Név: ....

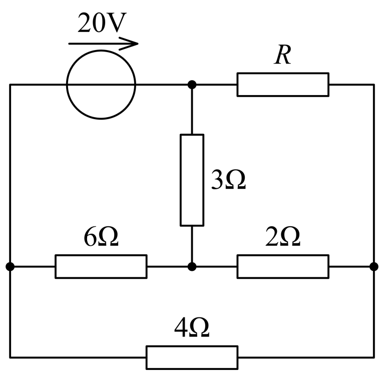
Neptun kód: ....

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$

Elektromosságtan

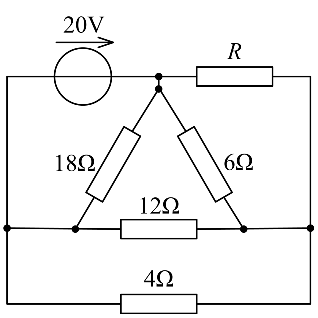
Pótzárthelyi dolgozat, 2009. december 8.
munkaidő: 110 perc

1. (16 pont) Határozza meg a R értékét úgy, hogy rajta a maximális teljesítmény 50%-a alakuljon hővé! Mekkora ez a teljesítmény?



Megoldás:

Az R-re vonatkozó helyettesítő feszültséggenerátor belső ellenállását és forrásfeszültségét kell meghatározni, ehhez célszerű a belső csillag kapcsolást átalakítani:



$$R_b = 6 \times 4 \times 12 = 2\ \Omega$$
$$U_V = -20\text{V}\frac{6}{6+12\times 4} = -13.333\ \text{V}$$

Ezekből meghatározható a maximális teljesítmény:

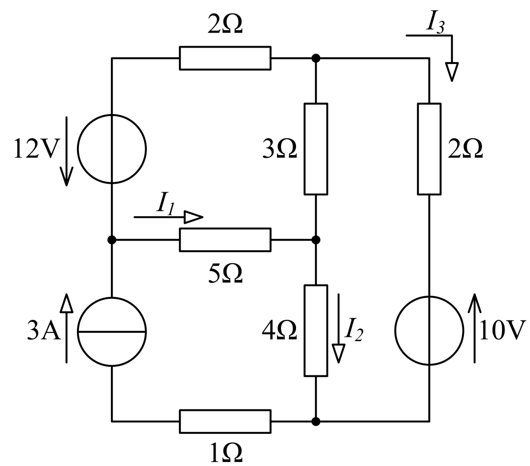
$P_{\max} = \frac{U_V^2}{4R_b} = 22.222$ W,

aminek a fele $\underline{\underline{P = 11.111\ \text{W}}}$ (8 pont)

$$0.5\frac{U_V^2}{4R_b} = U_V^2\frac{R}{(R+R_b)^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R_{1,2} = 6 \pm 4\sqrt{2}\ \Omega \quad (R_1 \approx 11.65\ \Omega, \quad R_2 \approx 0.34\ \Omega)}}$$

(8 pont)

2. (16 pont) A *csomóponti potenciálok módszere* alkalmazásával határozza meg a bejelölt I_1, I_2 és I_3 ágáramok előjeles értékét!



Megoldás:

Három darab csomóponti egyenlet:

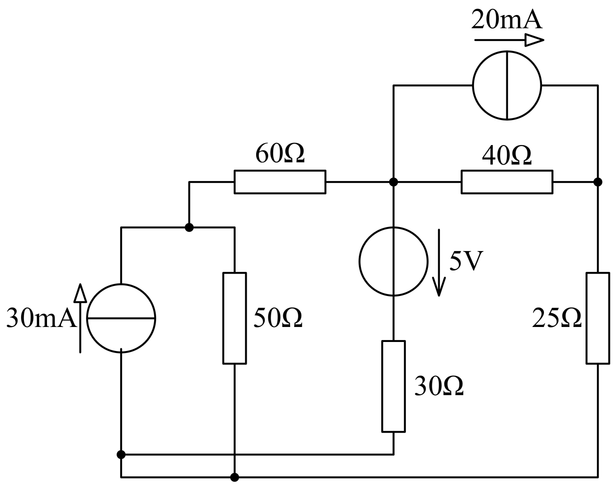
$$\begin{aligned} I: \quad & \frac{\Phi_1-\Phi_2}{5} - 3 + \frac{\Phi_1-\Phi_3+12}{2} &= 0 \\ II: \quad & \frac{\Phi_2-\Phi_1}{5} + \frac{\Phi_2}{4} + \frac{\Phi_2-\Phi_3}{3} &= 0 \\ III: \quad & \frac{\Phi_3-\Phi_1-12}{2} + \frac{\Phi_3-\Phi_2}{3} + \frac{\Phi_3+10}{2} &= 0 \end{aligned}$$ (5 pont)

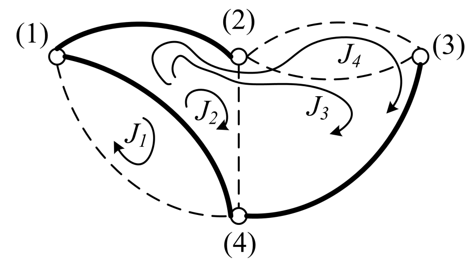
Ebből $\Phi_1 = -6.938$ V, $\Phi_2 = -2.864$ V és $\Phi_3 = -2.568$ V. (6 pont)

A keresett áramok pedig:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{I_1}} &= \frac{\Phi_1-\Phi_2}{5} = \underline{\underline{-0.81\ \text{A}}} \\ \underline{\underline{I_2}} &= \frac{\Phi_2}{4} = \underline{\underline{-0.716\ \text{A}}} \\ \underline{\underline{I_3}} &= \frac{\Phi_3+10}{2} = \underline{\underline{3.716\ \text{A}}} \end{aligned}$$ (5 pont)

3. (20 pont) A *hurokáramok módszere* alkalmazásával határozza meg a források teljesítményét fogyasztói referenciában!





Megoldás:

Négy darab hurokegyenlet plusz kettő:

$$
\begin{aligned}
I: &\quad J_1(50) + J_2(-50) + J_3(-50) + J_4(-50) &= -U_{30mA}\\
II: &\quad J_1(-50) + J_2(50+60+30) + J_3(50+60) + J_4(50+60) &= -5\\
III: &\quad J_1(-50) + J_2(50+60) + J_3(50+60+40+25) + J_4(50+60+25) &= 0\\
IV: &\quad J_1(-50) + J_2(50+60) + J_3(50+60+25) + J_4(50+60+25) &= -U_{20mA}\\
& J_1 &= 0.03\text{ A}\\
& J_4 &= 0.02\text{ A}
\end{aligned}
$$

(7 pont)

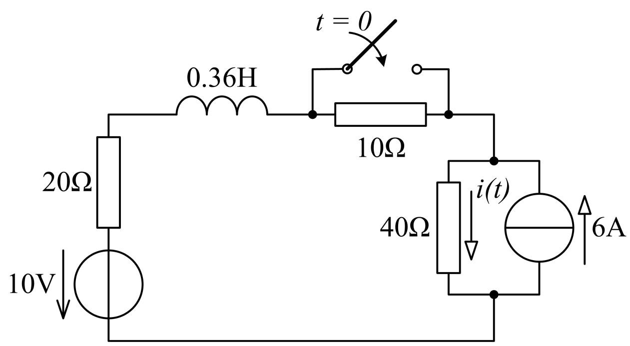
$II.-III.$-ból meghatározható J_2 és J_3, ezután $I.$-ből kiszámítható U_{30mA}, illetve $IV.$-ből U_{20mA}: $J_2 = -69.8$ mA, $J_3 = 37$ mA, $U_{30mA} = -2.14$ V, $U_{20mA} = 1.48$ V. (10 pont)

A keresett teljesítmények:

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{P_{30mA}}} &= U_{30mA} \cdot J_1 = \underline{\underline{-64.2\text{ mW}}}\\
\underline{\underline{P_{20mA}}} &= U_{20mA} \cdot J_4 = \underline{\underline{29.6\text{ mW}}}\\
\underline{\underline{P_{5V}}} &= 5 \cdot J_2 = \underline{\underline{-349\text{ mW}}}
\end{aligned}
$$

(3 pont)

4. (20 pont) Az ábrán látható hálózatban már beállt az állandósult állapot, amikor a $t = 0$ pillanatban zárjuk a kapcsolót. Határozza meg a 40 Ω-os ellenállás áramának időfüggvényét a $(0, \infty)$ időintervallumon!



Megoldás:

R_b, illetve T meghatározásához a kapcsolás utáni pillanatot vesszük figyelembe:

$$R_b = 40 + 20 = 60\ \Omega, \quad T = \frac{L}{R_b} = 6\ \text{ms}$$

(5 pont)

Az $i(t)$ áram $t = 0\pm$-beli értéke, illetve a $t \to \infty$-ben felvett értéke:

$$\begin{aligned}
i(0-) &= 10 \cdot \tfrac{40}{20+10+40} \cdot \tfrac{1}{40} + 6 \cdot \tfrac{20+10}{20+10+40} = 2.71\ \text{A} \\
i_L(0\pm) &= 10 \cdot \tfrac{1}{20+10+40} - 6 \cdot \tfrac{40}{40+10+20} = -3.286\ \text{A} \\
i(0+) &= 6 + i_L(0\pm) = 2.71\ \text{A} \\
i(\infty) &= 10 \cdot \tfrac{1}{20+40} + 6 \cdot \tfrac{20}{20+40} = 2.166\ \text{A}
\end{aligned}$$

(8 pont)

Mivel elsőrendű a hálózat, ezért $i(t)$ alakja $i(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} + B, \quad t \geq 0.$

$$\begin{aligned}
i(0+) &= A + B = 2.71\ \text{A} \\
i(\infty) &= B = 2.166\ \text{A}
\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}
A &= 0.55\ \text{A} \\
B &= 2.166\ \text{A}
\end{aligned}$$

Tehát $\underline{\underline{i(t) = \left(0.55 \cdot e^{-\frac{t}{6\text{ms}}} + 2.166\right)\ \text{A}, \quad t \geq 0}}$

(7 pont)

5. (14 pont) Határozza meg az alábbi lineáris differenciálegyenletnek a kezdeti feltételt kielégítő megoldását!

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$\det(\lambda \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = 0$ -ból a sajátértékek $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 3$, (4 pont)

$(\lambda \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})\underline{v} = \underline{0}$ -ból a sajátvektorok pedig

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(6 pont)

A megoldás általános alakja:

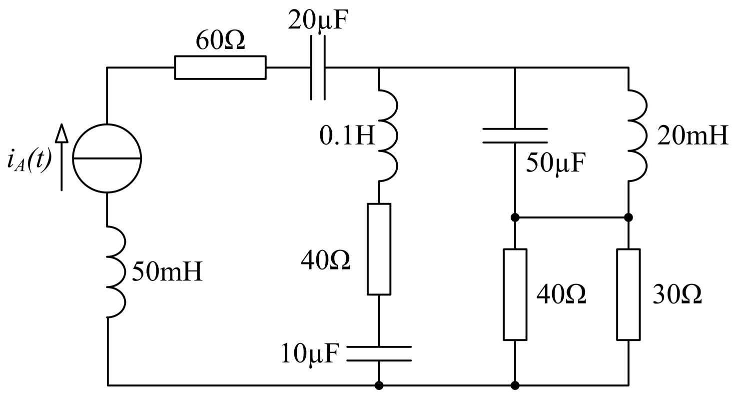
$$\underline{x}(t) = c_1 \cdot \underline{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \underline{v}_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = \frac{3}{2}$ és $c_2 = \frac{1}{2}$, azaz

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{3t} \\ \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} \end{bmatrix}}}$$

(4 pont)

6. (14 pont) Határozza meg az áramforrás feszültségének komplex effektív értékét!



$$i_A(t) = 100\sqrt{2}\sin(\omega t + \tfrac{\pi}{2}) \text{ A}$$
$$\omega = 10^3 \text{ rad/s}$$

Megoldás:

A forrásáram komplex effektív értéke

$$\overline{I}_A = 100e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ A} \qquad (4 \text{ pont})$$

A párhuzamosan kapcsolt 50μF-os kondenzátor és a 20mH-s tekercs szakadás, ezért ez a párhuzamos ág nem számít bele az eredő impedanciába

$$\overline{Z} = 60 - j50 + j100 + 40 - j100 + j50 = 100 \ \Omega \qquad (6 \text{ pont})$$

Ebből a forrás feszültségének komplex effektív értéke

$$\underline{\underline{\overline{U_A}}} = \overline{I_A} \cdot \overline{Z} = 100e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot 100 = \underline{\underline{10e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ kV}}} \qquad (4 \text{ pont})$$