Név: ....

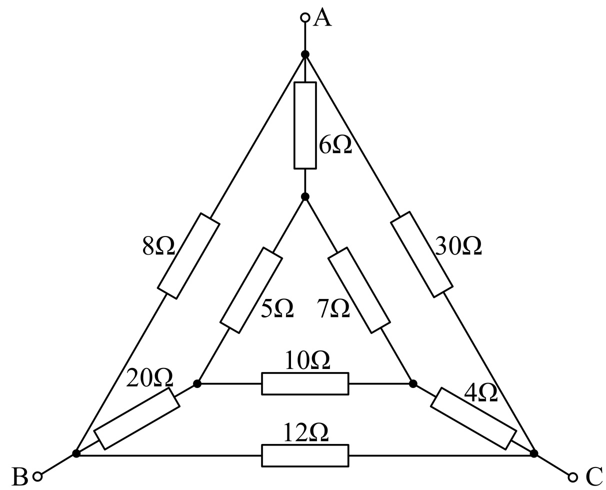
Neptun kód: ....

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	$\sum$
11	13	12	12	14	13	12	13	100

Elektromosságtan

Vizsgazárthelyi dolgozat, 2009. december 22.
munkaidő: 160 perc

1. (11 pont) Határozza meg az AB, BC, és az AC kapcsok között mérhető R_{AB}, R_{BC}, és R_{AC} ellenállások értékét!



Megoldás:

A belső háromszög átalakítása csillaggá: $R_\Delta = 5 + 7 + 10 = 22\ \Omega$

$$R_{20} = \frac{5 \cdot 10}{22} = 2.27\ \Omega, \quad R_{30} = \frac{7 \cdot 10}{22} = 3.18\ \Omega, \quad R_{10} = \frac{5 \cdot 7}{22} = 1.59\ \Omega \qquad \text{(4 pont)}$$

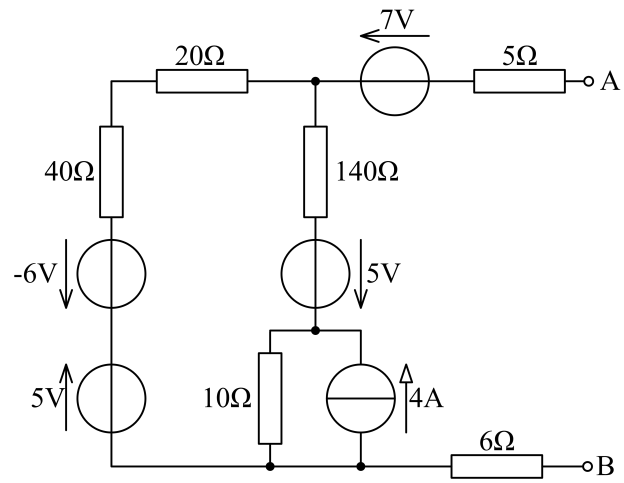
A kapott csillagot visszaalakítva háromszöggé: $R_Y = 3.166\ \Omega$

$$R_{12} = 53.4\ \Omega, \quad R_{23} = 50.53\ \Omega, \quad R_{13} = 17.22\ \Omega \qquad \text{(4 pont)}$$

Ebből a keresett ellenállások:

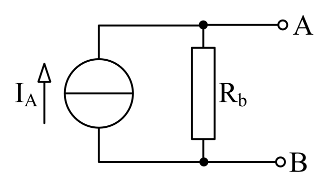
$$\begin{aligned} R_{AB} &= 6.96 \times (10.94 + 9.7) = \underline{\underline{5.203\ \Omega}} \\ R_{AC} &= 10.94 \times (6.96 + 9.7) = \underline{\underline{6.602\ \Omega}} \\ R_{BC} &= 9.7 \times (6.96 + 10.94) = \underline{\underline{6.289\ \Omega}} \end{aligned} \qquad \text{(3 pont)}$$

2. (13 pont) Helyettesítse az ábrán látható AB kétpólust Norton-ekvivalensével!



Megoldás:

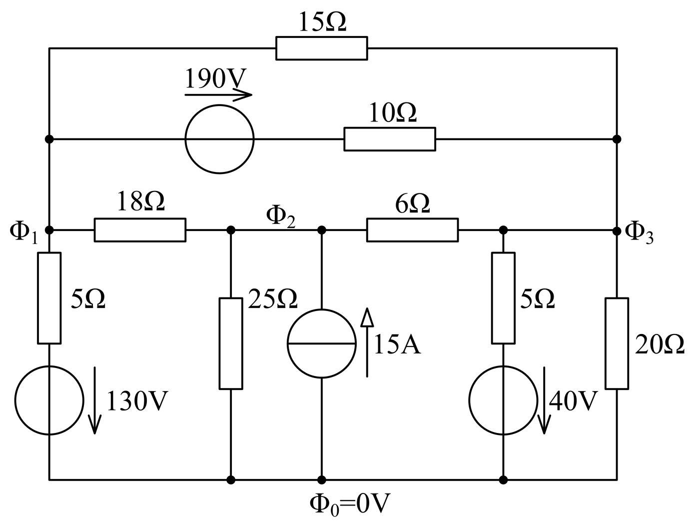
Áramgenerátorral kell helyettesíteni. Ehhez a kétpólus belső ellenállására és a rövidzárási áramára van szükség.



$$R_b = 5 + (40+20) \times (140+10) + 6 = \underline{\underline{53.86\ \Omega}} \qquad \text{(5 pont)}$$

$$\begin{aligned} I_A \;=\; & (-6-5) \cdot \tfrac{(140+10)\times(5+6)}{(140+10)\times(5+6)+20+40} \cdot \tfrac{1}{5+6} \\ & +5 \cdot \tfrac{(20+40)\times(5+6)}{(20+40)\times(5+6)+140+10} \cdot \tfrac{1}{5+6} \\ & +4 \cdot \tfrac{10}{10+140+(20+40)\times(5+6)} \cdot \tfrac{20+40}{20+40+5+6} \\ & +7 \cdot \tfrac{1}{5+6+(20+40)\times(140+10)} = -0.146 + 0.0265 + 0.212 + 0.13 = \\ =\; & \underline{\underline{222.5\ \text{mA}}} \qquad \text{(8 pont)} \end{aligned}$$

3. (12 pont) A *csomóponti potenciálok módszere* alkalmazásával határozza meg az áramforrás teljesítményének előjeles értékét termelői referenciában!



Megoldás:

Három darab csomóponti törvény:

$$
\begin{aligned}
I: & \quad \tfrac{\Phi_1-130}{5} + \tfrac{\Phi_1-\Phi_2}{18} + \tfrac{\Phi_1-\Phi_3-190}{10} \tfrac{\Phi_1-\Phi_3}{15} &= 0 \\
II: & \quad \tfrac{\Phi_2-\Phi_1}{18} + \tfrac{\Phi_2}{25} - 15 + \tfrac{\Phi_2-\Phi_3}{6} &= 0 \\
III: & \quad \tfrac{\Phi_3-\Phi_1}{15} + \tfrac{\Phi_3-\Phi_1+190}{10} + \tfrac{\Phi_3-\Phi_2}{6} + \tfrac{\Phi_3-40}{5} + \tfrac{\Phi_3}{20} &= 0
\end{aligned}
\qquad \text{(4 pont)}
$$

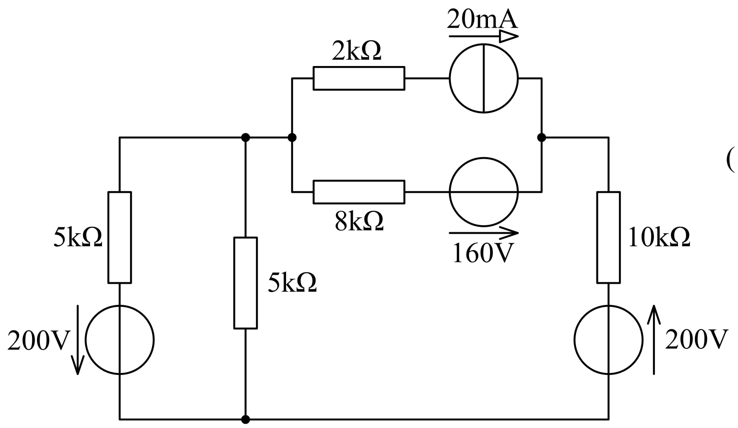
Ebből a potenciálok értékei

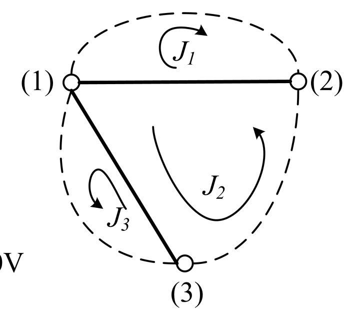
$$\Phi_1 = 146.33 \text{ V}, \quad \Phi_2 = 125.6 \text{ V}, \quad \Phi_3 = 58.83 \text{ V}, \qquad \text{(4 pont)}$$

Az áramforrás feszültsége $U = \Phi_2 - \Phi_0 = 125.6$ V, a teljesítménye pedig

$$\underline{\underline{P = U \cdot 15 = 1884 \text{ W}}} \qquad \text{(4 pont)}$$

4. (12 pont) A *hurokáramok módszere* alkalmazásával határozza meg az ágáramok előjeles értékét a gráfon jelölt referenciában!





Megoldás:

Három darab hurokegyenlet plusz egy:

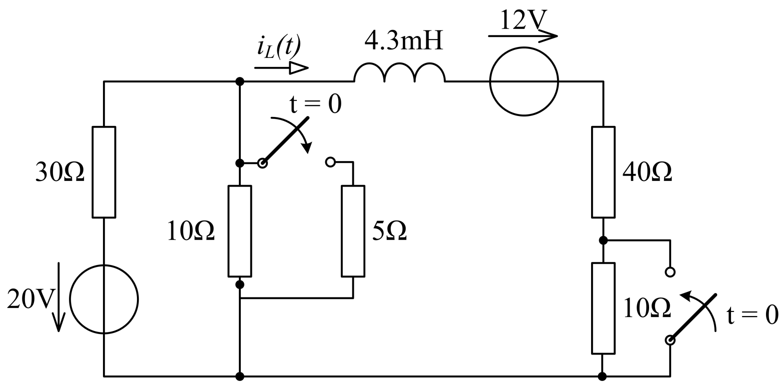
$$\begin{aligned}
I: \quad & J_1(2+8)+J_2(8)+J_3(0) &=& \; 160-U_{20mA} \\
II: \quad & J_1(8)+J_2(8+5+10)+J_3(-5) &=& \; -200+160 \\
III: \quad & J_1(0)+J_2(-5)+J_3(5+5) &=& \; -200 \\
& J_1 &=& \; 0.02 \qquad \text{(4 pont)}
\end{aligned}$$

Ebből $J_1 = 20$ mA, $J_2 = -14.63$ mA, $J_3 = -27.32$ mA, $U_{20\ mA} = 77.07$ V, és az ágáramok: (4 pont)

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{I_1}} &= J_1 = \underline{\underline{20 \text{ mA}}} \\
\underline{\underline{I_2}} &= J_2 = \underline{\underline{-14.63 \text{ mA}}} \\
\underline{\underline{I_3}} &= J_3 = \underline{\underline{-27.32 \text{ mA}}} \\
\underline{\underline{I_4}} &= J_2 - J_3 = \underline{\underline{12.69 \text{ mA}}} \\
\underline{\underline{I_5}} &= -J_1 - J_2 = \underline{\underline{-5.37 \text{ mA}}}
\end{aligned}$$

(4 pont)

5. (14 pont) Az ábrán látható hálózatban már beállt az állandósult állapot, amikor a $t = 0$ pillanatban zárjuk mindkét kapcsolót. Határozza meg a tekercs áramának időfüggvényét a $(0, \infty)$ időintervallumon!



Megoldás:

R_b, illetve T meghatározásához a kapcsolás utáni pillanatot vesszük figyelembe:

$$R_b = 30 \times 10 \times 5 + 40 = 43\ \Omega, \quad T = \frac{L}{R_b} = 100\mu s \tag{3 pont}$$

A tekercs áramának kezdeti/kiindulási értéke, illetve a $t \to \infty$-ben felvett értéke:

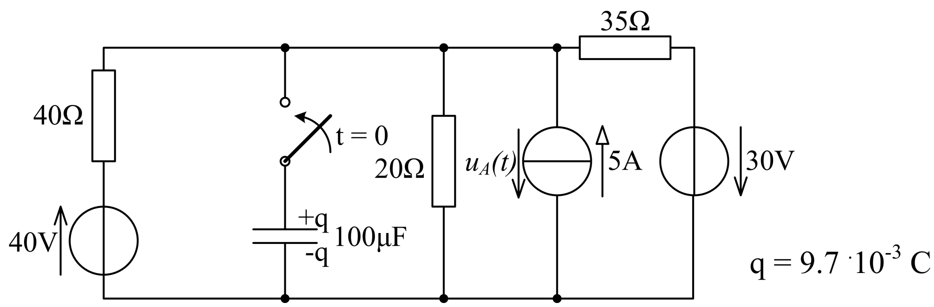
$$\begin{aligned} i_L(\pm 0) &= 20 \cdot \tfrac{10\times(40+10)}{30+10\times(40+10)} \cdot \tfrac{1}{40+10} - 12 \cdot \tfrac{1}{30\times 10+40+10} = -122\ mA \\ i_L(\infty) &= 20 \cdot \tfrac{10\times 5\times 40}{30+10\times 5\times 40} \cdot \tfrac{1}{40} - 12 \cdot \tfrac{1}{30\times 10\times 5+40} = -236\ mA \end{aligned} \tag{5 pont}$$

Mivel elsőrendű a hálózat, ezért $i_L(t)$ alakja $i_L(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} + B, \quad t \geq 0$.

$$\begin{aligned} i_L(0) &= A + B = -122\ mA \\ i_L(\infty) &= B = -236\ mA \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 114\ mA \\ B &= -236\ mA \end{aligned} \tag{3 pont}$$

Tehát $\underline{\underline{i_L(t) = \left(114 \cdot e^{-\frac{t}{100\mu s}} - 236\right) mA, \quad t \geq 0}}$ (3 pont)

6. (13 pont) Az ábrán látható hálózatban már beállt az állandósult állapot, amikor a $t = 0$ pillanatban zárjuk a kapcsolót. Határozza meg az áramforrás feszültségének időfüggvényét a $(0, \infty)$ időintervallumon!



Megoldás:

A töltésből kiszámolható a kondenzátor feszültsége:

$$u_C(\pm 0) = \frac{q}{C} = 97 \text{ V}$$

R_b, illetve T meghatározásához a kapcsolás utáni pillanatot vesszük figyelembe:

$$R_b = 40 \times 20 \times 35 = 9.65 \ \Omega, \quad T = C \cdot R_b = 965 \mu\text{s} \qquad \text{(4 pont)}$$

Az áramforrás feszültségének kezdeti/kiindulási értéke, illetve a $t \to \infty$-ben felvett értéke:

$$\begin{aligned} u_A(-0) &= -40 \cdot \tfrac{20\times35}{40+20\times35} + 30 \cdot \tfrac{20\times40}{35+20\times40} + 5 \cdot (35 \times 20 \times 40) = 46.89 \text{ V} \\ u_A(+0) &= u_C(\pm 0) = 97 \text{ V} \\ u_A(\infty) &= u_A(-0) = 46.89 \text{ V} \end{aligned} \qquad \text{(5 pont)}$$

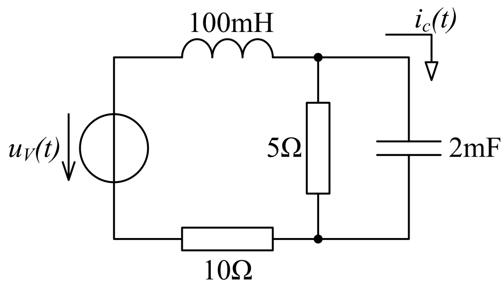
Mivel elsőrendű a hálózat, ezért $u_A(t)$ alakja $u_A(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} + B, \quad t \geq 0.$

$$\begin{aligned} u_A(+0) &= A + B = 97 \text{ V} \\ u_A(\infty) &= B = 46.89 \text{ V} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 50.11 \text{ V} \\ B &= 46.89 \text{ V} \end{aligned}$$

Tehát $\underline{\underline{u_A(t) = \left(50.11 \cdot e^{-\frac{t}{965\mu s}} + 46.89\right) \text{ V}, \quad t \geq 0}}$

(4 pont)

7. (12 pont) *Komplex impedanciákkal* számolva határozza meg a bejelölt $i_c(t)$ áram valós pillanatértékét!



$$u_V(t) = 60\sqrt{2}\sin(\omega t + \tfrac{\pi}{2})\ \mathrm{V}$$
$$\omega = 100\ \mathrm{rad/s}$$

Megoldás:

A forrásfeszültség komplex effektív értéke, illetve az eredő impedancia

$$\overline{U}_V = 60e^{\mathrm{j}90^\circ}\ \mathrm{V}$$
$$\overline{Z} = \mathrm{j}10 + (5 \times (-\mathrm{j}5)) + 10 = 12.5 + \mathrm{j}7.5 = \sqrt{12.5^2 + 7.5^2} \cdot e^{\mathrm{j}\ \mathrm{arctg}(\frac{7.5}{12.5})^\circ} = 14.58e^{\mathrm{j}30.96^\circ}\Omega$$

(4 pont)

Ebből a forrás árama, illetve a kondenzátor árama

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}_V}{\overline{Z}} = \frac{60e^{\mathrm{j}90^\circ}}{14.58e^{\mathrm{j}30.96^\circ}} = 4.12e^{\mathrm{j}59.1^\circ}\ \mathrm{A}$$

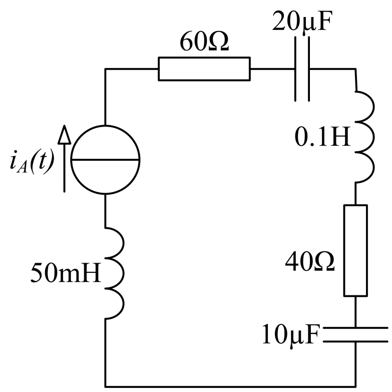
$$\overline{I}_c = \overline{I} \cdot \frac{\overline{Z}_{5\Omega}}{\overline{Z}_{5\Omega} + \overline{Z}_C} = 4.12e^{\mathrm{j}59.1^\circ} \cdot \frac{5}{5 - \mathrm{j}5} = 2.91e^{\mathrm{j}104.1^\circ}\ \mathrm{A}$$

(5 pont)

Ez azt jelenti, hogy $\underline{\underline{i_c(t) = 2.91\sqrt{2}\sin(\omega t + 104.1^\circ)\ \mathrm{A}}}$.

(3 pont)

8. (13 pont) Határozza meg az áramforrás komplex látszólagos, valamint hatásos és meddő teljesítményét termelői referenciában!



$$i_A(t) = 100\sqrt{2}\sin(\omega t + \tfrac{\pi}{4})\ \text{A}$$

$$\omega = 10^3\ \text{rad/s}$$

Megoldás:

A forrásáram komplex effektív értéke

$$\overline{I}_A = 100e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\ \text{A}$$

Az áramforrás terhelésének eredő impedanciája

$$\overline{Z} = 60 - \mathrm{j}50 + \mathrm{j}100 + 40 - \mathrm{j}100 + \mathrm{j}50 = 100\ \Omega \qquad \text{(3 pont)}$$

A forrás feszültségének komplex effektív értéke

$$\overline{U}_A = \overline{I}_A \cdot \overline{Z} = 100e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} \cdot 100 = 10e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\ \text{kV} \qquad \text{(3 pont)}$$

Ebből a forrás komplex látszólagos teljesítménye

$$\underline{\underline{\overline{S}_A}} = \overline{U}_A \cdot \overline{I}_A^* = 10000e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} \cdot 100e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{10^6 e^{\mathrm{j}0}\ \text{VA}}} \qquad \text{(4 pont)}$$

A hatásos és meddő teljesítmény pedig:

$$\underline{\underline{P_A = \mathrm{Re}(\overline{S}_A) = 1\ \text{MW}}}, \qquad \underline{\underline{Q_A = \mathrm{Im}(\overline{S}_A) = 0\ \text{VAr}}} \qquad \text{(3 pont)}$$