Név: ....

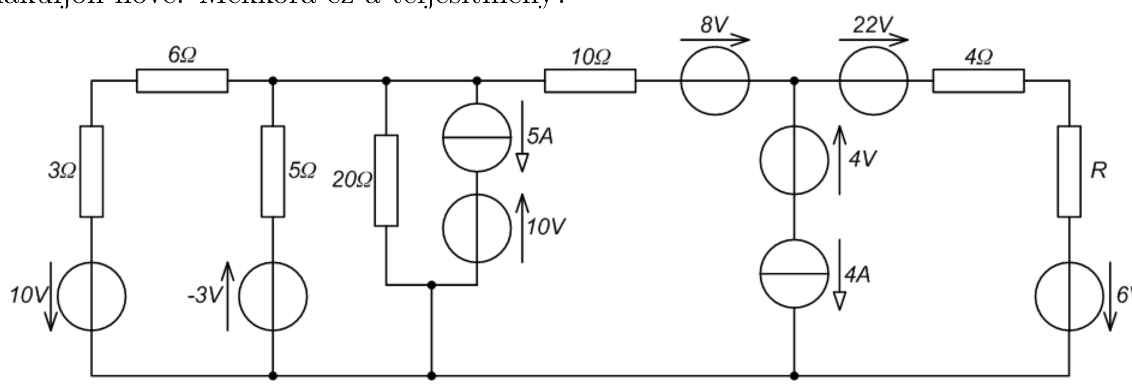
Neptun kód: ....

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	$\sum$
13	12	12	13	10	18	12	10	100

Elektromosságtan

Pót-pótzárthelyi dolgozat, 2009. május 27.
munkaidő: 160 perc

1. (13 pont) Határozza meg R értékét úgy, hogy rajta a maximális teljesítmény 70%-a alakuljon hővé! Mekkora ez a teljesítmény?



Megoldás:

Az R-re vonatkozó helyettesítő feszültséggenerátor forrásfeszültsége

$$U_V = 10 \cdot \frac{5\times 20}{5\times 20+3+6} + 3 \cdot \frac{20\times(3+6)}{20\times(3+6)+5} - 5\cdot(20\times 5\times(6+3)) - 8$$
$$-22-6-4\cdot((3+6)\times 5\times 20+10) = -96.19\ V, \qquad \text{(3 pont)}$$

a belső ellenállása pedig $R_b = 4+10+20\times 5\times(6+3) = 16.77\ \Omega.$ (2 pont)

$$P_{max} = \frac{U_V^2}{4R_b} = 137.93W \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P = 0.7P_{max} = 96.55\ W}} \qquad \text{(3 pont)}$$

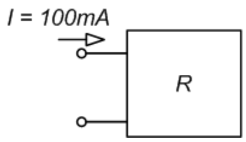
Másrészt

$$P = U_V^2 \frac{R}{(R+R_b)^2}, \qquad \text{ebből: } P\cdot R^2 + (2R_bP - U_V^2)\cdot R + P\cdot R_b^2 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $\underline{\underline{R_1 = 57.39\ \Omega}}$, és $\underline{\underline{R_2 = 4.9\ \Omega}}$. (5 pont)

2. (12 pont) Rajzolja fel az R bemeneti ellenállással adott kétpólust és határozza meg az R_9-en folyó áram előjeles értékét, ha $I = 100\ mA$!

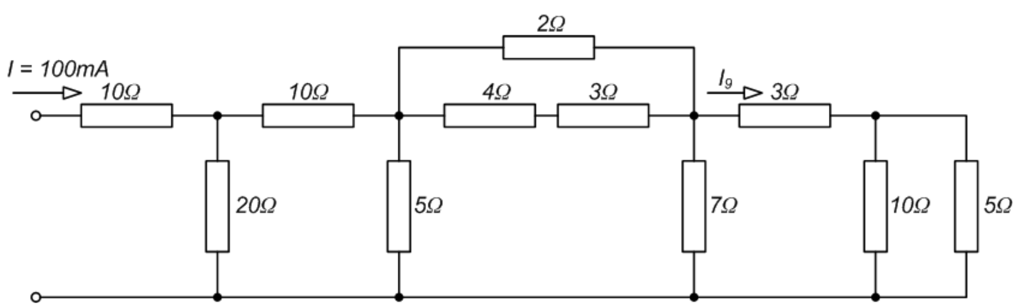
$$R = R_1 + R_2 \times [R_3 + R_4 \times (R_5 \times (R_6 + R_7) + R_8 \times (R_9 + R_{10} \times R_{11}))]$$



$R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 5\ \Omega$,
$R_5 = 2\ \Omega$, $R_6 = 4\ \Omega$, $R_7 = 3\ \Omega$, $R_8 = 7\ \Omega$,
$R_9 = 3\ \Omega$, $R_{10} = 10\ \Omega$, $R_{11} = 5\ \Omega$

Megoldás:

A hálózat egy lehetséges rajza:



(6 pont)

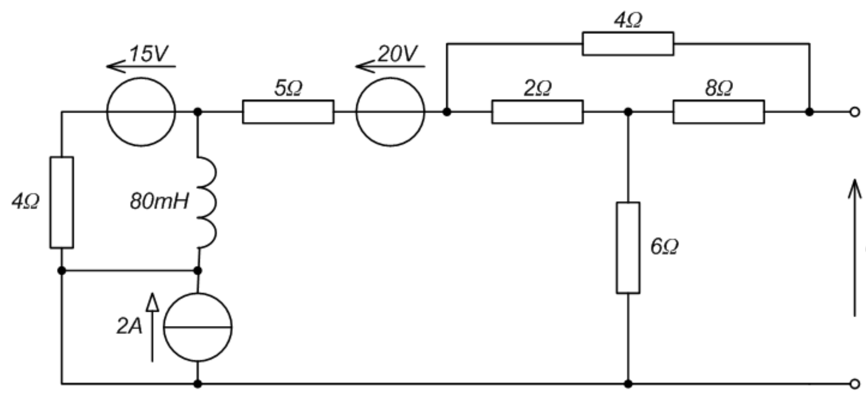
Áramosztás egymás után három csomópontban:

$$I_9 = 100 \cdot \frac{20}{20+[(5\times10+3)\times7+2\times(4+3)]\times5+10} \cdot \frac{5}{5+[(5\times10+3)\times7+2\times(4+3)]} \cdot \frac{7}{7+3+10\times5} =$$

$$= 100 \cdot 0.616 \cdot 0.506 \cdot 0.525 = \underline{\underline{16.36\ mA}}$$

(6 pont)

3. (12 pont) Határozza meg az alábbi *egyenáramú* hálózatban az U feszültség előjeles értékét!



Megoldás:

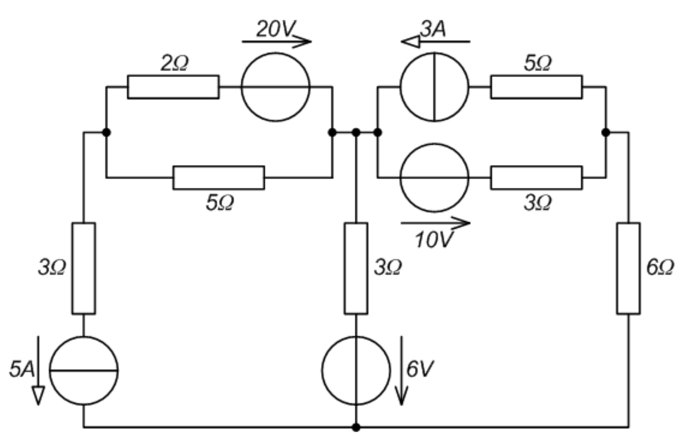
A 15 V-os feszültségforrás, a 4 Ω-os ellenállás és a 2 A-os áramforrás elhagyható, a tekercs egyenáramú hálózatokban rövidzár. (6 pont)

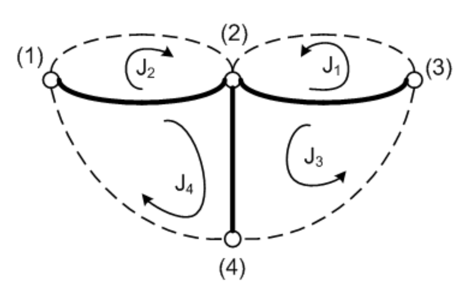
Ezek után az U feszültség a 8 Ω-os és a 6 Ω-os ellenállások feszültségeinek összege:

$$U = -20 \cdot \frac{6}{6+5+2\times(4+8)} - 20 \cdot \frac{2\times(4+8)}{2\times(4+8)+5+6} \cdot \frac{8}{4+8} = \underline{\underline{-11.24\ V}}$$

(6 pont)

4. (13 pont) A hurokáramok módszere alkalmazásával határozza meg a források teljesítményének előjeles értékét, fogyasztói referenciában!





Megoldás:

Négy darab hurokegyenlet plusz kettő:

$$\begin{aligned}
I: \quad & J_1(3+5)+J_2(0)+J_3(-3)+J_4(0) &=& -10+U_{3A} \\
II: \quad & J_1(0)+J_2(2+5)+J_3(0)+J_4(-5) &=& -20 \\
III: \quad & J_1(-3)+J_2(0)+J_3(3+3+6)+J_4(3) &=& 10-6 \\
IV: \quad & J_1(0)+J_2(-5)+J_3(3)+J_4((3+5+3) &=& -6+U_{5A} \\
& J_1 &=& 3 \\
& J_4 &=& -5
\end{aligned}$$

(5 pont)

J_1 és J_4 behelyettesíthető, II-ből kifejezhető J_2, III-ból pedig J_3. I-be helyettesítve J_3-at kifejezhető U_{3A}, IV-be helyettesítve J_2-t kifejezhető U_{5A}:

$$J_1 = 3\ A, \quad J_2 = -6.43\ A, \quad J_3 = 2.33\ A, \quad J_4 = -5\ A, \quad U_{3A} = 27\ V, \quad U_{5A} = -9.85\ V,$$

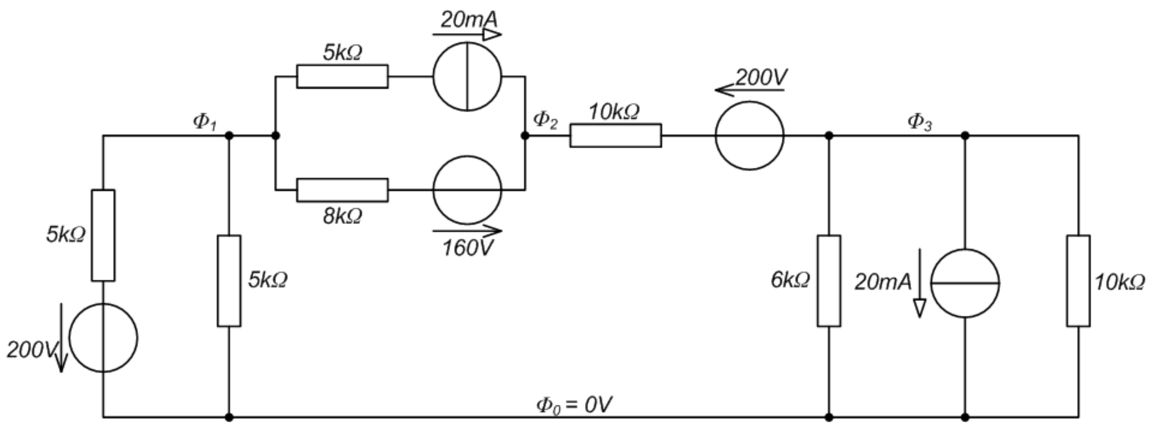
(4 pont)

a források teljesítményei pedig:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{P_{5A}}}} &= 5 \cdot U_{5A} = \underline{\underline{\underline{-49.28\ W}}} \\
\underline{\underline{\underline{P_{20V}}}} &= 20 \cdot J_2 = \underline{\underline{\underline{-128.6\ W}}} \\
\underline{\underline{\underline{P_{6V}}}} &= 6 \cdot (J_3 + J_4) = \underline{\underline{\underline{-16.02\ W}}} \\
\underline{\underline{\underline{P_{3A}}}} &= 3 \cdot U_{3A} = \underline{\underline{\underline{81.03\ W}}} \\
\underline{\underline{\underline{P_{10V}}}} &= 10 \cdot (J_1 - J_3) = \underline{\underline{\underline{6.7\ W}}}
\end{aligned}$$

(4 pont)

5. (10 pont) A csomóponti potenciálok módszere alkalmazásával határozza meg a 6 $k\Omega$-os ellenállás teljesítményét, fogyasztói referenciában!



Megoldás:

Felírható 3 csomóponti törvény:

$$
\begin{aligned}
I: &\quad \tfrac{\Phi_1-200}{5000}+\tfrac{\Phi_1}{5000}+20\cdot 10^{-3}+\tfrac{\Phi_1-\Phi_2-160}{8000} &= 0\\
II: &\quad -20\cdot 10^{-3}+\tfrac{\Phi_2-\Phi_1+160}{8000}+\tfrac{\Phi_2-\Phi_3+200}{10000} &= 0\\
III: &\quad \tfrac{\Phi_3-\Phi_2-200}{10000}+\tfrac{\Phi_3}{6000}+20\cdot 10^{-3}+\tfrac{\Phi_3}{10000} &= 0
\end{aligned}
$$

(4 pont)

Ebből a potenciálok értékei

$$\Phi_1 = 61.34\ V, \quad \Phi_2 = -62.37\ V, \quad \Phi_3 = -17.01\ V,$$

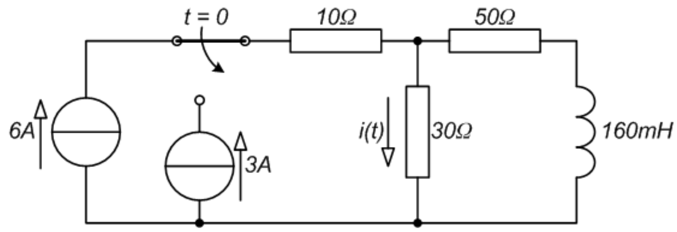
(4 pont)

Az ellenállás feszültsége $U = \Phi_3 - \Phi_0 = -17.01\ V$, a teljesítménye pedig

$$\underline{\underline{P = \frac{U^2}{R} = 48.16\ mW}}$$

(2 pont)

6. (18 pont) Az ábrán látható hálózatban már beállt az állandósult állapot, amikor a $t = 0$ pillanatban átkapcsoljuk a kapcsolót. Határozza meg a 30 Ω-os ellenállás áramát és az ellenálláson a $(0s,\ 1s)$ időintervallumon hővé alakuló energiát!



Megoldás:

R_b, illetve T meghatározása:

$$R_b = 50 + 30 = 80\ \Omega, \quad T = \frac{L}{R_b} = 2\ ms \qquad \text{(3 pont)}$$

A tekercs és az ellenállás áramának értéke $t = 0\pm$-ban, illetve $t \to \infty$-ben:

$$\begin{aligned} i_L(\pm 0) &= 6 \cdot \tfrac{30}{30+50} = 2.25\ A \\ i(-0) &= 6 - i_L(-0) = 3.75\ A \\ i(+0) &= 3 - i_L(+0) = 0.75\ A \\ i(\infty) &= 3 \cdot \tfrac{50}{30+50} = 1.875\ A \end{aligned} \qquad \text{(5 pont)}$$

Mivel elsőrendű a hálózat, ezért $i(t)$ alakja $i(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} + B, \quad t \geq 0.$

$$\begin{aligned} i(+0) &= A + B = 0.75\ A \\ i(\infty) &= B = 1.875\ A \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= -1.125\ A \\ B &= 1.875\ A \end{aligned}$$

Tehát $\underline{\underline{i(t) = \left(-1.125 \cdot e^{-\frac{t}{2ms}} + 1.875\right) A, \quad 0 \leq t}}$ (4 pont)

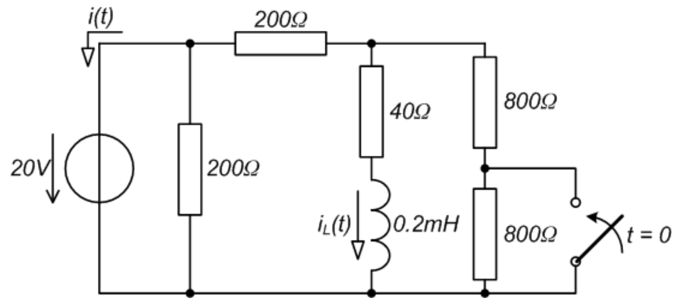
Az ellenállás teljesítményének időfüggvénye:

$$\begin{aligned} p_{30\Omega}(t) &= 30 \cdot i^2(t) = 30 \cdot \left(1.125^2 e^{-\frac{t}{1ms}} - 2 \cdot 1.875 \cdot 1.125 \cdot e^{-\frac{t}{2ms}} + 1.875^2\right) \\ &= 37.96 e^{-1000t} - 126.56 e^{-500t} + 105.47 \end{aligned} \qquad \text{(3 pont)}$$

Ebből az energia

$$\begin{aligned} W_{30\Omega} &= \int_0^1 p_{30\Omega}(t) dt = \\ &= 30 \cdot 1.125^2 \int_0^1 e^{-1000t} dt - 2 \cdot 1.875 \cdot 1.125 \cdot \int_0^1 e^{-500t} dt + 1.875^2 \int_0^1 dt = \\ &= \underline{\underline{105.46\ J}} \end{aligned} \qquad \text{(3 pont)}$$

7. (12 pont) Az ábrán látható hálózatban már beállt az állandósult állapot, amikor a $t = 0$ pillanatban zárjuk a kapcsolót. Határozza meg a feszültségforrás áramának időfüggvényét a $(0, \infty)$ időintervallumon!



Megoldás:

R_b, illetve T meghatározásához a kapcsolás utáni pillanatot vesszük figyelembe:

$$R_b = 40 + 800 \times 200 = 200\ \Omega, \quad T = \frac{L}{R_b} = 1\ \mu s$$

(3 pont)

A tekercs és az feszültségforrás áramának értéke $t = 0\pm$-ban, illetve $t \to \infty$-ben:

$$\begin{aligned}
i_L(\pm 0) &= 20 \cdot \tfrac{(800+800)\times 40}{(800+800)\times 40 + 200} \cdot \tfrac{1}{40} = 81.63\ mA \\
i(0-) &= \tfrac{-20}{200 \times (200 + 40 \times (800+800))} = -183.67\ mA \\
i(+0) &= \tfrac{-20}{200 \times (200+800)} - 81.63 \cdot 10^{-3} \cdot \tfrac{800}{800+200} = -185.3\ mA \\
i(\infty) &= \tfrac{-20}{200 \times (200 + 40 \times 800)} = -184\ mA
\end{aligned}$$

(5 pont)

Mivel elsőrendű a hálózat, ezért $i(t)$ alakja $i(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} + B, \quad t \geq 0$.

$$\begin{aligned}
i(+0) &= A + B = -185.3\ mA \\
i(\infty) &= B = -184\ mA
\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}
A &= -1.3\ mA \\
B &= -184\ mA
\end{aligned}$$

Tehát $\underline{\underline{i(t) = \left(-1.3 \cdot e^{-\frac{t}{1\mu s}} - 184\right) mA, \quad t \geq 0}}$

(4 pont)

8. (10 pont) Határozza meg az alábbi lineáris differenciálegyenletnek a kezdeti feltételt kielégítő megoldását!

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$\det(\lambda \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = 0$ -ból a sajátértékek $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 3$, (2 pont)

$(\lambda \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})\underline{v} = \underline{0}$ -ból a sajátvektorok pedig

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(4 pont)

A megoldás általános alakja:

$$\underline{x}(t) = c_1 \cdot \underline{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \underline{v}_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = \frac{3}{2}$ és $c_2 = \frac{1}{2}$, azaz

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{3t} \\ \\ \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} \end{bmatrix}}}$$

(4 pont)