

# Tiling Problems

Haladó Informatikai Algoritmusok  
3. Előadás - Princzes Barnabás

## Az előadás témái

Alap probléma

Dinamikus  
programozás

Általánosítás?

Fun facts

## Definition of tiling problems

Maximize the amount of floor space you can cover with a tile of fixed shape and dimensions.

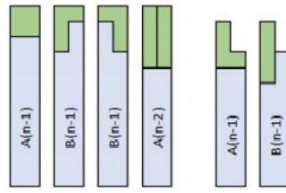
[https://en.wikipedia.org/wiki/The\\_Man\\_Who\\_Loved\\_Only\\_Numbers](https://en.wikipedia.org/wiki/The_Man_Who_Loved_Only_Numbers)

## $N * M$ lefedése $1 * M$ -es "csíkokkal"

```
count(n) = | 1, 1 <= n < m  
           | 2, n = m  
           | count(n-1) + count(n-m), m < n
```

Time Complexity:  $O(n)$   
Auxiliary Space:  $O(n)$

<https://www.geeksforgeeks.org/count-number-ways-tile-floor-size-n-x-m-using-1-x-m-size-tiles/>  
1 -> vonal vagy függőleges csíkozás



By counting the ways to fill the top row of a region, we obtain the following recursions:

$$\begin{cases} A(n) = A(n-1) + 2B(n-1) + A(n-2) \\ B(n) = A(n-1) + B(n-1) \end{cases}$$

Let  $F_n$  denote the  $n^{\text{th}}$  Fibonacci number — thus  $F_{-1} = 0$ ,  $F_0 = 1$ , and  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  for any integer  $n > 0$ . We claim that  $A(n) = F_n^2$  and  $B(n) = F_n F_{n-1}$ .

The proof of the claim is by induction on  $n$ . The case  $n = 0$  is clear:  $A(0) = 1 = F_0^2$  and  $B(0) = 0 = F_0 F_{-1}$ .

Let  $k \in \mathbb{N}$ , and suppose the claim holds for all  $n < k$ . Then

$$A(n) = A(n-1) + 2B(n-1) + A(n-2) = F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}^2 = (F_{n-1} + F_{n-2})^2 = F_n^2$$

and

$$B(n) = A(n-1) + B(n-1) = F_{n-1}^2 + F_{n-1}F_{n-2} = F_{n-1}(F_{n-1} + F_{n-2}) = F_{n-1}F_n.$$

Specifically, the number of ways to tile a  $2 \times 8$  rectangle is  $A(4) = F_4^2 = 5^2 = 25$ .  $\square$

<https://math.stackexchange.com/questions/3025592/tetris-tiling-2xn-or-filling-a-tube>

## Dinamikus Programozás

A megoldás lépései általában a következők:

- Rekurzív megoldás
- Részproblémák beazonosítása, adatszerkezet
- Idő és tár igény
- Részproblémák kapcsolata
- Fejlesztés, működésbeli változtatások

Szegedi tudomány egyetem alapján

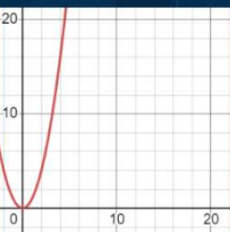
<https://www.inf.szte.hu/~rfarkas/Alga17/alga-gyak-04.pdf>

# Gyakorlatban

## Rekurzió

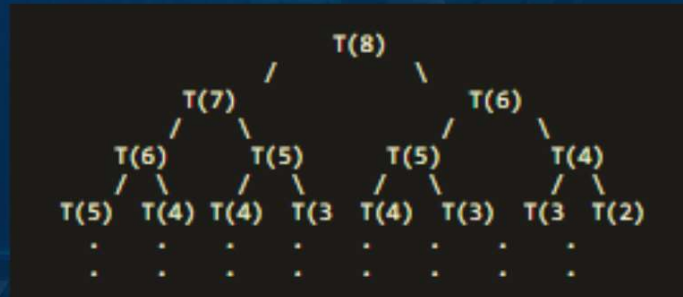
Ha a probléma  $N^2$ ,  $1^2$  típusú:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$$



# Gyakorlatban

## Adatszerkezet, Részproblémák

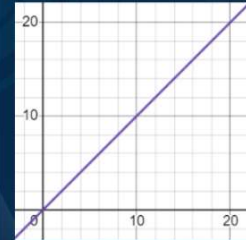


$T(6)$  meg ilyenek többször ki vannak számolva  
Fibonacci  $O(n^2)$

# Gyakorlatban

Fejlesztés

```
T(i) {  
  if (i <= 2){  
    return(1);  
  }  
  if (i > 2){  
    S[1] = 1;  
    S[2] = 1;  
    for (j = 2; j <= i; j++){  
      S[j] = S[j-1] + S[j-2];  
    }  
    return(S[j]);  
  }  
}
```

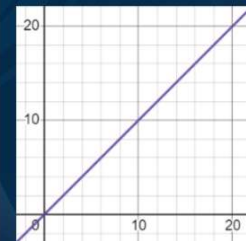


Tárolhatjuk, de jobb ha inkább felfele megyünk

# Gyakorlatban

Fejlesztés

```
T(i) {  
  if (i <= 2){  
    return(1);  
  }  
  if (i > 2){  
    S[1] = 1;  
    S[2] = 1;  
    for (j = 2; j <= i; j++){  
      S[j] = S[j-1] + S[j-2];  
    }  
    return(S[j]);  
  }  
}
```

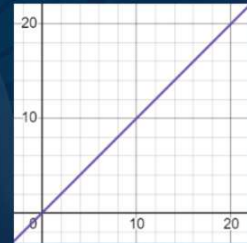


Mi lineáris még? Tárterület szükségessége

# Gyakorlatban

Fejlesztés

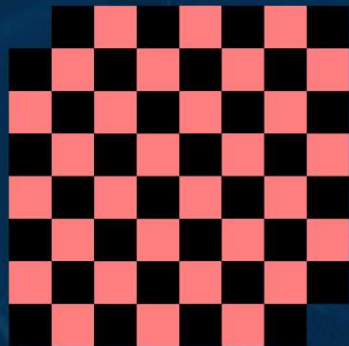
```
T(i) {  
  if (i <= 2){  
    return(1);  
  }  
  if (i > 2){  
    secondlast = 1;  
    last = 1;  
    for (j = 2; j <= i; j++){  
      new = last + secondlast;  
      secondlast = last;  
      last = new;  
    }  
    return(last);  
  }  
}
```



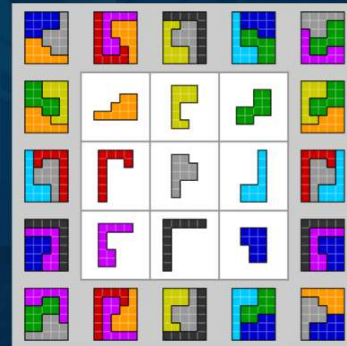
Tárolhatjuk, de jobb ha inkább felfele megyünk  
L alakra is megmutatják

# Általánosítás?

Megcsonkított  
sakktábla



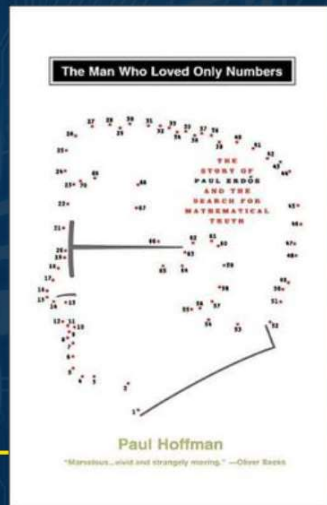
Geomógikus  
négyzet



2\*1-es dominók

[https://en.wikipedia.org/wiki/Mutilated\\_chessboard\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Mutilated_chessboard_problem)

## Definíció



The Man Who Loved Only Numbers - Paul Hoffman

## Fun Facts

### Magyarázatok, problémák

Project euler -> 114 - 117  
<https://www.youtube.com/@WilliamFiset-videos>

