Számítógépes döntéstámogatás

Diszkrét folyamatok ütemezése: Gant táblázat, Kritikus út módszer, dinamikus programozás

Werner Ágnes

Villamosmérnöki és Információs Rendszerek Tanszék

e-mail: werner.agnes@virt.uni-pannon.hu

Az ütemezés elvi problémakitűzése

Adott:

- a erőforrások halmaza: típus, kapacitás
- a lehetséges *műveletek* halmaza
- *műveletekre vonatkozó korlátozások*: sorrendi, milyen típusú erőforrással hajtható végre
- a végtermék(ek): rendelésállománnyal, ami dinamikusan is változhat
- a lehetséges kiindulási anyagok: rendelkezésre állással, ami dinamikusan is változhat

Kiszámítandó: egy *ütemezés*, ami előírja, hogy ***milyen műveletet melyik erőforrással mikor*** hajtsunk végre idő vagy költség optimálisan

Speciális ütemezési feladatok 1.

Változó erőforrás-korlátozású dinamikus feladat
Jellemzői:

- a rendelésállomány és a nyersanyagok rendelkezésre állása időben változó
- időben változó berendezés kapacitás és rendelkezésre állás
- minden időlépésben lokálisan megvalósítható megoldást keresünk

Megoldható cselekvés tervezéssel

Speciális ütemezési feladatok 2.

Erőforrás-korlátozás nélküli statikus feladat
Jellemzői:

- a rendelésállomány és a nyersanyagok rendelkezésre állása statikus (időben állandó)
- korlátlan berendezés kapacitás és rendelkezésre állás
- legkisebb végrehajtási idejű megoldást keresünk

Van egyszerű, polinomiális időben kiszámítható megoldás

Gantt táblázat - Gantt chart

A leírás elemei:

- *Feladatok*: (kezdete, vége), előző feladat, erőforrás
- *Erőforrások (személyek)*: feladathoz rendelhetők, lehet karbantartási (szabadság) idejük

Nézetek: a leírás elemeiből

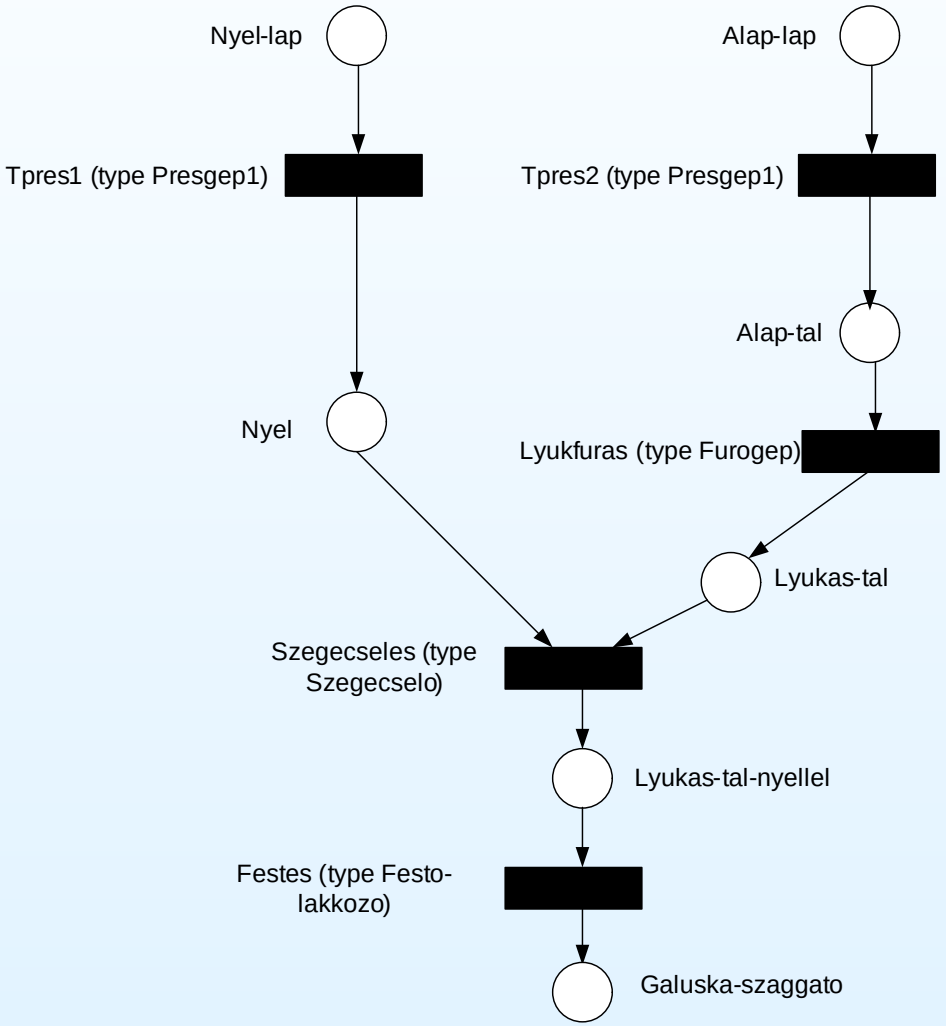
- Gantt táblázat
- PERT gráf
- Erőforrás-foglaltság táblázat

Gantt táblázat összeállításának menete

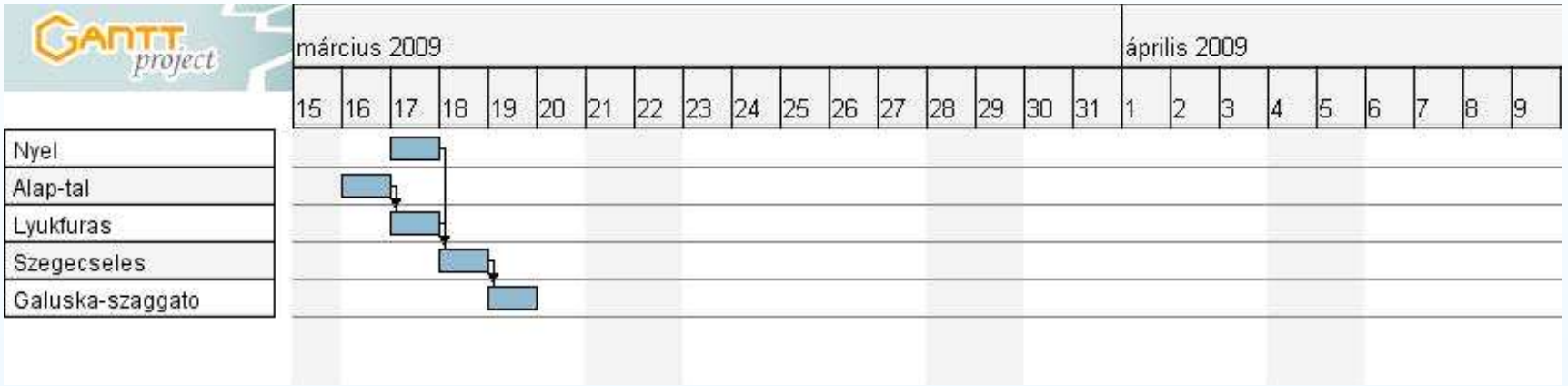
- az adott témának megfelelően meghatározzuk a tevékenységeket,
- meghatározzuk a folyamat teljes átfutási idejét (határidejét),
- meghatározzuk az egyes munkalépések időszükségletét,
- feltárjuk az egyes munkalépések logikai összefüggéseit (mely lépések végezhetők párhuzamosan, egymást megelőzve, követve)
- fentiek figyelembe vétele mellett a tevékenységek időszükségletét vonallal jelöljük

Egy egyszerű példa

Galuska-szaggató gyártás műveletei (Petri háló formájában)



Gantt táblázat - példa

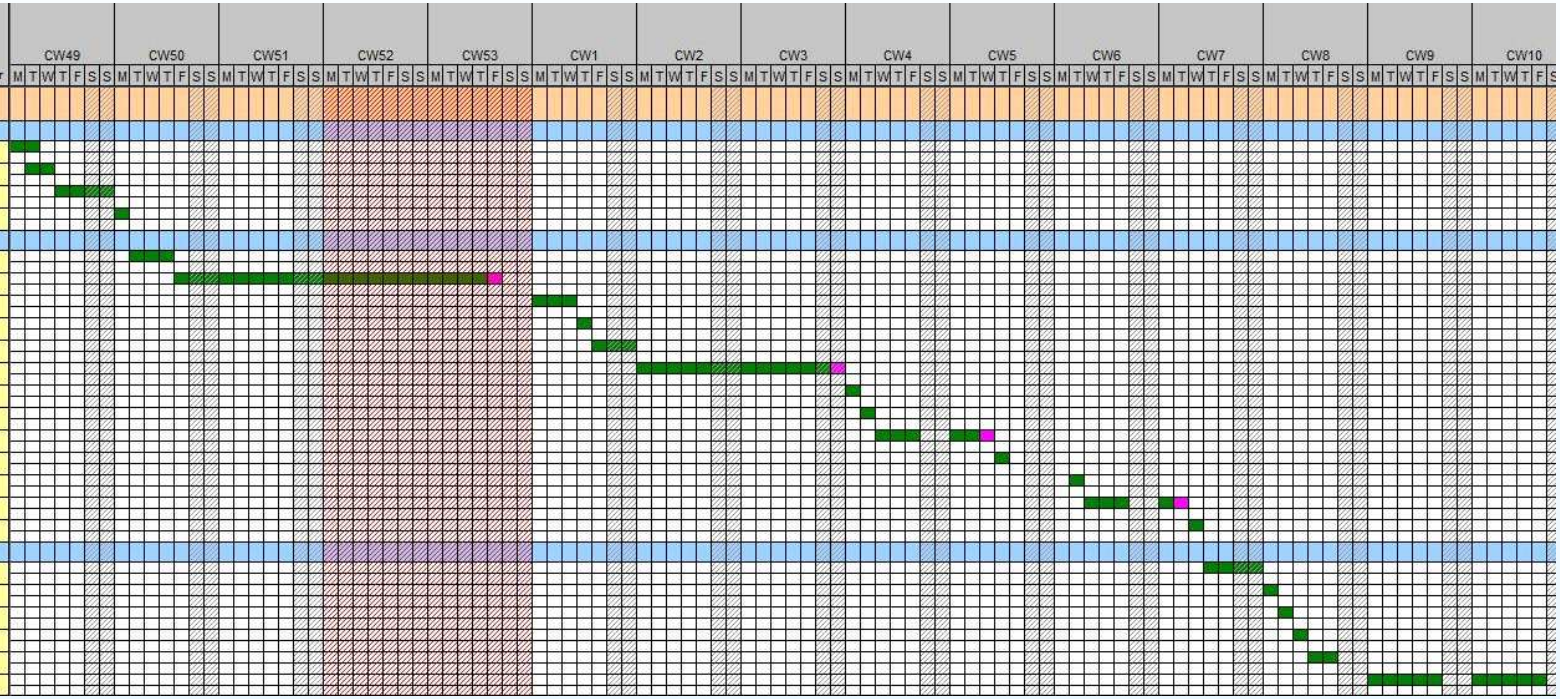


Feladatok elhelyezése az időtengelyen

- minden feladat külön sorban
- időtengely vizszintes
- sorrendiség nyilakkal (automatikus időeltolás)

Gantt táblázat - másik példa

Test specification Chapter	Tests	Duration [d] Test	Buffer
Test Group A (DUT1…3 , Quantity: 3pcs)			
	Entrance test		
	Dim. check, haptic & connector exam.	2	
	Functional performance test	2	
	Step temperature test	4	
	Withstand voltage	1	
	Endurance strength test		
	Dry heat - storage and operation	3	
	Damp heat, constant	21	1
	Coldness - storage and operation	3	
	Functional performance test	1	
	Thermal shock (pre aging)	3	
	Damp heat, cyclic	13	1
	Functional performance test	1	
	Withstand voltage	1	
	Vibration test with overlaying temp.	5	1
	Sinus vibration test	1	
	Functional performance test	1	
	Mechanical shock	4	1
	Functional performance test	1	
	Final test		
	Step temperature test	4	
	Withstand voltage	1	
	Functional performance test	1	
	Visual exam. & dim. check	1	
	Disassembly	2	
	Documentation	10	



Mik a módszer erősségei és gyengeségei?

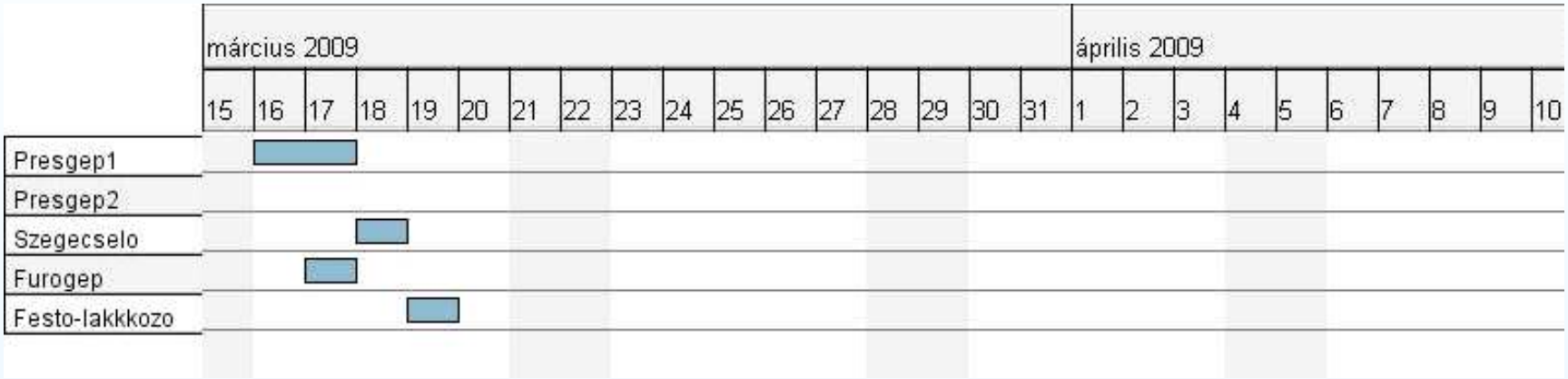
Erősségek:

- szemléletes, könnyen áttekinthető formában ábrázolja az ütemtervet
- figyelembe vehető az összes tevékenység
- meghatározhatók a prioritások, függőségek, párhuzamosságok

Gyengeségek:

- túl sok tevékenység vagy túl hosszú időtáv esetén bonyolulttá válhat az ábrázolás
- nem mindig képes ábrázolni a megfelelő öszefüggéseket

Erőforrás foglaltsági táblázat - példa



Erőforrás foglatságok elhelyezése az időtengelyen

- minden erőforrás külön sorban
- időtengely vízszintes
- **konfliktus (több feladat igényelné ugyanazt az erőforrást) jelzése piros színnel**

Erőforrás-korlátozás nélküli statikus ütemezés

Kritikus út módszer

Kritikus út módszer - CPM

CPM: Critical Path Method

Adott

- az ütemezendő elemi műveletek halmaza (activity)
- minden elemi művelet előfeltételei (szintén elemi műveletek) *parciális rendezés* (egymásutániság)
- minden elemi művelet *végrehajtási ideje*

Táblázatba rendezhető

Grafikus leírás: CPM gráf

- *élei megfelelnek az elemi műveleteknek* (egy-egy értelmű megfeleltetés)
- csúcsok megfelelnek eseményeknek (rendszer-állapotok bekövetkezésének)

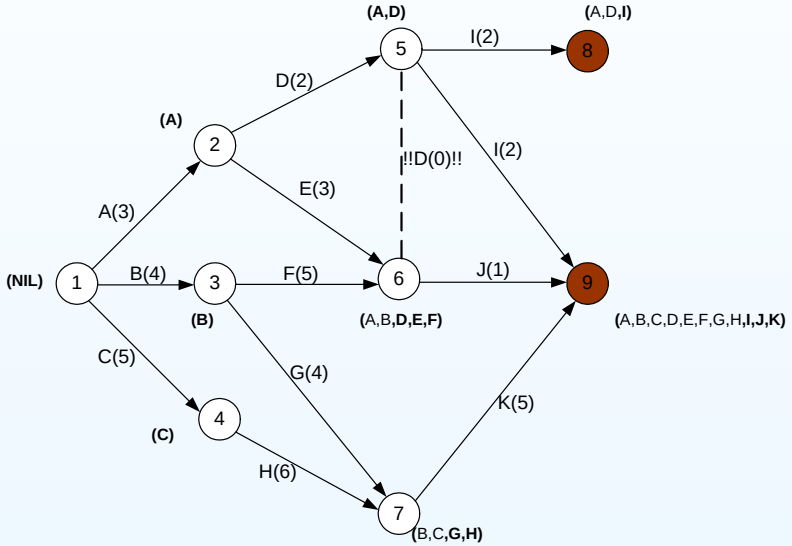
Kritikus út módszer

A felírás lépései:

- meghatározzuk a projekt tevékenységeit
- a tevékenységeket hálóban szemléltetjük
- meghatározzuk a hálóba felvett egyes tevékenységek elvégzésének időszükségletét
- meghatározzuk a teljes feladat halmaz végrehajtásának időtartamát
- a tevékenységsorok hálódiagrambeli láncolatának időszükségleteit elemezve meghatározzuk a kritikus utat
- meghatározzuk a nemkritikus úton fekvő tevékenységek időtartalékait

Kritikus út: a hálóterv legkisebb tartalékidővel rendelkező útvonala vagy tevékenységlánca. Mindig megkülönböztetett jelöléssel emeljük ki a terv többi - nem kritikus, ún. laza - útvonalai közül.

Egy egyszerű példa



Művelet	Előfeltételek	Idő (min)	Művelet	Előfeltételek	Idő (min)
A	-	3	G	B	4
B	-	4	H	C	6
C	-	5	I	D	2
D	A	2	J	D, E, F	1
E	A	3	K	G, H	5
F	B	5	GOAL	*	

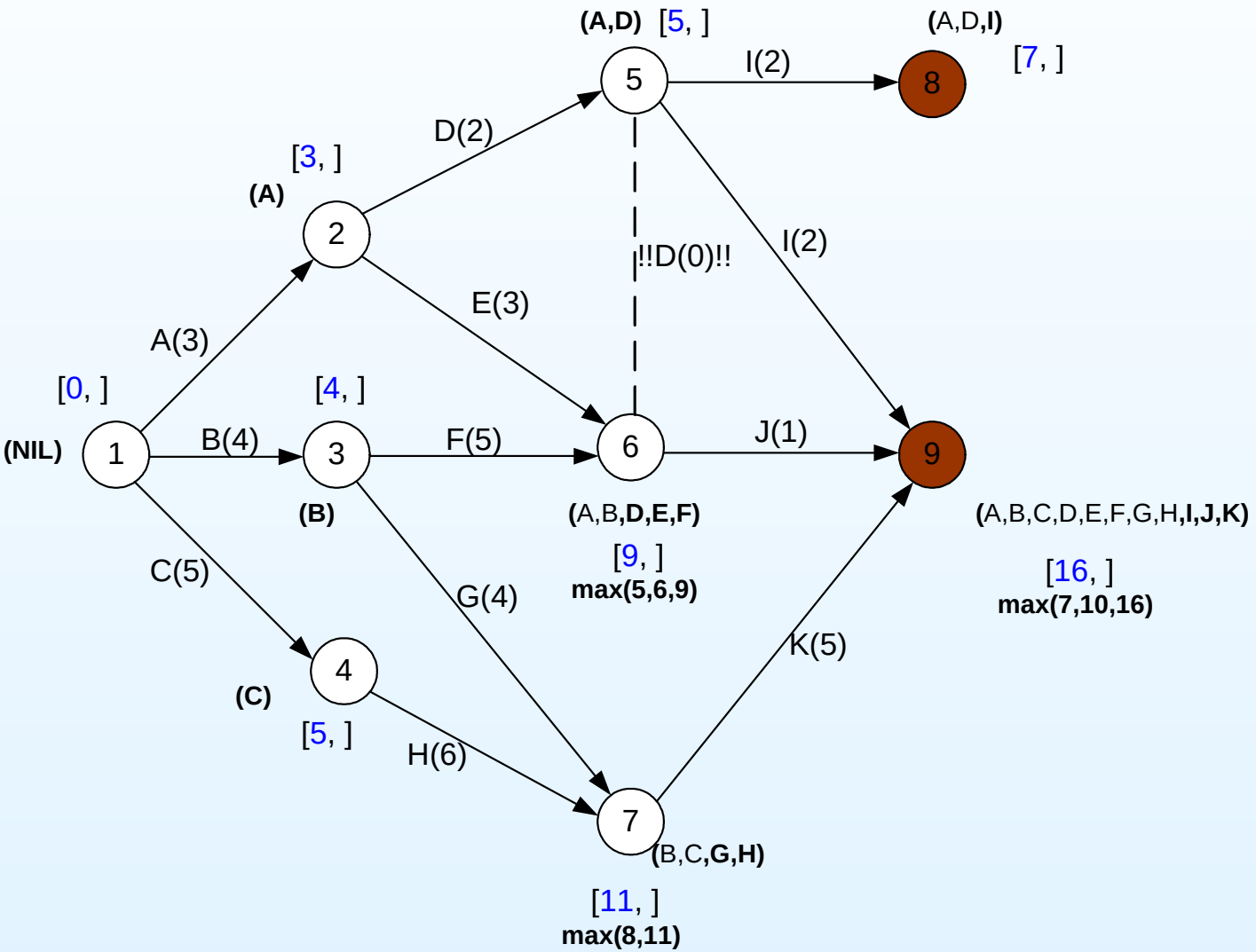
A kritikus út kiszámítása – 1

Algoritmikusan, két menetben

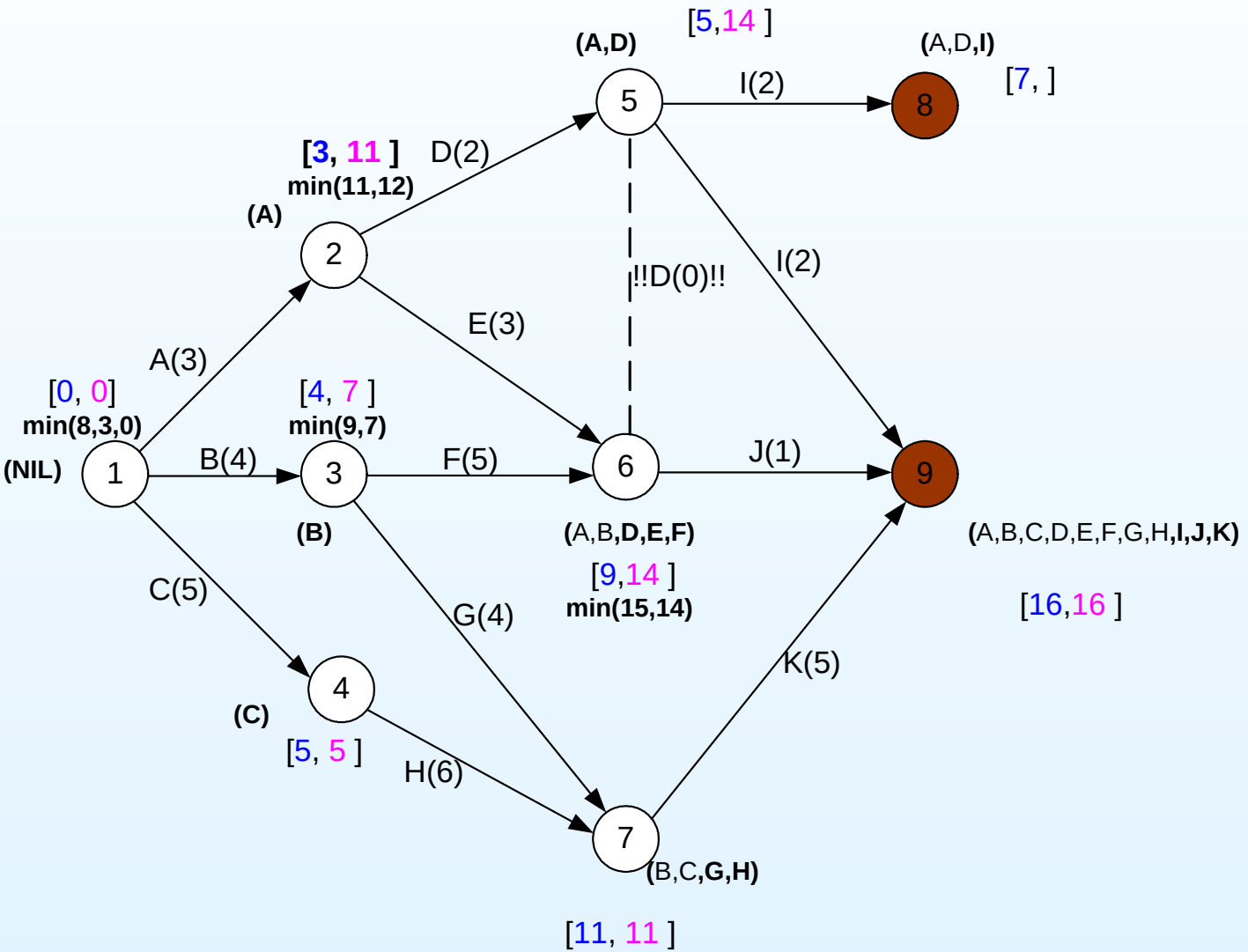
I. Előrefelé haladó számítás: legkorábbi bekövetkezési idők
   1. A kezdő esemény kezdeti idejét nullára állítjuk
   2. Minden műveletet akkor kezdünk, ha az előfeltételek teljesültek
   3. Minden esemény legkorábbi bekövetkezési ideje (E_i) a beléje vezető műveletek befejeződési idejeinek ***maximuma***

II. Visszafelé haladó számítás: legkésőbbi bekövetkezési idők
   1. A befejező esemény legkésőbbi bekövetkezési idejét a legkorábbira állítjuk
   2. Minden művelet legkésőbbi bekövetkezési idejét a vég-esemény legkésőbbi bekövetkezési idejéből számítjuk, levonva belőle a művelet végrehajtási idejét
   3. Minden esemény legkésőbbi bekövetkezési ideje (L_i) a belőle induló műveletek kezdő idejeinek ***minimuma***

Az egyszerű példa - előrefelé



Az egyszerű példa - visszafelé



A kritikus út kiszámítása – 2

Csúszási idők

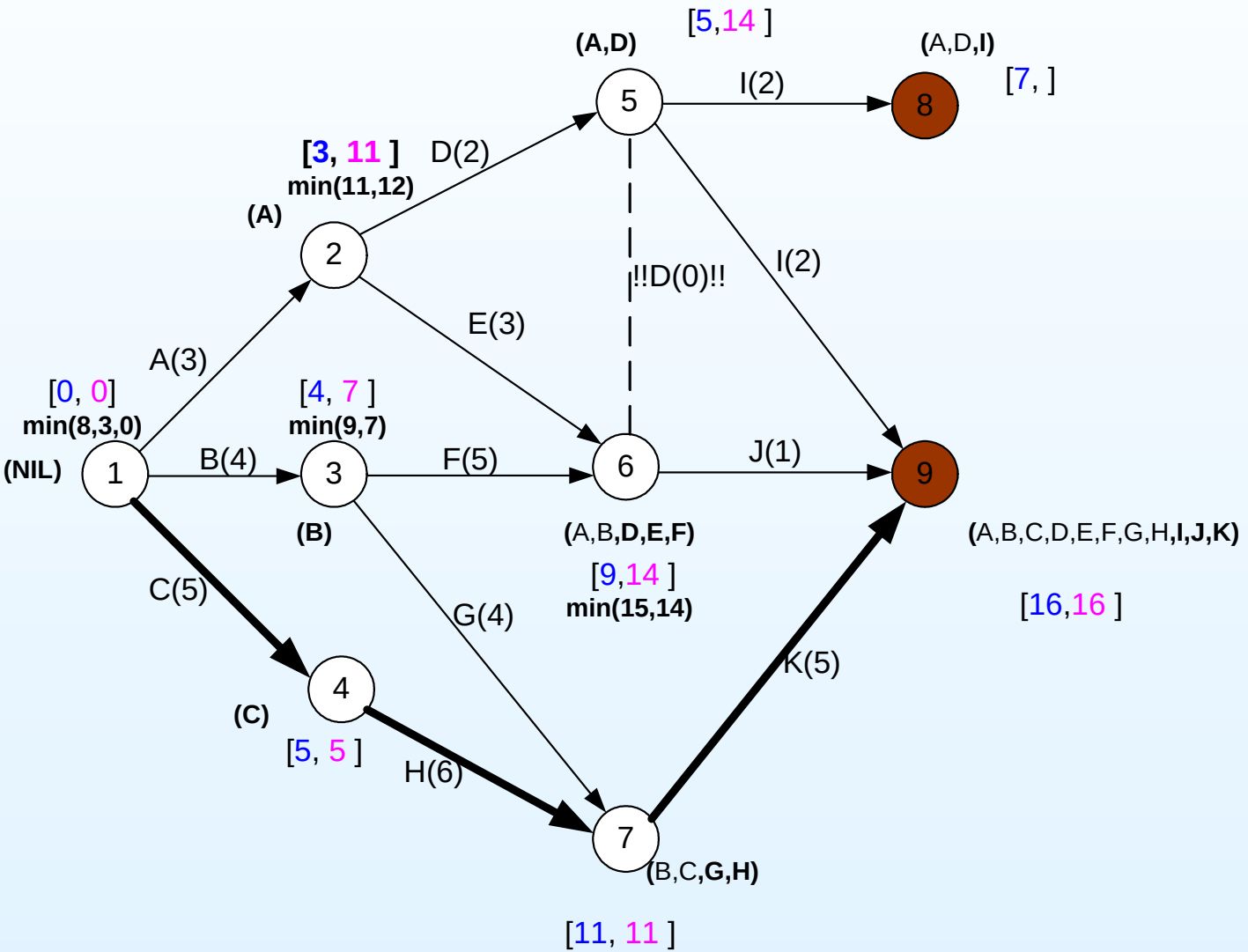
1. Eseményekre: a legkésőbbi és a legkorábbi bekövetkezési idő különbsége, $S_i = L_i - E_i$
2. Az i-edik eseményből a j-edikbe vezető műveletre:

$$S_{ij} = L_j - E_i - t_{ij}$$

ahol t_{ij} a művelet végrehajtási ideje

Kritikus út: azon műveletekből (élekből) áll, amelyek csúszási ideje nulla

Az egyszerű példa - kritikus út



Dinamikus programozás

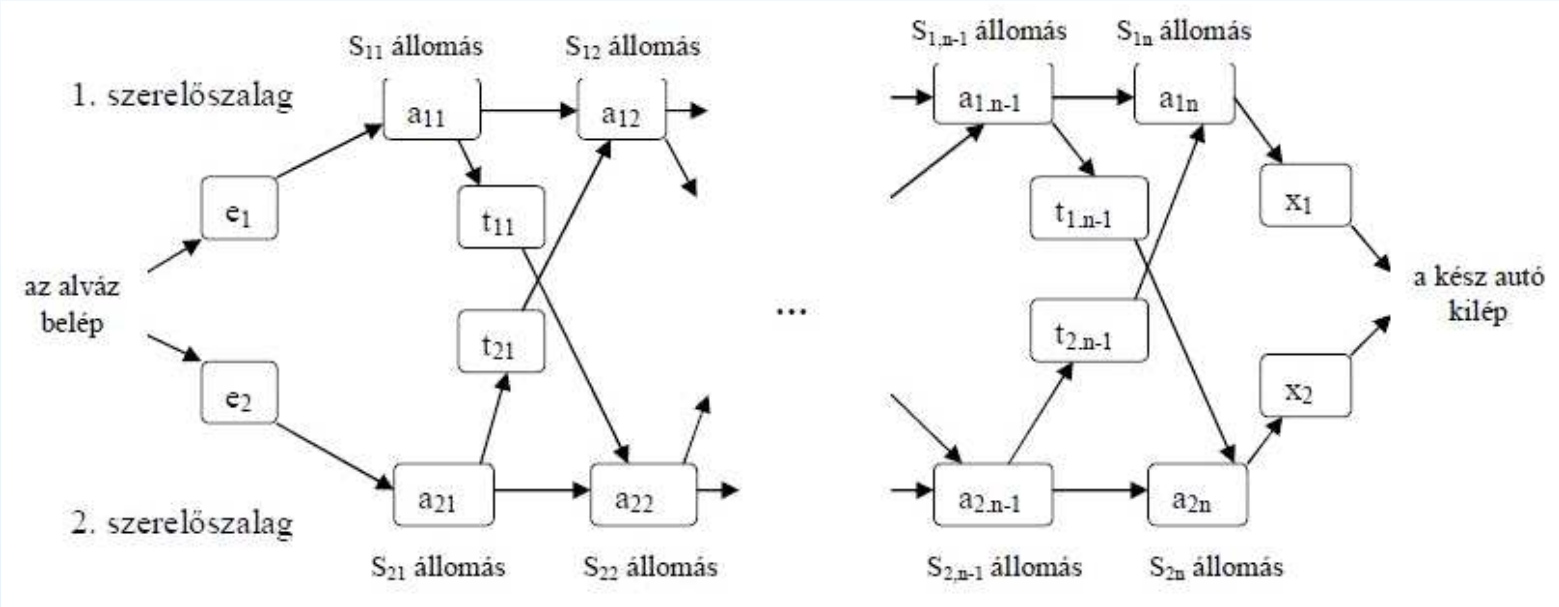
Egy dinamikus programozási algoritmus kifejlesztése 4 lépésre bontható fel:

1. *Jellemezzük az optimális megoldás szerkezetét.*
2. *Rekurzív módon definiáljuk az optimális megoldás értékét.*
3. *Kiszámítjuk az optimális megoldás értékét alulról felfelé történő módon.*
4. *A kiszámított információk alapján megszerkesztünk egy optimális megoldást.*

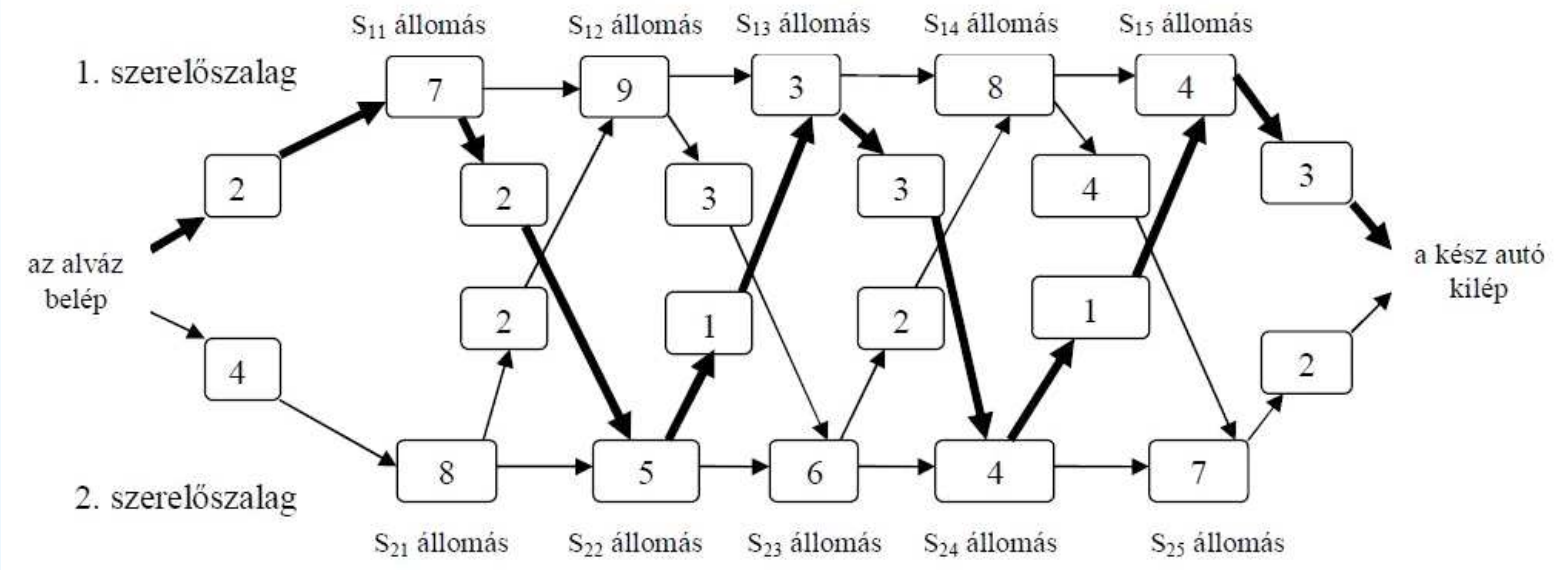
A dinamikus programozás minden egyes részfeladatot és annak **minden részfeladatát pontosan egyszer oldja meg**, **az eredményt egy táblázatban tárolja**, és ezáltal elkerüli az ismételt számítást, ha a részfeladat megint felmerül.

Szerelőszalag ütemezése

Mindegyik szalagnak n állomása van, melyek indexei $j = 1, \ldots, n$. S_{ij} jelöli az i-edik ($i = 1$ vagy 2) szalag j-edik állomását. Az első szalag j-edik állomása (S_{1j}) ugyanazt a funkciót látja el, mint a második szalag j-edik állomása (S_{2j}). Az S_{ij} állomáson a műveleti időt a_{ij} jelöli.



Szerelőszalag ütemezése -Példa



A teljes leszámlálás számítási ideje $\Omega(2n)$. Ez nagy n mellett elfogadhatatlan.

1. lépés: a legrövidebb gyártási út szerkezete

Tekintsük a lehetséges legrövidebb utat, ahogy egy alváz a kiindulási helyzetből túljut az S_{1j} állomáson.
Ha $j = 1$, akkor csak egy lehetőség van, és így könnyű meghatározni a szükséges időt.
$j = 2, \ldots, n$ esetén két lehetőség van:

- Az alváz érkezhet közvetlenül az $S_{1,j-1}$ állomásról, amikor ugyanannak a szalagnak a $(j-1)$-edik állomásáról a j-edik állomására való átszállítás ideje elhanyagolható.
- Az alváz $S_{2,j-1}$ felől érkezik, az átszállítás ideje $t_{2,j-1}$.

Tegyük fel, hogy az $S_1 j$ állomáson való túljutás leggyorsabb módja az, hogy oda az $S_{1,j-1}$ felől érkezünk.
Az alvázнak a legrövidebb módon kell túljutnia az $S_{1,j-1}$ állomáson, mert ha volna egy gyorsabb mód, hogy az alváz túljusson a $S_{1,j-1}$ állomáson, akkor ezt használva magán $S_{1,j}$-n is hamarabb jutna túl, ami **ellentmondás**.

1. lépés: a legrövidebb gyártási út szerkezete

Általánosabban fogalmazva azt mondhatjuk, hogy a szerelőszalag ütemezésének
(hogy megtaláljuk a legrövidebb módot az S_{ij} állomáson való túljutásra)
optimális megoldása tartalmazza egy részfeladat
(vagy az $S_{1,j-1}$ vagy az $S_{2,j-1}$ állomáson való leggyorsabb áthaladás)
optimális megoldását.
Erre a tulajdonságra **optimális részstruktúra**ként fogunk hivatkozni.
Azaz részfeladatok optimális megoldásaiból megszerkeszthető a feladat optimális megoldása.

2. lépés: a rekurzív megoldás

Az optimális megoldás értékét a részfeladatok optimális értékeiből rekurzívan fejezzük ki.
A részfeladatok legyenek mindkét szalag j-edik állomásán való leggyorsabb áthaladás megkeresésének a feladatai $j = 1, \ldots, n$ mellett.
Jelölje $f_i[j]$ azt a legrövidebb időt, ami alatt az alváz túl tud jutni az S_{ij} állomáson.
Célunk annak a legrövidebb időnek a meghatározása, ami alatt az alváz az egész üzemen keresztül tud haladni.
Ezt az időt f^* jelöli.

$$f^* = min\{f_1[n] + x_1, f_2[n] + x_2\}$$

$$f_1[1] = e_1 + a_{11}$$

$$f_2[1] = e_2 + a_{21}$$

2. lépés: a rekurzív megoldás

Hogyan kell kiszámolni az $f_i[j]$-t $\quad j = 2, \ldots, n$ és $i = 1, 2$ esetén?

$$f_1[j] = min\{f_1[j-1] + a_{1j}, f_2[j-1] + t_{2,j-1} + a_{1j}\}, \text{ ha } j = 2, \ldots, n.$$

$$f_2[j] = min\{f_2[j-1] + a_{2j}, f_1[j-1] + t_{1,j-1} + a_{2j}\}, \text{ ha } j = 2, \ldots, n.$$

A következő rekurzív egyenletet kapjuk:

$$f_1[j] = \begin{cases} e_1 + a_{11}, \text{ ha } j = 1, \\ min\{f_1[j-1] + a_{1j}, f_2[j-1] + t_{2,j-1} + a_{1j}\}, \text{ ha } j \geq 2 \end{cases}$$

$$f_2[j] = \begin{cases} e_2 + a_{21}, \text{ ha } j = 1, \\ min\{f_2[j-1] + a_{2j}, f_1[j-1] + t_{1,j-1} + a_{2j}\}, \text{ ha } j \geq 2 \end{cases}$$

2. lépés: a rekurzív megoldás

Az $f_i[j]$ mennyiségek a részfeladatok optimális érékei.

Annak érdekében, hogy vissza tudjuk keresni a legrövidebb utat, definiáljuk $l_i[j]$-t mint azt a szerelőszalagot, amelyiknek a $j-1$-edik állomását használtuk az S_{ij}-n való leggyorsabb keresztülhaladáskor.

Itt $i = 1, 2$ és $j = 2, \ldots, n$.
(Nem definiáljuk $l_i[1]$-et, mert S_{i1}-t egyik szalagon sem előzi meg másik állomás.)

Az l^* szalag definíció szerint az, amelyiknek az utolsó állomását használjuk az egész üzemen való áthaladáskor.
Az $l_i[j]$ értékek segítségével lehet nyomon követni a legrövidebb utat.

3. lépés: a legrövidebb átfutási idő kiszámítása

Sokkal jobban járunk, ha az $f_i[j]$ értékeket más sorrend szerint számoljuk, mint az a rekurzív módszerből adódik.

Vegyük észre, hogy j. . . 2 esetén $f_i[j]$ csak $f_1[j-1]$ -től és $f_2[j-1]$ -től függ.

Ha az $f_i[j]$ értékeket az állomások j indexének növekvő sorrendjében számoljuk, akkor a legrövidebb átfutási idő meghatározása $\Theta(n)$ ideig tart.

3. lépés: a legrövidebb átfutási idő kiszámítása

ALGORITMUS1(a,t,e,x,n)

1. $f_1[1] := e_1 + a_{11} \quad f_2[1] := e_2 + a_{21}$
2. for $j := 2$ to n
3. do if $f_1[j-1] + a_{1j} \leq f_2[j-1] + t_{2,j-1} + a_{1j}$
4. then $f_1[j] := f_1[j-1] + a_{1j} \quad l_1[j] := 1$
5. else $f_1[j] := f_2[j-1] + t_{2,j-1} + a_{1j} \quad l_1[j] := 2$
6. if $f_2[j-1] + a_{2j} \leq f_1[j-1] + t_{1,j-1} + a_{2j}$
7. then $f_2[j] := f_2[j-1] + a_{2j} \quad l_2[j] := 2$
8. else $f_2[j] := f_1[j-1] + t_{1,j-1} + a_{2j} \quad l_2[j] := 1$
9. if $f_1[n] + x_1 \leq f_2[n] + x_2$
10. then $f^* = f_1[n] + x_1 \quad l^* = 1$
11. else $f^* = f_2[n] + x_2 \quad l^* = 2$

4. lépés: a legrövidebb átfutási idejű út

$f_i[j]$, f^*, $l_i[j]$ és l^* kiszámítását követően meg kell szerkeszteni az üzemen való legrövidebb áthaladást biztosító utat.

Az eljárás az út állomásait az indexek csökkenő sorrendjében nyomtatja ki.

ALGORITMUS2(l,n)

1. $i := l^*$
2. print i"-edik szalag" n"-edik állomás"
3. for $j := n$ downto 2
4. do $i := l_i[j]$
5. print i"-edik szalag (" $j - 1$")-edik állomás"