Pannon Egyetem
Villamosmérnöki és Információs Tanszék

Digitális Áramkörök

(Villamosmérnök BSc / Mechatronikai mérnök MSc)

5. hét – Szimmetrikus logikai függvények

Előadó: Dr. Vörösházi Zsolt
voroshazi.zsolt@virt.uni-pannon.hu

Kapcsolódó jegyzet, segédanyag:

- http://www.virt.uni-pannon.hu → Oktatás → Tantárgyak → Digitális Áramkörök (Villamosmérnöki BSc / Mechatronikai mérnöki BSc/MSc).
  - Fóliák, óravázlatok (.ppt)
  - Frissítésük folyamatosan

Szimmetrikus logikai függvények

Eddig: megismert minimalizálási eljárások

- Probléma: Szomszédosság
  - Ha nincsenek szomszédos mintermek, akkor a mintermek egyúttal a prímimplikánsok, és a DNF alak egyúttal a legegyszerűbb diszjunktív alak is.

Példa:

- Adott a következő DNF alak:

$$F^3(A,B,C)=\sum_{i=0}^{2^n-1}(1,2,4,7)=m_1+m_2+m_4+m_7$$

$$=F(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+ABC$$

- A megismert módszerekkel (pl. Karnaugh) nincs lehetőség az egyszerűsítésre!

A \ BC	00	01 (C)	11 (C, B)	10 (B)
0	0_{0}	1_{1}	0_{3}	1_{2}
1 (A)	1_{4}	0_{5}	1_{7}	0_{6}

m	A	B	C	F
0	0	0	0	**0**
1	0	0	1	**1**
2	0	1	0	**1**
3	0	1	1	**0**
4	1	0	0	**1**
5	1	0	1	**0**
6	1	1	0	**0**
7	1	1	1	**1**

- Ezzel szemben az *F függvény* azzal a speciális tulajdonsággal rendelkezik, hogy ***érzéketlen a változók páronkénti felcserélésére***!

PL: A → B $\Rightarrow F(A,B,C)=\overline{B}\,\overline{A}C+\overline{B}A\overline{C}+B\overline{A}\,\overline{C}+BAC$

Szimmetrikus függvények

- **DEF**: azokat a logikai függvényeket, amelyek a független (bemeneti) változóik tetszőleges páronkénti felcserélése esetén változatlanok (érzéketlenek) maradnak, **szimmetrikus logikai függvényeknek** nevezzük.
  - Előző példában $F^3(A,B,C) = \sum_{i=0}^{2^n-1}(1,2,4,7)$ szimmetrikus függvény.
  - F = ‘1’ pontosan akkor, ha A,B,C közül vagy csak az egyiknek, vagy mindháromnak az értéke ‘1’ (lásd. előző igazság tábla)

Szimmetria szám

- **DEF**: Minden szimmetrikus függvényhez megadható legalább egy olyan pozitív egész szám, amelyet **szimmetria számnak** neveznek.
- Ez azt jelenti, hogy az F=‘1’ függvényérték hány változó ‘1’ logikai értéke esetén áll elő.
- Jele: $S^{n}_{a_1,...,a_k}(x_1,...,x_n)$
- Előző példában: szimmetriaszám 1 és 3.

$$= F(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC$$

$$S^{3}_{1,3}(A,B,C)$$

Szimmetria szám (folyt)

- A szimmetriaszámok létezése *szükséges* és *elégséges feltétele* annak, hogy egy függvény szimmetrikus legyen.
- Nyilvánvaló, hogy a szimmetria számok között a legnagyobb értéket (a_k) a függvény változóinak száma (n) jelentheti.
- A legkisebb szimmetriaszám a 0 lehet, amely azt jelenti, hogy a függvény értéke akkor F=‘1’, ha egyetlen változójának az értéke sem ‘1’.

Kanonikus szimmetrikus függvények

- DEF: Azokat a szimmetrikus függvényeket, amelyeknek csak *egyetlen szimmetriaszámuk* van, **kanonikus szimmetrikus függvényeknek** nevezzük.
- Példa: ‘F’ kanonikusan szimmetrikus-e?

$$F^3(A,B,C)=\sum_{i=0}^{2^n-1}(3,5,6)=m_3+m_5+m_6=$$

Igen.

$$=\overline{A}BC+AB\overline{C}+A\overline{B}C\Rightarrow S_2^3(A,B,C)$$

A \ BC	00	01 (C)	11 (C, B)	10 (B)
0	0_{0}	0_{1}	1_{3}	0_{2}
1 (A)	0_{4}	1_{5}	0_{7}	1_{6}

Műveletek szimmetrikus függvényekkel

- Vizsgálatunk célja: Az eddig megismert minimalizálási módszerekkel nem egyszerűsíthető szimmetrikus függvények gazdaságos megvalósítása, valamilyen lehetséges módszerrel (adatbázis).
- → Műveletek szimmetrikus függvényekkel
  - Logikai összeadás
  - Logikai szorzás
  - Szimmetrikus függvény negáltja
  - Szimmetrikus függvény változóinak negáltja (függetlenváltozó transzformáció)

Szimmetrikus függvények műveletei (folyt.)

- A bemutatandó *(1.-4.) műveleti tulajdonság*, valamint szimmetria számok értelmezése alapján adott szimmetrikus függvényekből *egyszerűen előállíthatunk* más szimmetrikus függvényeket.
- Így, ha az *alap építőelem-készlet, mint egy adatbázis* rendelkezésre áll, ezekből felépítve sok más szimmetrikus függvény egyszerűen megvalósítható, anélkül hogy annak minimalizálása gondot okozna.

1.) Logikai összeadás

- Két ugyanazokon a független (bemeneti) változókon értelmezett szimmetrikus logikai függvény *logikai összege* (VAGY kapcsolata) olyan szimmetrikus logikai függvény, amelynek a szimmetria számai az eredeti két függvény ***szimmetria számainak az egyesítéséből*** (unió) adódnak.
- Pl: $S^4_{2,3}(A,B,C,D)+S^4_{0,2}(A,B,C,D)=S^4_{0,2,3}(A,B,C,D)$

Szimmetrikus függvény algebrai alak felírása

- Pl: $S^4_{2,3}$ szimmetrikus logikai függvény algebrai alakját úgy célszerű felírni, hogy rendre képezzük az összes lehetséges olyan mintermet, amelyben *két változó* ponált értékével fordul elő, majd az összes lehetséges olyan mintermet írjuk fel, amelyben *három változó* szerepel ponált értékével:

$$S^4_{2,3}(A,B,C,D) =$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} +$$

$$+ \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + AB\overline{C}D + ABC\overline{D}$$

Tipp: a felíráshoz

- Ha '*n*' változónk van és '*k*' a felírni kívánt szimmetria szám, akkor a kombinatorikában megismert kombinációt lehet alkalmazni, ahhoz hogy egyetlen alakot se hagyjunk el (azaz mennyi minterm képezhető '*k*' ponált esetén):

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Pl. $S^4_{2,3}$

$$C_{k=2}^{n=4} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

6 lehetséges minterm képezhető, amelyben 2 ponált változó szerepel

$$C_{k=3}^{n=4} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

4 lehetséges minterm képezhető, amelyben 3 ponált változó szerepel

Szimmetrikus függvény algebrai alak felírása

- Pl: $S_{0,2}^{4}$ szimmetrikus logikai függvény algebrai alakját úgy célszerű felírni, hogy rendre képezzük az összes lehetséges olyan mintermet, amelyben *egyetlen változó* sincs ponált értékével, majd az összes lehetséges olyan mintermet írjuk fel, amelyben *két változó* szerepel ponált értékével:

$$S_{0,2}^{4}(A,B,C,D) =$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} +$$

$$+ \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D}$$

Eredmény felírása:

$$S^4_{2,3}(A,B,C,D)+S^4_{0,2}(A,B,C,D)=S^4_{0,2,3}(A,B,C,D)=$$

$$\overline{A}\,\overline{B}CD+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}BC\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}D+A\overline{B}C\overline{D}+AB\overline{C}\,\overline{D}+$$

$$+\overline{A}BCD+A\overline{B}CD+AB\overline{C}D+ABC\overline{D}$$

$$\cancel{+\overline{A}\,\overline{B}CD+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}BC\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}D+A\overline{B}C\overline{D}+AB\overline{C}\,\overline{D}+}$$

$$+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

2.) Logikai szorzás

- Két ugyanazokon a független (bemeneti) változókon értelmezett szimmetrikus logikai függvény *logikai szorzata* (ÉS kapcsolata) olyan szimmetrikus logikai függvény, amelynek a szimmetria számai az eredeti két függvény ***szimmetria számainak a közös/azonos értékeiből*** (metszet) adódnak.
- Pl: $$S^4_{1,2,3}(A,B,C,D) \cdot S^4_{1,3,4}(A,B,C,D) = S^4_{1,3}(A,B,C,D)$$

2.) Logikai szorzás (folyt.)

- A szorzatfüggvény értéke akkor ‘1’, ha mindkét un. *tényezőfüggvény* értéke is ‘1’.
- Ha a tényezőfüggvényeknek *nincsenek azonos szimmetria számai*, akkor nem létezik olyan változókombináció, amely mellett a tényezőfüggvény ‘1’ lenne, ezáltal a **szorzatfüggvény értéke ‘0’.**
- Pl: $$S^4_{1,3}(A,B,C,D) \cdot S^4_{2,4}(A,B,C,D) = 0$$

3.) Szimmetrikus függvény negáltja

- **DEF:** Egy *n* változós **szimmetrikus logikai függvény negáltja** szintén szimmetrikus.
- A tagadott függvény szimmetria számai (*k*) az összes olyan *n*-nél (változók számánál) nem nagyobb természetes számok ($k \leq n$,ahol $n,k \in N$), amelyek a kiindulási függvény szimmetria számai között nem szerepelnek.
- Tehát a tagadás művelete a szimmetria-szám halmazának *kiegészítő/komplementer* halmaza.
- Pl:

$$\overline{S^4_{0,1,3}(A,B,C,D)} = S^4_{2,4}(A,B,C,D)$$

4.) Szimmetrikus függvény változóinak negáltja

- **DEF:** Az *n*-változós szimmetrikus logikai függvényt a **változóinak a tagadottján** értelmezve egy olyan szimmetrikus függvényt kapunk, amelynek a szimmetria számai (*k*) rendre a kiindulási függvény szimmetria számaiból képezhetők *n-ből történő kivonás* útján **(„*n-k*” *szabály*).**
- Pl: $S^4_{2,3}(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D}) = S^4_{2,1}(A,B,C,D) \Rightarrow S^4_{1,2}(A,B,C,D)$

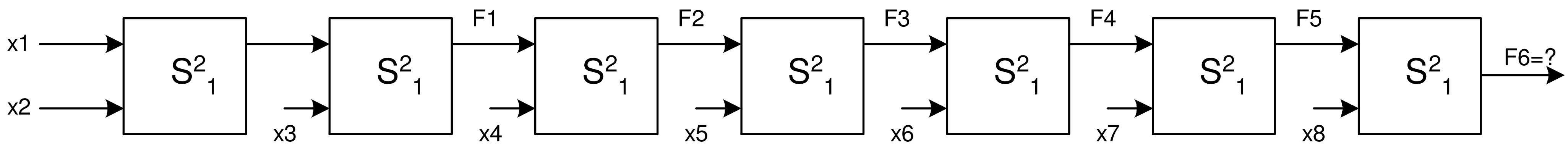
$$k \le n \text{ , ahol } n,k \in N$$

Építőelem készlet: XOR

- Adatbázis: rendelkezésre áll az XOR kapu:

$$F^2(\text{xor}) = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2} \Rightarrow S_1^2(x_1, x_2)$$

- Valósítsuk meg XOR kapuk sorba kapcsolásával a következő F_6 függvényt!



7-szintű hálózat

Példa (folyt).

$$F_1 = S_1^2\left[S_1^2(x_1, x_2), x_3\right] = S_{1,3}^3(x_1, x_2, x_3)$$

$$F_2 = S_1^2\left[S_{1,3}^3(x_1, x_2, x_3), x_4\right] = S_{1,3}^4(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$F_3 = S_1^2\left[S_{1,3}^4(x_1, x_2, x_3, x_4), x_5\right] = S_{1,3,5}^5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

...

$$F_6 = S_{1,3,5,7}^8(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$$

Azonban, kevesebb kapuszinten lehet megvalósítani pl. az $S_{1,3,5,7}^8$ függvényt , ha rendelkezésre áll olyan építőelem is, amely az $S_{1,3}^3$ ill. az $S_{1,3}^4$ et is megvalósítja.

(Példa: Lapokon)

Szimmetrikus függvények egyszerűsítési szabályai

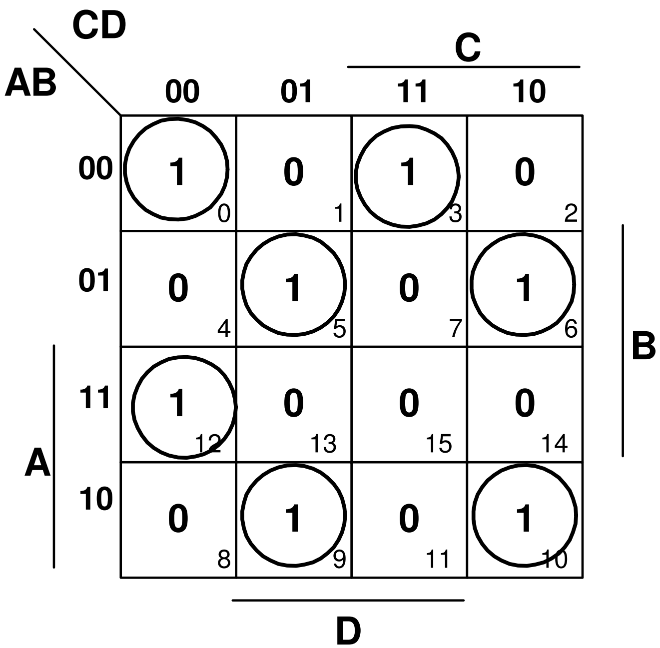
- Korábbi példákon olyan szimmetrikus függvények voltak, amelyek kanonikus normálalakja egyben a legegyszerűbb DNF alak is. (Pl: XOR)
- Azonban a szimmetria számoktól függően előfordulhat, hogy a szimmetrikus függvény *kis mértékben egyszerűsíthető*,
  - mivel a szimmetria szám azt is kifejezi egyben, hogy a függvény tartalmaz-e szomszédos mintermeket!

Szimmetrikus függvények egyszerűsítési szabályai (folyt.)

- **DEF**: A *kanonikus* szimmetrikus függvények nem tartalmaznak szomszédos mintermeket, mert csak egy szimmetria számuk van, tehát <u>nem egyszerűsíthetők.</u>
- **DEF**: *nem egyszerűsíthetők* azok a szimmetrikus függvények sem, amelynek bármely két szimmetria száma közötti különbsége nagyobb 1-nél.
  - **DEF**: (következmény). Ha egy függvénynek van legalább két olyan szimmetria száma, amelyek közötti különbség 1, akkor ezeknek megfelelő mintermek között biztosan van szomszédos, tehát <u>*egyszerűsíthető*</u>.

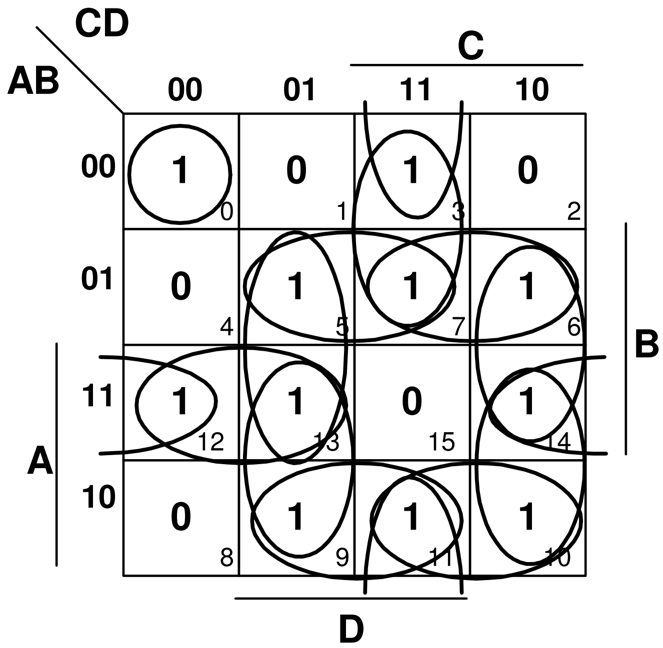
Példa: szimmetrikus fgv. egyszerűsítése

$S^{4}_{0,2}(A,B,C,D)$



Nem egyszerűsíthető!

$S^{4}_{0,2,3}(A,B,C,D)$



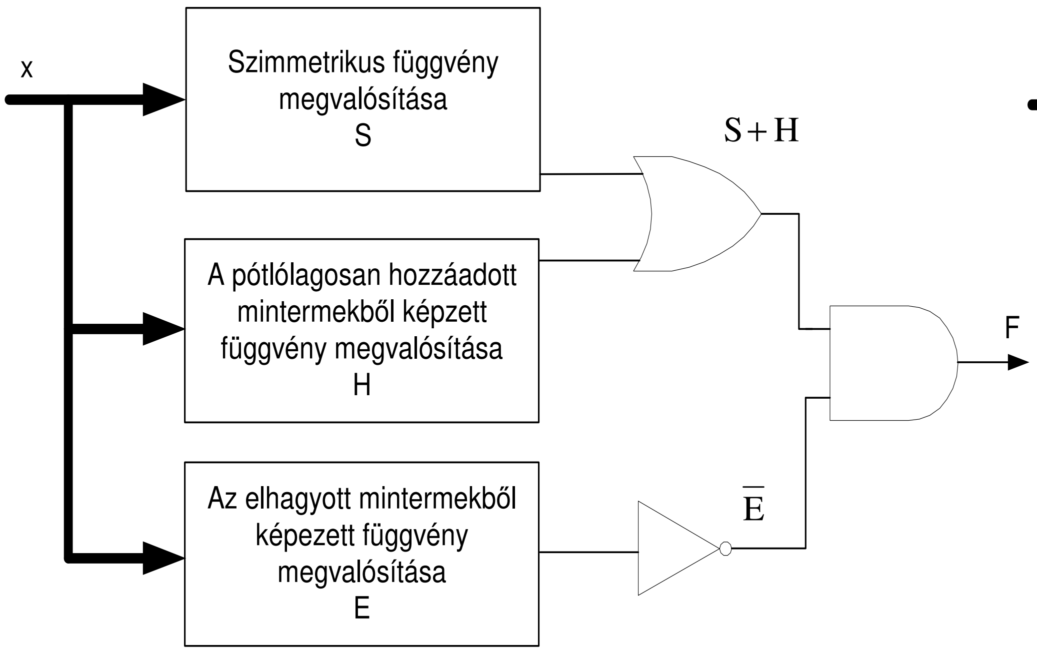
Egyszerűsíthető: pótlólagos 3-as szimmetria szám miatt 2-es hurkok alakíthatók és vonhatók össze!

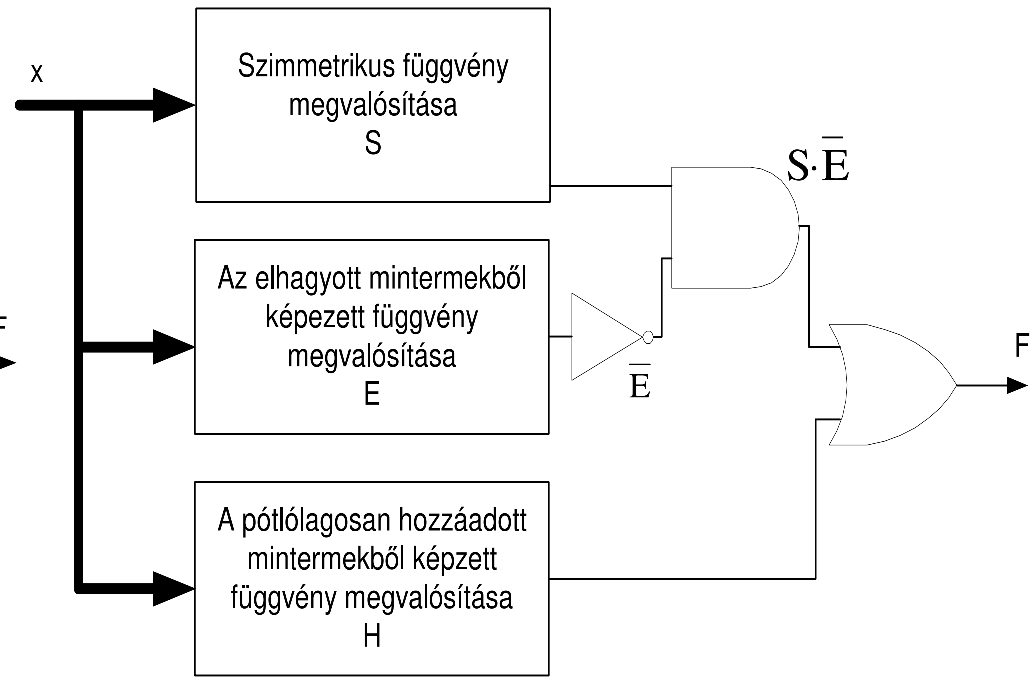
(Példa levezetése: Lapokon)

Általánosan: szimmetrikussá tehető TSH/NTSH függvény minimalizálása

$$F = (S + H) \cdot \overline{E}$$

$$F = S \cdot \overline{E} + H$$

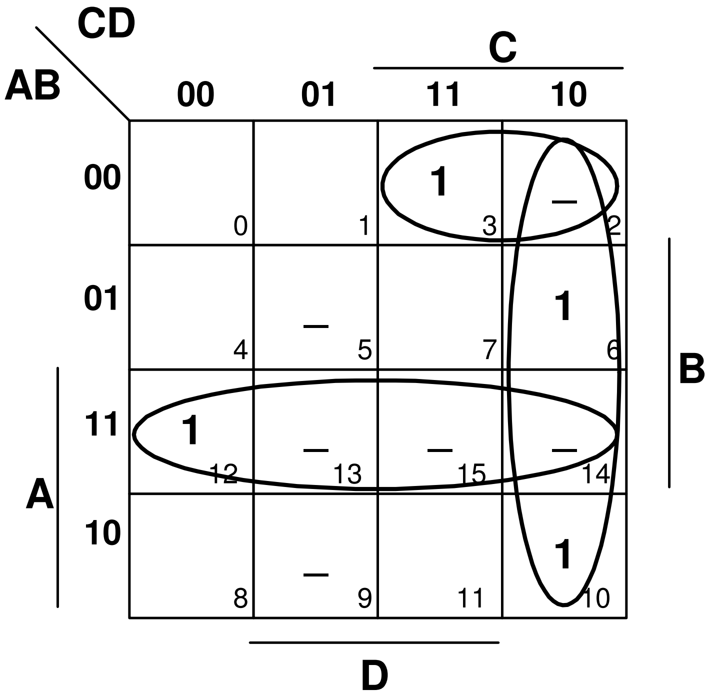




Mintermek elhagyásával (E), ill. hozzáadásával (H) szimmetrikus függvényként kifejezett F függvény megvalósításának általános felépítése.

Példa-1: NTSH függvény (F) minimalizálása szimmetrikus függvénnyel történő kifejezéssel

$$F^{n=4}(A,B,C,D)=\sum_{i=0}^{2^n-1}(3,6,10,12),(2,5,9,13,14,15)$$



Kérdések: A don’t care értékek megfelelő rögzítésével az adott F függvény *kifejezhető-e* szimmetrikus S fgv. segítségével (akár F-nek megváltoztatásával is)?

Az így adott S szimmetrikus függvénnyel nem egyszerűbb-e kifejezni az F-fgvt, mint az F legegyszerűbb DNF alakjával?

S legyen adott: $S^4_{0,2}(A,B,C,D)$

Intuitív/próbálgatásos módszer.

A legegyszerűbb DNF alakból megadható a lehetséges elvi kapcsolási rajz!
(Arató könyv: 2.56. ábra – 95. oldal)

Példa-1: NTSH függvény (F) minimalizálása szimmetrikus függvénnyel történő kifejezéssel

AB \ CD	00	01	11	10
00	(0)	(1)	1 (3)	-/0 (2)
01	(4)	-/1 (5)	(7)	1 (6)
11	1 (12)	-/0 (13)	-/0 (15)	-/0 (14)
10	(8)	-/1 (9)	(11)	1 (10)

C B A D

1. Lépés: A don't care értékek megfelelő rögzítésével szimmetrikussá tehető-e?

? helyett '1' kellene, hogy álljon ahhoz, hogy F-et egy szimmetrikus függvénnyel kifejezhessük $S^4_{0,2}(A,B,C,D)$

Tehát az S függvényhez bizonyos esetekben pótlólagosan hozzá kell venni, illetve el kell hagyni bizonyos mintermeket, hogy megkapjuk a kiindulási F-et. (A hozzáadást '**h**'-val az elvételt '**e**'-vel jelöljük).

* $$F^4(A,B,C,D)=\left[S^4_{0,2}(A,B,C,D)+H(A,B,C,D)\right]\cdot\overline{E(A,B,C,D)}$$

Ahhoz, hogy a kiindulási F függvényt megkapjuk, az S szimmetrikus függvény értékéből úgy állítjuk elő, hogy pótlólagosan '1'-et biztosítunk a hozzáadott mintermeknek megfelelő függvénynek (H), és ezt VAGY-oljuk, majd pedig megtiltjuk/tagadjuk az '1' értéket az elvett mintermeknek megfelelő függvényeknél (E), és ezt pedig ÉS kapcsolatba hozzuk az S szimmetrikus függvénnyel

* Arató P. Logikai Rendszerek tervezése könyvben máshogy szerepel

Rögzítsük a don't care-eket F-ben (ami közös S-el):

AB \ CD	00	01	11	10
00	(0)	(1)	1 (3)	_/0 (2)
01	(4)	_/1 (5)	(7)	1 (6)
11	1 (12)	_/0 (13)	_/0 (15)	_/0 (14)
10	(8)	_/1 (9)	(11)	1 (10)

Szimmetrikus függvény: $S^4_{0,2}(A,B,C,D)$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1 (0)	(1)	1 (3)	(2)
01	(4)	1 (5)	(7)	1 (6)
11	1 (12)	(13)	(15)	(14)
10	(8)	1 (9)	(11)	1 (10)

O: így kialakítható közös '1'esek (F és S között)

$$F = (S + \cancel{H}) \cdot \overline{E} = S \cdot \overline{E}$$

Itt: Nem kellett pótlólagosan S-hez hozzáadni, csak elvenni!

AB \ CD	00	01	11	10
00	1e (0)	(1)	1 (3)	(2)
01	(4)	1 (5)	(7)	1 (6)
11	1 (12)	(13)	(15)	(14)
10	(8)	1 (9)	(11)	1 (10)

E: ahol F='0' volt (_: dont'Care)

AB \ CD	00	01	11	10
00	1e (0)	_ (1)	(3)	_ (2)
01	_ (4)	(5)	_ (7)	(6)
11	(12)	_ (13)	_ (15)	_ (14)
10	_ (8)	(9)	_ (11)	(10)

Példa-1 (folyt): szimmetrikussá tehető NTSH függvény minimalizálása

AB \ CD	00	01	11	10
00	1e (0)	(1)	1 (3)	(2)
01	(4)	1 (5)	(7)	1 (6)
11	1 (12)	(13)	(15)	(14)
10	(8)	1 (9)	(11)	1 (10)

A don’t care értékek megfelelő rögzítésével F-et kifejeztük szimmetrikus S függvénnyel.

E:.az **e**lhagyott mintermek logikai összegéből (DNF) alkotott fgv.

//H: a pótlólagosan **h**ozzáadott mintermek logikai összegéből (DNF) alkotott fgv.//

A pótlólagos ‘1’ értékek biztosításának illetve tiltásának a <u>sorrendjét</u> (szorzás és összeadás) az elhagyandó és hozzáadandó **mintermek kialakításától függően** lehet csak felcserélni:

$$F^4(A,B,C,D) = \left[S^4_{0,2}(A,B,C,D) + \cancel{H(A,B,C,D)}\right] \cdot \overline{E(A,B,C,D)}$$

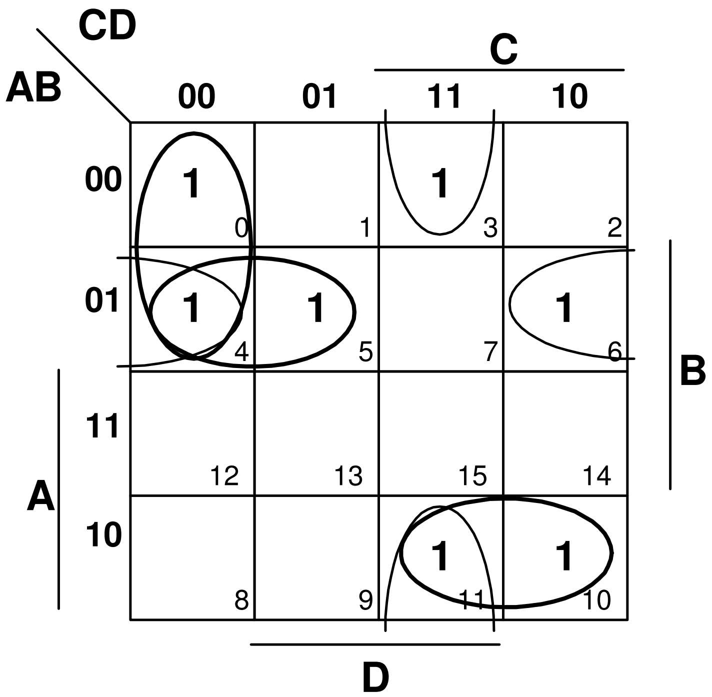
$$\equiv S^4_{0,2}(A,B,C,D) \cdot \overline{E(A,B,C,D)} = S^4_{0,2}(A,B,C,D) \cdot \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}}$$

Példa-2: szimmetrikussá tehető TSH függvény minimalizálása

- Hasonlóan kell eljárni mint az NTSH hálózatok esetén, kivéve hogy nem kell a don't care értékeket (mintermeket) megválasztani.
- Hasonlóan fejezzük ki F-et a szimmetrikus S függvény (építőelem) segítségével úgy, hogy S-hez mintermeket adunk hozzá (h), illetve mintermeket veszünk el (e).

Példa 2: TSH függvény (F) minimalizálása szimmetrikus függvénnyel történő kifejezéssel

$$F^{n=4}(A,B,C,D)=\sum_{i=0}^{2^n-1}(0,3,4,5,6,10,11)$$



Kérdések: Adott F függvény *kifejezhető-e az adott* szimmetrikus S fgv. segítségével (akár F-nek megváltoztatásával is)?

Az így adott S szimmetrikus függvénnyel nem egyszerűbb-e kifejezni az F-fgvt, mint az F legegyszerűbb DNF alakjával?

S legyen adott: $S^4_{0,2}(A,B,C,D)$

Intuitív/próbálgatásos módszer.

Rögzítsük az ‘1’-es értékeket F-ben (ami közös S-el):

AB \ CD	00	01	11	10
00	1 (0)	(1)	1 (3)	(2)
01	1 (4)	1 (5)	(7)	1 (6)
11	(12)	(13)	(15)	(14)
10	(8)	(9)	1 (11)	1 (10)

Szimmetrikus függvény: $S^{4}_{0,2}(A,B,C,D)$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1 (0)	(1)	1 (3)	(2)
01	(4)	1 (5)	(7)	1 (6)
11	1 (12)	(13)	(15)	(14)
10	(8)	1 (9)	(11)	1 (10)

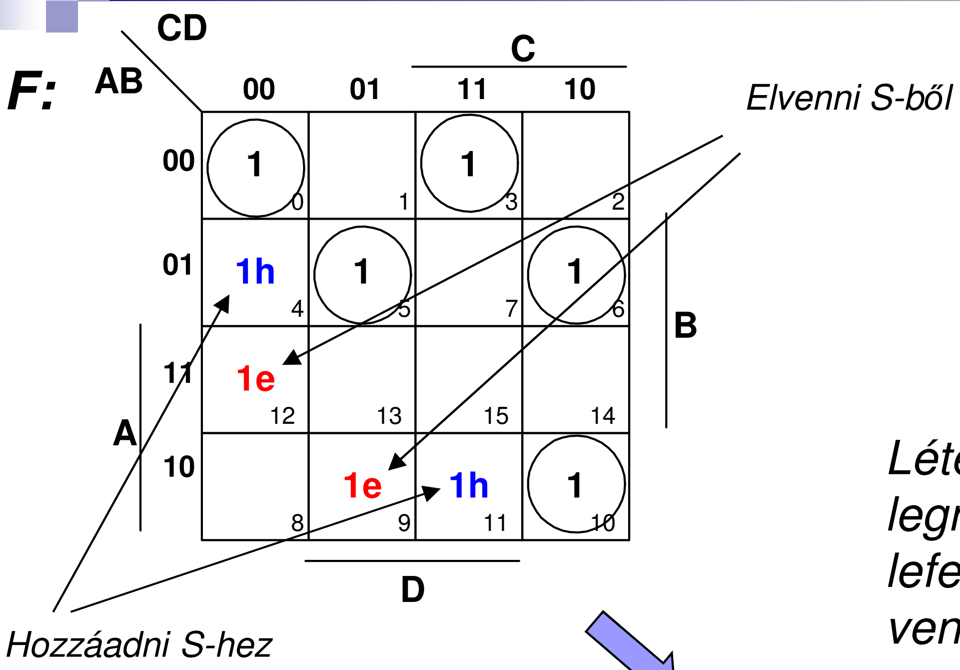
O: így kialakítható közös ‘1’esek (F és S között)

$$F = (S + H) \cdot \overline{E}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1 (0)	(1)	1 (3)	(2)
01	1h (4)	1 (5)	(7)	1 (6)
11	1e (12)	(13)	(15)	(14)
10	(8)	1e (9)	1h (11)	1 (10)

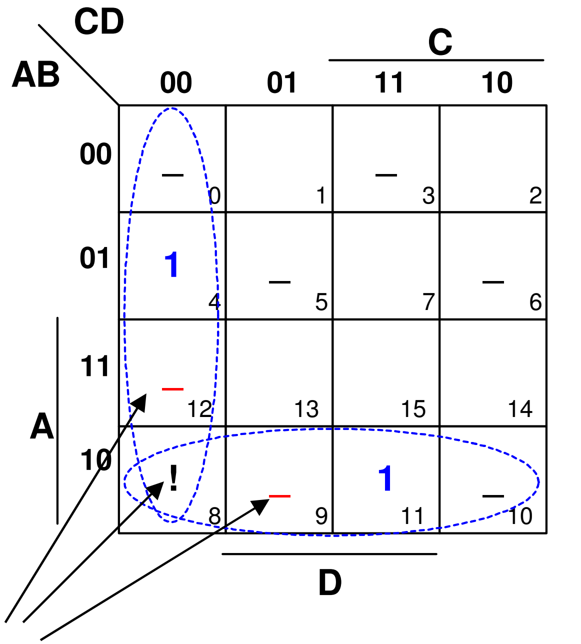
Itt kellett pótlólagosan S-hez hozzáadni 1-et (h), illetve elvenni ‘1’-et (e)!

Folyt. Köv oldalon



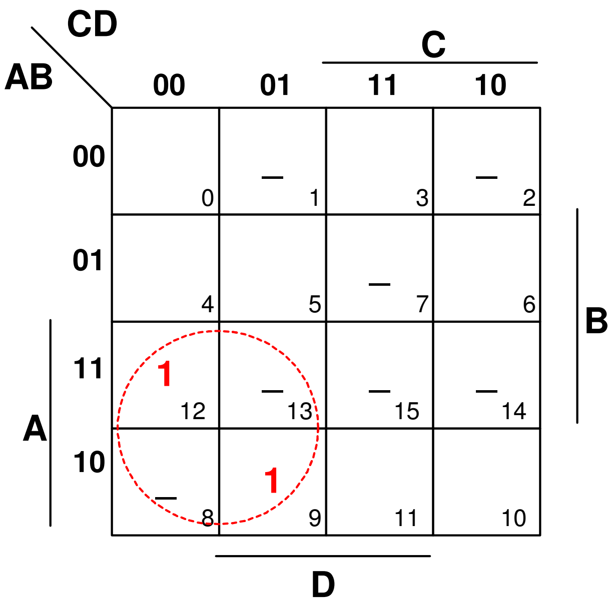
Létező legnagyobb lefedéseket kell venni

H: (ahol F='1' volt, oda _-t írunk)



Ez csak E miatt lehet 1 (összevonás)

E: (ahol F='0' volt, oda _-t írunk)



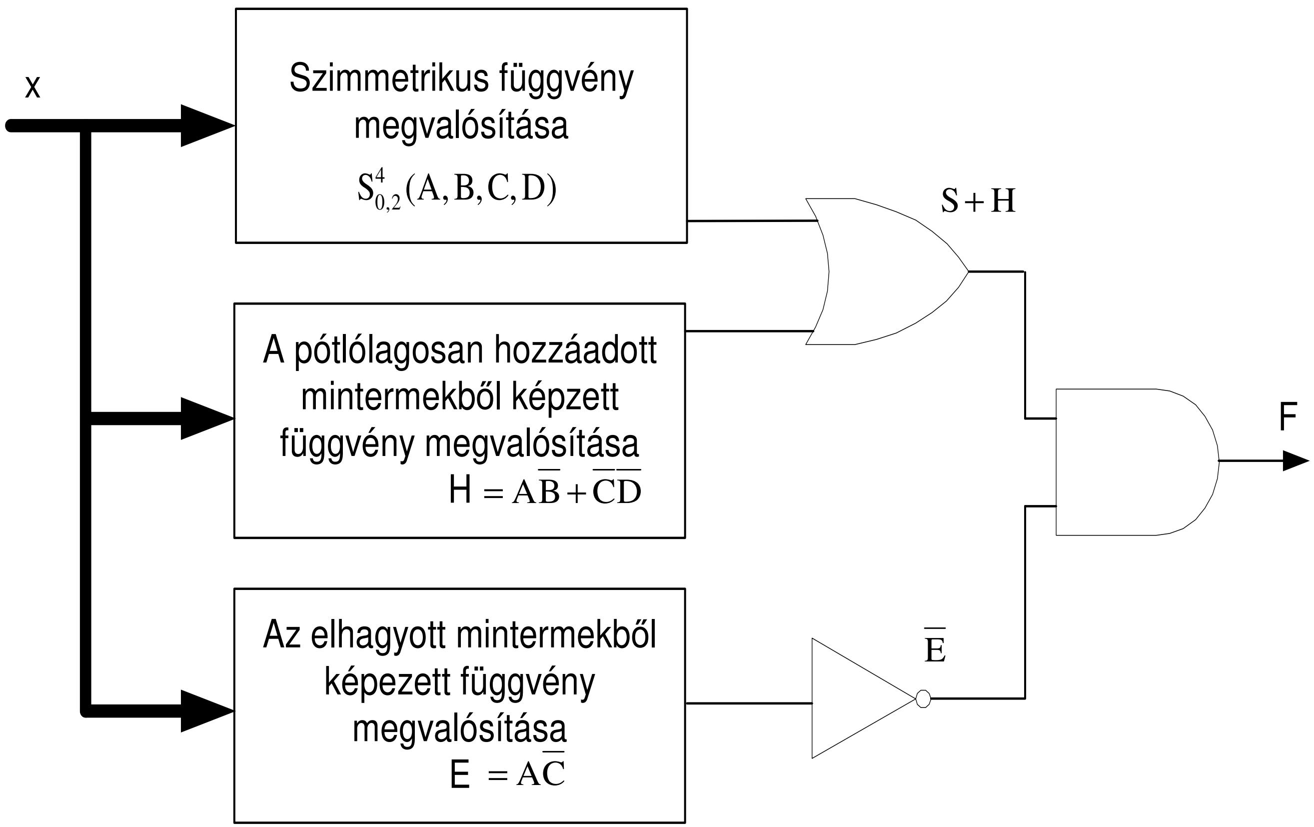
I. Megoldás: F kifejezése S-el (számít a sorrend! H -> E)

$$F^4 = \left[S^4_{0,2}(A,B,C,D) + H\right] \cdot \overline{E} =$$

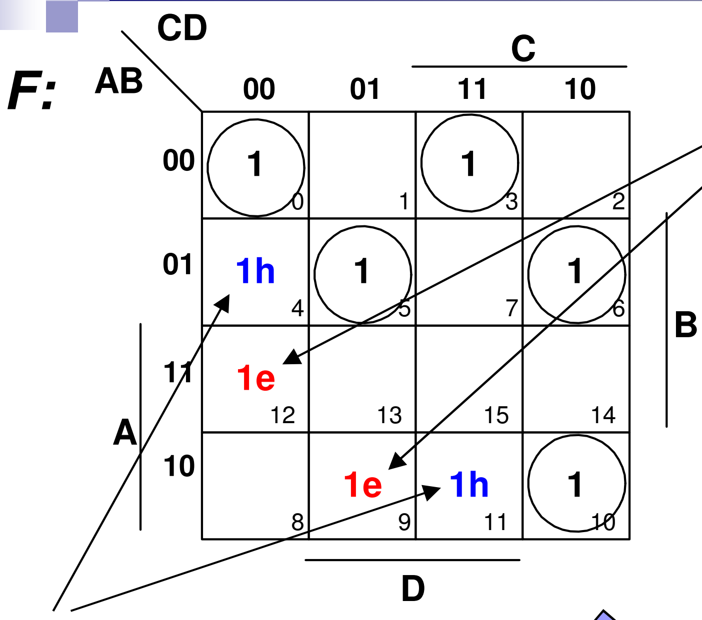
$$= \left[S^4_{0,2}(A,B,C,D) + (A\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D})\right] \cdot \overline{A\overline{C}}$$

Példa 2 (folyt): elvi logikai rajz
I. módszer szerint

$$F = (S + H) \cdot \overline{E} = \left[S^4_{0,2}(A,B,C,D) + (A\overline{B} + \overline{C}\overline{D}) \right] \cdot \overline{A\overline{C}}$$



Mintermek hozzáadásával (H), ill. elhagyásával (E) szimmetrikus függvényként kifejezett F függvény megvalósításának felépítése.

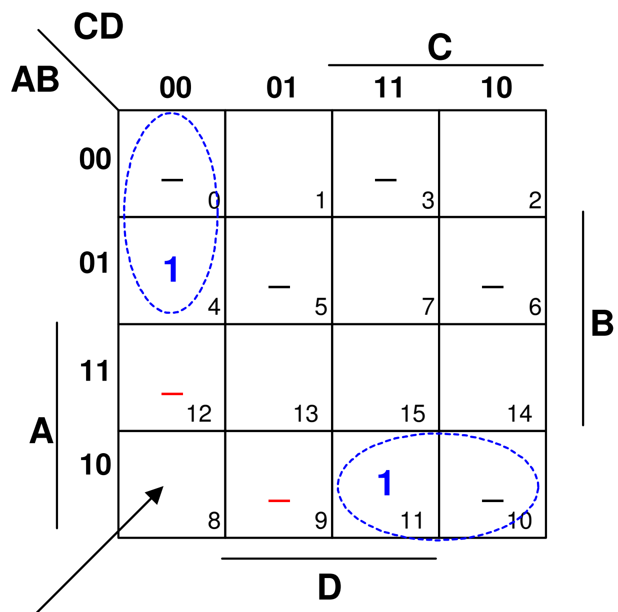


Elvenni S-ből

Hozzáadni S-hez

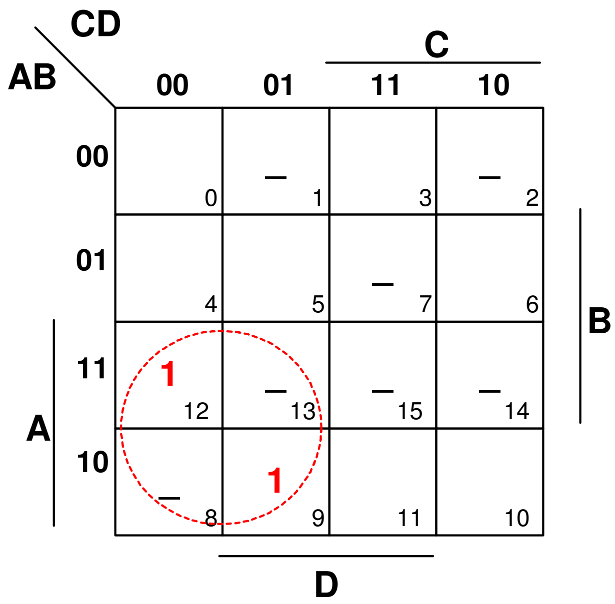
Rendelkezésre álló legnagyobb lefedéseket kell venni

H: (ahol F='1' volt, oda _-t írunk)



Ez csak E miatt lehet 1 (összevonás)

E: (ahol F='0' volt, oda _-t írunk)



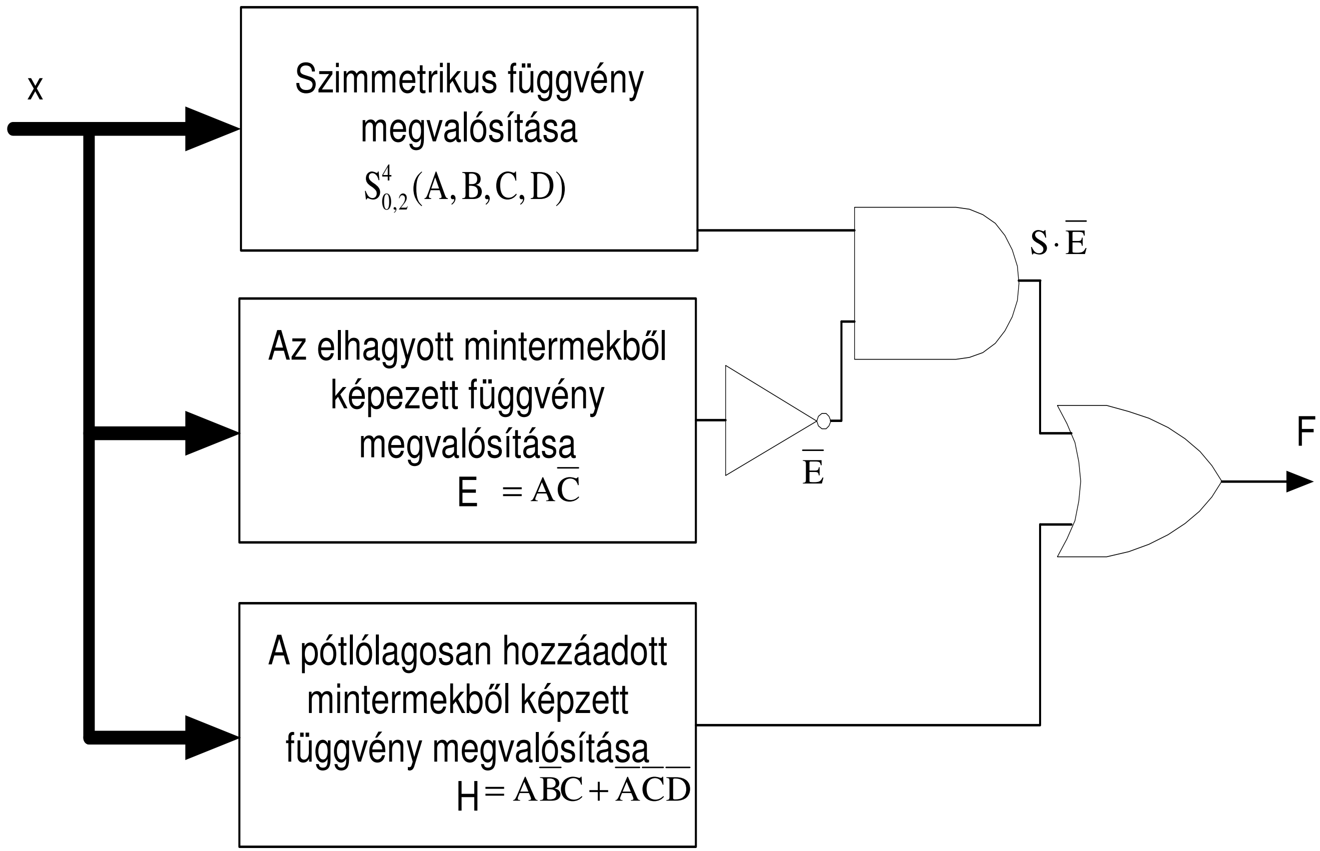
II. Megoldás: F kifejezése S-el (számít a sorrend! E -> H)

$$F^4 = \left[S^4_{0,2}(A,B,C,D)\cdot\overline{E}\right] + H =$$

$$= \left[S^4_{0,2}(A,B,C,D)\cdot\overline{A\overline{C}}\right] + (A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D})$$

Példa 2 (folyt): elvi logikai rajz II. módszer szerint

$$F=(S\cdot\overline{E})+H=\left[S_{0,2}^{4}(A,B,C,D)\cdot\overline{A\overline{C}}\right]+(A\overline{B}C+\overline{A}\overline{C}\overline{D})$$



Mintermek elhagyásával (E), ill. hozzáadásával (H) szimmetrikus függvényként kifejezett F függvény megvalósításának felépítése.

Példa-2: Melyik módszer az optimálisabb ?

- I. módszer:

$$F = (S + H)\cdot\overline{E} = \left[S_{0,2}^{4}(A,B,C,D) + (A\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D})\right]\cdot\overline{A\overline{C}}$$

- II. módszer:

$$F = (S\cdot\overline{E}) + H = \left[S_{0,2}^{4}(A,B,C,D)\cdot\overline{A\overline{C}}\right] + (A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D})$$

Új módszer: Bináris súlyok

(kevésbé intuitív keresés legyen szükséges az egyszerűsítéshez!)

- Eddig: próbálgatásra volt szükség.
  - Sok változó esetén (n>4) már nem szemléletes a Karnaugh tábla sem a szimmetrikus függvény megkeresésére.
- Ezért megfelelő *analitikus* módszer kell.
  - Alapja: **szimmetria szám**, mint **bináris** súly

Új módszer (folyt.)

- A ***szimmetria számok*** a függvényben szereplő mintermeknek megfelelő bináris kombinációk ***bináris súlyait*** definiálják.
- **Vizsgálati módszer (bináris súly előfordulása):** Ha egy függvény szimmetrikus, akkor az adott szimmetria számnak megfelelő bináris súlyt jelentő összes képezhető mintermet tartalmazza.
  - Ha változók száma *‘n’*, és a szimmetria szám *‘k’*, akkor a szimmetrikus függvény tartalmazza az összes képezhető ***k-értékű bináris súlyt képviselő n változós mintermet,*** azaz (kombinációjukat):

$$S^{n}_{k,\ldots} \qquad C^{n}_{k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Példa: szimmetrikus függvény új módszer szerinti felírása

- Adott a következő F fgv. DNF alakban:

$$F^{n=5}(A,B,C,D,E)=\sum_{i=0}^{2^n-1}(3,4,8,12,13,14,17,18,23,27,28)$$

- Kérdés: felírható-e ‘F’ szimmetrikus függvény alakban?
  - Táblázat: változók és bináris súlyaik felírása a DNF alapján
  - Majd a táblázat alapján a bináris súly előfordulásának feltételét kell megvizsgálni.

Példa (folyt): szimmetrikus függvény új módszer szerinti felírása

minterm	A	B	C	D	E	Bináris súly
3	0	0	0	1	1	#2
4	0	0	1	0	0	#1
8	0	1	0	0	0	#1
12	0	1	1	0	0	#2
13	0	1	1	0	1	#3
14	0	1	1	1	0	#3
17	1	0	0	0	1	#2
18	1	0	0	1	0	#2
23	1	0	1	1	1	#4
27	1	1	0	1	1	#4
28	1	1	1	0	0	#3
#1/ #0	5/6	6/5	6/5	5/6	5/6	

Bináris súlyok előfordulása (kombináció):

#1 bináris súly:

$$C_1^5 = \binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5-\text{ször}$$

#2 bináris súly:

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10-\text{szer}$$

#3 bináris súly:

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10-\text{szer}$$

#4 bináris súly:

$$C_4^5 = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5-\text{ször}$$

Egyik előfordulás sem teljesül a tábl. alapján!

Példa (folyt): szimmetrikus függvény új módszer szerinti felírása

- Amennyiben az előfordulások nem teljesültek:
  - Ez még nem jelenti azt, hogy a függvény nem tehető szimmetrikussá (ez a módszer nem vezet célra),
  - Ekkor kell a korábbi módszert alkalmazni.
- Lehetőség: bármely független változó(ka)t felcserélve a kimeneti függvény változatlan marad.
  - Szimmetria esetén minden (itt példában n=5) változónak azonos számmal kell ponáltan, ill. negáltan előfordulnia a DNF alakban.
  - Az előző táblázatban a törtszámok sem azonosak (#1/ #0)! De a (x/y) 6/5 felírható az (y/x) 5/6 reciproka-ként, ami a bináris súlyokat tekintve annyit tesz, hogy tagadjuk a megfelelő független változókat, azért, hogy az #x/#y törtszám azonosság fennálljon.
    - Változtassuk, negáljuk meg B és C független változók értékét: változik a bináris súly -> kiszámolni

Példa (folyt): szimmetrikus függvény új módszer szerinti felírása

minterm	A	$\overline{B}$	$\overline{C}$	D	E	Bináris súly
3	0	1	1	1	1	#4
4	0	1	0	0	0	#1
8	0	0	1	0	0	#1
12	0	0	0	0	0	#0
13	0	0	0	0	1	#1
14	0	0	0	1	0	#1
17	1	1	1	0	1	#4
18	1	1	1	1	0	#4
23	1	1	0	1	1	#4
27	1	0	1	1	1	#4
28	1	0	0	0	0	#1
#1/ #0	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	

Bináris súlyok előfordulása (kombináció):

#0 bináris súly:

$$C_0^5 = \binom{5}{0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = 1-\text{szer}$$

#1 bináris súly:

$$C_1^5 = \binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5-\text{ször}$$

#4 bináris súly:

$$C_4^5 = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5-\text{ször}$$

Most már mindegyik előfordulás teljesül a táblázat alapján! → 'F' Szimmetrikus

Példa (folyt)

- F felírása szimmetria alapján:

$$F^5(A,B,C,D,E)=S^5_{0,1,4}(A,\overline{B},\overline{C},D,E)$$

- Megjegyzés: a táblázatban lehetett volna a B,C változók helyett az A,D,E változókat is tagadni természetesen (5/6 -> 6/5 átalakítással). Ekkor, ahogy várjuk a kapott függvény negáltját kapjuk (4-es szimmetria tulajdonság alapján):

$$F^5(A,B,C,D,E)=S^5_{0,1,4}(A,\overline{B},\overline{C},D,E)\Leftrightarrow S^5_{1,4,5}(\overline{A},B,C,\overline{D},\overline{E})$$