Név: ............................................

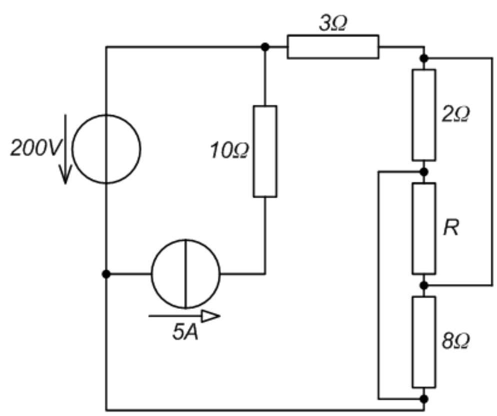
Neptun kód: ............................................

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 11 | 13 | 13 | 10 | 13 | 18 | 10 | 100 |

# Elektromosságtan

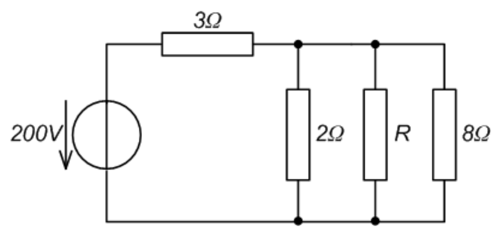
Vizsgazárthelyi dolgozat, 2009. június 3.
munkaidő: 160 perc

1. (12 pont) Határozza meg $R$ értékét úgy, hogy rajta a maximális teljesítmény 85%-a alakuljon hővé!



**Megoldás:**

Az 10Ω-os ellenállás és az áramforrás elhagyható, átrajzolva a hálózatot:




Az $R$-re vonatkozó helyettesítő feszültséggenerátor forrásfeszültsége
$U_V = 200V\frac{2\times 8}{3+2\times 8} = 69.56V$, a belső ellenállása pedig $R_b = 2\times 8\times 3 = 1.04\Omega$. (5 pont)

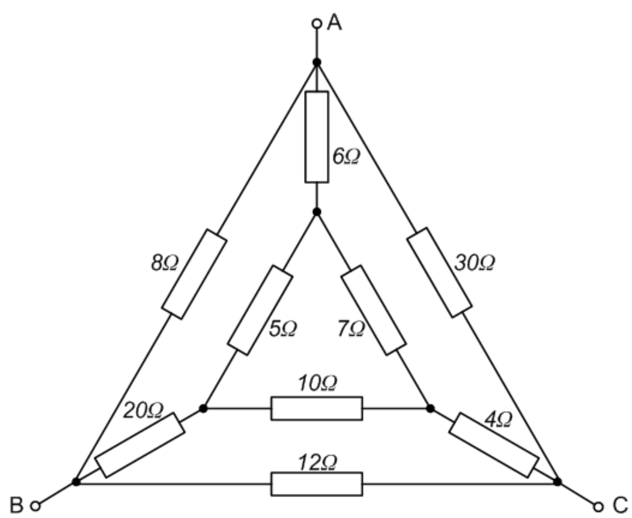
$$P_{max} = \frac{U_V^2}{4R_b} = 1163.12W \quad \Rightarrow \quad P = 0.85P_{max} = 988.65W$$

Másrészt

$$P = U_V^2\frac{R}{(R+R_b)^2}, \qquad \text{ebből: } P\cdot R^2 + (2R_bP - U_V^2)\cdot R + P\cdot R_b^2 = 0$$ (5 pont)

A másodfokú egyenlet megoldásai: $\underline{\underline{R_1 = 2.35\Omega}}$, és $\underline{\underline{R_2 = 0.45\Omega}}$. (5 pont)

2. (11 pont) Határozza meg az $AB$, $BC$, és az $AC$ kapcsok között mérhető $R_{AB}$, $R_{BC}$, és $R_{AC}$ ellenállások értékét!



**Megoldás:**

A belső háromszög átalakítása csillaggá: $R_\Delta = 5 + 7 + 10 = 22\ \Omega$

$$R_{20} = \frac{5 \cdot 10}{22} = 2.27\ \Omega, \quad R_{30} = \frac{7 \cdot 10}{22} = 3.18\ \Omega, \quad R_{10} = \frac{5 \cdot 7}{22} = 1.59\ \Omega$$

(3 pont)

A kapott csillagot visszaalakítva háromszöggé: $R_Y = 3.166\ \Omega$

$$R_{12} = 53.4\ \Omega, \quad R_{23} = 50.53\ \Omega, \quad R_{13} = 17.22\ \Omega$$

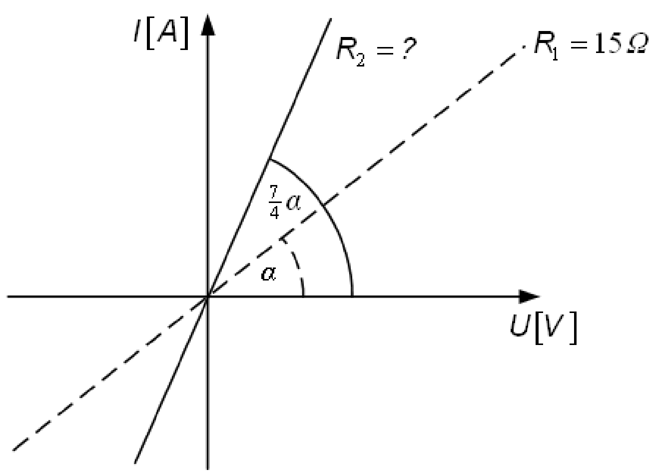
(3 pont)

Ebből a keresett ellenállások:

$$\begin{aligned} R_{AB} &= 6.96 \times (10.94 + 9.7) = \underline{\underline{5.203\ \Omega}} \\ R_{AC} &= 10.94 \times (6.96 + 9.7) = \underline{\underline{6.602\ \Omega}} \\ R_{BC} &= 9.7 \times (6.96 + 10.94) = \underline{\underline{6.289\ \Omega}} \end{aligned}$$

(4 pont)

3. (13 pont) Az ábrán két lineáris ellenállás karakterisztikája látható. Határozza meg $R_2$ értékét, ha az abszcissza tengelyen 2 cm 500 $V$-nak, az ordinátán 1.5 cm 32 $A$-nek felel meg!



**Megoldás:**

Az abszcisszán 1 $cm$ 250 $V$-nak, az ordinátán 1 $cm$ 21.33 $mA$-nek felel meg.

$$15\ \Omega = \frac{U_{1\ cm}}{I_{x\ cm}} = \frac{250}{I_{x\ cm}} \quad \Rightarrow \quad I_{x\ cm} = \frac{250\ V}{15\ \Omega} = 16.67\ A$$

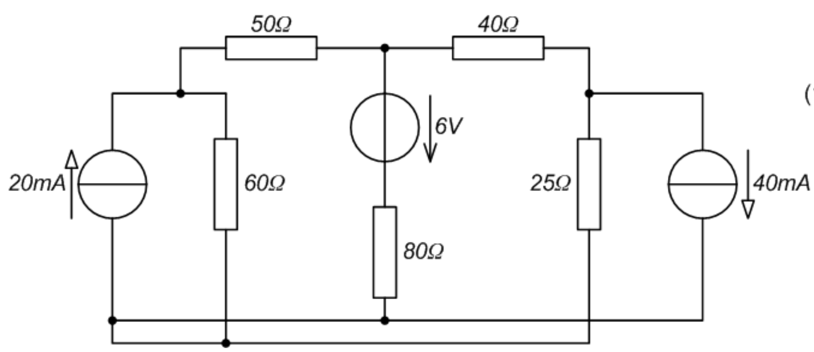
Ebből $x = 0.78\ cm$, $\tan(\alpha) = \frac{I}{U} = 0.78$, valamint $\alpha = \arctan(0.78) = 38°$ (5 pont)

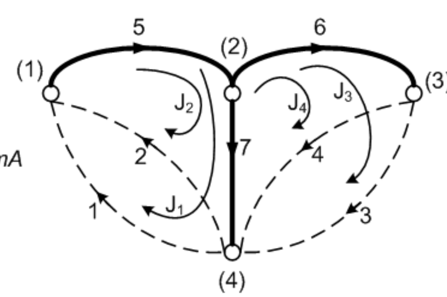
$$\frac{7}{4}\alpha = 66.51° \quad \Rightarrow \quad \tan(66.51°) = \frac{x\ cm}{1\ cm} \quad \Rightarrow \quad x = 2.3\ cm$$

A nevezőben levő 1 $cm$ 250 $V$-nak, a számlálóban levő 2.3 $cm$ pedig $I = 2.3{\cdot}21.33{=}49.08$ A-nek felel meg. Ebből az $R_2$ ellenállás értéke:

$$\underline{\underline{R_2}} = \frac{U}{I} = \frac{250\ V}{49.08\ A} = \underline{\underline{5.09\ \Omega}}$$ (5 pont)

4. (13 pont) A hurokáramok módszere alkalmazásával határozza meg az ágáramok előjeles értékét a gráfon jelölt referenciában!



**Megoldás:**

Négy darab hurokegyenlet plusz kettő:

$$
\begin{aligned}
I: &\quad J_1(80+50)+J_2(80+50)+J_3(-80)+J_4(-80) &=&\ -6+U_{20mA}\\
II: &\quad J_1(80+50)+J_2(80+50+60)+J_3(-80)+J_4(-80) &=&\ -6\\
III: &\quad J_1(-80)+J_2(-80)+J_3(80+40)+J_4(80+40) &=&\ 6+U_{40mA}\\
IV: &\quad J_1(-80)+J_2(-80)+J_3(80+40)+J_4((80+40+25) &=&\ 6\\
&\quad J_1 &=&\ 0.02\\
&\quad J_3 &=&\ 0.04
\end{aligned}
$$

(5 pont)

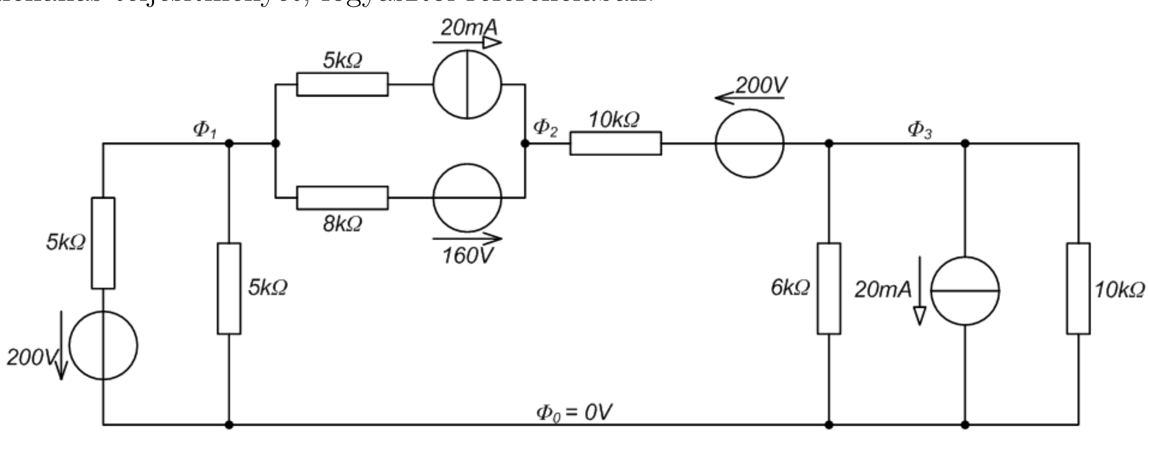
$J_1$ és $J_3$ behelyettesíthető, $II$ és $IV$ egy kétismeretlenes egyenletrendszer $(J_2, J_4)$-ben. Ebből $J_1 = 20\ mA$, $J_2 = -26\ mA$, $J_3 = 40\ mA$, $J_4 = 4.7\ mA$, és az ágáramok:

(5 pont)

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{I_1}} &= J_1 = \underline{\underline{20\ mA}}\\
\underline{\underline{I_2}} &= J_2 = \underline{\underline{-26\ mA}}\\
\underline{\underline{I_3}} &= J_3 = \underline{\underline{40\ mA}}\\
\underline{\underline{I_4}} &= J_4 = \underline{\underline{4.7\ mA}}\\
\underline{\underline{I_5}} &= J_1 + J_2 = \underline{\underline{-6\ mA}}\\
\underline{\underline{I_6}} &= J_3 + J_4 = \underline{\underline{44.7\ mA}}\\
\underline{\underline{I_7}} &= J_1 + J_2 - J_3 - J_4 = \underline{\underline{-50.7\ mA}}
\end{aligned}
$$

(5 pont)

5. (10 pont) A csomóponti potenciálok módszere alkalmazásával határozza meg a 6 $k\Omega$-os ellenállás teljesítményét, fogyasztói referenciában!



**Megoldás:**

Felírható 3 csomóponti törvény:

$$\begin{aligned}
I: &\quad \tfrac{\Phi_1-200}{5000}+\tfrac{\Phi_1}{5000}+20\cdot 10^{-3}+\tfrac{\Phi_1-\Phi_2-160}{8000} &= 0\\
II: &\quad -20\cdot 10^{-3}+\tfrac{\Phi_2-\Phi_1+160}{8000}+\tfrac{\Phi_2-\Phi_3+200}{10000} &= 0\\
III: &\quad \tfrac{\Phi_3-\Phi_2-200}{10000}+\tfrac{\Phi_3}{6000}+20\cdot 10^{-3}+\tfrac{\Phi_3}{10000} &= 0
\end{aligned}$$

(4 pont)

Ebből a potenciálok értékei

$$\Phi_1 = 61.34\ V, \quad \Phi_2 = -62.37\ V, \quad \Phi_3 = -17.01\ V,$$

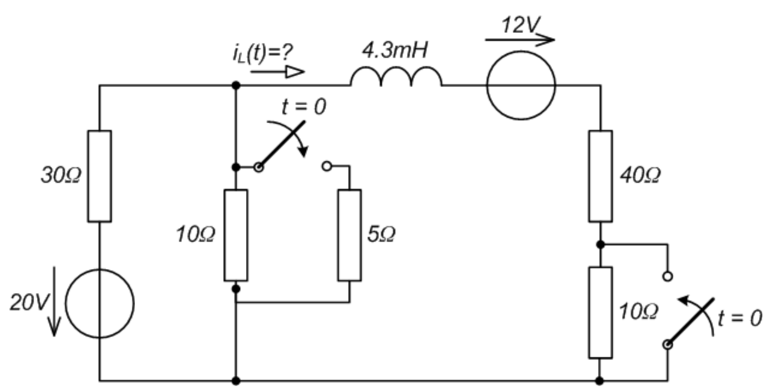
(4 pont)

Az ellenállás feszültsége $U = \Phi_3 - \Phi_0 = -17.01\ V$, a teljesítménye pedig

$$\underline{\underline{P = \frac{U^2}{R} = 48.16\ mW}}$$

(2 pont)

6. (13 pont) Az ábrán látható hálózatban már beállt az állandósult állapot, amikor a $t = 0$ pillanatban zárjuk mindkét kapcsolót. Határozza meg a tekercs áramának időfüggvényét a $(0, \infty)$ időintervallumon!



**Megoldás:**

$R_b$, illetve $T$ meghatározásához a kapcsolás utáni pillanatot vesszük figyelembe:

$$R_b = 30 \times 10 \times 5 + 40 = 43\ \Omega, \quad T = \frac{L}{R_b} = 100\mu s \qquad \text{(3 pont)}$$

A tekercs áramának kezdeti/kiindulási értéke, illetve a $t \to \infty$-ben felvett értéke:

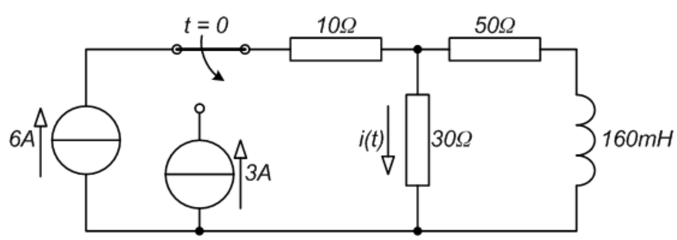
$$\begin{aligned} i_L(-0) = i_L(+0) &= 20 \cdot \tfrac{10\times(40+10)}{30+10\times(40+10)} \cdot \tfrac{1}{40+10} - 12 \cdot \tfrac{1}{30\times10+40+10} = -122\ mA \\ i_L(\infty) &= 20 \cdot \tfrac{10\times5\times40}{30+10\times5\times40} \cdot \tfrac{1}{40} - 12 \cdot \tfrac{1}{30\times10\times5+40} = -236\ mA \end{aligned} \qquad \text{(5 pont)}$$

Mivel elsőrendű a hálózat, ezért $i_L(t)$ alakja $i_L(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} + B, \quad t \geq 0$.

$$\begin{aligned} i_L(0) &= A + B = -122\ mA \\ i_L(\infty) &= B = -236\ mA \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 114\ mA \\ B &= -236\ mA \end{aligned}$$

Tehát $\underline{\underline{i_L(t) = \left(114 \cdot e^{-\frac{t}{100\mu s}} - 236\right) mA, \quad t \geq 0}}$ (5 pont)

7. (18 pont) Az ábrán látható hálózatban már beállt az állandósult állapot, amikor a $t = 0$ pillanatban átkapcsoljuk a kapcsolót. Határozza meg a 30 Ω-os ellenállás áramát és az ellenálláson a $(0s,\ 1s)$ időintervallumon hővé alakuló energiát!



**Megoldás:**

$R_b$, illetve $T$ meghatározása:

$$R_b = 50 + 30 = 80\ \Omega, \quad T = \frac{L}{R_b} = 2\ ms \qquad \text{(3 pont)}$$

A tekercs és az ellenállás áramának értéke $t = 0\pm$-ban, illetve $t \to \infty$-ben:

$$\begin{aligned} i_L(\pm 0) &= 6 \cdot \tfrac{30}{30+50} = 2.25\ A \\ i(-0) &= 6 - i_L(-0) = 3.75\ A \\ i(+0) &= 3 - i_L(+0) = 0.75\ A \\ i(\infty) &= 3 \cdot \tfrac{50}{30+50} = 1.875\ A \end{aligned} \qquad \text{(5 pont)}$$

Mivel elsőrendű a hálózat, ezért $i(t)$ alakja $i(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} + B, \quad t \geq 0$.

$$\begin{aligned} i(+0) &= A + B = 0.75\ A \\ i(\infty) &= B = 1.875\ A \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= -1.125\ A \\ B &= 1.875\ A \end{aligned}$$

Tehát $\underline{\underline{i(t) = \left(-1.125 \cdot e^{-\frac{t}{2ms}} + 1.875\right) A, \quad 0 \leq t}}$ (4 pont)

Az ellenállás teljesítményének időfüggvénye:

$$\begin{aligned} p_{30\Omega}(t) &= 30 \cdot i^2(t) = 30 \cdot \left(1.125^2 e^{-\frac{t}{1ms}} - 2 \cdot 1.875 \cdot 1.125 \cdot e^{-\frac{t}{2ms}} + 1.875^2\right) \\ &= 37.96 e^{-1000t} - 126.56 e^{-500t} + 105.47 \end{aligned} \qquad \text{(3 pont)}$$

Ebből az energia

$$\begin{aligned} W_{30\Omega} &= \int_0^1 p_{30\Omega}(t) dt = \\ &= 30 \cdot 1.125^2 \int_0^1 e^{-1000t} dt - 2 \cdot 1.875 \cdot 1.125 \cdot \int_0^1 e^{-500t} dt + 1.875^2 \int_0^1 dt = \\ &= \underline{\underline{105.46\ J}} \end{aligned} \qquad \text{(3 pont)}$$

8. (10 pont) Határozza meg az alábbi lineáris differenciálegyenletnek a kezdeti feltételt kielégítő megoldását!

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Megoldás:**

A sajátértékek $\lambda_1 = -2$, és $\lambda_2 = -4$, (3 pont)

a sajátvektorok pedig

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(5 pont)

A megoldás általános alakja:

$$\underline{x}(t) = c_1 \cdot \underline{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \underline{v}_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 7.5$ és $c_2 = -6.5$, azaz

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot e^{-2t} \\ 7.5 \cdot e^{-2t} - 6.5 \cdot e^{-4t} \end{bmatrix}}}$$

(5 pont)