

Postfix jelölés

Marosvölgyi Gergely ©2014

Lényege

A postfix jelölés (vagy másnéven Lengyel-forma) célja egy (infix) algebrai kifejezés átírása oly módon, hogy ne szerepeljenek már benne zárójelek, de a műveletek sorrendje megmaradjon. Ezt a módszert használják többek között a kézi számológépek. Például:

Infix kifejezés: $(a + b) * (c - d)$

Postfixre átírva: $a b + c d - *$

Átírás postfix jelölésre

A folyamat menete a következő:

1. Felírjuk az infix kifejezés operátorai fölé, hogy hanyadikként lehet őket elvégezni
2. Megkeressük a legkisebb még nem vizsgált sorszámút
3. A keresett sorszámú műveletig fellelhető összes olyan operandust leírjuk, amely még nem szerepel a postfix kifejezésben
4. Hozzáírjuk az operátort a postfix kifejezéshez
5. Vissza a 2. lépésig, amíg van nem vizsgált operátor

Példa (1. lépés)

Felírjuk az infix kifejezés operátorai fölé, hogy hanyadikként lehet őket elvégezni:

$$a + b * (c - d) / (e + f)$$

Példa (1. lépés)

Felírjuk az infix kifejezés operátorai fölé, hogy hanyadikként lehet őket elvégezni:

$$a + b * (c \overset{1.}{-} d) / (e + f)$$

Példa (1. lépés)

Felírjuk az infix kifejezés operátorai fölé, hogy hanyadikként lehet őket elvégezni:

$$a + b \overset{2.}{*} (c \overset{1.}{-} d) / (e + f)$$

FONTOS! Mindig balról nézve vizsgáljuk az elvégezhető műveleteket, és eszerint a szorzást már végre lehet hajtani, hiszen a b elemi egység, a $(c-d)$ pedig már kiértékelésre került egy korábbi műveletben. (Ezért nem az $(e+f)$ következik!)

Példa (1. lépés)

Felírjuk az infix kifejezés operátorai fölé, hogy hanyadikként lehet őket elvégezni:

$$a + b \overset{2.}{*} (c \overset{1.}{-} d) / \overset{3.}{(e + f)}$$

Példa (1. lépés)

Felírjuk az infix kifejezés operátorai fölé, hogy hanyadikként lehet őket elvégezni:

$$a + b \overset{2.}{*} (c \overset{1.}{-} d) \overset{4.}{/} (e \overset{3.}{+} f)$$

Példa (1. lépés)

Felírjuk az infix kifejezés operátorai fölé, hogy hanyadikként lehet őket elvégezni:

$$a \overset{5.}{+} b \overset{2.}{*} (c \overset{1.}{-} d) \overset{4.}{/} (e \overset{3.}{+} f)$$


Példa (2. lépés)

Megkeressük a legkisebb még nem vizsgált sorszámút:

$$a \overset{5.}{+} b \overset{2.}{*} (c \overset{1.}{-} d) \overset{4.}{/} (e \overset{3.}{+} f)$$

Példa (3. lépés)


A keresett sorszámú műveletig fellelhető összes olyan operandust leírjuk, amely még nem szerepel a postfix kifejezésben:

$$\begin{array}{cccccc} & 5. & 2. & 1. & 4. & 3. \\ & a & + & b & * & (c - d) / (e + f) \end{array}$$


Postfix: *a*

Példa (3. lépés)


A keresett sorszámú műveletig fellelhető összes olyan operandust leírjuk, amely még nem szerepel a postfix kifejezésben:

$$\begin{array}{cccccc} & 5. & 2. & \boxed{1.} & 4. & 3. \\ a & + & b & * & (c - d) & / & (e + f) \end{array}$$


Postfix: $a b$

Példa (3. lépés)

A keresett sorszámú műveletig fellelhető összes olyan operandust leírjuk, amely még nem szerepel a postfix kifejezésben:

$$\begin{array}{cccccc} & 5. & 2. & \boxed{1.} & 4. & 3. \\ a & + & b & * & (c & - & d) / & (e & + & f) \end{array}$$


Postfix: $a b c$

Példa (3. lépés)

A keresett sorszámú műveletig fellelhető összes olyan operandust leírjuk, amely még nem szerepel a postfix kifejezésben:

$$\begin{array}{cccccc} & 5. & & 2. & 1. & & 4. & & 3. \\ & & & & & & & & \\ a & + & b & * & (c & - & d) & / & (e & + & f) \end{array}$$



A művelet utáni operandust is leírjuk még!

Postfix: $a b c d$

Példa (4. lépés)

Hozzáírjuk az operátort a postfix kifejezéshez:

$$\begin{array}{cccccc} & 5. & & 2. & 1. & & 4. & & 3. \\ & a & + & b & * & (c & - & d) & / & (e & + & f) \end{array}$$



Az operandusok után leírjuk az operátort is.

Postfix: $a b c d -$

Példa (2. lépés)

Megkeressük a legkisebb még nem vizsgált sorszámút:

$$\begin{array}{cccccc} 5. & 2. & 1. & 4. & 3. & \\ & \square & \text{---} & & & \\ a + b * (c - d) / (e + f) & & & & & \end{array}$$


Postfix: $a b c d -$

Példa (3. lépés)

A keresett sorszámú műveletig fellelhető összes olyan operandust leírjuk, amely még nem szerepel a postfix kifejezésben:

5. 2. ~~1.~~ 4. 3.

$$a + b * (c - d) / (e + f)$$

 Az a operandus már szerepel a postfixben.

Postfix: $a b c d -$

Példa (3. lépés)

A keresett sorszámú műveletig fellelhető összes olyan operandust leírjuk, amely még nem szerepel a postfix kifejezésben:

$$\begin{array}{cccccc} 5. & 2. & 1. & 4. & 3. & \\ a + & b * & (c - d) / & (e + f) & & \end{array}$$

↑
A b operandus már szerepel a postfixben.

Postfix: $a b c d -$

Példa (3. lépés)

A keresett sorszámú műveletig fellelhető összes olyan operandust leírjuk, amely még nem szerepel a postfix kifejezésben:

$$\begin{array}{cccccc} 5. & 2. & 1. & 4. & 3. & \\ a + b * & (c - d) & / & (e + f) & & \end{array}$$



A (c-d) kifejezés postfixe is szerepel.

Postfix: $a b c d -$

Példa (4. lépés)

Hozzáírjuk az operátort a postfix kifejezéshez:

$$\begin{array}{cccccc} 5. & 2. & 1. & 4. & 3. & \\ a + b & * & (c - d) / (e + f) & & & \end{array}$$



A szorzás mindkét tényezője megvan; jöhet az operátor.

Postfix: $a b c d - *$

Példa (2. lépés)

Megkeressük a legkisebb még nem vizsgált sorszámút:

$$\begin{array}{ccccccc} & 5. & \cancel{2.} & \cancel{1.} & 4. & \boxed{3.} & \\ & a & + & b & * & (c - d) & / & (e + f) \end{array}$$


Postfix: $a b c d - *$

Példa (3. lépés)

A keresett sorszámú műveletig fellelhető összes olyan operandust leírjuk, amely még nem szerepel a postfix kifejezésben:

5. ~~2.~~ ~~1.~~ 4. **3.**

$$a + b * (c - d) / (e + f)$$

 Az a operandus már szerepel.

Postfix: $a b c d - *$

Példa (3. lépés)

A keresett sorszámú műveletig fellelhető összes olyan operandust leírjuk, amely még nem szerepel a postfix kifejezésben:

$$\begin{array}{ccccccc} & 5. & \cancel{2.} & \cancel{1.} & 4. & \boxed{3.} & \\ & a & + & b & * & (c - d) / (e + f) & \\ & & & \uparrow & & & \\ & & & & & & \text{A } b \text{ operandus már szerepel.} \end{array}$$

Postfix: $a b c d - *$

Példa (3. lépés)

A keresett sorszámú műveletig fellelhető összes olyan operandust leírjuk, amely még nem szerepel a postfix kifejezésben:

$$5. \quad \cancel{2.} \quad \cancel{1.} \quad 4. \quad \boxed{3.}$$
$$a + b * (c - d) / (e + f)$$


A c operandus már szerepel.

Postfix: $a b c d - *$

Példa (3. lépés)

A keresett sorszámú műveletig fellelhető összes olyan operandust leírjuk, amely még nem szerepel a postfix kifejezésben:

$$\begin{array}{ccccccc} & 5. & \cancel{2.} & \cancel{1.} & 4. & \boxed{3.} & \\ & a & + & b & * & (c & - & d) / (e + f) \end{array}$$

 A d operandus már szerepel.

Postfix: $a b c d - *$

Példa (3. lépés)

A keresett sorszámú műveletig fellelhető összes olyan operandust leírjuk, amely még nem szerepel a postfix kifejezésben:

$$\begin{array}{ccccccc} & 5. & \cancel{2.} & \cancel{1.} & 4. & \boxed{3.} & \\ & a & + & b & * & (c & - & d) & / & (e & + & f) \end{array}$$



Az e operandus még nem szerepel.

Postfix: $a b c d - * e$

Példa (3. lépés)

A keresett sorszámú műveletig fellelhető összes olyan operandust leírjuk, amely még nem szerepel a postfix kifejezésben:

$$\begin{array}{ccccccc} & 5. & \cancel{2.} & \cancel{1.} & 4. & \boxed{3.} & \\ & & & & & & \\ a & + & b & * & (c & - & d) / (e & + & f) \end{array}$$



Az f operandus még nem szerepel.

Postfix: $a b c d - * e f$

Példa (4. lépés)

Hozzáírjuk az operátort a postfix kifejezéshez:

$$a + b * (c - d) / (e + f)$$

5. ~~2.~~ ~~1.~~ 4. 3.

Postfix: $a b c d - * e f +$

Példa (2. lépés)

Megkeressük a legkisebb még nem vizsgált sorszámút:

$$\begin{array}{cccccc} 5. & \cancel{2.} & \cancel{1.} & \boxed{4.} & \cancel{3.} & \\ a + b * (c - d) / (e + f) \end{array}$$

Postfix: $a b c d - * e f +$

Példa (2. és 4. lépés)

Mivel az összes operandus szerepel, ezért elegendő már csak az operátorokat leírni a sorszámok szerinti sorrendben:

$$\begin{array}{cccccc} 5. & \cancel{2.} & \cancel{1.} & \boxed{4.} & \cancel{3.} & \\ a + b * (c - d) / (e + f) \end{array}$$

Postfix: $a b c d - * e f + /$

Példa (2-3-4. lépések)

Mivel az összes operandus szerepel, ezért elegendő már csak az operátorokat leírni a sorszámok szerinti sorrendben:

$$a \overset{5.}{+} b \overset{3.}{*} (c \overset{1.}{-} d) \overset{4.}{/} (e \overset{2.}{+} f)$$

Postfix: $a b c d - * e f + / +$

Példa (végeredmény)

A postfix alakban az operandusok ugyanazon sorrendben kell szerepeljenek, mint az infixben:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \cancel{5.} & & \cancel{3.} & & \cancel{1.} & & \cancel{4.} & & \cancel{2.} \\ & a & + & b & * & (& c & - & d &) / & (& e & + & f &) \end{array}$$

Postfix: $a b c d - * e f + / +$

Kiértékelés (érdekesség)

A postfix jelölés azért kényelmes, mert egyszerű a kiértékelése:

1. Elmegyünk az első operátorig
2. Vesszük az operátort megelőző két operandust (x és y)
3. Elvégezzük rajtuk a műveletet
4. Az eredményt visszaírjuk a postfix kifejezésbe
5. Kezdjük előlről, mígnem egyetlen számot kapunk

Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: 2 5 + 9 7 - *

Ezek tartoznak egybe. Az első operátor jelzi az öt megelőző operandusokon elvégzendő műveletet.

$x ? y =$

Minden művelethez kell majd egy műveleti jel, valamint egy x és egy y operandus (amennyiben bináris operátorról van szó).

Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: 2 5 + 9 7 - *



Elmegyünk az első operátorig.

$x + y =$

Megvan a művelet.

Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: 2 5 + 9 7 - *

$x=2$

$x+y=$

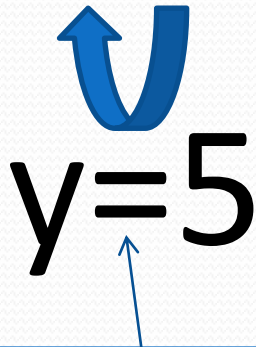
Ha két operandusú operátorról van szó (mint pl. a +, -, *, /, ^) és ez az i -edik helyen áll, akkor a postfix kifejezésben az x mindig az $(i-2)$ -edik helyen található.

Megvan az x operandus.

Kiértékelés – példa

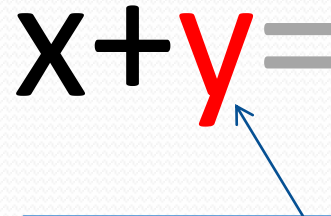
Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: 2 5 + 9 7 - *



$y=5$

Ha két operandusú operátorról van szó (mint pl. a +, -, *, /, ^) és ez az i -edik helyen áll, akkor a postfix kifejezésben az y mindig az $(i-1)$ -edik helyen található.



$x+y=$

Megvan az y operandus.

Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: 2 5 + 9 7 - *

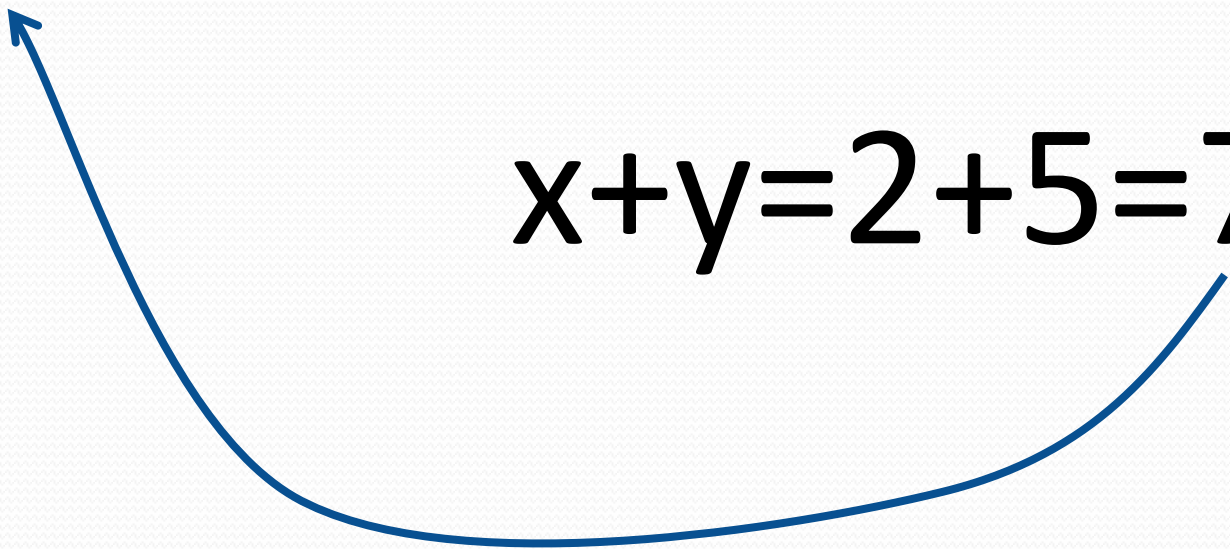
$$x+y=2+5=7$$

Megvan a részeredmény; ezt visszaírjuk a "2 5 +" helyére.

Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: **7** 9 7 - *

$$x+y=2+5=7$$


Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: 7 9 7 - *




$$x - y =$$

Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: 7 9 7 - *



 $x=9$

$x-y=$

Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: 7 9 7 - *


$$y = 7$$

$$x - y =$$

Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

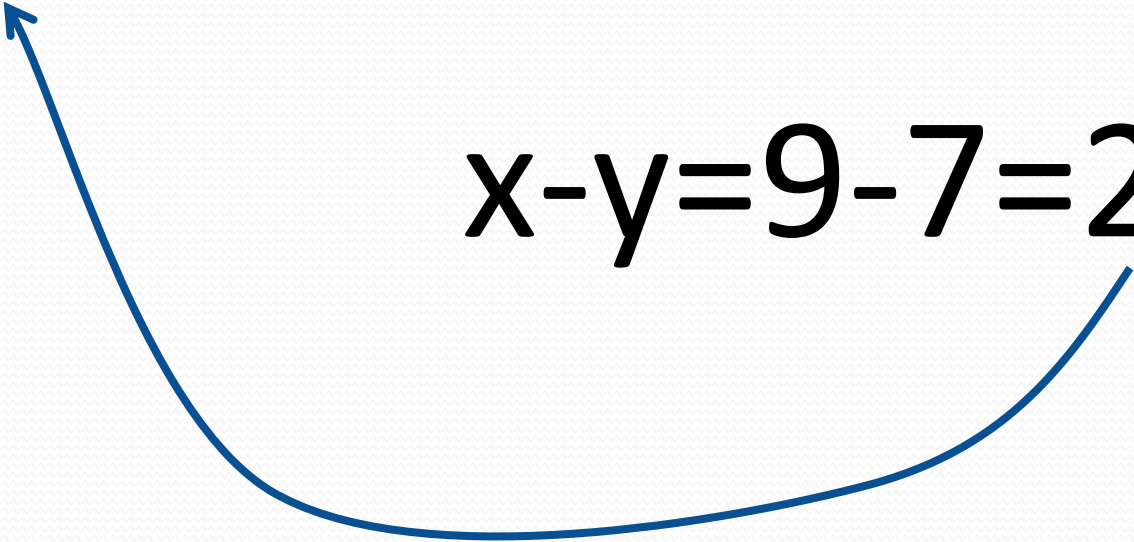
Postfix: 7 9 7 - *

$$x-y=9-7=2$$

Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: 7 2 *

$$x - y = 9 - 7 = 2$$


Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: 7 2 *




$x * y =$

Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: 7 2 *



 $x=7$

$x * y =$

Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: 7 2 *


 $y=2$

$x^*y=$

Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: $7\ 2\ *$

$$x * y = 7 * 2 = 14$$

Kiértékelés – példa

Infix: $(2 + 5) * (9 - 7)$

Postfix: 14 ← A végeredmény 14

$$x * y = 7 * 2 = 14$$


Bináris faként (érdekesség)

A postfix jelölésből felépíthető egy fa, melynek postorder (bal-jobb-gyökér) bejárása maga a postfix alak. Az előbbi példa fája:

Postfix: 2 5 + 9 7 - *

