Modell Alapú Diagnosztika Diszkrét Módszerekkel

Dinamikus modellek szerkezete, SDG modellek

Hangos Katalin

PE Villamosmérnöki és Információs Rendszerek Tanszék

Tartalom

1. Előjel műveletek
2. Linearizálás
   - skalár és vektor-értékű modellek
3. Lineáris állapottér modellek szerkezete
   - struktúra mátrixok
   - struktúra gráf
4. Nemlineáris állapottér modellek struktúra gráfja
   - linearizált állapottér modell
   - struktúra gráf
5. Egyszerű példa

Előjel aritmetika

Előjel érték-készlet

Univerzum: a változók és konstansok érték-készlete

- *Általános kvalitatív*: valós intervallumok fix vagy szabad végpontokkal

$$U_{\mathcal{I}} \;=\; \{[a_\ell, a_u] \mid a_\ell,\ a_u \in \mathcal{R},\ a_\ell \leq a_u\}$$

  és az alábbi **határpont halmazzal**

$$L_{\mathcal{I}} = \{a_i \mid a_i \leq a_{i+1}\ ,\ i \in I \subseteq \mathcal{N}\}$$

- ***Előjel***

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{S}} &= \{\, + \,,\, - \,,\, 0 \,;\, ? \,\}\ ,\ \ ? = + \cup 0 \cup - \\ L_{\mathcal{S}} &= \{\, a_1 = -\infty \,,\ a_2 = 0 \,,\ a_3 = \infty\} \end{aligned}$$

- *Logikai* (kiterjesztett)

$$U_{\mathcal{L}} \;=\; \{\, \mathbf{true} \,,\ \mathbf{false} \,;\ \mathbf{unknown} \,\}$$

Előjel algebra

Az **előjel univerzum feletti algebra**

Műveletek: a **szokásos algebrai tulajdonságokkal** (Kommutativitás, associativitás, distributivitás)

- előjel összeadás ($\oplus_S$) és kivonás ($\ominus_S$)
- előjel szorzás ($\otimes_S$) és osztás
- összetett műveletek és függvények

Az előjel műveletek specifikációja (definiciója) **műveleti táblák** segítségével történik.

Előjel összeadás

Műveleti tábla

$a \oplus_S b$	$+$	0	$-$	?
$+$	$+$	$+$	**?**	?
0	$+$	0	$-$	?
$-$	**?**	$-$	$-$	?
?	?	?	?	?

Tulajdonságok:

- **növekvő bizonytalanság**
- kommutatív

Előjel szorzás

Műveleti tábla

$a \otimes_S b$	$+$	0	$-$	?
$+$	$+$	0	$-$	?
0	0	0	0	$\mathbf{0}$
$-$	$-$	0	$+$	?
?	?	$\mathbf{0}$	?	?

Tulajdonságok:

- **korrekció** a nulla operandusoknál
- kommutatív

Állandósult állapot körüli linearizálás

Nemlineáris állapottér modellek

Mérnöki dinamikus modellek felírhatóak **állapottér modell formában**:

$$\begin{array}{rcll} \frac{dx}{dt} & = & F(x,u) & \text{(allapot egy.)} \\ y & = & h(x,u) & \text{(kimeneti egy.)} \end{array}$$

ahol F és h adott nemlineáris függvények.

Megmaradási modelleknél:

- az állapotegyenletek a dinamikus mérlegegyenletekból származnak
- bemenetek és kimenetek a műszerezés függvényei (is)

Az állandósult állapot(ok)

Állandósult állapot: x_0 egy adott konstans állandósult u_0 bemenetre

Input-affin rendszerekre: az alábbi nemlineáris algebrai egyenlet megoldása adott u_0-ra

$$0 = f(x_0) + g(x_0)u_0 = F(x_0, u_0) \qquad (*)$$

$$y_0 = h(x_0)$$

$(*)$-nak lehet több megoldása is, vagy egyáltalán nem lehet megoldása.

Centrált változók: $\widetilde{x} = x - x_0$

Linearizálás

Többváltozós függvények linearizálása:
$y = h(x_1, \ldots, x_n)$, $h : \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}^m$

$$\begin{aligned} \widetilde{y} &= J^{(h,x)}\Big|_{x_0} \cdot \widetilde{x} \\ J^{(h,x)}_{ji} &= \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \end{aligned}$$

ahol $J^{(h,x)}$ a h függvény Jacobi-mátrixa és $y_0 = h(x_0)$
Nemlineáris állapottér modellek: linearizáljuk a nemlineáris többváltozós függvényeket a

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = F(x, u)$$

$$y = h(x)$$

egyenletekben az (x_0, u_0) állandósult állapot körül.

Linearizált állapottér modellek

Input-affin eset: linearizáljuk az $\eta = F(x,u) = f(x) + g(x)u$ függvényt és az $y = h(x)$ függvényt az (x_0, u_0) pont körül

$$\begin{aligned} \widetilde{y} &= J^{(F,x)}\Big|_{x_0,u_0} \cdot \widetilde{x} + J^{(F,u)}\Big|_{x_0,u_0} \cdot \widetilde{u} \\ \widetilde{y} &= \left(J^{(f,x)}\Big|_0 + J^{(g,x)}\Big|_0 u_0) \right) \cdot \widetilde{x} + g(x_0) \cdot \widetilde{u} \end{aligned}$$

LTI állapottér modell forma:

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{x}} &= \widetilde{A}\widetilde{x} + \widetilde{B}\widetilde{u} \\ \widetilde{y} &= \widetilde{C}\widetilde{x} + \widetilde{D}\widetilde{u} \end{aligned}$$

$$\widetilde{A} = J^{(f,x)}\Big|_0 + J^{(g,x)}\Big|_0 u_0, \quad \widetilde{B} = g(x_0), \quad \widetilde{C} = J^{(h,x)}\Big|_0, \quad \widetilde{D} = 0$$

Előjeles irányított gráf (SDG) modellek

Állapottér modellek struktúrája

Linearizált állapottér modellek egy *állandósult állapot körül*

$$\begin{array}{lcll} \frac{dx}{dt} & = & Ax + Bu & (\mathrm{a'llapot\ egy.}) \\ y & = & Cx + Du & (\mathrm{kimeneti\ egy.}) \end{array}$$

a nemlineáris input-affin ÁT modellhez

$$\begin{array}{lcll} \frac{dx}{dt} & = & f(x) + g(x)u & (\mathrm{a'llapot\ egy.}) \\ y & = & h(x) & (\mathrm{kimeneti\ egy.}) \end{array}$$

Előjeles struktúra mátrixok: $[A]$

$$[A]_{ij} = \begin{cases} + & \text{if} \quad a_{ij} > 0 \\ 0 & \text{if} \quad a_{ij} = 0 \\ - & \text{if} \quad a_{ij} < 0 \end{cases}$$

Struktúra gráf

Súlyozott irányított gráf $S = (V, \mathcal{E}; w)$

- **csúcshalmaz** az állapot, kiment és bemenet változóknak

$$V = X \cup U \cup Y$$
$$X \cap U = X \cap Y = U \cap Y = \emptyset$$

- **élek** a változók közötti *közvetlen* hatásoknak
- él-**súlyok** a hatás *előjele*

A struktúra gráf előfordulási mátrixa

Az O előfordulási mátrix o_{ij} eleme

$$o_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & ha \qquad (v_i, v_j) \in E \\ 0 & egyebkent \end{cases}$$

Az (A, B, C, D) (linearizált) LTI állapottér modellre (u, x, y)

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ [B] & [A] & 0 \\ [D] & [C] & 0 \end{pmatrix}$$

Input-affin SISO állapottér modellre

$$\begin{aligned} [A]_{ij} &= \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial x_j} u_0 \right] \ , \ [B]_{i1} = [g_i] \\ [C]_{1j} &= \left[\frac{\partial h}{\partial x_j} \right] \ , \ [D] = 0 \end{aligned}$$

Utak a struktúra gráfban

Egy **irányított út** $P = (v_1, v_2, ..., v_n)$, $v_i \in V$, $e_{i,i+1} = (v_i, v_{i+1}) \in \mathcal{E}$

- a v_1 változó indirekt hatásának felel meg a v_n változóra
- az út **értéke**

$$W(P) = \prod_{i=1}^{n-1} w(e_{i,i+1})$$

- a *legrövidebb ut(ak)* és az *irányított körök* jelentősége

Struktúrális tulajdonságok

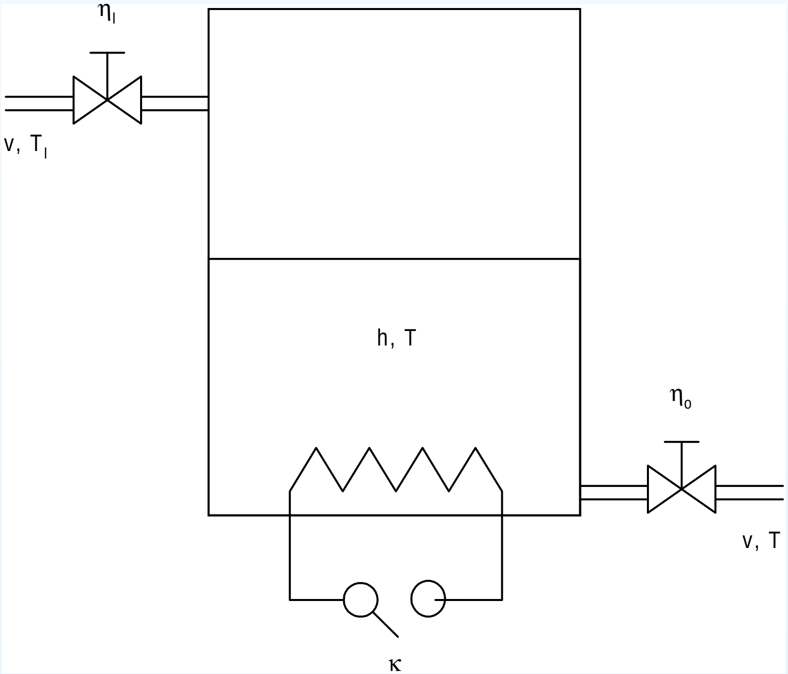
Azonos struktúrájú rendszerek osztálya: olyan állapottér modellel, amelyeknek ugyanaz a struktúra gráfja

Egy rendszer rendelkezik egy adott struktúrális tulajdonsággal, ha az azonos struktúrájú rendszerek null-mértékű halmaz kivételével rendelkeznek az adott tulajdonsággal

Példa: mátrixok struktúrális rangja

$$s - rank \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = s - rank \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix} = 2$$

Példa: Szamovár



A szamovár állapottér modellje

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{v}{A}\eta_I - \frac{v}{A}\eta_O && \text{(tomeg)} \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{v}{Ah}(T_I - T)\eta_I + \frac{H}{c_p \rho h}\kappa && \text{(energia)} \end{aligned}$$

t	idő $[s]$
h	tartályszint $[m]$
v	térfogatsebesség $[m^3/s]$
c_p	fajhő $[Joule/kgK]$
ρ	sűrűség $[kg/m^3]$
T	hőmérséklet $[K]$
T_I	befolyó hőmérséklet $[K]$
H	fűtőteljesítmény $[Joule/sec]$
A	keresztmetszet $[m^2]$
η_I	bináris bemeneti szelep $[1/0]$
η_O	bináris kimeneti szelep $[1/0]$
κ	bináris kapcsoló $[1/0]$

A szamovár SDG modellje