméterbecslés elve

Az ismert D^N mért érték sorozatból kiszámíthatjuk az $\varepsilon(k, \theta)$ becslési hibát a (2.13) egyenlettel. A $k = N$ időpillanatban válasszuk meg a becsült $\hat{\theta}_N$ paraméter vektort úgy, hogy a $\varepsilon(k, \hat{\theta}_N)$, $k = 1, \dots, N$ predikciós hibák a lehető legkisebbek legyenek.

2.1.3. A predikciós hiba nagysága

Mint az már az előzőekből is látszik, az $\varepsilon(k, \theta)$ predikciós hiba még egykimenetű rendszereknél is egy véges N hosszúságú sorozat, többkimenetű esetben vektorokból álló sorozat. Így a predikciós hiba nagyságának jellemzésére a vektornormákból általánosított valamely jelnormát kell használnunk.

2.1.3.1. Előszűrés

A predikciós hiba előszűrésére akkor van szükség, ha a predikciós hibasorozat tagjai korreláltak, azaz nem tekinthetők fehérzajnak. Ekkor egy $L(q^{-1})$ stabil lineáris szűrőt alkalmazunk a paraméterbecslés előtt, amellyel előállítjuk az

$$\varepsilon_F(k, \theta) = L(q^{-1})\varepsilon(k, \theta) \quad , \quad k = 1, \dots, N \quad (2.15)$$

szűrt predikciós hiba sorozatot.

A lineáris szűrőt a predikciós hiba empirikus autokorrelációs függvénye alapján célszerű megválasztani úgy, hogy

$$L(q^{-1}) = 1 + l_1 q^{-1} + \dots + l_r q^{-r} \quad (2.16)$$

ahol l_i az i -edik autokorrelációs együttható. A szűrő akkor stabil, ha a fenti polinom gyökei a komplex egységkörön belül vannak.

2.1.3.2. A norma megválasztása egykimenetű esetben

A predikciós hiba vagy a szűrt predikciós hiba nagyságát az alábbi általános jelnormával mérjük:

$$V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ell(\varepsilon(k, \theta)) \quad (2.17)$$

ahol $\ell(\cdot)$ egy pozitív skalár értékű függvény.

Az $\ell(\cdot)$ legegyszerűbb és legelterjedtebb megválasztása a négyzetes jelnorma:

$$\ell(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 \quad (2.18)$$

Ezzel az egyes időpontokban mért predikciós hibákat egyenlő súllyal vesszük figyelembe.

Az időben súlyozott jelnorma alkalmazása akkor célszerű, ha bizonyos időpontokhoz tartozó mérések nem egyenlő mértékben pontosak vagy megbízhatóak. Ilyen esetben egy $\beta(N, k)$ időtől függő súlytényező sorozatot használunk:

$$V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \beta(N, k) \ell(\varepsilon(k, \theta)) \quad (2.19)$$

2.1.3.3. A norma megválasztása többkimenetű esetben

Többkimenetű esetben a predikciós hiba sorozat egy vektor értékű jelsorozat, így már maga az $\ell(\varepsilon)$ norma is vektornorma. A legegyszerűbb, időben súlyozatlan esetben egy pozitív definit szimmetrikus négyzetes $p \times p$ Λ mátrixszal (ahol p a kimenetek száma) előállíthatjuk a szükséges

$$\ell(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^T \Lambda^{-1} \varepsilon \quad (2.20)$$

általánosított négyzetes jelnormát, amelyet ugyanúgy használhatunk a (2.17) egyenletben a predikciós hiba nagyságának kiszámítására, mint a skalár esetben a (2.18) normát.

2.1.3.4. A paraméterbecslés, mint optimalizációs feladat

Ha megfelelően megválasztottuk a predikciós hiba vagy a szűrt predikciós hiba nagyságának mérésére szolgáló normát az (2.17) alakban, akkor az ott szereplő $V_N(\theta, D^N)$ érték egy jól meghatározott érték minden adott θ paraméter vektor és D^N mért érték sorozat esetén. Így az általános paraméterbecslési feladat az alábbi optimalizálási feladat formájában fogalmazható meg:

Az általános paraméterbecslési feladat

Az ismert D^N mért érték sorozatból és a θ paraméter vektor értékéből kiszámíthatjuk a $V_N(\theta, D^N)$ norma értéket a (2.17) egyenlettel. A $k = N$ időpillanatban válasszuk meg a becsült $\hat{\theta}_N$ paraméter vektort úgy, hogy

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(D^N) = \arg \min_{\theta} V_N(\theta, D^N) \quad (2.21)$$

3. fejezet

A legkisebb négyzetek elvén alapuló módszerek

A legkisebb négyzetes hibájú (LS=Least Squares) paraméterbecslő eljárásokat a négyzetes hibakritériumból kiindulva származtathatjuk, vagyis úgy, ha a predikciós hiba négyzetét minimalizáljuk.

A predikciós hiba minimalizálásán alapuló módszerek közül a legegyszerűbb, és egyben a gyakorlatban legelterjedtebb módszer a legkisebb négyzetek elvén alapuló paraméterbecslés. A négyzetes kritérium mellett sok elméleti és gyakorlati érv szól, így például: könnyen kezelhető analitikusan, fizikailag jól interpretálható (pillananti teljesítmény, energiatartalom stb.) és nem utolsósorban az ilyen kritérium alapján származtatott becslő könnyen megvalósítható. A módszer ismertetése mellett tárgyaljuk a paraméterbecslés aszimptotikus tulajdonságait is.

3.1. A legkisebb négyzetes hibájú becslők származtatása általános esetben

A legkisebb négyzetes hibájú becslés feladata a következőképpen fogalmazható meg: a mérendő rendszer ismeretlen θ paramétervektorának olyan $\hat{\theta}$ becslését keressük, amely mellett a rendszerről nyert megfigyelés (y) és a prediktív modell kimenőjelének (\hat{y}) négyzetes eltéréseként definiált hiba

$$V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [y(k) - \hat{y}(k|\theta)]^2 \quad (3.1)$$

minimális lesz. Az általános esetben azt feltételezzük, hogy a keresett paramétervektor

$$\theta^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_m]$$

m dimenziós, az

$$y^T = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(N)]$$

N dimenziós vektor, valamint hogy prediktív modellünk a következő alakú:

$$\hat{y}(k|\theta) = f(\theta, k) \quad (3.2)$$

Az N db megfigyelésen alapuló négyzetes hiba tehát a következő:

$$V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [y(k) - f(k, \theta)]^2 \quad (3.3)$$

amely a paraméterteréből (\mathbb{R}^m) a valós számok halmazába (\mathbb{R}) képező függvény. E függvény minimumához tartozó paramétervektort szeretnénk megkeresni, amely a legkisebb négyzetes becslést szolgáltatja. A függvény szélsőértéke ott lehet, ahol minden parciális deriváltjának értéke 0 (a megtalált szélsőérték pedig mindenképpen minimum lesz a hibakritérium négyzetes alakja miatt). Tehát a következő egyenletrendszert kell megoldani θ -ra:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - f(k, \theta)] \frac{\partial f(k, \theta)}{\partial \theta_j} = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

A megoldás bonyolultsága nyilván jelentős mértékben függ az $f(k, \theta)$ függvénykapcsolattól, annak is a θ -ra vonatkozó részétől.

Paraméterekben nemlineáris modell esetén a fenti egyenletek is nemlineáris függvényei lesznek a keresett paraméternek. Erről részletesebben a 6. fejezetben lesz szó. Analitikus megoldásuk általában komoly nehézségekbe ütközik. Sok esetben a legcélravezetőbb valamely numerikus, iteratív módszer alkalmazása.

3.2. A prediktív modellek paramétereinek becslése lineáris regresszióval

Az általános eset vizsgálata után a következőkben tételezzük fel, hogy a megfigyelések a becslendő paramétervektor lineáris függvényei, tehát *paraméterekben lineáris modellel* van dolgunk. Látni fogjuk, hogy lineáris modell esetén az LS becslés egyszerűen a megfigyelések lineáris függvényeként határozható meg. Az egyszerű megvalósíthatóság miatt ezért sok esetben akkor is célszerű a lineáris modellel való közelítést alkalmazni, ha valójában nemlineáris esettel állunk szemben.

Az előző fejezetben tárgyalt diszkrét idejű időinvariáns dinamikus modellek prediktív alakja egy kimenet esetén a paraméterbecslés érdekében felírható az alábbi paraméterekben lineáris alakban

$$\hat{y}(k|\theta) = \theta^T \varphi(k) \quad (3.5)$$

ahol $\varphi(\cdot)$ az úgynevezett *regresszor*. θ itt is a becslni kívánt állandó modellparaméterek vektora, a $\varphi(\cdot)$ regresszor pedig a mért adatokat tartalmazza.

A predikciós hiba a megfigyelt érték és a regressziós modell kimenetének különbsége:

$$\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \theta^T \varphi(k) \quad (3.6)$$

A minimalizálandó kritériumfüggvény pedig

$$V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [y(k) - \theta^T \varphi(k)]^2 \quad (3.7)$$

Elvégezve a parciális deriválásokat a paramétervektor elemei szerint, a következő egyenletrendszer adódik:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) [y(k) - \varphi^T(k)\theta] = 0 \quad (3.8)$$

Ebből kapjuk:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k)\theta \quad (3.9)$$

aminek megoldása θ -ra adja az LS- vagy LKN-becslést:

$$\hat{\theta}_{LS} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k) \quad (3.10)$$

3.2.1. Példa. ARX modellek paramétereinek LKN becslése

Tekintsük a legegyszerűbb esetet, amikor az általános (2.2) alakú input-output modellben a mozgóátlag tag nulla, azaz *a kimeneti rendszerzaj fehér*. Ebben az esetben a modell prediktív alakja az alábbi

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) \cdots - a_ny(k-n) + b_0u(k) + \cdots + b_mu(k-m) \quad (3.11)$$

Ennek megfelelően a paramétervektor:

$$\theta = [-a_1 \ -a_2 \ \dots \ -a_n \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m]^T \quad (3.12)$$

a regresszor pedig:

$$\varphi(k) = [y(k-1) \ y(k-2) \ \dots \ y(k-n) \ u(k) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-m)]^T \quad (3.13)$$

3.3. A becslés tulajdonságai

Sajnos az LKN-becsléssel az (3.10) egyenlet alapján kapott becslés tulajdonságait nem számíthatjuk ki a lineáris regressziónál a 1.3.2 pontban megismert módon, mert a $\varphi(k)$ regresszor vektorban szereplő jelek között a kimenet mért értékei is szerepelnek, ezért ezek nem tekinthetők determinisztikus (általunk tetszőlegesen beállítható) értékeknek. Ezáltal az egyes $y(k)$ mért értékeket még ARX modell esetén sem csak független fehér mérési hiba terheli a determinisztikus modellhez képest. Így a becslés tulajdonságainak vizsgálatához más utat kell választanunk.

Tételezzük fel, hogy a megfigyelt bemenet-kimenet értékeket ténylegesen egy

$$y(k) = \theta_0^T \varphi(k) + \nu_0(k) \quad (3.14)$$

modellel leírható rendszer állítja elő valamely $\{\nu_0(k)\}$ hibasorozattal. A hiba ez esetben a mérési hiba és a modellezési hiba összege, azaz a (3.14) egyenlet pontos alakja különbözhet a valóságos rendszer viselkedését leíró "valódi rendszermodell"-től. θ_0 a paraméter úgynevezett *nominális értéke*, amelyet tekinthetünk "valódi érték"-nek is.

Ha bevezetjük (3.10) egyenletbeli mátrixra a

$$R(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \quad (3.15)$$

jelölést, akkor a (3.10) becslés az (3.14) egyenlet felhasználásával az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{LS}(N) &= [R(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) [\varphi(k)^T \theta_0 + \nu_0(k)] \\ &= \theta_0 + [R(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \nu_0(k) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Látható, hogy a becslési hiba a fenti egyenlet második, a regresszort és a hibát is tartalmazó tagja. Azt szeretnénk,

- ha ez a tag "kicsi" lenne, hiszen ekkor lesz a becsült érték a valódi θ_0 értékhez közel, és azt,
- ha ez a tag tartana 0-hoz a minta elemszámának növelésével, azaz, ha $N \rightarrow \infty$.

Megjegyezzük, hogy egy becslés viselkedését a mintaelemszám növelésével a becslés *aszimptotikus viselkedés-ének* nevezik. Ilyen értelemben beszélhetünk például aszimptotikus torzítatlanságról.

Először is látható a fenti egyenletből, hogy ha a $\nu_0(k)$ hiba kicsi a $\varphi(k)$ mért értékeket tartalmazó regresszorhoz képest, akkor a

$$[R(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \nu_0(k) \quad (3.17)$$

is kicsi lesz, így a becsült $\hat{\theta}_{LS}(N)$ érték közel lesz a valódi θ_0 -hoz.

Az aszimptotikus viselkedés vizsgálatának feltételei

A (3.17) becslési hiba aszimptotikus viselkedésének vizsgálatához tegyük fel, hogy

1. a $\{\nu_0(k)\}_{k=1}^N$ hiba egy stacionárius sztochasztikus sorozat (azaz diszkrét idejű sztochasztikus folyamat) egy realizációja,
2. a rendszer maga egy ARX modellel írható le, azaz a $\varphi(k)$ regresszor az (3.13) egyenlet szerinti alakban írható,
3. magát az $\{u(k)\}_{k=1}^N$ bemenetet is egy stacionárius sztochasztikus folyamat szerint változtatjuk.

Először is vegyük észre, hogy ha mind az $(u(k), k = 1, 2, \dots)$ bemenet, mind a $(\nu_0(k), k = 1, 2, \dots)$ hiba stacionárius folyamat szerint változik egy ARX modellben, akkor az $(y(k), k = 1, 2, \dots)$ kimenet is stacionárius sztochasztikus folyamat lesz.

Ezután vizsgáljuk meg az $R(N)$ mátrix elemeinek aszimptotikus viselkedését. Mivel a $\varphi(\cdot)$ regresszor ez esetben csak időben hátrafelé eltolt (azaz régebbi diszkrét idejű) bemeneteket és kimeneteket tartalmaz, ezért az $[R(N)]_{ij}$ elemek háromfélék lehetnek:

- *input autokovariancia* amely esetben

$$\hat{R}_u^N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k)u(k-\tau) \quad \rightarrow \quad R_u(\tau) = r_{uu}(\tau) \quad (3.18)$$

ahol $r_{uu}(\tau)$ az $\{u(k)\}_{k=1}^N$ sztochasztikus folyamat autokovariancia függvénye,

- *output autokovariancia* amikor

$$\hat{R}_y^N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)y(k-\tau) \quad \rightarrow \quad R_y(\tau) = r_{yy}(\tau) \quad (3.19)$$

ahol $r_{yy}(\tau)$ az $\{y(k)\}_{k=1}^N$ sztochasztikus folyamat autokovariancia függvénye, és

- *input-output kovariancia* ahol

$$\hat{R}_{yu}^N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)u(k-\tau) \quad \rightarrow \quad R_{yu}(\tau) = r_{yu}(\tau) \quad (3.20)$$

ahol $r_{yu}(\tau)$ a két előző stacionárius sztochasztikus folyamat kereszt kovariancia függvénye.

Így az $R(N)$ mátrix nagy mintaelemszámok ($N \rightarrow \infty$) egy konstans R^* mátrixhoz tart, amelynek elemei a szereplő stacionárius sztochasztikus folyamatok auto- és kereszt kovarianciái.

Ezem túlmenően, miután a $\{\nu_0(k)\}_{k=1}^N$ hiba folyamat is stacionárius, az (3.16) becslési hiba egyenlet második tagjának második tényezője is egy kereszt korrelációs elemeket tartalmazó vektorhoz tart, mégpedig

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \nu_0(k) \rightarrow h^* \quad (3.21)$$

ahol a h^* vektor az $\{u(k)\}_{k=1}^N$ és $\{\nu_0(k)\}_{k=1}^N$, illetve az $\{y(k)\}_{k=1}^N$ és $\{\nu_0(k)\}_{k=1}^N$ stacionárius sztochasztikus folyamatok kereszt kovariancia függvényeinek különböző elemeit tartalmazza.

Mindezek alapján megfogalmazhatóak annak feltételei, hogy a becslült $\hat{\theta}_{LS}(N)$ érték mikor lesz *aszimptotikusan torzítatlan* becslése a valódi θ_0 paraméternek **az aszimptotikus viselkedés vizsgálatának feltételei** megléte esetén.

Az aszimptotikus torzítatlanság feltételei

A (3.17) becslési hiba *aszimptotikusan torzítatlan az aszimptotikus viselkedés vizsgálatának feltételei fennállása esetén, ha*

(i) az R^* mátrix nemszinguláris (**elegendő gerjesztés**)

Ez a feltétel teljesül, ha az $\{u(k)\}_{k=1}^N$ és $\{\nu_0(k)\}_{k=1}^N$ folyamatok egymástól függetlenek, és a (3.18) egyenletbeli $R_u(i-j)$ autokorrelációkból alkotott R_{ij} mátrix nemszinguláris. Az ilyen speciális, paraméterbecslésre alkalmazott gerjesztő bemeneteket elegendően gerjesztő bemenetnek mondjuk.

(ii) a $h^* = 0$ fennállása esetén

Két gyakorlati szempontból fontos alesetet állhat fent:

(iia) *A $\{\nu_0(k)\}_{k=1}^N$ hiba nulla várható értékű fehérzaj sorozat, azaz nincs modellezési hiba, és a mérési hiba nem színes, azaz a mérőrendszernek nincs dinamikája. Ez esetben a $\nu_0(k)$ hiba, mint valószínűségi változó független attól, hogy mi történt a múltban, így az $E[\varphi(k)\nu_0(k)]$ tagok mindegyike nulla.*

(iib) *Az $\{u(k)\}_{k=1}^N$ bemenet egy nulla várható értékű fehérzaj sorozat, és a rendszer rendje $n = 1$, tehát a jelen kimenet nem függ a múltbeli kimenetektől. Ekkor a $\varphi(k)$ regresszor csak a bemenet múltbeli értékeit tartalmazza, és így $E[\varphi(k)\nu_0(k)] = 0$.*

Fontos megjegyezni, hogy a fenti (i) és (iia) feltételek fennállása esetén a

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_{LS}(N) - \theta_0)$$

valószínűségi változó aszimptotikus eloszlása olyan többdimenziós *normális* eloszlás lesz, amelynek várható értéke 0 (ez jelenti a torzítatlanságot), kovariancia mátrixa pedig $\lambda_0[R^*]^{-1}$ ahol λ_0 a $\{\nu_0(k)\}_{k=1}^N$ hiba szórásnégyzete (varianciája).

Az elegendően gerjesztő bemenetekkel majd a 8 fejezetben, a kísérlettervezéssel kapcsolatos 8.2 alfejezetben foglalkozunk részletesen.

3.4. A több bemenetű több kimenetű eset

Az általános *paraméterekben lineáris* több bemenetű több kimenetű esetet két lépésben tárgyaljuk: először tekintjük a több bemenetű egy kimenetű esetet, majd általánosítjuk a módszert több független kimenet esetére is.

3.4.1. Több bemenetű egy kimenetű eset

Tételezzük fel, hogy a $\varphi(\cdot)$ regresszor a skalár értékű $y(\cdot)$ értékek mellett a vektor értékű $u(k) \in \mathbb{R}^r, k = 1, 2, \dots$ értékektől is függ. Ekkor az $u(k)$ vektor minden egyes $u_j(k)$ koordinátáját tekinthetjük egy-egy skaláris változónak, így a $\varphi(\cdot)$ regresszor a

$$D^k = \{(y(i), u_1(i), \dots, u_r(i)) \mid i = 1, \dots, k\}$$

skaláris változóktól függőnek tekinthető és az egybemenetű egykimenetű esetre felírt (3.10) formula változtatás nélkül alkalmazható.

3.4.1. Példa. ARX modellek paramétereinek LKN becslése két bemenetű esetben

Tekintsük az előző ARX modell paramétereinek becslésére vonatkozó 3.2.1 példát, de tegyük fel, hogy két bemenetünk van, azaz $u(k) \in \mathbb{R}^2$. Ebben az esetben a modell prediktív alakja az alábbi

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) \cdots - a_ny(k-n) + b_0^T u(k) + \cdots + b_m^T u(k-m) \quad (3.22)$$

Figyeljük meg, hogy most a b_0, b_1, \dots, b_m paraméterek is 2-dimenziós vektorok. Ennek megfelelően a paramétervektor:

$$\theta = [-a_1 \ -a_2 \ \dots \ -a_n \ b_{01} \ b_{02} \ b_{11} \ b_{12} \ \dots \ b_{m1} \ b_{m2}]^T \quad (3.23)$$

ahol b_{ij} az i -edik paramétervektor j -edik koordinátája, a regresszor pedig:

$$\varphi(k) = [y(k-1) \ y(k-2) \ \dots \ y(k-n) \ u_1(k) \ u_2(k) \ u_1(k-1) \ u_2(k-1) \ \dots \ u_1(k-m) \ u_2(k-m)]^T \quad (3.24)$$

3.4.2. Több kimenetű eset

Több probléma is van: célszerű a paramétereket vektorként kezelni, és a regresszort matrixként, a jelek elternek az elozokkal, csak reszben vannak osszhangban az elso fejezettel. A diszkrét idejű időinvariáns paraméterekben lineáris egy bemenetű egy kimenetű rendszermodellek (3.5) alakja általánosítható több kimenet, azaz vektor értékű $y(k) \in \mathbb{R}^p$ esetére is az alábbi formában

$$\hat{y}(k|P) = P^T \varphi(k) \quad (3.25)$$

ahol most a $P \in \mathbb{R}^{m \times p}$ mátrix j -edik oszlopába gyűjtöttük össze az $y(k)$ vektor j -edik koordinátájára vonatkozó θ^j modell paramétereket, azaz $P_{ij} = \theta_i^j$.

Megfigyelhető, hogy az egyes $y_j(k)$ koordinátákra vonatkozó részmodelleknek ugyanaz a regresszora. Ezt úgy érhetjük el, ha valamennyi részmodellnél figyelembe vesszük az összes olyan változót a közös regresszorban amelytől legalább egy részmodell függ. Így persze a paraméterek közül egyesek biztosan nullák lesznek, de ez nem zavarja a paraméterbecslést, és még modell ellenőrzésre (modell validálásra) is alkalmas.

A fenti modellegyenletet paramétereinek becslésére két út kínálkozik:

1. Ha az $y(k)$ vektor koordinátáira vonatkoztatott predikciós hibák egymástól teljesen függetlenek, akkor a paraméterbecslést egymástól függetlenül elvégezhetjük a részmodellekre az egy kimenetű esetre vonatkozó (3.10) formulával. Ekkor a P paraméter mátrix oszlopaira (az abban szereplő θ^j részmodell paraméterekre kapunk egymástól független becslést.
2. Ha az egyes koordinátákra vonatkozó predikciós hibák nem függetlenek, akkor együttes regressziós becslést kell végeznünk az alábbi kiterjesztett vektor-mátrix változók segítségével a (1.28) helyett:

$$y^* = \begin{bmatrix} y_{1(1)} \\ \dots \\ y_{1(\nu)} \\ \dots \\ y_{m(1)} \\ \dots \\ y_{m(\nu)} \end{bmatrix}, \quad p^* = \begin{bmatrix} p_{11} \\ \dots \\ p_{1n} \\ \dots \\ p_{\nu 1} \\ \dots \\ p_{\nu n} \end{bmatrix}, \quad X^* = \begin{bmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

ahol $y_{i(j)}$ az i -edik mért kimenet vektor j -edik koordinátája.

4. fejezet

A paraméterbecslési módszerek elméleti tulajdonságai

Ebben a fejezetben a dinamikus modellek paramétereinek becslésére alkalmas módszerek elméleti tulajdonságairól, torzítatlanságáról és hatásosságáról lesz szó. Ezek vizsgálata a regresszorban szereplő jelek statisztikai összefüggősége miatt nem egyszerű feladat, és még speciális esetekben is csak nagy mintaelemszámokra alkalmazható, úgynevezett aszimptotikus tulajdonságokat tudunk elméletileg vizsgálni.

A paraméterbecslések elméleti tulajdonságai a maximum likelihood becslésből és annak aszimptotikus tulajdonságaiból, aszimptotikus torzítatlanságából és hatékonyságából származtathatóak. Tárgyaljuk a paraméterbecslések kovariancia mátrixának vizsgálatához szükséges Cramér-Rao tételt és a Fisher információs mátrixot.

4.1. Maximum likelihood becslések

A maximum likelihood becslések a matematikai statisztika fontos fejezetét alkotják. A dinamikus modellek paramétereinek becslése szempontjából pedig azért kiemelkedő fontosságúak, mert maximum likelihood becslések nemlineáris és nem normális vagy színes mérési hibával rendelkező esetekben is használhatóak.

4.1.1. A maximum likelihood becslés elve

Tételezzük fel, hogy rendelkezünk egy ismeretlen θ paraméter becslése céljából a paraméterről információt hordozó $S(y^N) = \{y(1), \dots, y(N)\}$ megfigyelésekkel, amelye mindegyike skalár értékű valószínűségi változó, de nem feltétlenül függetlenek, és nem is feltétlenül azonos eloszlásúak. Ezek együttes valószínűségi sűrűségfüggvénye az

$$f(\theta; x_1, \dots, x_N) = f_y(\theta; x^N) \quad , \quad f_y : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.1)$$

függvény, amely függ az ismeretlen $\theta \in \mathbb{R}^d$ paramétertől.

A paraméter becslésére többféle úgynevezett *becslőt* konstruálhatunk

$$\hat{\theta}(y^N) \quad , \quad \hat{\theta} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (4.2)$$

amely becslők mindegyike egy-egy N -változós d dimenziós vektor értékű függvény.

Ezután az y_*^N konkrét megfigyelt értékeket, amelyek determinisztikusak, felhasználva és ezeket a fenti becslő formulába behelyettesítve kapjuk a paraméter $\hat{\theta}_* = \hat{\theta}(y_*^N)$ becslését.

Sokféle módon konstruálhatunk becslőt egy adott $S(y^N)$ mintához, a legkisebb négyzetes elven alapuló becslőkkel már az előző fejezetben megismerkedtünk. Az úgynevezett *maximum likelihood becslő* a megfigyelt esemény valószínűségét maximalizálja. A maximum likelihood becslő felírásához vegyük észre, hogy a megfigyelt mintaelemek (4.1) együttes valószínűségi sűrűségfüggvénye a konkrét megfigyelt y_*^N értékek behelyettesítése után az ismeretlen θ paraméter egy determinisztikus függvényévé válik. Ezt a

$$\ell(\theta; y_*^N) = f_y(\theta; y_*^N) \quad (4.3)$$

függvényt nevezzük *likelihood függvénynek*. Egy konkrét megfigyelés esetében ez akkor a legnagyobb, ha azt a θ paraméter értéket helyettesítjük bele, amely mellett a megfigyeléseket gyűjtöttük. A *maximum likelihood becslés* pedig pontosan az a

$$\hat{\theta}_{ML}(y_*^N) = \arg \max_{\theta} \ell(\theta; y_*^N) \quad (4.4)$$

érték, amely az együttes valószínűségi sűrűségfüggvényt maximalizálja.

Normális eloszlású valószínűségi változók esetén az együttes eloszlás is normális lesz, ezért a gyakorlatban a fenti (4.4) maximalizálás helyett a

$$\arg \max_{\theta} \ell(\theta; y_*^N) \equiv \arg \min_{\theta} [-\ln [\ell(\theta; y_*^N)]] \quad (4.5)$$

minimalizálást szoktuk elvégezni úgy, hogy

$$\frac{d \ln(\ell)}{d\theta} = 0 \quad (4.6)$$

legyen ahol $\ln(\cdot)$ a természetes alapú logaritmusfüggvény.

4.1.2. A maximum likelihood becslés független megfigyelések esetén

Ha az $S(y^N)$ mintában szereplő mintaelemek független valószínűségi változók, akkor együttes valószínűségi sűrűségfüggvényük a sűrűségfüggvények szorzata, azaz

$$\ell(\theta; y_*^N) = \prod_{i=1}^N f_{y(i)}(\theta; y_*(i)) = \prod_{i=1}^N f(\theta; y_*(i)) \quad (4.7)$$

Ekkor a gyakorlati becsléshez használt úgynevezett *log-likelihood függvény* összeg alakú:

$$\ln[\ell(\theta; y_*^N)] = \sum_{i=1}^N \ln f_y(\theta; y_*(i)) \quad (4.8)$$

4.1.1. Példa. Egy egyszerű maximum likelihood becslés

Tekintsünk egy független skalár értékű normális eloszlású, azonos, de ismeretlen θ_0 várható értékű és mintaelemenként különböző λ_i szórásnégyzetű $y(i)$ valószínűségi változókból álló mintát:

$$y(i) \sim \mathbb{N}(\theta_0, \lambda_i) \quad (4.9)$$

Az ismeretlen várható érték egyikük legelterjedtebb becslése az úgynevezett *mintaközép*

$$\hat{\theta}_{SM}(y^N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(i) \quad (4.10)$$

A maximum likelihood becslés kiszámításához először meghatározzuk a mintaelemek együttes sűrűségfüggvényét. Mivel a mintaelemek független normális eloszlású valószínűségi változók a

$$f_{y(i)}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_i}} e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\lambda_i}}$$

sűrűségfüggvénnyel, ezért az együttes sűrűségfüggvény az alábbi alakban írható:

$$f_y(\theta; x^N) = \prod_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_i}} e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\lambda_i}} \right) \quad (4.11)$$

A fenti sűrűségfüggvény egyben a likelihood függvény is. A maximum likelihood becslést úgy kapjuk meg, hogy a fenti függvény helyett annak logaritmusát maximalizáljuk θ függvényében:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{ML}(y^N) &= \arg \max_{\theta} \ln f_y(\theta; y^N) \\ &= \arg \max_{\theta} \left\{ -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \ln \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(y(i) - \theta)^2}{\lambda_i} \right\} \end{aligned}$$

Ebből pedig a maximum likelihood becslés zárt alakban is előállítható, mert a log-likelihood függvény kvadratikus függvények összege:

$$\hat{\theta}_{ML}(y^N) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (1/\lambda_i)} \sum_{i=1}^N \frac{y(i)}{\lambda_i} \quad (4.12)$$

Érdekes ezt az eredményt összehasonlítani a várható érték becslésére legelterjedtebben használható mintaközéppel (4.10). Látható, hogy a maximum likelihood becslés figyelembe veszi a mintaelemek szóráására vonatkozó információt is, és egy súlyozott mintaközepet használ becslőként.

4.1.3. Prediktív modellek paramétereinek maximum likelihood becslése

A fentieket alkalmazzuk most dinamikus modellek paramétereinek becslésére.

4.1.3.1. A teljes valószínűségi modell

A maximum likelihood becsléshez a dinamikus modell szerkezetén túlmenően a hibákra, mint valószínűségi változókra vonatkozó feltételezésekre is szükségünk van. Ezt a kiterjesztett modellt nevezzük teljes valószínűségi modellnek, amelynek elemei az alábbiak.

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(\theta) : \hat{y}(k | \theta) &= g(k, D^{k-1}; \theta) \\ \varepsilon(k, \theta) &= y(k) - \hat{y}(k | \theta) \text{ függetlenek,} \\ &\text{adott } f_\varepsilon(x, k; \theta) \text{ sűrűségfüggvénnyel} \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.1.3.2. A likelihood függvény és a maximum likelihood becslés

Miután a $\varepsilon(k, \theta)$ hibák függetlenek, az y^N valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye az alábbi szorzat alakban írható:

$$\hat{f}_y(\theta; y^N) = \prod_{i=1}^N f_\varepsilon(y(i) - g(i, D^{i-1}; \theta), i; \theta) = \prod_{i=1}^N f_\varepsilon(\varepsilon(i, \theta), i; \theta) \quad (4.14)$$

Ezek alapján a log-likelihood függvény összeg alakú lesz, amelynek egy tagja:

$$\ell(\varepsilon, \theta, k) = \ln f_\varepsilon(\varepsilon, k; \theta) \quad (4.15)$$

Ezekután a paraméterek maximum likelihood becslése az alábbi alakú: [1/N honnan jön be?](#)

$$\hat{\theta}_{ML}(y^N) = \arg \min_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ell(\varepsilon(i, \theta), i; \theta) \quad (4.16)$$

Ez a rész nekem kicsit zavaros: $V_N(\theta, y^N)$ -val a parameterbecsles költségfüggvenyet jelöltük, nem csak LSE eseten. A max. likelihood nem az LSE specialis esete, hanem a parameterbecsles egy specialis esete Ezt a becslést összehasonlítva ugyanezen modell

$$\hat{\theta}_{ML}(y^N) = \arg \min_{\theta} V_N(\theta, y^N)$$

legkisebb négyzetes becslésével láthatjuk, hogy a maximum likelihood becslés a legkisebb négyzetes elven kapott becslés abban a speciális esetben, ha a veszteségfüggvényt a

$$V_N(\theta, y^N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln f_\varepsilon(\varepsilon(i, \theta), i; \theta)$$

alakúra választjuk.

4.1.2. Példa. Egy egyszerű ARX modell paramétereinek maximum likelihood becslése

Tekinsük a következő egyszerű ARX rendszer teljes valószínűségi modelljét:

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= ay_{k-1} + bu_{k-1} \\ \theta &= [a \ b]^T \\ \varepsilon(k, \theta) &= y_k - ay_{k-1} - bu_{k-1} := e(k) \text{ függetlenek és} \\ f_e(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \text{ normális eloszlásúak} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ekkor a mintaelemek együttes eloszlásfüggvénye az alábbi alakú:

$$\begin{aligned} \hat{f}_y(\theta; y^N) &= \prod_{k=1}^N f_e(y_k - ay_{k-1} + bu_{k-1}) = \\ &= \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_k - ay_{k-1} - bu_{k-1})^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

A maximum likelihood becslés kiszámításához a log-likelihood függvény használjuk:

$$\ln \hat{f}_y(\theta; y^N) = \sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{(y_k - ay_{k-1} - bu_{k-1})^2}{2\sigma^2}$$

amely a paraméterek kvadratikus függvénye. Ezért ennek egyértelmű minimuma a paraméterek szerinti derivált vektor nulla helye, azaz

$$\frac{d}{d\theta} \ln \hat{f}_y(\theta, y^N) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N 2y_{k-1} \frac{y_k - ay_{k-1} - bu_{k-1}}{2\sigma^2} \\ \sum_{k=1}^N 2u_{k-1} \frac{y_k - ay_{k-1} - bu_{k-1}}{2\sigma^2} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.18)$$

Ebből az a és b paraméterek maximum likelihood becslését az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N 2y_{k-1} \frac{y_k - ay_{k-1} - bu_{k-1}}{2\sigma^2} &= 0 \\ \sum_{k=1}^N 2u_{k-1} \frac{y_k - ay_{k-1} - bu_{k-1}}{2\sigma^2} &= 0 \end{aligned}$$

4.1.3.3. A maximum likelihood becslés általános esetben

A problémák a következők:

- nehéz az ARMA-t a fenti modell alakra hozni (ált. Kálmán-szűrő)
- Likelihood függvény felírása
- szélsőérték meghatározása

4.2. A paraméterbecslések kovariancia mátrixa

4.2.1. A Cramér-Rao egyenlőtlenség és a Fisher információs mátrix

A becsült $\hat{\theta}$ paraméterek "jóságát" torzítatlan becslést feltételezve a becslés

$$P = E \left[\hat{\theta}(y^N) - \theta_0 \right] \left[\hat{\theta}(y^N) - \theta_0 \right]^T$$

kovariancia mátrixának (valamilyen normában mért) nagyságával jellemezhetjük. A Cramér-Rao egyenlőtlenség a fenti kovariancia mátrix elemeire ad meg alsó korlátot.

4.2.1. Theorem (Cramér-Rao). Legyen a $\hat{\theta}(y^N)$ a θ paraméter egy torzítatlan becslése úgy, hogy $E[\hat{\theta}(y^N)] = \theta_0$ a paraméter valódi értéke, és az y^N minta elemeinek együttes valószínűségi sűrűség függvénye $f_y(\theta; y^N)$. Tegyük fel, hogy a mintaelemek egy zárt tartományból vehetik fel értéküket, amelynek határa nem függ θ -tól. Ekkor a $\hat{\theta}(y^N)$ becslés kovariancia mátrixára (elemenként értve) az alábbi egyenlőtlenség érvényes:

$$E \left[\hat{\theta}(y^N) - \theta_0 \right] \left[\hat{\theta}(y^N) - \theta_0 \right]^T \geq M^{-1} \quad (4.19)$$

ahol M az úgynevezett Fisher információs mátrix:

$$\begin{aligned} M &= E \left[\frac{d}{d\theta} \ln f_y(\theta; y^N) \right] \left[\frac{d}{d\theta} \ln f_y(\theta; y^N) \right]^T \Bigg|_{\theta=\theta_0} = \\ &= -E \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \ln f_y(\theta; y^N) \right] \Bigg|_{\theta=\theta_0} \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a Fisher információs mátrixban éppen a maximum likelihood becslés kiszámításához szükséges (4.6) derivált vektor áll.

4.2.1. Példa. Egy egyszerű ARX modell paraméterbecslésének Fisher információs mátrixa

Tekinsük a 4.1.2 példában szereplő egyszerű ARX rendszert a $\theta_0 = [a_0 \ b_0]^T$ valódi paramétervektorral. A becslés Fischer információs mátrixa az (4.18) egyenletbeli derivált vektort felhasználva az alábbi alakban írható:

$$M = E \begin{bmatrix} m_{aa} & m_{ab} \\ m_{ab} & m_{bb} \end{bmatrix}$$

ahol Itt talán érdemesebb a második egyenlettel kiszámolni, mivel akkor egyszerűbb értékekt kapunk

$$\begin{aligned} m_{aa} &= \left(\sum_{k=1}^N 2y_{k-1} \frac{y_k - a_0 y_{k-1} - b_0 u_{k-1}}{2\sigma^2} \right)^2 \\ m_{ab} &= \left(\sum_{k=1}^N 2y_{k-1} \frac{y_k - a_0 y_{k-1} - b_0 u_{k-1}}{2\sigma^2} \right) \left(\sum_{k=1}^N 2u_{k-1} \frac{y_k - a_0 y_{k-1} - b_0 u_{k-1}}{2\sigma^2} \right) \\ m_{bb} &= \left(\sum_{k=1}^N 2u_{k-1} \frac{y_k - a_0 y_{k-1} - b_0 u_{k-1}}{2\sigma^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Az m_{aa} , m_{ab} , m_{bb} elemekben az $\{y(k)\}_{k=1}^N$ és az $\{u(k)\}_{k=1}^N$ sztochasztikus folyamatok negyedrendű auto- és keresztkorrelációs együtthatói állnak.

4.2.2. A maximum likelihood becslés aszimptotikus tulajdonságai

A Fischer információs mátrix és a Cramér-Rao tétel a maximum likelihood becsléseknél különleges jelentőséggel bír. Az alábbi tétel azt mondja ki, hogy független megfigyelések, azaz mintaelemek esetén a maximum likelihood becslés a torzítatlan becslések között aszimptotikusan a legjobb, úgynevezett hatásos becslés.

4.2.2. Theorem (Wald-Cramér). Tegyük fel, hogy az $\{y(i)\}_{i=1}^N$ függetlenek és azonos eloszlásúak úgy, hogy együttes sűrűségfüggvényük

$$f_y(\theta; x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N f_{y(i)}(\theta; x_i)$$

Tegyük fel továbbá, hogy az y^N mintaelemek együttes sűrűségfüggvénye az $f_y(\theta_0; x^N)$ valamely θ_0 valódi paraméter vektorral. Ekkor a $\hat{\theta}_{ML}(y^N)$ maximum likelihood becslés mint valószínűségi változó 1 valószínűséggel θ_0 -hoz tart, ha N tart a végtelenhez, és a

$$\sqrt{N}[\hat{\theta}_{ML}(y^N) - \theta_0]$$

eloszlása egy normális, 0 várható értékű és M^{-1} kovariancia mártixú eloszláshoz tart.

Ezen túlmenően az is belátható, hogy ugyanilyen tétel áll fenn abban az esetben is, ha dinamikus rendszerek paramétereinek becslésére alkalmazzuk a maximum likelihood becslést. Így tehát a maximum likelihood becslés - elméleti szempontból legalábbis - a lehetséges legjobb becslés.

4.2.3. A Cramer-Rao egyenlőtlenség és a Fisher információs mátrix dinamikus rendszerek paramétereinek becslése esetén

A dinamikus rendszerek becsült paramétereire vonatkozó Fisher információs mátrix kiszámításához a rendszer (4.13) egyenletekkel megadott teljes valószínűségi modelljére, valamint a (4.14) szorzat alakú likelihood függvényére van szükségünk.

A Fisher információs mátrix kiszámításához először a log-likelihood függvényt hozzuk egyszerűbb alakra:

$$\ln \hat{f}_y(\theta, y^N) = \sum_{i=1}^N \ln f_\varepsilon(\varepsilon(i, \theta)) = \sum_{i=1}^N \ell_0(\varepsilon(i, \theta)) \quad (4.20)$$

$$\frac{d}{d\theta} \ln \hat{f}_y(\theta, y^N) = \sum_{i=1}^N -\ell'_0(\varepsilon(i, \theta)) \underbrace{\left(-\frac{d}{d\theta} \varepsilon(i, \theta) \right)}_{\Psi(i, \theta)}, \quad (4.21)$$

ahol $\ell_0(x) = \ln f_\varepsilon(x)$. **nem teljesen világos, hogy itt miért vezetünk be egy $(-1)(-1)$ tagot** A fenti egyszerűbb alakot helyettesítjük be a Fisher információs mátrix

$$E \left[\frac{d}{d\theta} \ln \hat{f}_y(\theta; y^N) \right] \left[\frac{d}{d\theta} \ln \hat{f}_y(\theta; y^N) \right]^T$$

definíciós egyenletébe. Ebből az alábbi várható értéket kapjuk

$$\begin{aligned} M_N &= E \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \ell'_0(\varepsilon(i, \theta)) \ell'_0(\varepsilon(j, \theta)) \Psi(i, \theta) \Psi^T(j, \theta) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N E[\ell'_0(\varepsilon(i, \theta))]^2 E[\Psi(i, \theta) \Psi^T(i, \theta)] \end{aligned} \quad (4.22)$$

azt is figyelembe véve, hogy $\varepsilon(i, \theta)$ független $\varepsilon(j, \theta)$ -től $i \neq j$ -re, mivel a predikciós hiba fehérzaj sorozaot alkot. A log-likelihood függvény $\ell'_0(x)$ deriváltját a

$$\ell'_0(x) = [\ln f_\varepsilon(x)]' = \frac{f'_\varepsilon(x)}{f_\varepsilon(x)}$$

összefüggéssel számíthatjuk ki, amelyből az

$$E[\ell'_0(\varepsilon(i, \theta))]^2 = \frac{1}{\kappa_0}$$

ahol κ_0 egy állandó. Ha speciálisan a $\varepsilon(i, \theta)$ hibák normális eloszlásúak λ_0 szórásnégyzettel, akkor $\kappa_0 = \lambda_0$.

Így a Fisher információs mátrix az alábbi egyszerű alakot ölti:

$$M_N = \frac{1}{\kappa_0} \sum_{i=1}^N E[\Psi(i, \theta_0)\Psi^T(i, \theta_0)] \quad (4.23)$$

A Cramér-Rao egyenlőtlenség segítségével kapjuk végül a dinamikus modellek paraméterbecslésének jóságára vonatkozó alapvető eredményt.

Dinamikus rendszerek θ paramétereinek becslésére használt tetszőleges torzítatlan $\hat{\theta}_N$ becslés ($E\hat{\theta}_N = \theta_0$, ahol θ_0 a valódi paraméter) kovariancia mátrixára az alábbi alsó korlát adható:

$$\text{Cov } \hat{\theta}_N \geq \kappa_0 \left[\sum_{i=1}^N E[\Psi(i, \theta_0)\Psi^T(i, \theta_0)] \right]^{-1} \quad (4.24)$$

Normális eloszlású hibák esetén $\kappa_0 = \lambda_0$.

5. fejezet

A Bayes becslés és a segédváltozók módszere

5.1. Bayes-becslések

A Bayes elven alapuló becslések különleges helyet foglalnak el a paraméterbecslési módszerek között, mert elvileg nemlineáris és korrelált mérési hibával terhelt rendszerek esetén is alkalmazhatóak. Tárgyaljuk a becslés elvét, a becslés eredményét, mint valószínűségi sűrűségfüggvényt, és a becslés elméleti tulajdonságait, valamint kapcsolatát a maximum likelihood becslésekkel. Ezzel összefüggésben itt kapott helyet a maximum a posteriori (MAP) becslés.

5.1.1. A véletlen Bayes féle fogalma

A klasszikus valószínűségi számításban véletlennek tekintünk egy változót, ha az értékére vonatkozó megfigyelések (mérések vagy kísérletek) nem minden esetben ugyanolyanok, hanem "véletlen ingadozás"-t mutatnak. Ebben a felfogásban egy rendszer paramétereinek értéke időinvariáns esetben konstans, azaz egy determinisztikus (nem véletlen) változó. A klasszikus értelmezésben egy változó véletlen viselkedésének modellezési szempontból általában két oka lehet:

1. valamely véletlen természetű folyamat, például radioaktív bomlás jelenléte a rendszerben,
2. sok, kicsi, egymástól független, részletesen külön-külön nem modellezett részfolyamat jelenléte.

A "véletlen" Bayes féle értelmezése a megfigyelést (mérést vagy kísérletet) végző személy tudása szempontjából osztályozza a változókat. Bayes értelemben *véletlen változónak tekintünk minden változót vagy akár paramétert is, amely nem ismert előttünk, mint megfigyelők előtt. Ilyen értelemben az ismeretlen θ rendszerparaméterek valószínűségi változóknak tekintendők.*

5.1.2. A Bayes formula és a láncszabály

A dinamikus rendszerek paramétereinek Bayes becslése matematikai szempontból az úgynevezett általánosított Bayes formulán és a láncszabályon alapszik.

5.1.2.1. Bayes formula a klasszikus esetben

A klasszikus valószínűségszámításból ismerjük a teljes eseményrendszert alkotó események feltételes valószínűségeinek kiszámítására használatos Bayes-tételt.

Legyenek adva az alábbi B_i események illetve $P(B_i)$ valószínűségeik:

- $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathbb{B}$ eseményalgebra, ahol
- B_1, B_2, \dots, B_n teljes eseményrendszert alkot, azaz $\cup_{i=1}^N B_i = \Omega$ és $B_j \cap B_i = \emptyset$
- $P(B_i) > 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$

Ekkor tetszőleges $A \in \Omega$ eseményre vonatkozó feltételes valószínűségekre igaz a Bayes tétel:

$$P(B_k | A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A | B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^N P(A | B_i)P(B_i)} \quad (5.1)$$

5.1.2.2. Bayes formula feltételes valószínűségi sűrűségfüggvényekre

A klasszikus Bayes tétel általánosítható a feltételes valószínűségek helyett feltételes valószínűségi sűrűségfüggvényekre is: ezt az általánosított alakot nevezzük Bayes formulának.

Legelőször is vezessük be az alábbi egyszerűsített jelöléseket:

- az a valószínűségi változó sűrűségfüggvényére a $p(a) = f_a(x)$,
- az a és b valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényére a $p(a, b) = f_{ab}(x_1, x_2)$,
- az a valószínűségi változó b valószínűségi változóra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényére a $p(a|b) = f_{(a|b)}(x)$

jelölést.

A feltételes valószínűségekre vonatkozó definiáló egyenleteket is általánosíthatjuk feltételes sűrűségfüggvényekre:

$$p(a|b) = \frac{p(a, b)}{p(b)} \quad (5.2)$$

vagy szorzat alakban:

$$p(a, b) = p(a|b)p(b) \quad (5.3)$$

A fentiekkel összhangban független valószínűségi változókra a definiáló összefüggések az alábbi alakúak

$$p(a|b) = p(a) \quad , \quad p(b|a) = p(b) \quad (5.4)$$

Ebből következik, hogy független valószínűségi változók együttes valószínűségi sűrűségfüggvénye szorzat alakú:

$$p(a, b) = p(a)p(b) \quad (5.5)$$

Szükségünk lesz még valószínűségi változók együttes $p(a, b)$ és marginális $p(b)$ sűrűségfüggvényeinek összefüggésére, amely a definíció szerint:

$$p(b) = \int_{\Omega_a} p(a, b) da \quad (5.6)$$

A fenti formula feltételes sűrűségfüggvényekre is felírható:

$$p(b|c) = \int_{\Omega_a} p(a, b|c) da \quad (5.7)$$

Végezetül több feltételre vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényekre is igaz a feltételes és együttes sűrűségfüggvényekre vonatkozó (5.3) összefüggés az alábbi alakban:

$$p(a, b|c) = p(a|b, c)p(b|c) \quad (5.8)$$

A fenti jelölések és összefüggések használatával most már felírható a (5.1) klasszikus Bayes formula feltételes sűrűségfüggvényekre érvényes alakja:

$$p(a|b, c) = \frac{p(a, b|c)}{p(b|c)} = \frac{p(a, b|c)}{\int p(a, b|c) da} \quad (5.9)$$

Ezt tovább alakíthatjuk a (5.8) összefüggés

$$p(a, b|c) = p(b|a, c)p(a|c)$$

speciális alakjával, hogy a feltételes sűrűségfüggvényekre a paraméterbecslés céljára használt Bayes formulát kapjuk:

$$p(a|b, c) = \frac{p(b|a, c)p(a|c)}{\int p(b|a, c)p(a|c) da} \quad (5.10)$$

5.1.2.3. A láncszabály

A láncszabály a feltételes és együttes sűrűségfüggvényekre vonatkozó (5.3) összefüggés általánosítása több (N) valószínűségi változóra. A láncszabályt rekurzív módon vezethetjük le a (5.3) egyenletből az alábbi módon:

$$\begin{aligned} p(x_N, x_{N-1}, \dots, x_1) &= p(x_N | X_{N-1}, \dots, x_1) p(x_{N-1}, x_{N-2}, \dots, x_1) \\ &= p(x_N | X_{N-1}, \dots, x_1) p(x_{N-1} | x_{N-2}, \dots, x_1) \dots p(x_1) \\ &= \dots \\ &= \left(\prod_{k=2}^N p(x_k | x_{k-1}, \dots, x_1) \right) p(x_1) \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.1.3. Dinamikus rendszerek prediktív Bayes modellje

Tekintsük az egyeszség kedvéért csupán az egybemenetű-egykimenetű (SISO) esetet. Ekkor a lineáris időinvariáns rendszerek bemenet-kimenet modelljének Bayes féle alakja az alábbi feltételes sűrűségfüggvény:

$$p(y(k)|u(k), D^{k-1}) \quad (5.12)$$

A fenti egyenlet alkalmas előrebecslésre és szabályozótervezésre is, de nem szerepelnek benne a θ rendszerparaméterek. Az úgynevezett parametrizált bemenet-kimenet modell már ezeket is tartalmazza a feltételes sűrűségfüggvény feltételi részében:

$$p(y(k)|u(k), D^{k-1}, \theta) \quad (5.13)$$

Fontos megjegyezni, hogy a fenti parametrizált rendszermodell, azaz a fenti feltételes sűrűségfüggvény alakját a Bayes paraméterbecslésnél adottnak tételezzük fel.

Figyeljük meg, hogy - mint eddig minden paraméterbecslési módszernél - itt is a rendszer prediktív modelljével dolgozunk.

A nem parametrizált bemenet-kimenet modell a parametrizált alakból az alábbi összefüggéssel kapható meg:

$$\begin{aligned} p(y(k)|u(k), D^{k-1}) &= \int p(y(k), \theta|u(k), D^{k-1})d\theta \\ &= \int p(y(k), \theta|u(k), D^{k-1})p(\theta|u(k), D^{k-1})d\theta \end{aligned} \quad (5.14)$$

Az első tényező a parametrizált rendszermodell, a másodikat kell paraméterbecsléssel meghatározni.

Fontos emlékezni arra, hogy a θ paraméterek Bayes féle becslése pontosan a $p(\theta|u(k), D^{k-1})$ feltételes sűrűségfüggvény, amely azonban paraméterbecslés esetén nem függ $u(k)$ -től, mint feltételtől, hiszen az egy általunk beállított determinisztikus változó, így

$$p(\theta|u(k), D^{k-1}) = p(\theta|D^{k-1}) \quad (5.15)$$

5.1.4. Rekurzív paraméterbecslés a Bayes formulával

A θ paraméterek, mint valószínűségi változók becslése Bayes értelemben a $p(\theta|D^k)$ feltételes sűrűségfüggvény a k időpillanatig beérkezett D^k adatokra, mint feltételre vonatkoztatva. Ezt a sűrűségfüggvényt felírjuk úgy, hogy a feltételében szereplő adatsorozatot szétválasztjuk a jelen k időpillanat és a $k-1$ időpillanatig beérkezett adatokra:

$$p(\theta|D^k) = p(\theta|y(k), u(k), D^{k-1}) = p(\theta|y(k), D^{k-1}) \quad (5.16)$$

az (5.15) összefüggést is figyelembe véve.

Ezután a (5.10) formulát alkalmazzuk a $b \sim y(k)$, $a \sim \theta$, $c \sim D^{k-1}$ szereposztással és felhasználjuk a fenti (5.16) egyenletet is. Ekkor a következő rekurzív paraméterbecslési formulához jutunk:

$$p(\theta|D^k) = \frac{p(y(k)|D^{k-1}, \theta)p(\theta|D^{k-1})}{\int p(y(k)|D^{k-1}, \theta)p(\theta|D^{k-1})d\theta} \quad (5.17)$$

A fenti formula jobboldalán a következő, fizikai értelemmel is bíró részek szerepelnek:

- $p(\theta|D^{k-1})$ az előző $k - 1$ időpillanatbeli becslés,
- $p(y(k)|D^{k-1}, \theta)$ az adott parametrizált rendszermodell,
- a nevezőben pedig egy normalizálási tényező.

A Bayes paraméterbecslés egy lépésre vonatkozó rekurzív (5.17) formuláját a láncszabályhoz hasonló levezetéssel többször alkalmazva, az alábbi, nem rekurzív Bayes paraméterbecslési formula adódik:

$$p(\theta|D^N) = \frac{(\prod_{k=1}^N p(y(k)|D^{k-1}, \theta))p^0(\theta)}{NORM} \quad (5.18)$$

ahol

$$p^0(\theta) = p(\theta|D^{k-1})$$

az úgynevezett *prior vagy kezdeti becslés* és *NORM* egy normalizáló tényező.

A láncszabállyal (5.11) összehasonlítva megfigyelhető, hogy a (5.18) formula számlálójában a mért $y(k)$, $k = 1, \dots, N$ kimenetek $p(y^N|\theta)$ együttes sűrűségfüggvénye áll

$$p(y^N|\theta) = \prod_{k=1}^N p(y(k)|D^{k-1}, \theta) \quad (5.19)$$

hiszen a Bayes becslésnél is a rendszer prediktív modelljét használjuk fel.

5.1.4.1. A Bayes paraméterbecslés tulajdonságai

A Bayes paraméterbecslésnek az alábbi fontos, és a többi paraméterbecslési módszertől erősen különböző tulajdonságai vannak.

1. A becslési eljárás eredménye a $p(\theta|D^N)$ feltételes valószínűségi sűrűségfüggvény, tehát nem valamely pontbecslés, hanem a teljes becült függvény. Ez a módszer elméleti ereje és alkalmazhatósági gyengesége egyben. Elméletileg a becült θ paraméterekre vonatkozó teljes statisztika rendelkezésre áll, nemcsak aszimptotikusan, hanem véges esetben is, ehhez azonban egy függvényt kell(ene) minden lépésben kiszámítani.
2. A becslés maga a Bayes formulából adódóan természetében rekurzív, végrehajtásához a $p(y(k)|D^{k-1}, \theta)$ parametrizált rendszermodellen kívül a $p^0(\theta)$ prior vagy kezdeti becslés is szükséges. A prior becsléssel a paraméterekről rendelkezésünkre álló technológiai, fizikai vagy üzemeltetői tudás építhető be a paraméterbecslésbe elméletileg tiszta, és jól követhető módon. Ritka az az eset, amikor valóban az égvilágon semmit sem tudunk a paraméterek értékéről, ilyenkor is általában megadható valamely lehetséges érték tartomány, amely felett egyenletes, vagy igen nagy szórású normális eloszlásfüggvényt adhatunk meg prior becslésként.
3. Belátható, hogy autoregressziós bemenet-kimenet modell és normális eloszlású becslési hiba, valamint normális eloszlású prior becslés mellett a Bayes becslés a standard rekurzív legkisebb négyzetes (LKN) becslésre vezet, tehát ilyen esetben jól számítható.

5.1.5. Maximum a posteriori becslés

A maximum a posteriori becslés a Bayes becslésből származtatható úgy, hogy a becslés eredményeképpen kapott teljes $p(\theta|D^N)$ valószínűségi sűrűségfüggvény helyett annak egy pontbecslését, még hozzá a maximum likelihood elve (legnagyobb valószínűség elve) alapján képezett pontbecslését használjuk. Miután a teljes D^N mért adat rekordban csak az $y(k)$, $k = 1, \dots, N$ kiemenetek tekinthetők valóban függő változóknak (a bemeneteket paraméterbecslési célra elvileg tetszőlegesen megválaszthatjuk), ezért a Bayes paraméterbecslés (5.18) nem rekurzív alakja a következő formában is felírható a (5.19) összefüggést is figyelembe véve:

$$p(\theta | y^N) = \frac{p(y^N | \theta)p^0(\theta)}{p(y^N)} \sim f_y(\theta; y^N)g_\theta(\theta) \quad (5.20)$$

Ebből a maximum likelihood elven képezett becslés a Maximum A Posteriori (MAP) becslés:

$$\hat{\theta}_{MAP}(y^N) = \arg \max_{\theta} [f_y(\theta; y^N)g_\theta(\theta)] \quad (5.21)$$

5.2. A segédváltozók módszere (Instrumental variable method)

Ez a becslési módszer elsősorban korrelált mérési hibákkal terhelt esetekben alkalmazható, tehát akkor, amikor a hagyományos legkisebb négyzetes módszernél nem garantálható a becslés aszimptotikus torzítatlansága. Ilyen esetekben a regresszor helyett vagy mellett a mért adatoktól függő alkalmas segédváltozókat vezetünk be, s a módszer ezektől a segédváltozóktól kapta a nevét.

A segédváltozók módszerét egybemenetű-egykiemenetű paraméterekben lineáris rendszereken mutatjuk be, de a módszer általánosítható nemlineáris és több kiemenetű esetre is.

5.2.1. A predikciós hiba és a múltbeli adatok korreláltsága

Ideális, azaz nem színes predikciós hiba esetén a (4.13) teljes valószínűségi predikciós modell garantálja az ε predikciós hiba és a D^{k-1} múltbeli mért adatok statisztikai függetlenségét. Gyakorlati szempontból ez azt jelenti, hogy a $\hat{y}(k)$ becslés minden információt tartalmaz, amit az addig mért adatokból kinyerhetünk. Ezt a megfigyelést általánosítva azt mondhatjuk, hogy akkor "jó" egy becslés, ha a becslési hiba független (korrelálatlan) a múltbeli mért adatoktól.

Ha tehát azt találjuk, hogy a predikciós hiba színes zaj sorozat, azaz nem független a múltbeli mért adatoktól, akkor választhatunk egy másik, a múltbeli mért adatoktól függő $\{\zeta(k)\}$ vektort és egy, a predikciós hibára alkalmazott α transzformációt úgy, hogy a két sorozat korrelálatlan legyen, azaz

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta(k)\alpha(\varepsilon(k, \theta)) = 0 \quad (5.22)$$

empirikus keresztkorrelációs együtthatók nullák legyenek. Ez azt jelenti, hogy az $\alpha(\varepsilon(k, \theta))$, $k = 1, \dots, N$ skalár értékű sztochasztikus sorozat korrelálatlan a $\zeta(k)$, $k = 1, \dots, N$ vektor értékű sztochasztikus sorozat minden elem-sorozatával.

Ezután a θ paraméter vektor becslését úgy választjuk meg, hogy $\hat{\theta}$ kielégítse a a fenti egyenletrendszert.

5.2.2. A segédváltozók és megválasztásuk

A segédváltozók módszerét a paraméterekben lineáris egybemenetű-egykimenetű rendszerek

$$\hat{y}(k|\theta) = \varphi^T(k)\theta \tag{5.23}$$

predikciós modelljének példáján mutatjuk be. A fenti modellben szereplő θ paraméter vektor LKN becslése az alábbi, a kvadratikus veszteségfüggvény minimalizálásából származó lineáris egyenletrendszer megoldásaként állítható elő:

$$\hat{\theta}_N^{LKN} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)[y(k) - \varphi^T(k)\theta] = 0 \right\} \tag{5.24}$$

A fenti egyenletben a "sol" szimbólum a az egyenletrendszer megoldását jelöli.

Tekintsük ezekután az (5.23) predikciós egyenletnek megfelelő olyan esetet, ahol a predikciós hiba nem független a múltbeli mért értékektől, azaz

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta_0 + \nu_0(k) \tag{5.25}$$

ahol most $\nu_0(k)$ korrelált $\varphi(k)$ -val. Az előző szakasz ötletéből kiindulva válasszunk alkalmasan a (5.24) egyenlet megoldásához egy alkalmas korrelációs vektort, $\zeta(k)$ -t. A $\zeta(k)$ vektor elemeit *segédváltozóknak* nevezzük.

Ekkor a segédváltozók módszere szerinti becslés a

$$\hat{\theta}_N^{IV} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta(k)[y(k) - \varphi^T(k)\theta] = 0 \right\} \tag{5.26}$$

egyenletrendszer megoldásaként kapható meg. Megfigyelhető, hogy a fenti (5.26) egyenlet az (5.24) egyenlet általánosítása úgy, hogy a $\varphi(k)$ regresszor első előfordulása helyett a $\zeta(k)$ segédváltozó vektort szerepeltetjük.

Hasonlóan a LKN módszernél alkalmazott eljáráshoz, zárt alakban is megkaphatjuk a becslést, azaz az (5.26) egyenlet megoldását:

$$\hat{\theta}_N^{IV} = \text{sol} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta(k)y(k) \tag{5.27}$$

Eddig nem esett szó arról, hogy *hogyan kell a segédváltozók $\zeta(k)$ vektorát megválasztani*, pedig ez a módszer alkalmazásának kulcskérdése. Először a becslés aszimptotikus torzítatlanságának követelményéből származó szükséges feltételt adunk, majd

a következő pontban foglalkozunk részletesen azzal a kérdéssel, hogy hogyan kell a segédváltozókat a modell tulajdonságai alapján megválasztani.

Azt szeretnénk, ha a becslés aszimptotikusan torzítatlan lenne, ezért *a segédváltozóktól megköveteljük az alábbi tulajdonságokat:*

$$E\zeta(k)\varphi^T(k) \quad : \quad \text{nem szinguláris} \quad (5.28)$$

$$E\zeta(k)\nu_0(k) = 0 \quad (5.29)$$

Szavakban: a segédváltozóknak korrelálatlanoknak kell lenniük a predikciós hibával, de korreláltaknak kell lenniük a regresszorral.

5.2.3. A segédváltozók megválasztása a modell alapján

A segédváltozók megválasztására a becslés aszimptotikus torzítatlanságának követelményéből eredő (5.29) megkötéseknek elvileg végtelen sok $\zeta(k)$ segédváltozó vektorral eleget tehetünk.

Ezen túlmenő feltétel olvasható ki a becslés elvi alapjait leíró (5.26) egyenlet és a LKN becslést jellemző (5.24) egyenlet összehasonlításából: *a segédváltozók $\zeta(k)$ vektorának mérete azonos kell legyen a $\varphi(k)$ regresszor méretével (és egyben a becsülendő θ paraméterek számával):*

$$\dim \zeta(k) = \dim \varphi(k) = \dim \theta$$

A segédvektor fenti feltételeknek eleget tevő, de az adott alkalmazás igényeinek legjobban megfelelő megválasztására ugyanakkor nincs általános szabály: ezt mindenkor az adott feladatról rendelkezésünkre álló előzetes ismeretek és a mérnöki intuíció alapján végezzük.

A modellről rendelkezésünkre álló ismeretek figyelembe vételének lehetőségét a legegyszerűbb példán, egy egybemenetű-egykimenetű ARMAX modellel leírható rendszer példáján mutatjuk be. Legyen a rendszert leíró bemenet-kimenet modell alakja az alábbi ARMAX modell:

$$y(k) = -a_1y(k-1) - \dots - a_{n_a}y(k-n_a) + b_1u(k-1) + \dots + b_{n_b}u(k-n_b) + c_0e(k) + \dots + c_{n_c}e(k-n_b) \quad (5.30)$$

ahol $e(k), k = 1, \dots, N$ fehérzaj sorozat. Ez esetben tehát most az alábbi regresszorral, paramétervektorral és predikciós hibával van dolgunk:

$$\varphi(k) = [-y(k-1) \dots -y(k-n_a) \quad u(k-1) \dots -u(k-n_b)]^T, \quad (5.31)$$

$$\theta_0 = [a_1 \dots a_{n_a} \quad b_1 \dots b_{n_b}]^T, \quad (5.32)$$

$$\nu_0(k) = c_0e(k) + \dots + c_{n_c}e(k-n_b) \quad (5.33)$$

és a predikciós hiba nyilvánvalóan korrelált a regresszorban lévő $y(k-i), i = 1, \dots, n_a$ mért kimenetekkel.

Ezért a segédváltozók vektorában csak a kimeneteknek megfelelő elemeket cseréljük ki új segédváltozókra, hiszen a bemeneteket paraméterbecslési célra a predikciós

hibától függően mi választjuk meg. A segédváltozókat pedig úgy célszerű megválasztani, hogy "hasonlítsanak" dinamikájukban a kimenetekre, de mégse legyenek korreláltak $\nu_0(k)$ -val. Így az alábbi választással élhetünk:

$$\begin{aligned} \zeta(k)[-v(k-1) \dots -v(k-n_a) \ u(k-1) \dots -u(k-n_b)]^T \ , \\ v(k) = K(q^{-1})u(k) = \frac{E(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(k) \end{aligned} \quad (5.34)$$

ahol $K(q^{-1})$ egy alkalmas lineáris időinvariáns (állandó együtthatós) szűrő, úgy hogy az $E(q^{-1})$ számláló polinom foka a $B(q^{-1})$, a $F(q^{-1})$ nevező polinom foka pedig az $A(q^{-1})$ polinom fokával legyen egyenlő, azaz

$$\deg E(q^{-1}) = \deg B(q^{-1}) = n_a \quad , \quad \deg F(q^{-1}) = \deg A(q^{-1}) = n_b$$

Az (5.34) szűrő és a (5.30) rendszermodell összehasonlításával látható, hogy a $K(q^{-1})$ szűrő optimális megválasztása pont a

$$K_{opt}(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

ha a valódi $B(q^{-1})$ és $A(q^{-1})$ rendszerpolinomokat ismernénk.

A $v(k)$ segédváltozókra vonatkozó szükséges (5.29) feltételeket ugyan a $K(q^{-1})$ szűrő valamennyi értékére teljesíti a segédváltozó vektor, de a segédváltozók akkor lesznek "jóak", azaz hasonlóak a megfelelő kimenetekhez, ha a becslendő rendszerparamétereikről elegendően jó előzetes tudás (a priori ismeret) áll rendelkezésünkre, és a szűrőt ennek megfelelően tervezzük.

6. fejezet

Nemlineáris modellek paramétereinek becslése

A nemlineáris és paraméterekben nemlineáris rendszerek paramétereinek becslése az általános paraméterbecslési optimalizálási feladat megoldását igényli. Ez a fejezet tárgyalja a becslés alapelvét és a megoldására leggyakrabban használt gradiens módszert.

A fejezetben a paraméterbecslési módszereket az egybemenetű-egykimenetű dinamikus rendszerek példáján mutatjuk be. A több bemenetű több kimenetű eset a 3.4 pontban bemutatott módon vezethető vissza a tárgyalt esetre.

6.1. A becslés alapelve

A nemlineáris, ezen belül is különösen a paraméterekben nemlineáris dinamikus rendszerek paramétereinek becslése a 2. fejezetben kitűzött általános paraméterbecslési feladat, mint optimalizálási feladat megoldását igényli. A következőkben pontosan kitűzzük az ilyen esetben megoldandó optimalizálási feladatot, és tekintjük ennek a legkisebb négyzetek elvén alapuló legegyszerűbb speciális esetét. Ezek után áttekintjük a megoldás lehetséges elvi útjait.

6.1.1. A paraméterbecslés, mint nemlineáris optimalizálási feladat

A nemlineáris dinamikus rendszerek paramétereinek becslését, mint optimalizálási feladatot, szabványos algoritmikus feladatkitűzés formájában fogalmazzuk meg a következőképpen.

Adott:

1. Egy D^N mért érték sorozat, avagy minta, amely az N időpillanatig mért bemenet-kimenet párokat tartalmazza, azaz $D^N = \{(y(k), u(k)) | k = 1, \dots, N\}$;
2. A (2.8) egyenlet szerinti prediktív modell

$$\hat{y}(k|\theta) = g(k, D^{k-1}; \theta) \tag{6.1}$$

formában, ahol $g(\cdot)$ adott nemlineáris skalár értékű függvény, amely a nemlineáris bemenet-kimenet modellből származtatható.

Ennek speciális esete az eddig tárgyalt módszerekkel is kezelhető úgynevezett paraméterekben lineáris eset, amelynél a fenti egyenlet az alábbi speciális alakot ölti:

$$\hat{y}(k|\theta) = \theta^T g^*(k, D^{k-1}; \theta)$$

egy másik $g^*(\cdot)$ adott mért adatokban nemlineáris vektor értékű függvénnyel;

3. Ebből és a mért kimenetekből számolható a predikciós hiba sorozat

$$\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k|\theta) \quad (6.2)$$

4. Egy veszteségfüggvény

$$V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ell(\varepsilon(k, \theta)) \quad (6.3)$$

alkalmas $\ell(\cdot)$ vektornormával.

Fontos megjegyezni, hogy a vektornorma megválasztása az, ami módszerfüggő. A legkisebb négyzetes elvű becslésnél az euklideszi normával dolgozunk, azaz

$$\ell(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \quad (6.4)$$

Keressük:

azt a paraméterbecslési módszert, amely a mért értékekből előállít egy

$$\hat{\theta}_{\text{modsz}}(D^N)$$

becslést úgy, hogy

$$\hat{\theta}_{\text{modsz}}(D^N) = \arg \min_{\theta} V_N(\theta, D^N) \quad (6.5)$$

azaz a becslt paraméter érték mellett lesz a veszteségfüggvény minimális.

A fenti általánosan kitűzött paraméterbecslési optimalizálási feladatot a következőkben abban a speciális, és az eddigi módszerekkel nem kezelhető esetben vizsgáljuk és oldjuk meg, mikor egy *paraméterekben nemlineáris, de állandó paraméterű egybementű-egykimenetű rendszer paramétereit a legkisebb négyzetes elvű becsléssel* becsüljük. Ekkor a (6.3) általános veszteségfüggvény az alábbi alakot ölti:

$$V_N(\theta, D^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [y(k) - g(k, D^{k-1}; \theta)]^2 \quad (6.6)$$

és ekkor

$$\hat{\theta}_{LKN}(D^N) = \arg \min_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [y(k) - g(k, D^{k-1}; \theta)]^2 \quad (6.7)$$

6.1.2. Az optimalizálási feladat lehetséges megoldási útjai

Az adott D^N minta melletti (6.7) optimalizálási feladat célfüggvénye ugyan látszólag kvadratikus, a nemlineáris $g(k, D^{k-1}; \theta)$ függvény jelenléte miatt azonban analitikusan általában nem megoldható. A kvadratikus forma azonban általánosságban is garantálja a minimum létezését, csak esetleg - mint a gyakorlati esetekben nagyon sokszor - több lokális minimum is van. Megjegyezzük, hogy a paraméterekben nemlineáris esetben az analitikus megoldás előállítható egy lineáris egyenletrendszer megoldásaként (lásd 3. fejezet).

Analitikus megoldás hiányában az optimalizálási feladatot numerikus közelítő eljárásokkal oldhatjuk meg, az alábbi, elvileg különböző két módon.

1. *Nemlineáris egyenletrendszer megoldására vezető út*

Ez esetben az optimum szükséges feltételét jelentő

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [y(k) - g(k, D^{k-1}; \theta)] \frac{\partial g}{\partial \theta_j} = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N \quad (6.8)$$

nemlineáris egyenletrendszert kell megoldani. A közelítő megoldás többféle numerikus módszerrel is elvégezhető.

Minden esetben problémát jelent azonban, hogy a megoldás általában nem egyértelmű, és a konvergencia gyorsasága (és az, hogy melyik megoldáshoz konvergál) erősen függ a kezdeti becsléstől, azaz attól, hogy mennyi információnk van a paraméterek lehetséges és valószínű értékeiről.

2. *Direkt megoldás a $V_N(\theta, D^N)$ veszteségfüggvény θ szerinti minimalizálásával*

Ez a feladat numerikus függvényminimalizáló eljárásokkal, például az úgynevezett gradiens módszerrel (ezt tárgyaljuk ebben a fejezetben) oldható meg.

Itt is problémát jelent, hogy úgynevezett *globális optimalizálási eljárásokra* van szükség a több lehetséges lokális minimum miatt. A globális optimalizáló eljárások azonban algoritmikusan nagybonyolultságúak az általános esetben, ez mutatja a paraméterbecslési feladat nehézségét.

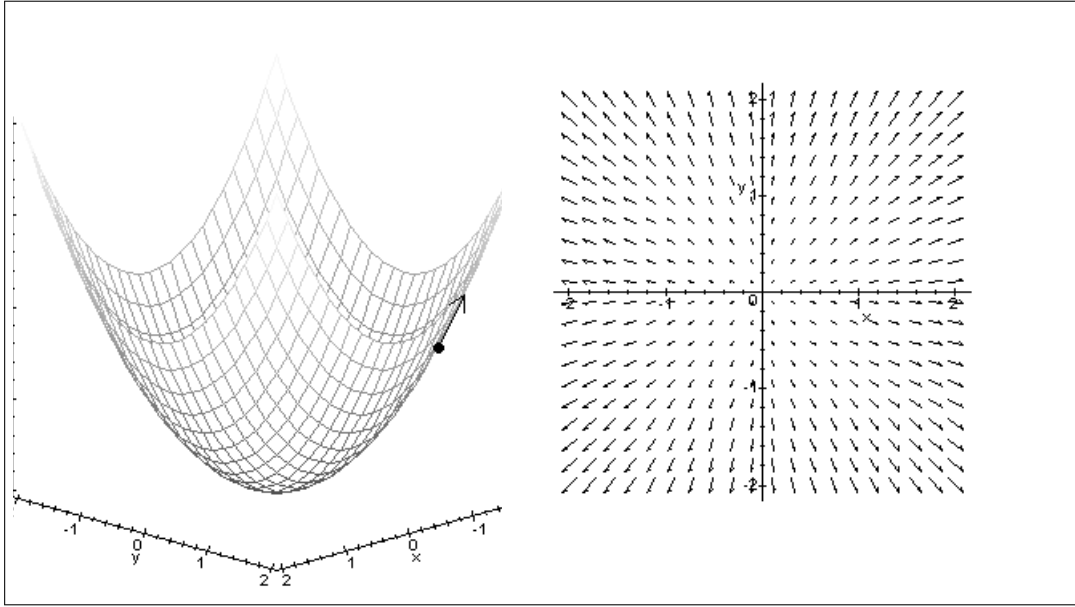
6.2. Megoldás a gradiens módszerrel

A gradiens módszer egy általános függvény szélsőérték (minimum vagy maximum) kereső eljárás, amely egy lokális (azaz nem globális) szélsőérték megkeresésére alkalmas. A következőkben tárgyaljuk a gradiens módszert általánosságban, majd bemutatjuk, hogy hogyan alkalmazható a módszer az általános, nemlineáris, legkisebb négyzetes elvű paraméterbecslési feladat megoldására.

6.2.1. A gradiens módszer

A gradiens módszer egy skalárértékű többváltozós függvény úgynevezett *gradiens vektoráról* kapta a nevét. Legyen adott egy

$$G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$



6.1. ábra. A gradiens vektor és a gradiens vektor mező

többváltozós skalárértékű nemlineáris függvény. Ennek *gradiense* (pontosabban gradiens vektora) valamely $x^* \in \mathbb{R}^m$ pontban a

$$G_X(x^*) = \text{grad } G(x^*) = \left[\frac{\partial G}{\partial x_1}(x^*) \quad \dots \quad \frac{\partial G}{\partial x_m}(x^*) \right]^T \quad (6.9)$$

m -dimenziós vektor, ahol x_i az x vektor i -edik koordinátája. A *gradiens vektor* a G függvény, mint az $(m+1)$ -dimenziós \mathbb{R}^{m+1} térben értelmezett felület x^* pontjában húzott érintők közül a legmeredekebb irányába mutat.

A 6.1. ábra egy álló forgási paraboloid felületet mutat. Meghúztuk a felület egy pontjában a gradiens vektort is, az ábra jobb oldali részében pedig a gradiens mező, azaz az egyes értelmezési pontokban húzható gradiens vektorok vetületei láthatóak.

A G függvény görbületét, azaz konvex vagy konkáv voltát valamely $x^* \in \mathbb{R}^m$ pontban a $H_G = G_{XX}$ mátrix, az úgynevezett *Hesse mátrix* mutatja, amelynek ij -edik eleme

$$[G_{XX}]_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} \quad (6.10)$$

A G függvénynek minimuma (lehet, hogy csak lokális minimuma) van az x^* pontban, ha

$$\text{grad } G(x^*) = \vec{0} \quad \text{és} \quad G_{XX}(x^*) > 0$$

azaz $G_{XX}(x^*)$ Hesse mátrix pozitív definit.

A gradiens módszer maga egy iteratív közelítő módszer egy többváltozós függvény szélsőértékének meghatározására. Használatához szükség van

- egy alkalmas x_0 kezdőértékre,

- egy ε pontossági korlátra,
- egy δ lépésközre.

Az algoritmus fő lépései *minimumkeresés* estén a következők:

1. Legyen $i := 0$, ahol i az iterációs lépések száma és $x_i = x_0$
2. Számítsuk ki a veszteségfüggvény x_i pontbeli $\vec{G}_X(x_i)$ gradiensvektorát.
3. Ha a gradiensvektor már "elég kicsi", azaz

$$\|\vec{G}_X(x_i)\| < \varepsilon \quad (6.11)$$

akkor elértük a minimumot, és $x_{min} = x_i$.

4. Egyébként *lépünk egyet a negatív gradiens irányába*, azaz

$$x_{i+1} = x_i - \vec{G}_X(x_i)\delta \quad (6.12)$$

megnöveljük a számlálót, azaz $i := i + 1$, majd a 2. lépéstől folytatjuk.

6.2.2. A veszteségfüggvény minimalizálása gradiens módszerrel

A $V_N(\theta, D^N)$ veszteségfüggvény θ szerinti minimalizálására is könnyűszerrel használhatjuk a fenti gradiens módszer algoritmusát az alábbi megfeleltetésekkel:

$$V_N(\theta, D^N) \sim G(x) \quad (6.13)$$

$$\theta \sim x \quad (6.14)$$

Ekkor a paraméterbecsléshez a modellszerkezeten, azaz a $V_N(\theta, D^N)$ veszteségfüggvény konkrét alakján kívül az alábbi induló (a priori) adatokra van szükségünk:

- egy alkalmas θ_0 kezdő paramétervektor értékre,
- egy ε pontossági korlátra,
- egy δ lépésközre a paraméterek terében.

Fontos megjegyezni, hogy a gradiens módszer

- *lokális* szélsőérték kereső módszer, azaz *a becsült paraméterérték függhet a kezdeti érték jó, azaz a valódi érték közeli megválasztásától*,
- egy iterációs lépés polinomiális időbonyolultságú, és a gyakorlati algoritmusok gondoskodnak a δ lépésköz megfelelő változtatásáról, azaz a minimum közelében megfelelő csökkentéséről.

6.3. Nemlineáris modellek munkapont körüli linearizálása

A nemlineáris modellek paramétereinek becslését gyakran munkapont körül linearizált változatuk segítségével végezzük, hiszen a lineáris, de legalábbis paraméterekben lineáris modellek becslésére számos hatékony és aszimptotikusan torzítatlan módszer áll rendelkezésre.

A következőkben azt mutatjuk be a nemlineáris prediktív modellek példáján, hogy *hogyan végezzük a linearizálást.*

Linearizálhatunk mind algebrai, mind differenciálegyenleteket az értelmezési tartományuk tetszőleges pontja körül, mégis általában egy úgynevezett stacionárius vagy állandósult állapotnak megfelelő pontot választunk, azaz úgynevezett munkapont körüli linearizálást végzünk.

Irányítási feladatoknál, így dinamikus rendszerek paramétereinek becslésénél is általában \tilde{x} munkapont körüli, azaz úgynevezett perturbációs változókkal dolgozunk, amelyeket valamely x_0 referencia pont vagy állandósult állapottól való eltérésükkel definiálunk:

$$\tilde{x} = x - x_0 \quad (6.15)$$

ahol x_0 az x változó állandósult állapotbeli értéke. Néha a normalizált formát használjuk, ahol

$$\tilde{x} = \frac{x - x_0}{x_0} \quad (6.16)$$

hogy biztosítsuk a perturbációs változók dimenziómentességét. A perturbációs változók tehát az x_0 állandósult állapottól való eltérést jelentik.

A linearizálás a linearizálandó nemlineáris függvény állandósult állapot körüli Taylor sorfejtésén alapszik. Egy egyváltozós dinamikus nemlineáris $y = f(x, t)$ függvénynél az x változó szerinti Taylor sorfejtés az alábbi alakban írható:

$$f(x, t) = f(x_0, t) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \quad (6.17)$$

ahol x_0 a referencia pont és $\left. \frac{d^i f}{dx^i} \right|_{x_0}$ az f függvény x szerinti i . parciális deriváltja, amelyet az x_0 referencia pontban veszünk.

A fenti sorfejtés első két tagja utáni magasabbrendű tagok elhanyagolásával kapjuk a lineáris közelítést:

$$f(x, t) \simeq f(x_0, t) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) \quad (6.18)$$

és így az eredeti nemlineáris egyenlet az

$$y = f(x_0, t) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) \quad (6.19)$$

formulával közelíthető, azaz

$$(\tilde{y} + y_0) = f(x_0, t) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) \quad (6.20)$$

mivel

$$y_0 = f(x_0, t) \quad \text{és} \quad \tilde{y} = y - y_0 \quad (6.21)$$

Végül a fenti egyenletekből azt kapjuk, hogy

$$\tilde{y} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \tilde{x}; \quad (6.22)$$

amely a végső linearizált egyenlet az \tilde{x} perturbációs változóval kifejezve.

A fenti (6.22) egyenletet könnyedén általánosítjuk többváltozós $f(x_1, \dots, x_n, t)$ esetre is:

$$\tilde{y} = J|_{x_0}(\tilde{x}); \quad (6.23)$$

ahol J a függvény úgynevezett Jacobi mátrixa (ez esetben sorvektor), amelynek i edik eleme a megfelelő x_i változó szerinti parciális derivált, azaz

$$J_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

A fenti egyszerű általános elvet alkalmazzuk most a nemlineáris

$$\hat{y}(k|\theta) = g(k, D^{k-1}; \theta) \quad (6.24)$$

prediktor linearizálására.

Innentől kezdve elvesztettem a fonalat, a jelölések nem egyértelműek Először is definiálunk (keresünk) egy alkalmas x_* munkapontot:

$$(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\theta}) \quad (6.25)$$

$$\bar{D}^N = \{y(k) = \bar{y}, u(k) = \bar{u} | k = 1, \dots, N\} \quad (6.26)$$

Ezek után alkalmazzuk a (6.23) többváltozós lineáris Taylor közelítést a (6.24) formula linearizálására:

$$\tilde{y}(k|\theta) = \sum_{i=1}^k \left[\left. \frac{\partial g}{\partial u(i)} \right|_{x_*} \tilde{u}(i) + \left. \frac{\partial g}{\partial y(i)} \right|_{x_*} \tilde{y}(i) \right] \quad (6.27)$$

felhasználva azt, hogy a θ paraméterek nem változnak, azaz $\tilde{\theta} = 0$. **Valamivel le kéne zarni a fejezetet**

7. fejezet

Dinamikus rendszerek paramétereinek rekurzív becslése

7.1. Bevezetés

A rekurzív paraméterbecslések alkotják a fejezet tárgyát. Az ilyen módszerek nem igénylik egyszerre az összes rendelkezésünkre álló mérési adatot, így nincs szükség azok tárolására, hanem az új becslést a régi becslésből és az azóta beérkezett adatokból rekurzív módon állítják elő. Ezen gyakorlati szempontból nagyfontosságú módszerosztály speciális technikákat igényel, és a becslések tulajdonságainak elméleti vizsgálata is igen nehéz. Rekurzív becslésekkel kezelhetőek az időben lassan változó, de nem szigorúan időinvariáns rendszerek paraméterbecslésének esetei is.

7.1.1. A rekurzív paraméterbecslő algoritmusok általános alakja

A rekurzív paraméterbecslési eljárások általános alakja a következő

$$\hat{\theta}(k) = F(\hat{\theta}(k-1), S(k), Z(k)) \quad (7.1)$$

$$S(k) = H(S(k-1), \hat{\theta}(k-1), Z(k)) \quad (7.2)$$

ahol $\hat{\theta}(k)$ a becsült paramétervektor értékét, $Z(k)$ a rendelkezésre álló mérési adatok értékét jelöli a k -adik időpillanatban, $S(k)$ pedig ún. segédváltozó (auxiliary variable). F és H valamilyen elv szerint megválasztott vektor bemenetű és vektor értékű függvényeket jelöl. *A rekurzív paraméterbecslés alapproblémája az F és H függvények megválasztása.*

Látható, hogy a becsült paramétervektor értékének frissítéséhez csak az előző időpillanatban rendelkezésre álló becsült paramétervektor- és segédváltozó értékek valamint az aktuális mért adatok szükségesek.

7.1.2. A rekurzív paraméterbecslés előnyei és hátrányai

Előnyök

- Az adatok feldolgozása "on-line" módon történik, nincs szükség nagy mennyiségű adat tárolására. Az algoritmus működése közben is eldönthető, hogy mikor érte el a becslés a kívánt pontosságot.
- A rekurzív algoritmusok a modell-struktúra finomítását is kisebb számítás- és időigénnyel végzik el, mint nemrekurzív megfelelőik.

Hátrányok

- Egy adott rekurzív algoritmus futtatásakor még az indítás előtt el kell dönteni, hogy milyen modell-struktúrát használunk, míg "off-line" esetben különböző struktúrákat is kipróbálhatunk.
- A rekurzív algoritmusok (kevés kivétellel) nem adnak olyan pontos becslést, mint a nemrekurzív módszerek. Kellően nagy adatrekordok esetén ez a különbség azonban jelentéktelenné válik.

7.2. A rekurzív legkisebb négyzetek módszere

Az algoritmus levezetése előtt ismételjük át röviden a legkisebb négyzetek módszerén alapuló paraméterbecslés problémafelvetését, és a megoldást (részletesen ld. a 3. fejezetben)! A dinamikus rendszerek széles osztályát diszkrét időben leíró regressziós modell a következő:

$$y(k) = \theta^T \varphi(k) + v(k) \quad (7.3)$$

A paraméterbecslés súlyozott célfüggvénye

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \alpha_k [y(k) - \theta^T \varphi(k)] \quad (7.4)$$

alakban írható. A paramétervektor legkisebb négyzetes becslését adó statisztika (7.4) minimuma θ -ra nézve:

$$\hat{\theta}_{LS}(N) = \left[\sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi(k) y(k) \quad (7.5)$$

amelynek kiszámításához tárolni kell a rendelkezésre álló mérési adatokat az 1-től az N-dik időpillanatig. A következőkben megmutatjuk, hogy (7.5) rekurzív alakra ((7.1)-(7.2)) hozható.

Vezessük be a következő jelölést:

$$\bar{R}(t) = \sum_{k=1}^t \alpha_k \varphi(k) \varphi^T(k) \quad (7.6)$$

(7.5)-ből kapjuk:

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi(k) y(k) = \underbrace{\left[\sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi(k) \varphi^T(k) \right]}_{\bar{R}(N)} \hat{\theta}(N) \quad (7.7)$$

Ha az összegzést N helyett $t - 1$ -ig végezzük, a következő egyenletet kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{t-1} \alpha_k \varphi(k) y(k) = \bar{R}(t-1) \hat{\theta}(t-1) \quad (7.8)$$

(7.6)-ból következik, hogy

$$\bar{R}(t-1) = \bar{R}(t) - \alpha_t \varphi(t) \varphi^T(t) \quad (7.9)$$

(7.7)-ből kiindulva a fenti összefüggések felhasználásával kapjuk:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= \bar{R}^{-1}(t) \left[\sum_{k=1}^t \alpha_k \varphi(k) y(k) \right] = \\ &= \bar{R}^{-1}(t) \left[\sum_{k=1}^{t-1} \alpha_k \varphi(k) y(k) + \alpha_t \varphi(t) y(t) \right] = \\ &= \bar{R}^{-1}(t) \left[\bar{R}(t-1) \hat{\theta}(t-1) + \alpha_t \varphi(t) y(t) \right] = \\ &= \bar{R}^{-1}(t) \left[(\bar{R}(t) - \alpha_t \varphi(t) \varphi^T(t)) \hat{\theta}(t-1) + \alpha_t \varphi(t) y(t) \right] = \\ &= \bar{R}^{-1}(t) \left[\bar{R}(t) \hat{\theta}(t-1) - \alpha_t \varphi(t) \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1) + \alpha_t \varphi(t) y(t) \right] = \\ &= \bar{R}^{-1} \{ \bar{R}(t) \hat{\theta}(t-1) + \alpha_t \varphi(t) y(t) \} - \bar{R}^{-1}(t) \alpha_t \varphi(t) \hat{\theta}^T(t-1) = \\ &= \hat{\theta}(t-1) + \bar{R}^{-1}(t) \varphi(t) \alpha_t \left[y(t) - \hat{\theta}^T(t-1) \varphi(t) \right] \end{aligned} \quad (7.10)$$

(7.6)-ből és (7.10)-ből adódik a rekurzív legkisebb négyzetek algoritmusának első alakja, amely már megfelel a (7.1)-(7.2) egyenletek formátumának.

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \bar{R}^{-1}(t) \varphi(t) \alpha_t \left[y(t) - \hat{\theta}^T(t-1) \varphi(t) \right] \quad (7.11)$$

$$\bar{R}(t) = \bar{R}(t-1) + \alpha_t \varphi(t) \varphi^T(t) \quad (7.12)$$

A gyakorlatban mégsem ezt az alakot használják, mivel minden lépésében egy kvadratikus mátrixot (\bar{R}) kell invertálni, ami a számításigény szempontjából nem kedvező. Az algoritmus gyorsabban számítható változatának megtalálásához segítséget nyújt a következő lineáris algebrai tétel.

Tétel: Mátrix inverziós lemma Legyenek A, B, C és D olyan mátrixok, hogy az $[A + BCD]$ mátrix létezik, kvadratikus és invertálható, valamint A és C invertálható. Ekkor igaz a következő egyenlőség

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B [DA^{-1} B + C^{-1}]^{-1} DA^{-1} \quad (7.13)$$

Bizonyítás: Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát jobbról $[A + BCD]$ -vel. \square

Vezessük be a következő jelölést:

$$P(t) = \bar{R}^{-1}(t) \quad (7.14)$$

Ekkor igazak a következő egyenlőségek:

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(t-1) + \alpha_t \varphi(t) \varphi^T(t) \quad (7.15)$$

$$P(t) = [P^{-1}(t-1) + \varphi(t) \alpha_t \varphi^T(t)]^{-1} \quad (7.16)$$

Ha a mátrix inverziós lemmát (7.16)-re alkalmazzuk, a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} P(t) &= P(t-1) - P(t-1) \varphi(t) \left[\varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t) + \frac{1}{\alpha_t} \right]^{-1} \varphi^T(t) P(t-1) = \\ &= P(t-1) - \frac{P(t-1) \varphi(t) \varphi^T(t) P(t-1)}{\frac{1}{\alpha_t} + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t)} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Ezzel eljutottunk a rekurzív legkisebb négyzetes becslés algoritmusának gyakorlatban használt formájához:

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1) \varphi(t) \varphi^T(t) P(t-1)}{\frac{1}{\alpha_t} + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t)} \quad (7.18)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \alpha_t P(t) \varphi(t) [y(t) - \hat{\theta}^T(t-1) \varphi(t)] \quad (7.19)$$

7.2.1. A kezdeti feltételek megválasztása

A (7.18) és (7.19) egyenletekből jól látszik, hogy az algoritmus indításakor (a t_0 időpillanatban) szükség van P mátrix és $\hat{\theta}$ vektor kezdeti értékére, amiből a további értékeket számítjuk. A kezdeti feltételek megválasztásának szokásos módja a következő:

$$P(t_0) = \left[\sum_{k=1}^{t_0} \alpha_k \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \quad (7.20)$$

$$\hat{\theta}(t_0) = P(t_0) \sum_{k=1}^{t_0} \alpha_k \varphi(k) y(k) \quad (7.21)$$

ami nem más, mint egy néhány mintán elvégzett hagyományos (nemrekurzív) legkisebb négyzetes becslés. Így garantálható, hogy a rekurzív algoritmus becsült paraméterének kezdeti értéke nem lesz túlságosan távol a valódi paraméterértéktől.

Ha az adatok tárolására, és így a (7.20)-(7.21) egyenletekben leírt számítások elvégzésére nincs lehetőség, akkor tetszőleges $P(t_0)$ invertálható mátrix és tetszőleges $\hat{\theta}(t_0)$ vektor választása esetén garantált a konvergencia a valódi paraméterértékhez (a konvergencia gyorsasága azonban függ a kezdeti értékek megválasztásától).

7.3. A rekurzív gradiens módszer

7.3.1. Problémafelvetés

A legkisebb négyzetes paraméterbecslés kritériumfüggvényének minimalizálásakor nagyban megkönnyítette a helyzetünket, hogy a regressziós modellben a prediktor kimenete lineárisan függ a paramétervektor elemeitől. A gyakorlatban azonban sokszor adódik olyan modell, amikor ez a lineáris összefüggés nem teljesül. Mi a teendő ilyenkor? Ha a kvadratikus kritériumfüggvény ($V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - \hat{y}(k|\theta)]^2$) analitikusan nem minimalizálható, akkor célszerű valamilyen numerikus szélsőérték-kereső eljárást alkalmazni (ld. 6). Azonban a nemrekurzív megoldások nagy számítás- és időigénye gyakran nem teszi lehetővé gyakorlati alkalmazásukat. Szerencsére ebben az esetben is rendelkezésünkre állnak az algoritmusok kedvezőbb számítási tulajdonságokkal rendelkező rekurzív változatai, amelyek közül a gradiens módszert mutatjuk be (bizonyítás nélkül). A predikciós hiba definíciója a következő volt:

$$\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k|\theta) \quad (7.22)$$

ψ -vel jelöljük $\varepsilon(k, \theta)$ θ szerinti negatív parciális deriváltját:

$$\psi(k, \theta) = \left[-\frac{d}{d\theta} \varepsilon(k, \theta) \right]^T \quad (7.23)$$

Mivel θ valódi értékét nem ismerjük, az eljárásban ε -t és ψ -t a következőképpen közelítjük:

$$\hat{\varepsilon}(k, \hat{\theta}) = y(k) - \hat{y}(k|\hat{\theta}(k-1)) \quad (7.24)$$

$$\hat{\psi}(k, \hat{\theta}) = \left[-\frac{d}{d\hat{\theta}(k-1)} \hat{\varepsilon}(k, \hat{\theta}) \right]^T \quad (7.25)$$

$$(7.26)$$

A paraméterbecslő algoritmus a következő:

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\hat{\psi}(k, \hat{\theta})\hat{\psi}^T(k, \hat{\theta})P(k-1)}{1 + \hat{\psi}^T(k, \hat{\theta})P(k-1)\hat{\psi}(k, \hat{\theta})} \quad (7.27)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\hat{\psi}(k, \hat{\theta})\hat{\varepsilon}(k, \hat{\theta}) \quad (7.28)$$

Az algoritmus indításához szükséges P és $\hat{\theta}$ kezdeti értékének megválasztása, amiktől függ a konvergencia gyorsasága.

7.4. Időben változó paraméterek becslése

7.4.1. Problémafelvetés

Az eddig tárgyalt valamennyi identifikációs eljárásnál azt feltételeztük, hogy a becsülni kívánt paraméter(vektor) valódi értéke (vagy várható értéke) időben konstans. Ha feltezzük, hogy a paramétervektor értéke időben változhat, akkor ezekkel az eljárásokkal

nem tudjuk követni az időbeli változásokat, hiszen mindegyikük egy pontbecslést ad a paraméterek értékeire. Olyan algoritmusokra van tehát szükség, amelyek minden diszkrét időpillanathoz rendelnek becsült paraméter értéket (amely követi a változásokat). A következőkben e probléma néhány gyakran használt megoldását ismertetjük.

7.4.2. Csúszóablakos paraméterbecslés

A csúszóablakos megoldás lényege, hogy a paramétervektor adott időpillanatbeli értékének becslését csak a legutolsó N db megfigyelés figyelembevételével végezzük. Az ennél régebbi méréseket egyszerűen figyelmen kívül hagyjuk. Az identifikációs algoritmus lehet bármely eddig tárgyalt nemrekurzív vagy rekurzív módszer. Minél nagyobb a csúszóablak mérete (azaz az egy becsléshez figyelembe vett adatok száma), annál pontosabb a paraméterbecslés, azonban annál lassabban követhetők paraméterek időbeli változásai.

7.4.3. Fokozatos "felejtés"

Ebben az esetben a régi mérési adatok az idő előrehaladtával egyre kisebb súlyt kapnak a paraméterbecslésben, azaz fokozatosan "felejtődnek el".

7.4.3.1. Rekurzív legkisebb négyzetek módszere

A módszer megértéséhez tekintsük a következő súlyozott négyzetes kritériumfüggvényt:

$$V_N(\theta) = \sum_{k=1}^N \bar{\beta}(N, k) [y(k) - \theta^T \varphi(k)]^2 \quad (7.29)$$

ahol rögzített N esetén $\bar{\beta}(N, k)$ monoton nő k növekedésével.

(7.29) minimuma θ -ra nézve adja a legkisebb négyzetes megoldást:

$$\hat{\theta}(N) = \left[\sum_{k=1}^N \bar{\beta}(N, k) \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^N \bar{\beta}(N, k) \varphi(k) y(k) \right] \quad (7.30)$$

(7.30) rekurzív alakba való átírásához vezessünk be néhány jelölést. Először írjuk fel $\bar{\beta}(t, k)$ -t a következőképp:

$$\bar{\beta}(t, k) = \lambda(t) \bar{\beta}(t-1, k) \quad (7.31)$$

Ekkor igaz a következő:

$$\bar{\beta}(t, k) = \left[\prod_{j=k+1}^t \lambda(j) \right] \alpha_k, \quad \alpha_k = \bar{\beta}(k, k), \quad \lambda(k) \leq 1 \quad (7.32)$$

Ha $\lambda(k) = \lambda$, akkor

$$\bar{\beta}(t, k) = \lambda^{t-k} \alpha_k \quad (7.33)$$

ahol λ az ún. felejtési tényező (forgetting factor).

Vezessük be a következő jelölést:

$$\bar{R}(t) = \sum_{k=1}^t \bar{\beta}(t, k) \varphi(k) \varphi^T(k) \quad (7.34)$$

Ekkor igazak a következő egyenlőségek:

$$\bar{R}(t) = \lambda(t) \bar{R}(t-1) + \alpha_t \varphi(t) \varphi^T(t) \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= \bar{R}^{-1}(t) \left[\sum_{k=1}^{t-1} \bar{\beta}(t, k) \varphi(k) y(k) + \alpha_t \varphi(t) y(t) \right] = \\ &= \bar{R}^{-1}(t) \left[\lambda(t) \sum_{k=1}^{t-1} \bar{\beta}(t-1, k) \varphi(k) y(k) + \alpha_t \varphi(t) y(t) \right] = \\ &= \bar{R}^{-1}(t) \left[\lambda(t) \bar{R}(t-1) \hat{\theta}(t-1) + \alpha_t \varphi(t) y(t) \right] = \\ &= \bar{R}^{-1}(t) \left[\bar{R}(t) \hat{\theta}(t-1) + \alpha_t \varphi(t) \left[y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1) \right] \right] = \\ &= \hat{\theta}(t-1) + \bar{R}^{-1}(t) \varphi(t) \alpha_t \left[y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1) \right] \end{aligned} \quad (7.36)$$

Legyen $P(t) = \bar{R}^{-1}(t)$. Ekkor

$$P^{-1}(t) = \lambda(t) P^{-1}(t-1) + \alpha_t \varphi(t) \varphi^T(t) \quad (7.37)$$

$$P(t) = \left[\lambda(t) P^{-1}(t-1) + \alpha_t \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \quad (7.38)$$

Alkalmazzuk mátrix inverziós lemmát (7.13) (7.38)-re. Ekkor a következőt kapjuk:

$$P(t) = \frac{1}{\lambda(t)} P(t-1) - \frac{\frac{1}{\lambda(t)} P(t-1) \varphi(t) \varphi^T(t) P(t-1) \frac{1}{\lambda(t)}}{\varphi^T(t) \frac{1}{\lambda(t)} P(t-1) \varphi(t) + \frac{1}{\alpha_t}} \quad (7.39)$$

Az exponenciális felejtéssel működő rekurzív legkisebb négyzetes algoritmus tehát a következőképp összegezhető:

$$P(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[P(t-1) - \frac{P(t-1) \varphi(t) \varphi^T(t) P(t-1)}{\frac{\lambda(t)}{\alpha_t} + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t)} \right] \quad (7.40)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \alpha_t P(t) \varphi(t) \left[y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1) \right] \quad (7.41)$$

A kezdeti feltételek megválasztására ebben az esetben is igazak a 7.2.1-ben leírtak. További fontos tervezési paraméter a felejtési tényező. Ha λ értéke kicsi, a becslés gyorsan követi a paraméter változásait (gyors a felejtés), de egyben érzékenyebb is lesz a zajra és az esetleges modellezési hibákra. Mindennek az ellenkezője igaz akkor, ha λ értéke nagy (közel van 1-hez).

7.4.3.2. Rekurzív gradiens módszer exponenciális felejtéssel

Itt csak az algoritmus végső alakját adjuk meg, a jelölések azonosak a 7.3 fejezetben használtakkal.

$$P(k) = \frac{P(k-1)}{\lambda(k) + \hat{\psi}^T(k, \hat{\theta})P(k-1)\hat{\psi}(k, \hat{\theta})} \quad (7.42)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\hat{\psi}(k, \hat{\theta})\hat{\varepsilon}(k, \hat{\theta}) \quad (7.43)$$

ahol a felejtési tényező (λ) szerepe megegyezik a 7.4.3.1 fejezetben leírtakkal.

8. fejezet

A paraméterbecslés gyakorlati kivitelezése

A dinamikus modellek becsült paramétereinek jóságát, a paraméterbecslés "minőségét", de néha még magának a paraméterbecslésnek a sikerességét is alapvetően befolyásolja a mért adatok minősége. A paraméterbecslés gyakorlati kivitelezésével kapcsolatos ismeretek ebben a fejezetben kaptak helyet. Az itt tárgyalt módszerek egyszerűek ugyan, de helyes alkalmazásuk igen gyakran meghatározza a paraméterbecslés sikerét és minőségét.

Foglalkozunk a mért adatok előkészítésével és előszűrésével, az adatok áttekintésével és előfeldolgozásával, az adatok vizuális áttekintésével és a kiugró értékek kezelésével.

Paraméterbecslési célra sok esetben nemcsak a rendelkezésünkre álló, "passzív" körülmények között gyűjtött adatokat használjuk fel, hanem mesterségesen állítunk elő adatrekordokat speciálisan paraméterbecslési célra. Az ehhez a feladathoz alkalmazott módszereket és eljárásokat *kísérlettervezésnek* nevezzük. Röviden áttekintjük a paraméterbecslési kísérletek tervezésének legfontosabb kérdéseit, a mintavételezési idő megválasztását, a mintaelemszám megválasztását és az elegendő gerjesztés biztosítását, valamint az alkalmazható tesztjeleket.

A fejezetben tárgyalt módszereknek és eljárásoknak a óriási szakirodaloma van, így nem vállalkozhatunk a kérdéskör kimerítő és részletes ismertetésére, csupán a dinamikus rendszerek paramétereinek becslése szempontjából legfontosabb ismeretek vázlatos áttekintésére.

8.1. A mért adatok előkészítése és előszűrése

A mért adatok előkészítése és áttekintése az esetek túlnyomó többségében nehezen automatizálható, heurisztikus módszereket és eljárásokat tartalmaz, és igényli mind a konkrét dinamikus rendszer, mind a paraméterbecslési technikák ismeretét.

A mért adatok előkészítése egy alapvetően passzív folyamat, amely a mért adatot paraméterbecslésre való alkalmasságának megállapítására irányul. *A mért adatok*

előkészítésével és előszűrésével kapcsolatos általános szabály, hogy a nem megfelelő minőségű adatsorozatot általában célszerűbb eldobni, és megismételni a paraméterbecslésre szánt adatok gyűjtését javított körülmények között, mint a "javításukkal" kísérletezni. Így a "szűrés" általában egy igen-nem típusú döntést foglal magában.

Ha valódi, a dinamikus rendszerről mért vagy gyűjtött adataink vannak, akkor a paraméterbecslés előtt értékelnünk kell az adatok minőségét és megbízhatóságát. Az úgynevezett *adat áttekintési módszerek* használatosak erre a célra, azaz hogy értékeljük a

$$D[1, k] = \{ d(1), d(2), \dots, d(k) \} \quad (8.1)$$

mért adat rekord, ahol $d(i) \in \mathbb{R}^{\nu}$, $i = 1, \dots, k$ jelöli a vektor értékű egymás utáni $i = 1, \dots, k$ időpontokban mért adatokat, minőségét és megbízhatóságát.

Az "áttekintés" szó arra utal, hogy ezeknek az adatelőkészítési módszereknek annyira egyszerűeknek és hatékonyaknak kell lenniük, amennyire ez csak lehetséges.

A mért adatok áttekintése során olyan "elváltozásokra", azaz jellemzőkre figyelünk, amelyek a paraméterbecslés minőségét a legnagyobb mértékben befolyásolják:

- trendek,
- kiugró értékek.

8.1.1. Az adatok vizuális áttekintése

A mért adatok áttekintésének legegyszerűbb és mégis igen hatékony módja az adatok vizuális (emberi szem által történő) megtekintése. Ez úgy történik, hogy a mért adat-rekord felhasználásával különböző grafikonokat készítünk. Ábrázoljuk a mért adatokat

1. a mérési idő függvényében (idősorozatok),
2. egymás függvényében.

Vektorértékű mért adatsorozatoknál a mérési idő függvényében felvett grafikonon egyszerre több elem időbeli viselkedését is nyomonkövethetjük (például különböző színek vagy vonaltípusok alkalmazásával).

Az adatok vizuális áttekintése általában a mérési adatok áttekintésének első lépése. Ennek segítségével gyorsan felfedezhetők és kiszűrhetők a nyilvánvalóan hibás "abnormális" adatok, amelyek nem követik a megszokott viselkedést illetve adat-mintákat.

8.1.2. Trendfigyelés, állandósult állapot figyelése

A dinamikus modellek paramétereinek becslése esetén az esetek döntő többségében lineáris, állandó paraméterű (időinvariáns) modellekkel dolgozunk, hiszen a paraméterbecslési módszerek csak ezen esetre állnak rendelkezésünkre. Ilyen modelleket valódi nemlineáris és/vagy nem állandó paraméterű dinamikus rendszerek esetében csak állandósult állapotok körüli linearizálással kaphatunk (lásd a 6.3 pontot). Ez tükröződik abban is, hogy a lineáris időinvariáns sztochasztikus SISO rendszerek (1.43) ARMAX modellje formailag homogén, azaz nem tartalmaz konstans tagot.

Így a paraméterbecslés előtt ellenőriznünk kell, hogy az adatok valóban egy állandósult körüli kismértékű változásoknak felelnek meg. Ez annyit jelent, hogy az adatokban nem lehetnek hosszú idejű változásoknak megfelelő úgynevezett *trend*-ek, sem lassú zavarások hatásaira utaló változások.

A trendek detektálása és esetleges kiszűrése ily módon az egyik legfontosabb adat-előkészítő művelet, ugyanakkor egy egyszerű és mégis hatékony rendszer diagnosztikai eszköz.

A mért adatokban megfigyelhető trendeknek az alábbi leggyakoribb okai lehetnek:

1. mérőműszerek meghibásodása, amelyet igen lassú, egyirányú változás, úgynevezett "drift" jelezhet,
2. lassú, nem modellezett folyamat (például vízkövesedés, öregedés stb.), amely szintén leggyakrabban "drift" formájában látható,
3. lassú általában periodikus zavarás szezonális, heti vagy napi rendszeres ingadozás (pl. hőmérsékletingadozás, műszakváltás hatása, hétvége, éjszakai műszak mássága) következtében.

A legegyszerűbb módon úgy vehetjük észre a mért adatokban jelenlévő trendet, hogy egy egyenest illesztünk a mért adatokra, és megnézzük, hogy az egyenes meredeksége nulla-e. Ha a mérési hibák egymástól függetlenek és normális eloszlásúak, akkor standard hipotézisvizsgálati módszerekkel egzakt módon is ellenőrizhetjük azt a hipotézisünket, hogy a becsült meredekség nulla.

Ha az adatmintában nincs trend, akkor célszerű megbecsülni a $D[1, k] = D^k$ minta konstans \bar{d} várható értékét a

$$\bar{d} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k d(i) \quad (8.2)$$

mintaátlaggal.

8.1.3. Szórás és korrelációk

A mért adatok szórása és az adatok egymás közötti összefüggéseit jelző korrelációk szintén fontosak a paraméterbecslés szempontjából. A szórások és korrelációk becslésének előkészítő lépéseként meg kell vizsgálni, hogy van-e trend az adatokban (lásd az előző pontot), és csak trend nélküli adatmintákon szabad számolni.

A korrelációk a kovarianciák "normalizált" fajtái. A mért $D[1, k] = D^k$ mintabeli két $d_i(r)$ és $d_j(s)$ adatelem (mint skalárértékű valószínűségi változó) korrelációját a (1.13) kovariancia normalizálásával a következőképpen definiáljuk

$$\rho\{d_i(r), d_j(s)\} = \frac{E\{(d_i(r) - E\{d_i(r)\})(d_j(s) - E\{d_j(s)\})\}}{\sqrt{\sigma^2\{d_i(r)\}\sigma^2\{d_j(s)\}}} \quad (8.3)$$

ahol $\sigma^2\{d_i(r)\}$ és $\sigma^2\{d_j(s)\}$ a két adatelem szórásnégyzete. Könnyen belátható, hogy a korreláció vagy korrelációs együttható abszolút értéke nulla és egy közé esik, azaz

$$0 \leq \rho\{d_i(k), d_j(s)\} \leq 1$$

Célszerű az adatelőkészítés során egy $d_i(r)$, $r = 1, \dots, k$ adatfajta önmagával különböző időpillanatokban vett úgynevezett autokorrelációs függvényét, valamint minden lehetséges adatfajta páronként (minden i, j párra) és minden lehetséges időkülönbségre (minden r, s párra) vett korrelációinak becslését kiszámítani. A becslést úgy végezzük, hogy a (8.3) egyenletben az E várható érték operátor minden előfordulása helyett mintaközéppel (lásd (8.2) egyenlet)

A korrelációs együtthatók elemzésével az alábbi következtetések vonhatóak le.

1. Nagy korrelációs együttható determinisztikus kapcsolatra utal az érintett változók között.
2. Ha egy adatfajta autokorrelációs függvénye minden $(r - s)$ időkülönbségre közel nulla, kivéve az $(r - s) = 0$ esetet, ahol definíció szerint közel egynek kell lennie, akkor az az adatfajta közelítőleg fehérzaj folyamatnak tekinthető.

8.1.4. Kiugró értékek

A kiugró értékek fogalmát nehéz matematikai értelemben pontosan definiálni, hiszen egy normális eloszlású valószínűségi változóból vett minták nem nulla (igen kis) valószínűséggel elven bármilyen nagy és bármilyen kicsi értéket felvehetnek. Ezért gyakorlati szempontból kiugró értéknek tekinthetünk egy mért adatot, ha annak relatíve nagysága, azaz $\|d(i) - \bar{d}\|$ a mintaközepet \bar{d} -vel jelölve és az eltérést egy alkalmas $\|\cdot\|$ vektornormában mérve, *sokkal* nagyobb, mint a mérési hibák szórása.

A nyilvánvaló kiugró értékek az adatok egyszerű vizuális áttekintésével is meghatározhatóak. Léteznek bonyolultabb, matematikai statisztikai módszereken alapuló kiugró érték vizsgáló módszerek is, amelyek alapja a mintaelemek normalitásvizsgálata χ^2 próbával, természetesen normális eloszlású mérési hibákat feltételezve.

8.2. Kísérlettervezés

A matematikai statisztikában használatos kísérlettervezés célja, hogy a mérési pontokat, azaz a minta elemeit úgy válasszuk meg, hogy a becsült paraméterek statisztikai tulajdonságai előnyösek legyenek: adott mérési hiba nagyság esetén például a lehető legkisebb szórásúak és korrelálatlanok legyenek a becsült értékek. A paraméterbecslési célú kísérletek tervezése dinamikus rendszerek esetében a fenti feladatkitűzésnél lényegesen bonyolultabb, hiszen még nyílt hurkú (visszacsatolást nem tartalmazó) rendszerek esetében is csupán a rendszer bemenetei választhatóak tetszés szerint, az erre adott rendszerválaszt, azaz a kimeneteket a rendszer általunk nem ismert dinamikája határozza meg.

Ez azt jelenti, hogy a $d(i)$, $i = 1, \dots, k$ mért érték vektorok elemei szétválaszthatóak két részre: a bemeneteket és a kimeneteket leíró részre, azaz

$$D[1, k] = \{ d(i) \mid d(i) = [y(i)^T \ u(i)^T]^T, \ i = 1, \dots, k \} \quad (8.4)$$

ahol $d(i) \in \mathbb{R}^\nu$ az i időpillanatban mért érték vektort, $y(i) \in \mathbb{R}^m$ a kimenet, és $u(i) \in \mathbb{R}^r$ a bemenet vektort jelöli úgy, hogy $\nu = m + r$.

Dinamikus rendszerek paramétereinek becslésénél a kísérletek tervezésénél az alábbi néhány legfontosabb szempontra kell figyelmet fordítani:

1. a mintavételezési idő megválasztása,
2. a mintaelemszám megválasztása,
3. elegendő gerjesztés biztosítása.

A következőkben ezeket a szempontokat vesszük kissé tüzetesebben szemügyre.

8.2.1. A mintavételezési idő megválasztása

A dinamikus rendszerek egy jelentős, túlnyomónak is mondható része folytonos idejű, a paraméterbecslést viszont majdnem kizárólag diszkrét rendszermodellek használatával végezzük. A folytonos jelek és rendszerek megfelelő mintavételezése, és mintavételezési idejének megfelelő megválasztása ezért kulcsfontosságú a paraméterbecslés sikeressége érdekében. A mintavételezési időt a rendszer dinamikájához és a mért minta szükséges hosszához igazodva választjuk meg.

A mintavételezési idő megválasztása szoros kapcsolatban van a mérési pontok számának, azaz a minta hosszának megválasztásával. *Arra törekszünk, hogy elegendően gyors mintavételezést biztosítsunk elegendően hosszú ideig.*

Ezen túlmenően azt szeretnénk, ha a rendszer valamennyi jellegzetes és modellezni kívánt időállandójára (valamennyi pólusának megfelelő karakterisztikus idejére) tartalmazna információt a mért minta, még a leggyorsabbra és a leghalványabbra is. *Ezért a mintavételezési időt úgy célszerű megválasztani, hogy az a leggyorsabb (legkisebb) karakterisztikus időnek legalább az egynegyede, a mérési idő hosszát, azaz a mintaelemszám és a mintavételezési idő szorzatát pedig úgy, hogy az a leghalványabb időállandójának legalább a négyszerese legyen.*

8.2.2. A mintaelemszám megválasztása

A paraméterbecsléshez szükséges mérések száma függ az egy mérési sorozatban (mintában) lévő mérések k_P számától és attól, hogy az adott teszt input-sorozatot hányszor ismételjük meg (k_R). Ha megismétljük a teszt input-sorozatot, akkor jobb becslésünk lesz a mérési hibák szórásáról, amely igen hasznos lehet, ha a becsült paraméterek jószágát szeretnénk megítélni.

A mintaelemek számát alapvetően a rendszer rendje, azaz állapotváltozóinak száma, és a becsülendő paraméterek száma határozza meg. Általánosságban azt mondhatjuk, hogy *a mintaelemek számának sokkal nagyobbak kell lennie, mint a rendszer rendje és a becsülni kívánt paraméterek száma.*

8.2.3. Elegendő gerjesztés biztosítása, tesztlelek

Ha egy dinamikus rendszer paramétereit becsülni szeretnénk, akkor a rendszer dinamikáját "elegendően" gerjeszteni kell. Bár zavarások és egyéb zajforrások valamennyi valódi rendszerben jelen vannak, ezek változása általában nem elegendő arra, hogy egy megfelelő "jel/zaj viszonyt" alakítsanak ki paraméterbecslési célra. *Ezért majdnem minden esetben valamilyen alkalmas tesztlelek-sorozatot adunk additíven a rendszer "szokásos" bemenetéhez, hogy a kellő és elegendő gerjesztést biztosítsuk.*

A 3.3 pontban már szó volt az elegendően gerjesztő bemenet alkalmazásának szükségességéről és arról, hogy ennek hiánya okozhatja azt, hogy a becsült értékek nem lesznek még aszimptotikusan sem torzítatlanok. Az "elegendő gerjesztés" szükséges feltételként pedig azt követeltük meg, hogy a bemenetek legyenek függetlenek a rendszert ért egyéb zajoktól és zavarásoktól, valamint, hogy önmagában a bemenet fehérzaj, vagy legalább közelítőleg fehérzaj legyen.

A fenti követelményeknek megfelelő, ám egyszerű tesztlelek a paraméterbecslési célra leggyakrabban alkalmazott *PRBS vizsgálójelek*, angolul *Pseudo-Random Binary Sequence*. A PRBS vizsgálójelek megfelelő gerjesztést biztosít, de viszonylag hosszú kísérleti időt (sok mintavételi pontot) igényel és nem zavarja meg a rendszer normális működését túlságosan.

A PRBS vizsgálójelek csak két különböző, általunk előre meghatározott értéket vehet fel, amelyek között véletlenszerűen megválasztott időpillanatokban ugrál, azaz az ugrások közti időtartam véletlen változó.

A PRBS vizsgálójelet paraméterbecslési célra egy adott rendszerhez úgy kell megválasztani, hogy

- az alap ugrási intervallum és a mintavételezési idő a becsülni kívánt rendszermodell legkisebb időállandójának egyötöde legyen,
- a mintaelemek száma, azaz a PRBS sorozat hossza körülbelül a legnagyobb időállandó ötszöröse legyen.

9. fejezet

Gyakorlat anyaga, példatár

9.1. A legkisebb négyzetek módszere

9.1.1. ARX modellstruktúra paramétereinek legkisebb négyzetes becslése

Feladat: Tekintsük a következő ARX modell-struktúrát:

$$A^*(q^{-1})y(k) = B^*(q^{-1})u(k) + e(k) \quad (9.1)$$

amely a következőképpen is felírható:

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_{n_a}y(k-n_a) = b_1u(k-1) + \dots + b_{n_b}u(k-n_b) + e(k) \quad (9.2)$$

Írjunk olyan MATLAB-függvényt, amely elvégzi a $\theta = [a_1 \dots a_{n_a} \ b_1 \dots b_{n_b}]^T$ paramétervektor legkisebb négyzetes becslését, ha adottak a rendszer mért bemeneti és kimeneti vektorai (u és y), valamint a modell rendjét megadó n_a és n_b pozitív egész számok.

Megoldás: A regressziós prediktív modell alakja a következő:

$$\hat{y}(k|\theta) = \theta^T \varphi(k) \quad (9.3)$$

ahol

$$\varphi(k) = [-y(k-1) \dots -y(k-n_a) \ u(k-1) \dots u(k-n_b)] \quad (9.4)$$

A fentiek alapján egy lehetséges megoldás a következő:

```
1 function theta = ls_arx(y, u, na, nb)
2     N = size(y, 1) - na;
3     y_hat = y(na + (1:N));
4     phi = zeros(na + nb, N);
5
6     for i = 1:na
7         phi(i, :) = -y(na - i + (1:N));
8     end
```



```

9
10     for i = 1:nb
11         phi(na + i, :) = u(nb - i + (1:N));
12     end
13
14     tmp1 = zeros(na + nb);
15     tmp2 = zeros(na + nb, 1);
16     for k = 1:N
17         tmp1 = tmp1 + phi(:, k) * phi(:, k)' / N;
18         tmp2 = tmp2 + phi(:, k) * y_hat(k) / N;
19     end
20
21     theta = tmp1 \ tmp2;
22 end

```

9.1.2. Állapotváltozóiban nemlineáris rendszer paramétereinek legkisebb négyzetes becslése

Feladat: Adott egy két egymáshoz kapcsolt tartályból álló fizikai rendszer (ld. a 9.1. ábrát), amelynek folytonos idejű modellje a következő:

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{v_{be}(t)}{A_1} - \frac{A_{cs1}}{A_1} \sqrt{2gh_1(t)} \quad (9.5)$$

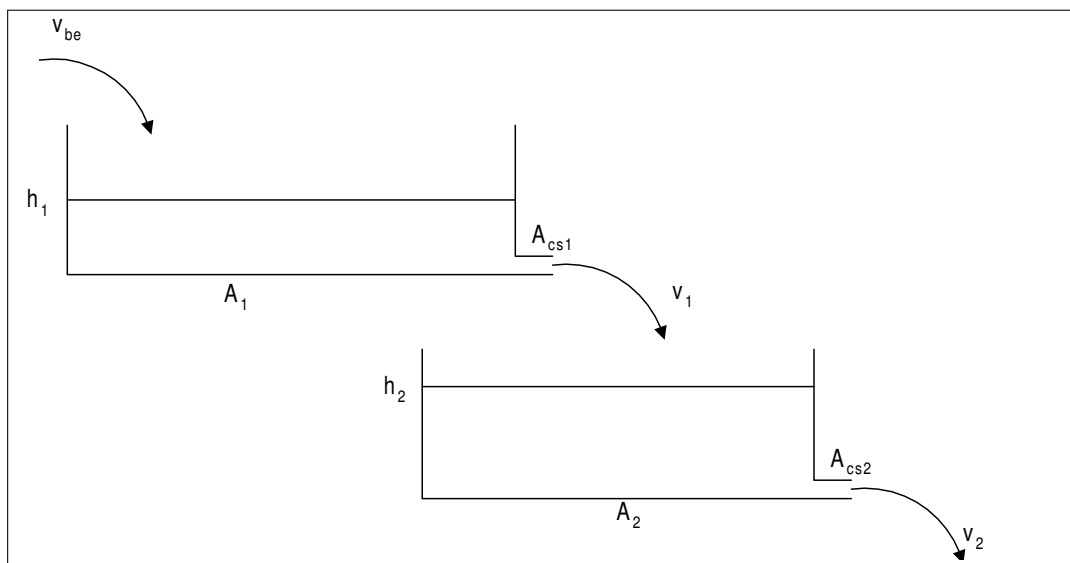
$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{A_{cs1}}{A_2} \sqrt{2gh_1(t)} - \frac{A_{cs2}}{A_2} \sqrt{2gh_2(t)} \quad (9.6)$$

ahol a paraméterek és változók jelentése:

- A_1, A_2 : az 1. és a 2. tartály alapterülete [m^2]
- A_{cs1}, A_{cs2} : Az 1. és 2. tartály kifolyócsövének keresztmetszete [m^2]
- g : gravitációs gyorsulás [$\frac{m}{s^2}$]
- v_{be} : az első tartályba felülről beömlő folyadék térfogatárama [$\frac{m^3}{s}$]
- h_1, h_2 : az első és a második tartály folyadékszintje [m]

Írjunk olyan MATLAB eljárást, amely a rendelkezésre álló vízszintmérésekből legkisebb négyzetes becslést ad a két tartály kifolyócsöveinek keresztmetszetére. Pontosabban: ismert A_1, A_2 és g , h_1 -et és h_2 -t mérjük (a mintavételi időt jelöljük t_s -sel), adjunk becslést A_{cs1} -re és A_{cs2} -re.

Megoldás: A modellegyenletekből látható, hogy a feladat megoldásához elegendő csak a (9.6) egyenletet használni, hiszen abban a paramétervektor mindkét eleme megtalálható. Mivel a mérési adatok diszkrét időben állnak rendelkezésünkre, át kell



9.1. ábra. 2 tankból álló rendszer sematikus ábrája

konvertálnunk a folytonos idejű modell 2. egyenletét diszkrét időbe. Erre a legegyszerűbb lehetőség az Euler-approximáció, amivel a következő (regressziós) modellt kapjuk:

$$\frac{h_2(k+1) - h_2(k)}{t_s} = \frac{A_{cs1}}{A_2} \sqrt{2gh_1(k)} - \frac{A_{cs2}}{A_2} \sqrt{2gh_2(k)} \quad (9.7)$$

Végül következzen a paraméterbecslést elvégző Matlab-eljárás programkódja.

```

1 function theta = t2_est(h1, h2, A2, ts)
2     g = 10;
3     N = size(h1, 1) - 1;
4
5     y = (h2(1 + (1:N)) - h2(1:N)) / ts;
6     phi = [ sqrt(2 * g * h1(1:N)') / A2;
7            -sqrt(2 * g * h2(1:N)') / A2];
8
9     tmp1 = zeros(2);
10    tmp2 = zeros(2, 1);
11    for k = 1:N
12        tmp1 = tmp1 + phi(:, k) * phi(:, k)' / N;
13        tmp2 = tmp2 + phi(:, k) * y(k) / N;
14    end
15    theta = tmp1 \ tmp2;
16 end

```

9.1.3. Paraméterében nemlineáris modell identifikációja numerikus módszerek segítségével

Ez a modell könnyen transzformálható linearissá $b = \frac{1}{\exp(a)}$ transzformációval **Feladat:** Tekintsük a következő differenciaegyenlettel leírt diszkrét idejű rendszert:

$$y(k+1) = \frac{1}{\exp(a)}y(k) + 5u(k) + e(k) \quad (9.8)$$

Ha adottak az y és u mérési adatok, adjunk becslést a értékére.

Megoldás Látható, hogy (9.8) az a -val jelölt paraméter nemlineáris függvénye. A kvadratikus kritériumfüggvény minimalizálására két módszer kínálkozik:

- Minimalizálás valamilyen numerikus módszer segítségével
- A kritériumfüggvény deriváltjának megoldása 0-ra szintén valamilyen alkalmasan kiválasztott numerikus algoritmussal.

Nézzük meg a fenti két lehetőség MATLAB-os implementációját.

A kvadratikus kritériumfüggvény például a következő MATLAB függvény segítségével értékelhető ki:

```

1 function V = quad_crit(y, u, a)
2     N = size(y, 1) - 1;
3     V = 0;
4     for k = 1:N
5         V = V + 0.5 / N * (y(k + 1) - exp(-a) * y(k) - 5 *
6             u(k))^2;
7     end
8 end

```

A függvény minimalizálása történhet a következő parancssorral:

```

1 a = fminsearch(@(a) quad_crit(y, u, a), a0);

```

ahol $a0$ a numerikus eljárásnak megadott kezdőérték.

Ha a kritériumfüggvény deriváltját szeretnénk megoldani 0-ra, akkor a derivált kiértékelését a következőképpen oldhatjuk meg:

```

1 function dV = quad_der(y, u, a)
2     N = size(y, 1) - 1;
3     dV = 0;
4     for k = 1:N
5         dV = dV + (y(k + 1) - exp(-a) * y(k) - 5 * u(k)) *
6             ...
7             y(k) * exp(-a) / N;
8     end
9 end

```

Amit a következő parancssorral oldhatunk meg 0-ra:

```
1 a = fsolve(@(a) quad_crit(y, u, a), a0);
```

ahol a0 a numerikus egyenletmegoldó eljárás kezdőértéke.

9.2. Rekurzív paraméterbecslő eljárások

9.2.1. A rekurzív gradiens módszer alkalmazása időben állandó paraméter becsléséhez

Ez a modell könnyen transzformálható linearissa $b = \ln(a)$ transzformációval **Feladat:** Adott a következő diszkrét idejű rendszer:

$$y(k+1) = \ln(a)y(k) + u(k) + e(k) \quad (9.9)$$

ahol u -t és y -t mérjük (mérési hibával), és az a paraméter értékét szeretnénk meghatározni. Írjunk olyan Matlab-függvényt, amely rekurzív gradiens módszerrel végzi el a becslést.

Megoldás: A predikciós hiba közelítése:

$$\hat{\varepsilon}(k, \hat{\theta}) = y(k+1) - \ln(\hat{a}(k-1))y(k) - u(k) \quad (9.10)$$

A predikciós hiba negatív gradiense a paraméterre nézve:

$$\hat{\psi}(k, \hat{\theta}) = \frac{1}{\hat{a}(k-1)}y(k) \quad (9.11)$$

A rekurzív gradiens módszert megvalósító Matlab-függvény ennek alapján a következő:

```
1 function a_est = rec_grad(y, u, P0, a0)
2     N = size(y, 1) - 1;
3
4     a_est = zeros(N + 1, 1);
5     a_est(1) = a0;
6     P = P0;
7
8     for k = 1:N
9         epsilon = y(k + 1) - u(k) - log(a_est(k)) * y(k);
10        psi = (1 / a_est(k)) * y(k);
11        P = P / (1 + psi^2 * P);
12        a_est(k + 1) = a_est(k) + P * psi * epsilon;
13
14        %nehogy negativ szamnak vegyuk a logaritmusat
15        if a_est(k + 1) <= 0
16            a_est(k + 1) = 0.5;
17        end
18    end
19 end
```

A függvény tárolja az összes diszkrét időpillanathoz tartozó becsült paraméterértéket, így vizsgálható a valódi értékhez való konvergencia.