Név: ....

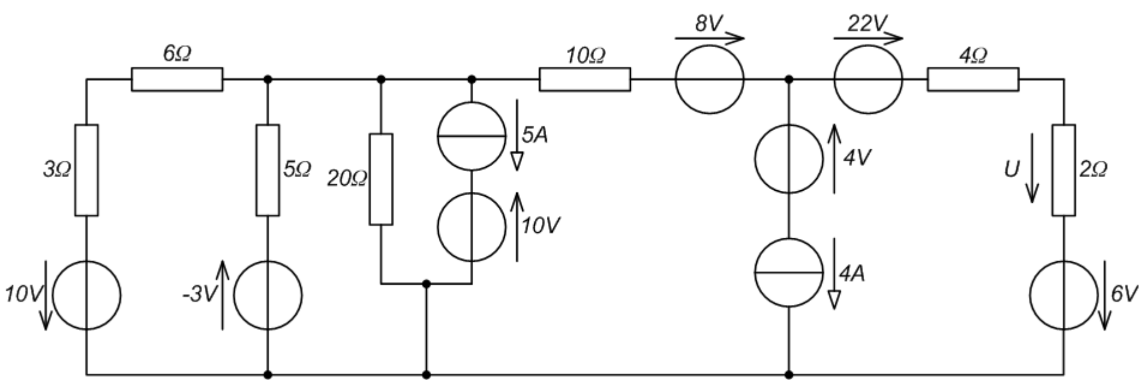
Neptun kód: ....

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	$\sum$
12	15	10	10	15	13	12	13	100

Elektromosságtan

Zárthelyi dolgozat, 2009 május 13.
munkaidő: 160 perc

1. (12 pont) Határozza meg a 2Ω-os ellenállás U feszültségét az adott referenciában a szuperpozíció tétele segítségével!



Megoldás:

$$U = 10V\frac{5\times20\times(10+4+2)}{5\times20\times(10+4+2)+3+6}\cdot\frac{2}{10+4+2} + 3V\frac{(6+3)\times20\times(10+4+2)}{5+(6+3)\times20\times(10+4+2)}\cdot\frac{2}{10+4+2} -$$

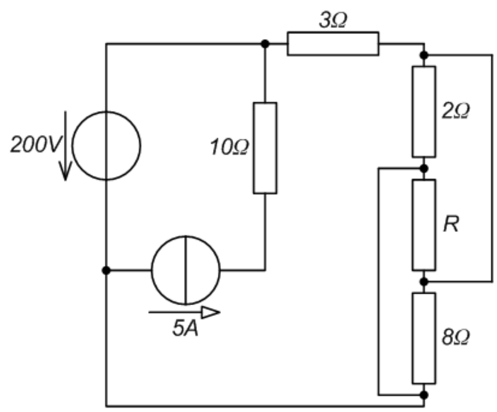
$$-5A\frac{(3+6)\times5\times20}{(3+6)\times5\times20+4+2+10}\cdot 2\Omega - 8V\frac{2}{2+4+10+20\times5\times(6+3)} - 4A\frac{(3+6)\times5\times20+10}{(3+6)\times5\times20+10+4+2}\cdot 2\Omega$$

$$-22V\frac{2}{2+4+10+20\times5\times(6+3)} - 6V\frac{2}{2+4+10+20\times5\times(6+3)} = \qquad \text{(6 pont)}$$

$$= 10\cdot\frac{3.2}{3.2+3+6}\cdot\frac{2}{16} + 3\cdot\frac{4.47}{5+4.47}\cdot\frac{2}{16} - 5\cdot\frac{2.77}{2.77+16}\cdot 2 - 8\cdot\frac{2}{2.77+16} - 4\cdot\frac{2.77}{2.77+16}\cdot 2 -$$

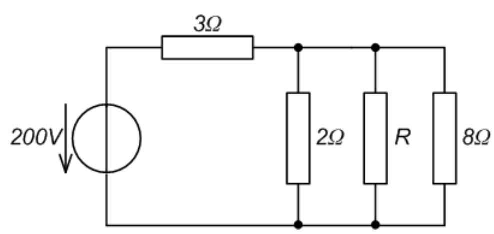
$$-22\cdot\frac{2}{16+2.77} - 6\cdot\frac{2}{16+2.77} = \underline{\underline{-5.98V}} \qquad \text{(6 pont)}$$

2. (15 pont) Határozza meg R értékét úgy, hogy rajta a maximális teljesítmény 85%-a alakuljon hővé!



Megoldás:

Az 10Ω-os ellenállás és az áramforrás elhagyható, átrajzolva a hálózatot:



Az R-re vonatkozó helyettesítő feszültséggenerátor forrásfeszültsége
$U_V = 200V\frac{2\times 8}{3+2\times 8} = 69.56V$, a belső ellenállása pedig $R_b = 2\times 8\times 3 = 1.04\Omega$. (5 pont)

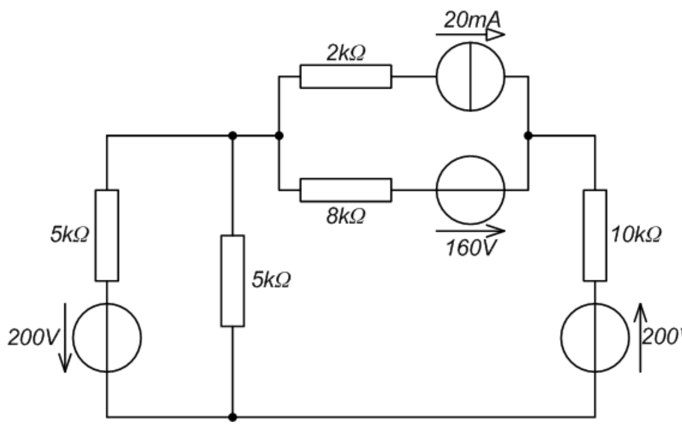
$$P_{max} = \frac{U_V^2}{4R_b} = 1163.12W \quad \Rightarrow \quad P = 0.85P_{max} = 988.65W$$

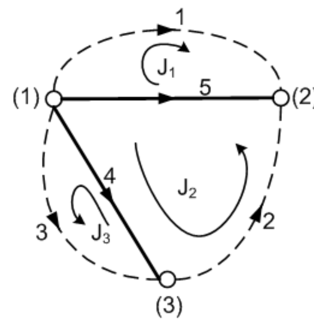
Másrészt

$$P = U_V^2\frac{R}{(R+R_b)^2}, \quad \text{ebből: } P\cdot R^2 + (2R_bP - U_V^2)\cdot R + P\cdot R_b^2 = 0$$ (5 pont)

A másodfokú egyenlet megoldásai: $\underline{\underline{R_1 = 2.35\Omega}}$, és $\underline{\underline{R_2 = 0.45\Omega}}$. (5 pont)

3. (10 pont) A hurokáramok módszere alkalmazásával határozza meg az ágáramok előjeles értékét a gráfon jelölt referenciában!





Megoldás:

Három darab hurokegyenlet plusz egy:

$$
\begin{array}{lrcl}
I: & J_1(2+8)+J_2(8)+J_3(0) & = & 160-U_{20mA} \\
II: & J_1(8)+J_2(8+5+10)+J_3(-5) & = & -200+160 \\
III: & J_1(0)+J_2(-5)+J_3(5+5) & = & -200 \\
 & J_1 & = & 20
\end{array}
$$

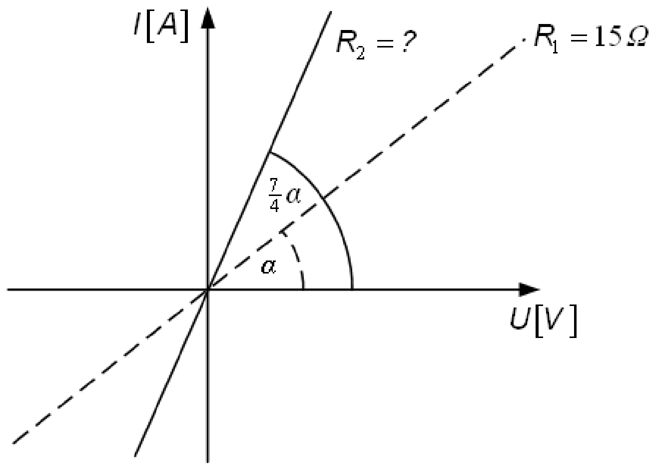
(6 pont)

Ebből $J_1 = 20\ mA$, $J_2 = -14.63\ mA$, $J_3 = -27.32\ mA$, $U_{20\ mA} = 77.07\ V$, és az ágáramok:

$$
\begin{array}{rcl}
\underline{\underline{I_1}} & = & J_1 = \underline{\underline{20\ mA}} \\
\underline{\underline{I_2}} & = & J_2 = \underline{\underline{-14.63\ mA}} \\
\underline{\underline{I_3}} & = & J_3 = \underline{\underline{-27.32\ mA}} \\
\underline{\underline{I_4}} & = & J_2 - J_3 = \underline{\underline{12.69\ mA}} \\
\underline{\underline{I_5}} & = & -J_1 - J_2 = \underline{\underline{-5.37\ mA}}
\end{array}
$$

(4 pont)

4. (10 pont) Az ábrán két lineáris ellenállás karakterisztikája látható. Határozza meg R_2 értékét, ha az abszcissza tengelyen 2 cm 500 V-nak, az ordinátán 1.5 cm 32 A-nek felel meg!



Megoldás:

Az abszcisszán 1 cm 250 V-nak, az ordinátán 1 cm 21.33 mA-nek felel meg.

$$15\ \Omega = \frac{U_{1\ cm}}{I_{x\ cm}} = \frac{250}{I_{x\ cm}} \quad \Rightarrow \quad I_{x\ cm} = \frac{250\ V}{15\ \Omega} = 16.67\ A$$

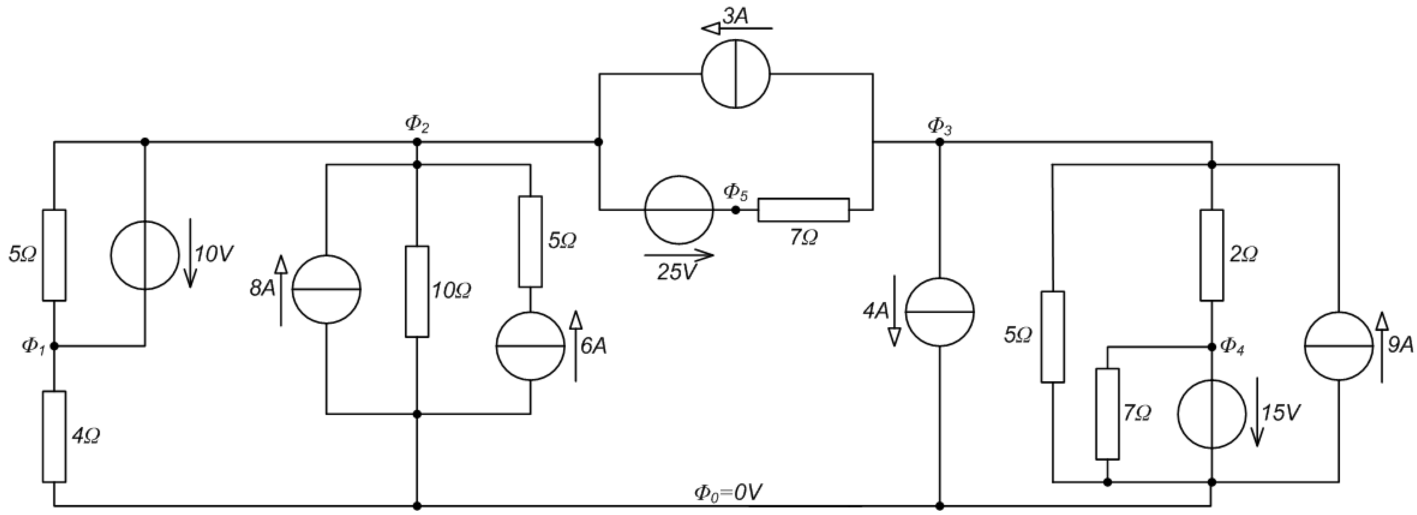
Ebből $x = 0.78\ cm$, $\tan(\alpha) = \frac{I}{U} = 0.78$, valamint $\alpha = \arctan(0.78) = 38°$ (5 pont)

$$\frac{7}{4}\alpha = 66.51° \quad \Rightarrow \quad \tan(66.51°) = \frac{x\ cm}{1\ cm} \quad \Rightarrow \quad x = 2.3\ cm$$

A nevezőben levő 1 cm 250 V-nak, a számlálóban levő 2.3 cm pedig $I = 2.3 \cdot 21.33 = 49.08$ A-nek felel meg. Ebből az R_2 ellenállás értéke:

$$\underline{\underline{R_2}} = \frac{U}{I} = \frac{250\ V}{49.08\ A} = \underline{\underline{5.09\ \Omega}} \qquad \text{(5 pont)}$$

5. (15 pont) A csomóponti potenciálok módszere alkalmazásával határozza meg a bejelölt potenciálok ($\Phi_1, \ldots, \Phi_5$) értékét!



Megoldás:

A feszültségforrások áramai legyenek I_{10V}, I_{25V}, és I_{15V}. Felírható 5 csomóponti törvény és 3 további egyenlet a feszültségforrásokat tartalmazó ágakra:

$$
\begin{array}{lrcl}
I: & \frac{\Phi_1-\Phi_2}{5} - I_{10V} + \frac{\Phi_1}{4} & = & 0 \\
II: & \frac{\Phi_2-\Phi_1}{5} + I_{10V} - 8 + \frac{\Phi_2}{10} - 6 + I_{25V} - 3 & = & 0 \\
III: & 3 + \frac{\Phi_3-\Phi_5}{7} + 4 + \frac{\Phi_3}{5} + \frac{\Phi_3-\Phi_4}{2} - 9 & = & 0 \\
IV: & \frac{\Phi_4-\Phi_3}{2} + \frac{\Phi_4}{7} + I_{15V} & = & 0 \\
V: & -I_{25V} + \frac{\Phi_5-\Phi_3}{7} & = & 0 \\
 & \Phi_1 & = & \Phi_2 - 10 \\
 & \Phi_5 & = & \Phi_2 - 25 \\
 & \Phi_4 & = & 15
\end{array}
$$

(5 pont)

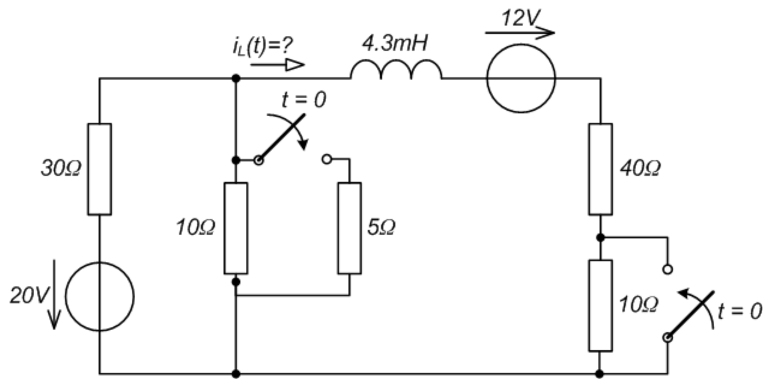
Φ_1, Φ_4 és Φ_5 behelyettesíthető, ezután I-ből kifejezhető I_{10V}, és behelyettesíthető II-be, illetve V-ből kifejezhető I_{25V} és behelyettesíthető II-be. II és III egy kétismeretlenes egyenletrendszer (Φ_2, Φ_3)-ban. (5 pont)

Ebből:

$$\underline{\underline{\Phi_1 = 41.37V}}, \quad \underline{\underline{\Phi_2 = 51.37V}}, \quad \underline{\underline{\Phi_3 = 15.74V}}, \quad \underline{\underline{\Phi_4 = 15V}}, \quad \underline{\underline{\Phi_5 = 26.37V}}$$

(5 pont)

6. (13 pont) Az ábrán látható hálózatban már beállt az állandósult állapot, amikor a $t = 0$ pillanatban zárjuk mindkét kapcsolót. Határozza meg a tekercs áramának időfüggvényét a $(0, \infty)$ időintervallumon!



Megoldás:

R_b, illetve T meghatározásához a kapcsolás utáni pillanatot vesszük figyelembe:

$$R_b = 30 \times 10 \times 5 + 40 = 43\ \Omega, \quad T = \frac{L}{R_b} = 100\mu s \qquad \text{(3 pont)}$$

A tekercs áramának kezdeti/kiindulási értéke, illetve a $t \to \infty$-ben felvett értéke:

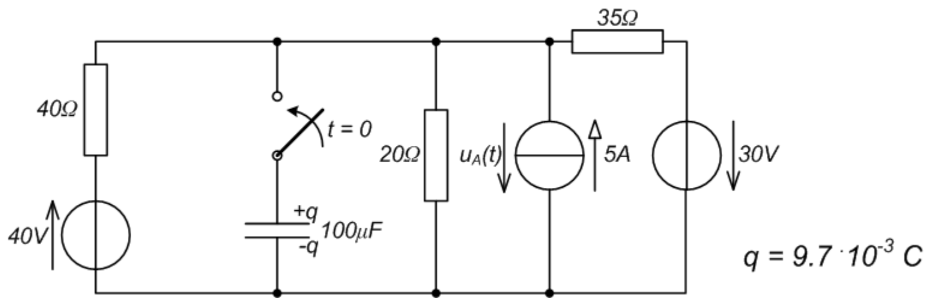
$$\begin{aligned} i_L(-0) = i_L(+0) &= 20 \cdot \tfrac{10\times(40+10)}{30+10\times(40+10)} \cdot \tfrac{1}{40+10} - 12 \cdot \tfrac{1}{30\times10+40+10} = -122\ mA \\ i_L(\infty) &= 20 \cdot \tfrac{10\times5\times40}{30+10\times5\times40} \cdot \tfrac{1}{40} - 12 \cdot \tfrac{1}{30\times10\times5+40} = -236\ mA \end{aligned} \qquad \text{(5 pont)}$$

Mivel elsőrendű a hálózat, ezért $i_L(t)$ alakja $i_L(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} + B, \quad t \geq 0$.

$$\begin{aligned} i_L(0) &= A + B = -122\ mA \\ i_L(\infty) &= B = -236\ mA \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 114\ mA \\ B &= -236\ mA \end{aligned}$$

Tehát $\underline{\underline{i_L(t) = \left(114 \cdot e^{-\frac{t}{100\mu s}} - 236\right) mA, \quad t \geq 0}}$ (5 pont)

7. (12 pont) Az ábrán látható hálózatban már beállt az állandósult állapot, amikor a $t = 0$ pillanatban zárjuk a kapcsolót. Határozza meg az áramforrás feszültségének időfüggvényét a $(0, \infty)$ időintervallumon!



Megoldás:

A töltésből kiszámolható a kondenzátor feszültsége:

$$u_C(\pm 0) = \frac{q}{C} = 97V$$

R_b, illetve T meghatározásához a kapcsolás utáni pillanatot vesszük figyelembe:

$$R_b = 40 \times 20 \times 35 = 9.65\ \Omega, \quad T = C \cdot R_b = 965\mu s \qquad \text{(4 pont)}$$

Az áramforrás feszültségének kezdeti/kiindulási értéke, illetve a $t \to \infty$-ben felvett értéke:

$$\begin{aligned} u_A(-0) &= -40 \cdot \tfrac{20\times35}{40+20\times35} + 30 \cdot \tfrac{20\times40}{35+20\times40} + 5 \cdot (35 \times 20 \times 40) = 46.89\ V \\ u_A(+0) &= u_C(\pm 0) = 97\ V \\ u_A(\infty) &= u_A(-0) = 46.89\ V \end{aligned} \qquad \text{(4 pont)}$$

Mivel elsőrendű a hálózat, ezért $u_A(t)$ alakja $u_A(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} + B, \quad t \geq 0$.

$$\begin{aligned} u_A(+0) &= A + B = 97\ V \\ u_A(\infty) &= B = 46.89\ V \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 50.11\ V \\ B &= 46.89\ V \end{aligned}$$

Tehát $\underline{\underline{u_A(t) = \left(50.11 \cdot e^{-\frac{t}{965\mu s}} + 46.89\right) V, \quad t \geq 0}}$ (4 pont)

8. (13 pont) Határozza meg az alábbi lineáris differenciálegyenletnek a kezdeti feltételt kielégítő megoldását!

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

A sajátértékek $\lambda_1 = -2$, és $\lambda_2 = -4$, (3 pont)

a sajátvektorok pedig

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(5 pont)

A megoldás általános alakja:

$$\underline{x}(t) = c_1 \cdot \underline{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \underline{v}_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 7.5$ és $c_2 = -6.5$, azaz

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot e^{-2t} \\ 7.5 \cdot e^{-2t} - 6.5 \cdot e^{-4t} \end{bmatrix}}}$$

(5 pont)