Számítógépes döntéstámogatás

Diszkrét rendszerek dinamikájának formális leírása: automaták és Petri hálók

Werner Ágnes

Villamosmérnöki és Információs Rendszerek Tanszék

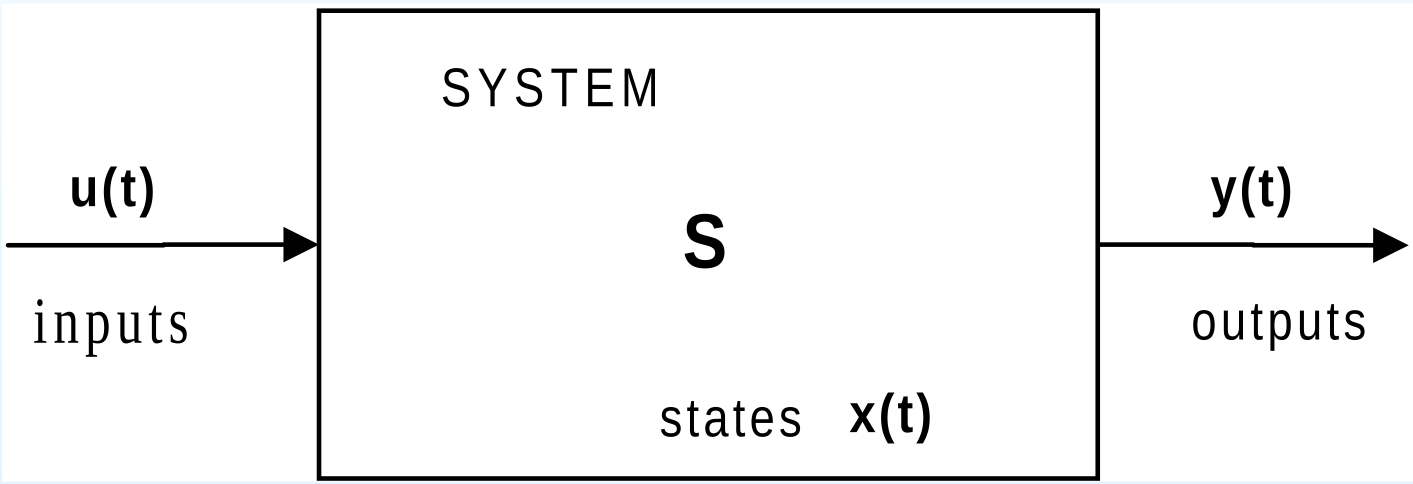
e-mail: werner.agnes@virt.uni-pannon.hu

Rendszerek

Rendszer (**S**): *jelek*en végez műveletet

$$y = \mathbf{S}[u]$$

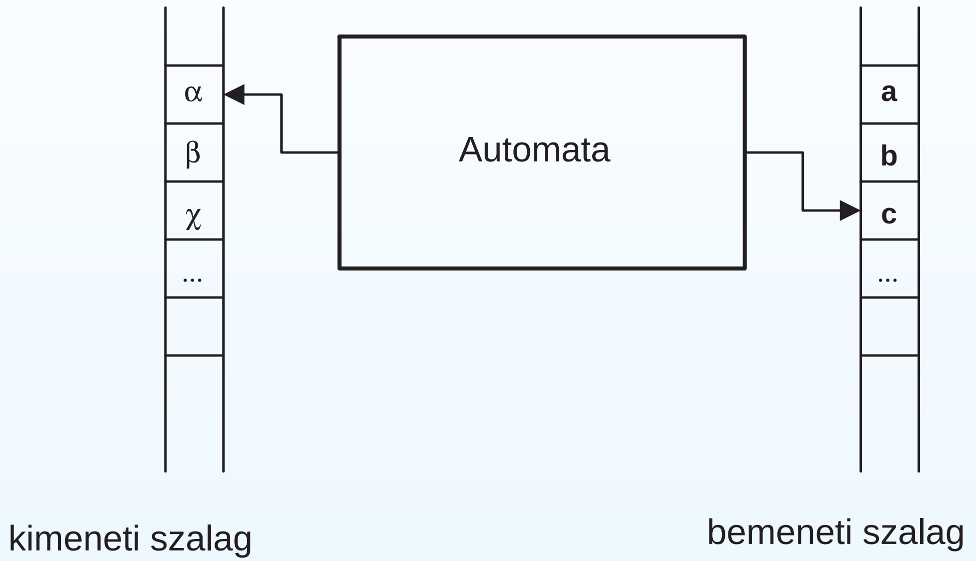
- bemenetek (u) és kimenetek (y)
- állapot-változók (x)



1. ábra. A rendszer jel-folyam ábrája

Véges automata modellek

Automata



Absztrakt számítógép modellje: diszkrét eseményű rendszer.
Egy műveleti lépésben

- egy szimbólum olvasása a bemeneti szalagról (írófej mozgatás)
- állapot változtatás
- egy szimbólum írása a kimeneti szalagra (olvasófej mozgatás)

Véges automata – absztrakt leírás: $\mathbf{A} = (Q, \Sigma, \delta; \Sigma_O, \varphi)$

- **Állapotok halmaza**: Q
- a bemeneti szalag **véges ABC (alphabet)**-je: $\Sigma = \{\#; a, b, ...\}$
- **Állapot-átmeneti függvény**: $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$
- *Kezdeti és végállapotok halmaza*: $Q_I,\ Q_F\ \subseteq\ Q$
- a kimeneti szalag **véges ABC**-je: $\Sigma_O = \{\#; \alpha, \beta, ...\}$
- **Kimeneti függvény**: $\varphi : Q \rightarrow \Sigma_O$

Grafikus ábrázolás: súlyozott irányított gráffal

- **Csúcsok**: állapotok (Q)
- **élek**: állapot-átmenetek (δ)
- **élsúlyok**: bemenő szimbólum (Σ)

Automaták működése

Adott

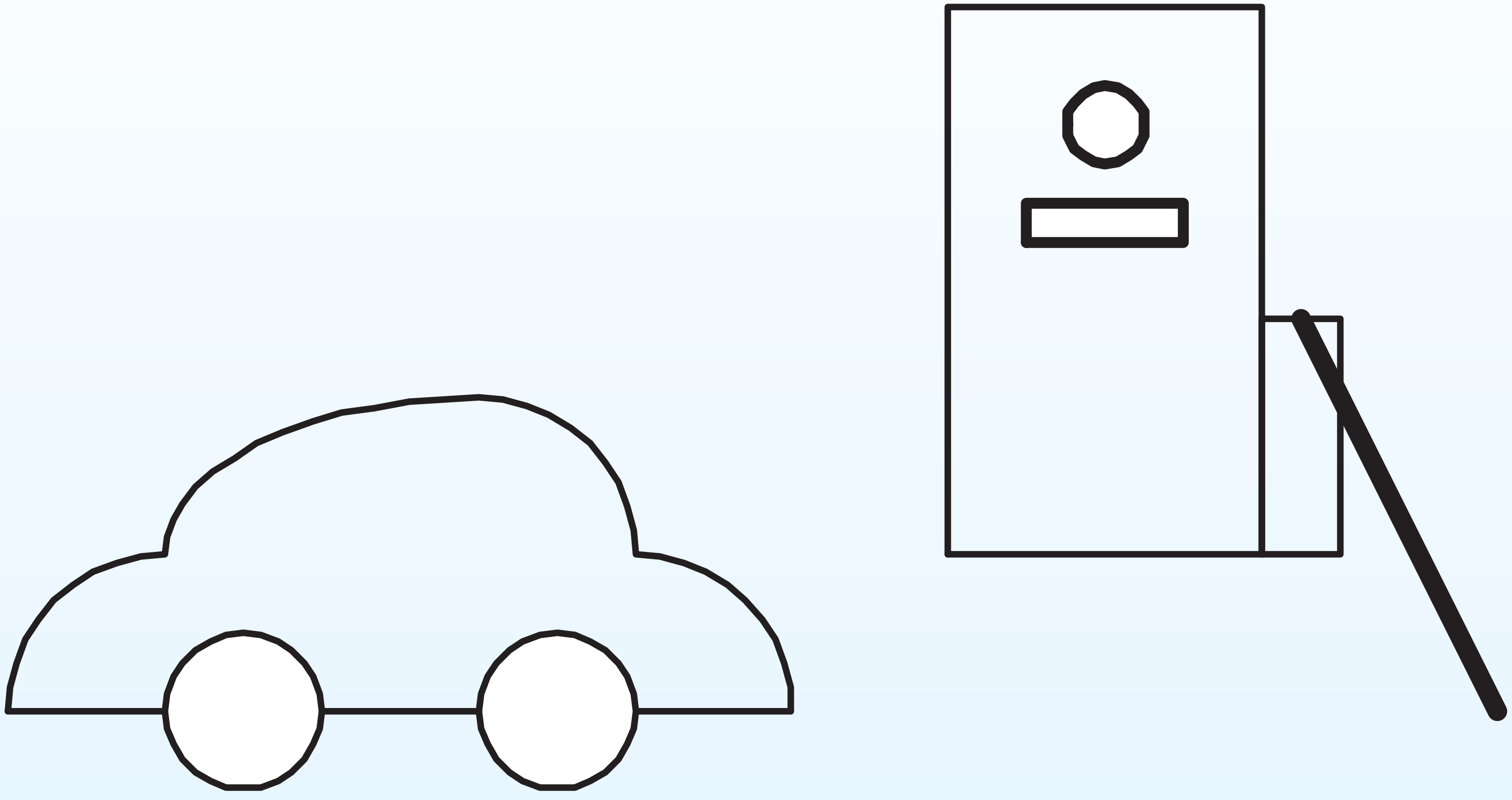
- kezdeti állapot: $q_0 \in Q_I \subseteq Q$
- input szalag tartalma: $S = [\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n]\ ,\ \sigma_i \in \Sigma$

Kiszámítandó:

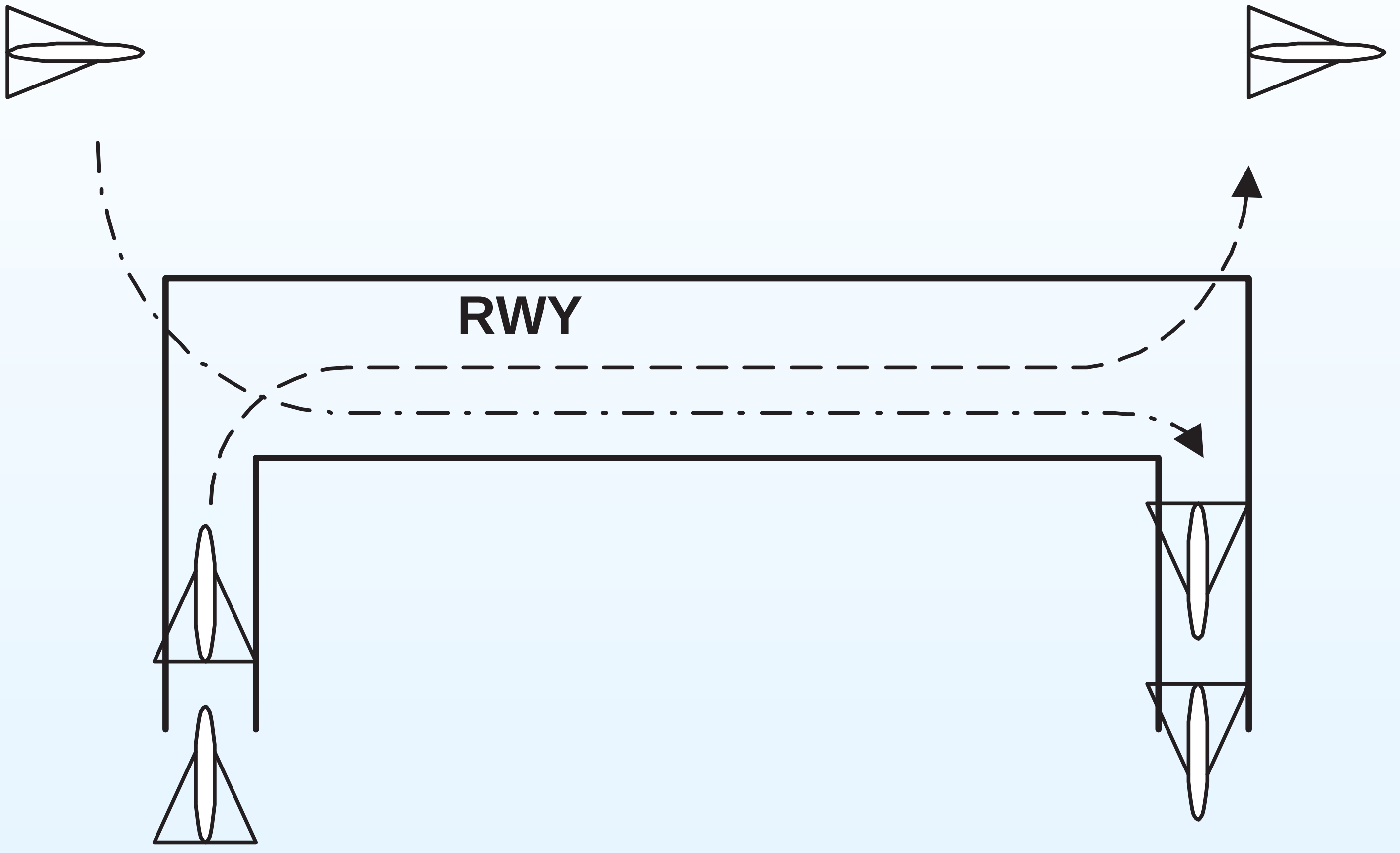
- végállapot: ha $q_f \in Q_F \subseteq Q$, akkor az automata **elfogadja** az inputot
- output szalag tartalma: $S_O = [\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n]\ ,\ \zeta_i \in \Sigma_O$

Petri háló modellek

Példa1: Parkológarázs kapu



Példa2: Kifutópálya



Petri háló modell – absztrakt leírás: $\mathbf{PN} = (P, T, I, O)$

Statikus leírás (szerkezet)

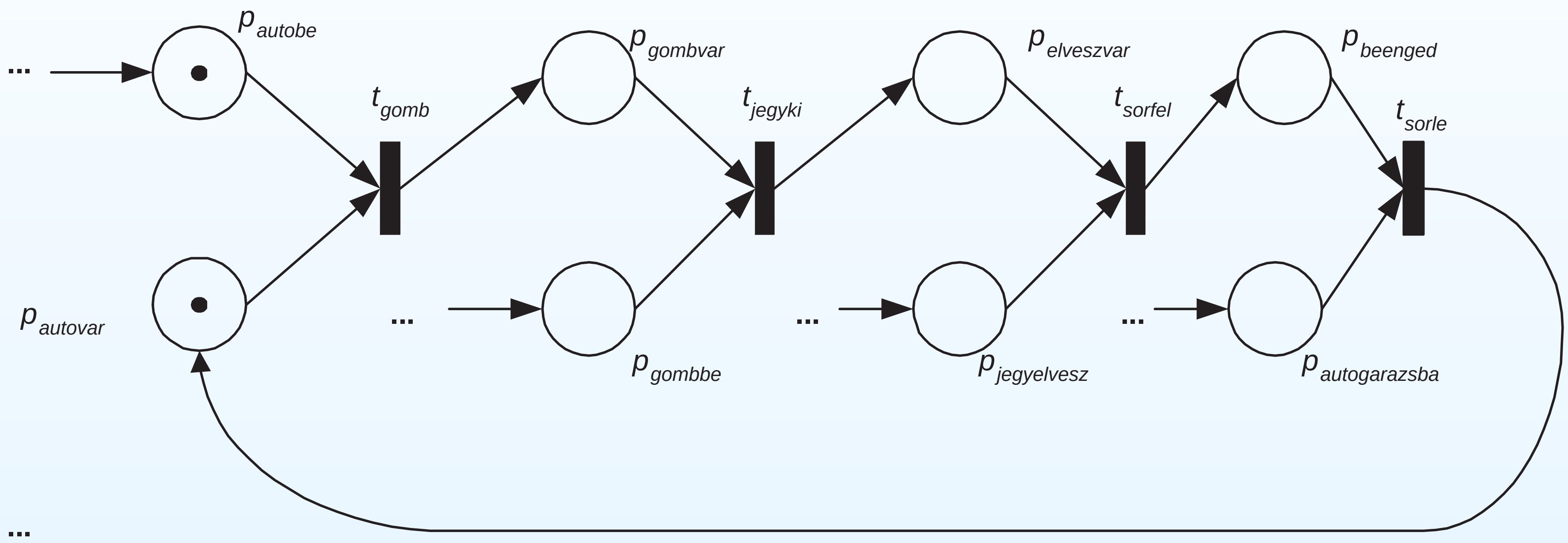
- **Helyek (feltételek)** halmaza: P
- **Átmenetek (események)** halmaza: T
- **Bemeneti (előfeltétel) függvény**: $I : T \longrightarrow P^{\infty}$
- **Kimeneti (következmény) függvény**: $O : T \longrightarrow P^{\infty}$

Grafikus ábrázolás: páros irányított gráffal

- **Csúcsok**: helyek (P) és átmenetek (T) (partíciók)
- **Élek**: bemeneti és kimeneti függvény (I, O)

Példa: parkológarázs kapu – 1

Petri háló modell - grafikus leírás



Példa: parkológarázs kapu – 2

Petri háló modell - formális leírás

Helyek (állapot; input):

$$P = \{p_{autovar}, p_{gombvar}, p_{elveszvar}, p_{beenged}\ ;\ p_{autobe}, p_{gombbe}, p_{jegyelevesz}, p_{autogarazsba}\}$$

Átmenetek:

$$T = \{t_{gomb}, t_{jegyki}, t_{sorfel}, t_{sorle}\}$$

Bemeneti függvény:

$$I(t_{gomb}) = \{p_{autobe}, p_{autovar}\} \quad , \quad I(t_{jegyki}) = \{p_{gombbe}, p_{gombvar}\}$$

$$I(t_{sorfel}) = \{p_{jegyelvesz}, p_{elveszvar}\} \quad , \quad I(t_{sorle}) = \{p_{beenged}, p_{autogarazsba}\}$$

Kimeneti függvény:

$$O(t_{gomb}) = \{p_{gombvar}\} \quad , \quad O(t_{jegyki}) = \{p_{elveszvar}\}$$

$$O(t_{sorfel}) = \{p_{beenged}\} \quad , \quad O(t_{sorle}) = \{p_{autovar}\}$$

Petri háló modell – absztrakt leírás: $\mathbf{PN} = (P, T, I, O)$

Statikus leírás (szerkezet)

- **Helyek (feltételek)** halmaza: P
- **Átmenetek (események)** halmaza: T
- **Bemeneti (előfeltétel) függvény**: $I : T \longrightarrow P^{\infty}$
- **Kimeneti (következmény) függvény**: $O : T \longrightarrow P^{\infty}$

Grafikus ábrázolás: páros irányított gráffal

- **Csúcsok**: helyek (P) és átmenetek (T) (partíciók)
- **Élek**: bemeneti és kimeneti függvény (I, O)

Petri hálók dinamikája

Jelölőfüggvény: jelölőpontok (**token**-ek)

$$\mu : \mathbf{P} \longrightarrow \mathcal{N} \quad , \quad \mu(p_i) = \mu_i \geq 0$$

$$\underline{\mu}^T = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n] \quad , \quad n = |\mathbf{P}|$$

Átmenet **tüzel** (működik): ha az előfeltételek "igaz"-ak (van **token** a bemeneti helyeken)

$$\underline{\mu}^{(i)}[t_j > \underline{\mu}^{(i+1)}$$

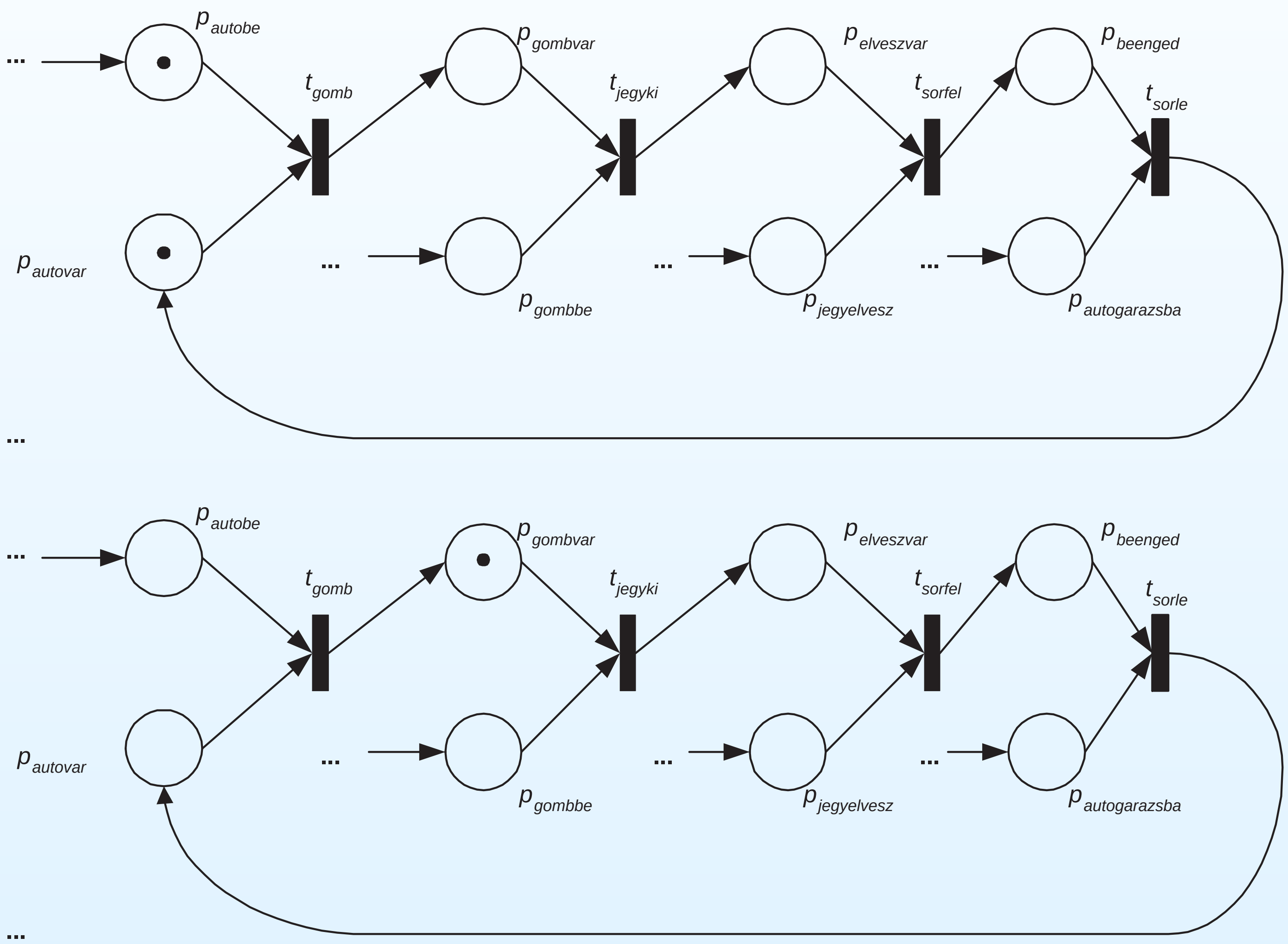
tüzelés után a következmény-ek lesznek "igaz"-ak

Tüzelési (működési) sorozat

$$\underline{\mu}^{(0)}[t_{j0} > \underline{\mu}^{(1)}[t_{j1} > \ldots[t_{jk} > \underline{\mu}^{(k+1)}$$

Példa: parkológarázs kapu – 3

Egy működési lépés



Példa: parkológarázs kapu – 4

Egy működési lépés formális leírása

Jelölő vektor

$$\underline{\mu}^T = [\mu_{autovar}, \mu_{gombvar}, \mu_{elveszvar}, \mu_{beenged} \; ; \; \mu_{autobe}, \mu_{gombbe}, \mu_{jegyelevesz}, \mu_{autogarazsba}]$$

A t_{gomb} átmenet működése

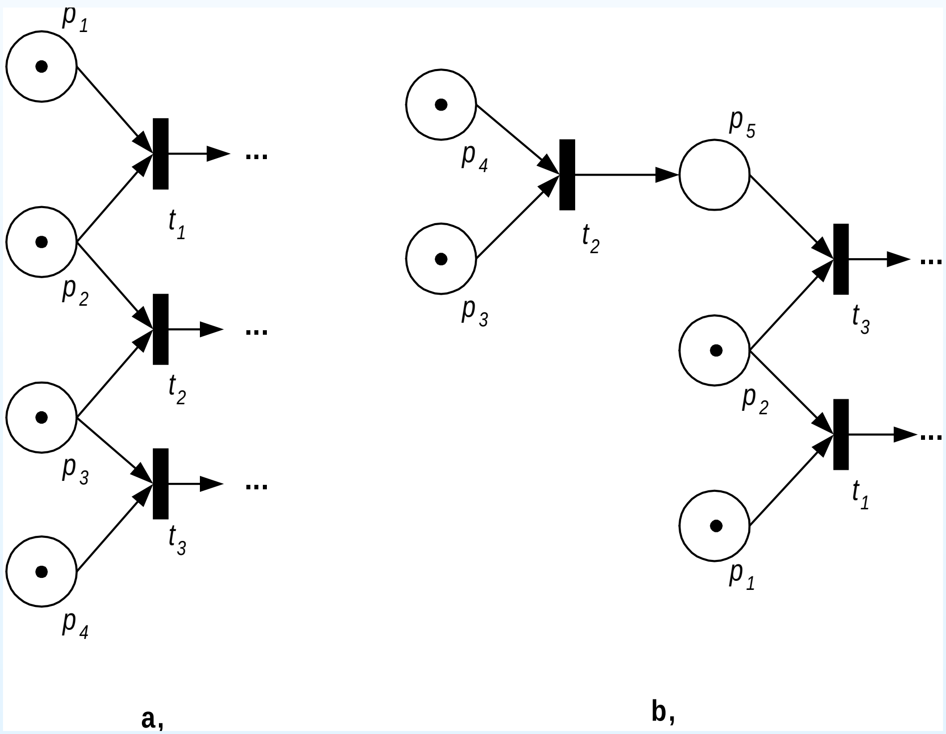
$$\underline{\mu}^{(1)}[t_{gomb} > \underline{\mu}^{(2)}$$

$$\underline{\mu}^{(1)} = [1,\ 0,\ 0,\ 0\ ;\ 1,\ 0,\ 0,\ 0]^T$$

$$\underline{\mu}^{(2)} = [0,\ 1,\ 0,\ 0\ ;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]^T$$

Párhuzamos események

Egynél több engedélyezett átmenet: konkurrencia (független feltételek), konfliktus (nem független feltételek)

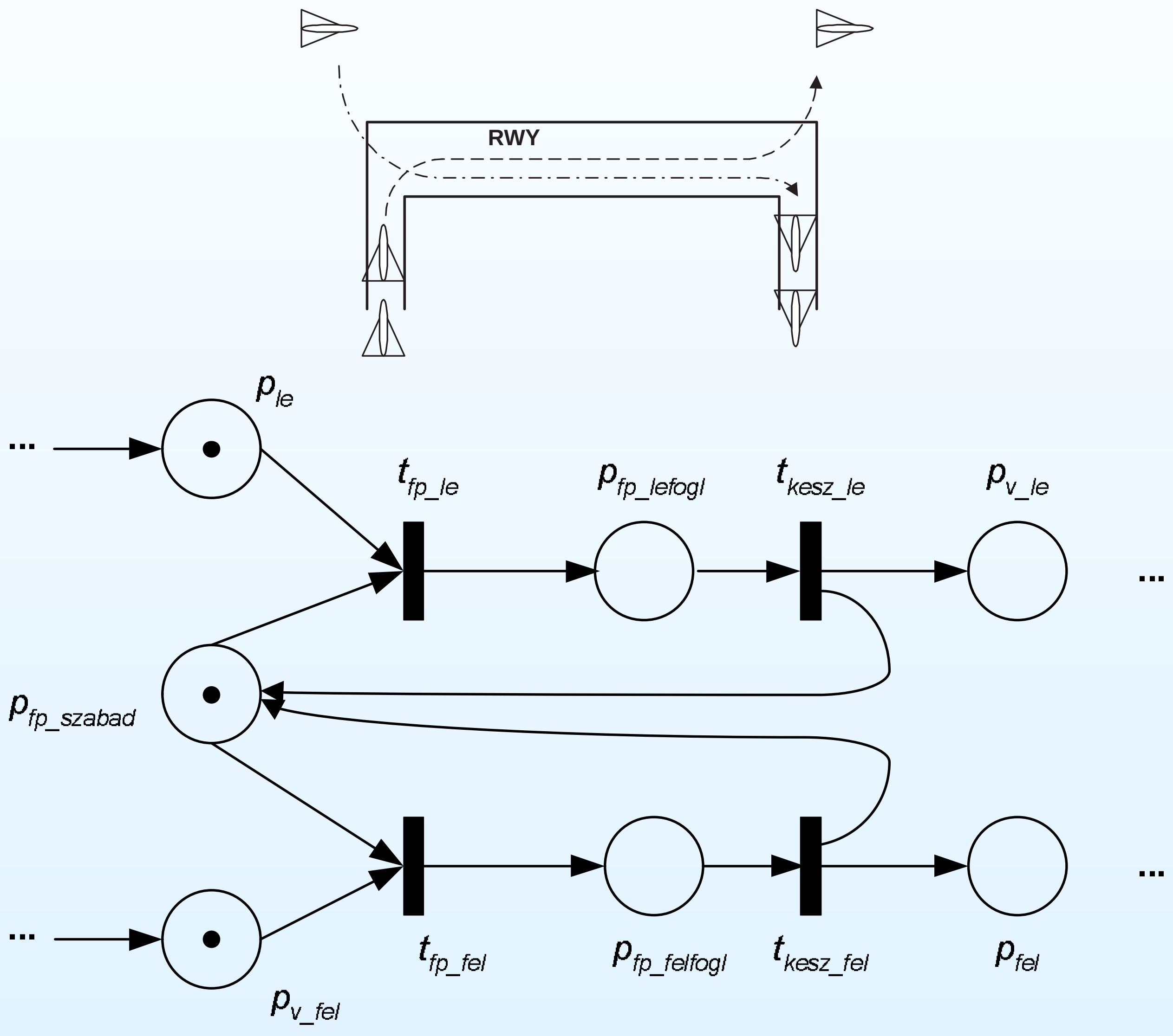


Konfliktus feloldás

Inhibitor nyilakkal:
- felhasználó által beállított prioritás
- teszt nyilak

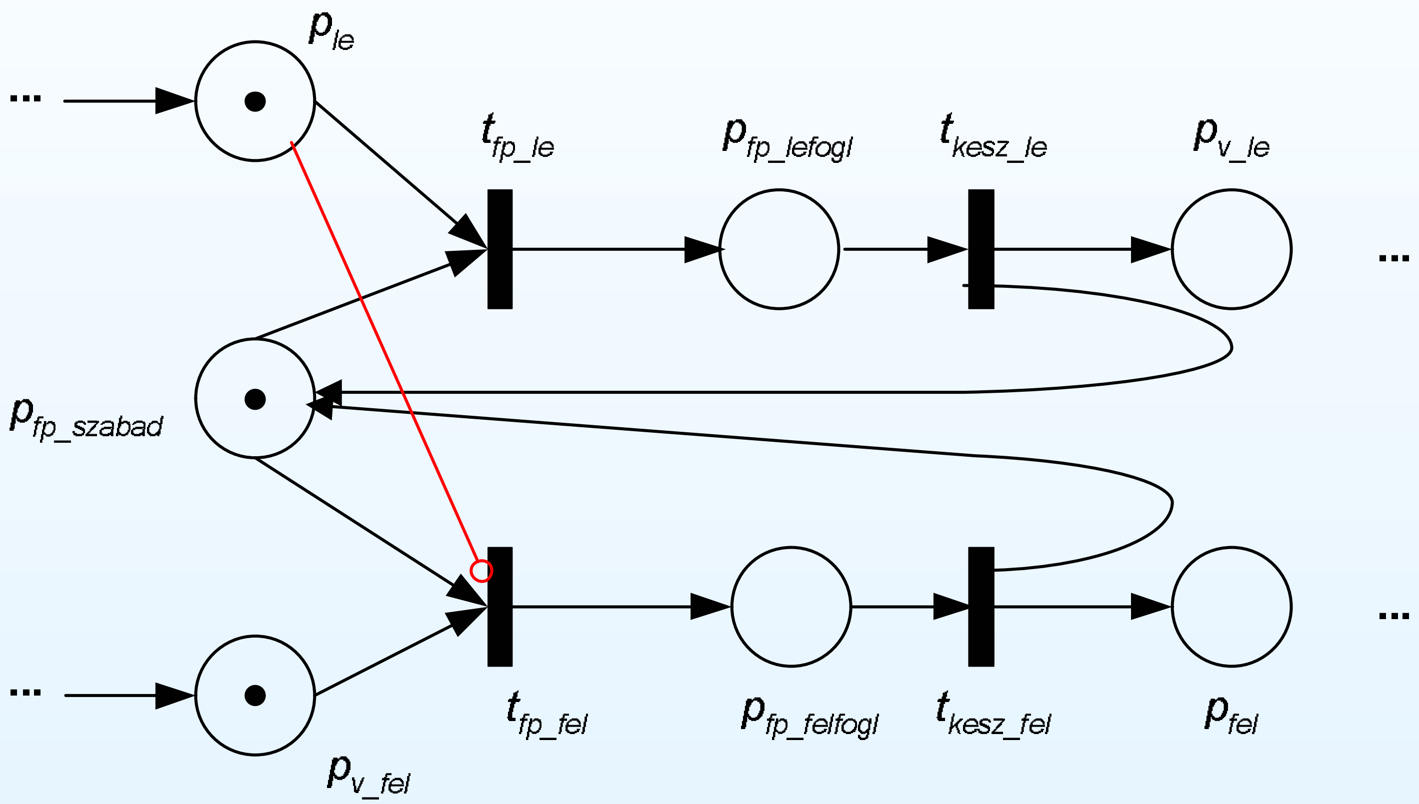
Egyéb megoldások:
- helyek kapacitása

Kifutópálya Petri háló modellje – 1



Kifutópálya Petri háló modellje – 2

Konfliktus-feloldás: leszálló gépnek előnye van



Kiterjesztett Petri háló modellek

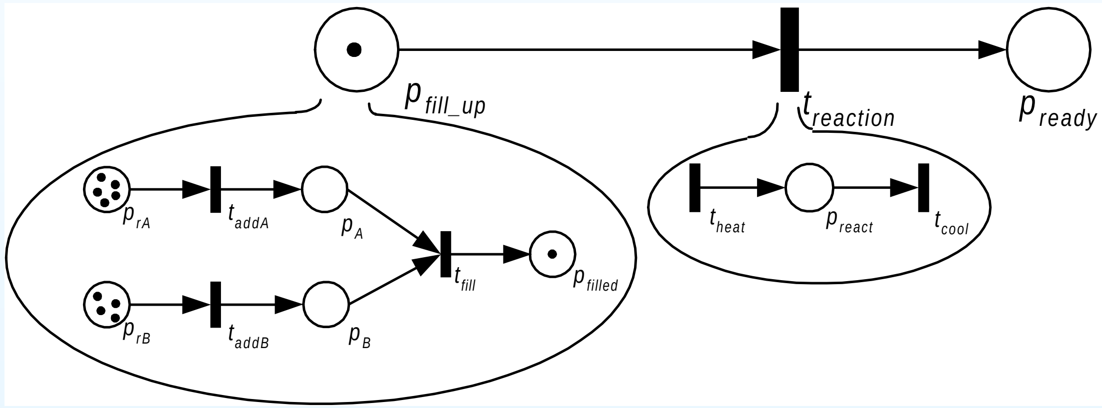
Kiterjesztett Petri háló modellek

- **Hierarchikus Petri hálók**
- **Időzített Petri hálók**: feliratokkal
  - óra: beépített (vagy spec. "forrás" hely)
  - átmenetekhez tüzelési idő
  - (helyekhez várakozási idő)
- **Színezett Petri hálók**: feliratokkal
  - jelzőpontok (token-ek) diszkrét értékkészletűek ("szín")
  - helyekhez megengedett színhalmaz
  - átmenetekhez és élekhez (diszkrét) függvények

Hierarchikus Petri hálók

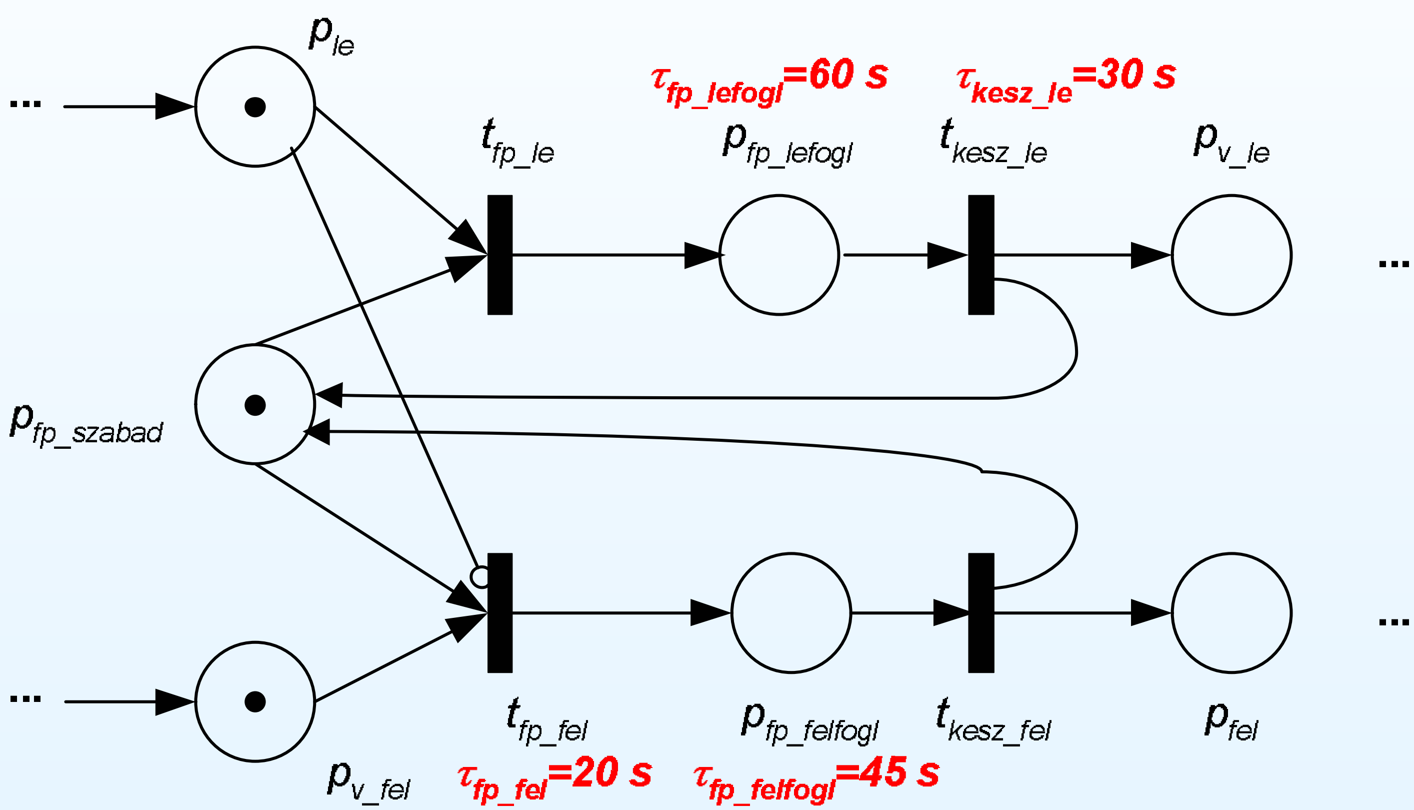
Főháló (super net) - alhálók (subnets):

- **beépítés**: bármelyik hely vagy átmenet helyére
- ismétlődő hasonló hálórészek



Futópálya Petri háló modellje – 3

Időzített Peri háló modell



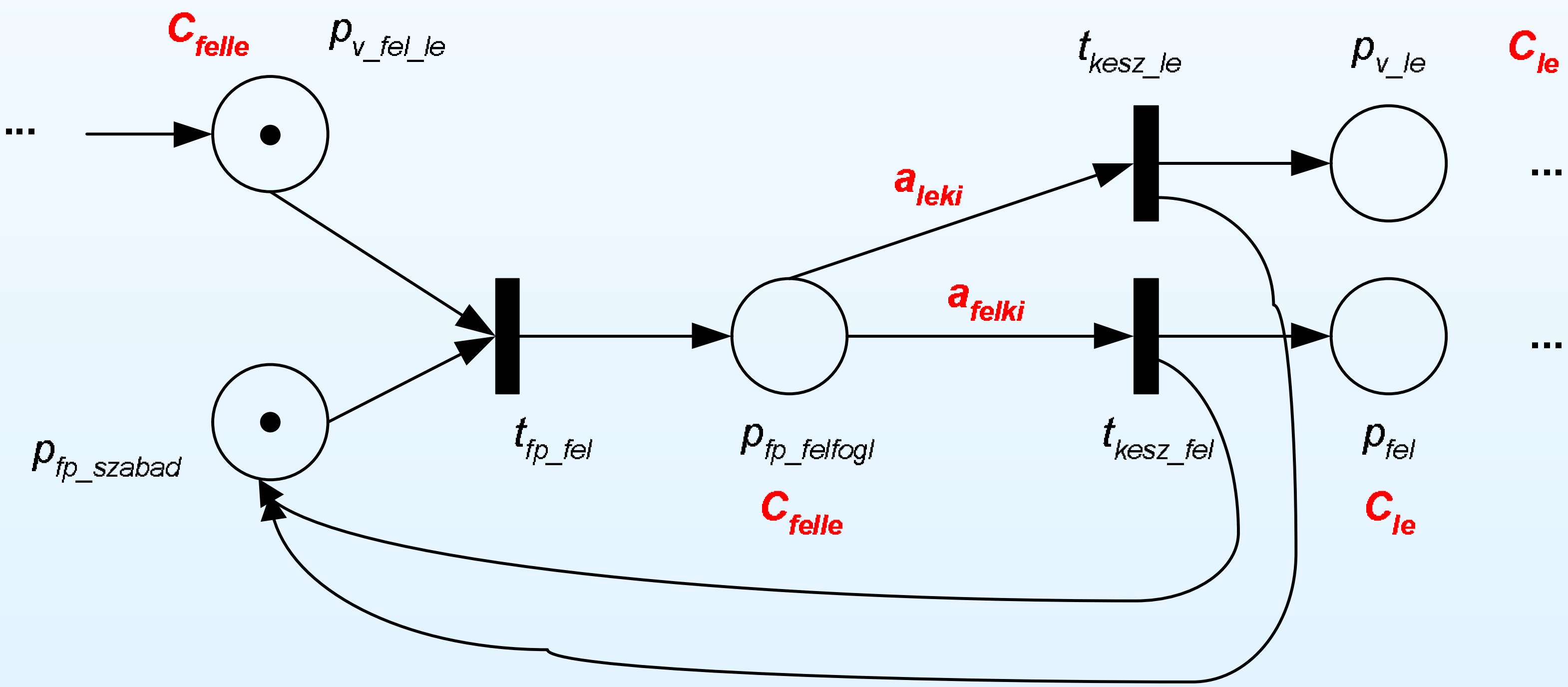
Futópálya Petri háló modell – 4

Színezett Peri háló modell: "feliratok"

Élfüggvény: a_{felki} : **if** $val(p_{fp\_lefogl}) = " \uparrow "$ **then** $"true"$

$$a_{fel} = val(p_{fp\_lefogl}) \ , \ val(p_{fel}) = a_{fel}$$

Szinhalmaz: $C_{felle} = \{ \uparrow , \downarrow \}$



Edény gyártórendszer példa