Név: ....

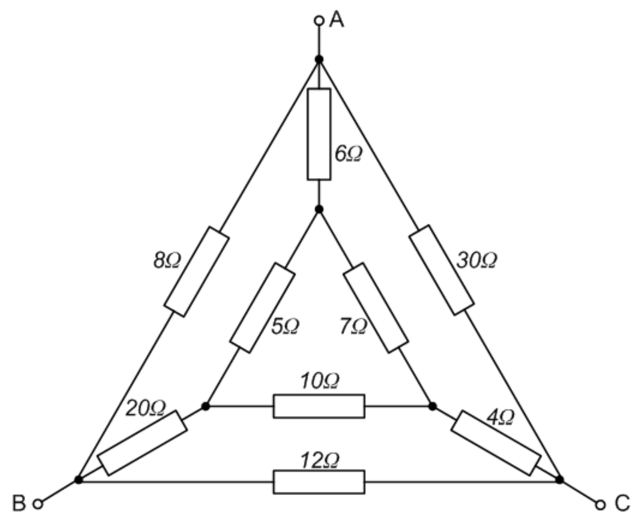
Neptun kód: ....

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	$\sum$
10	12	10	15	11	15	14	13	100

Elektromosságtan

Pótzárthelyi dolgozat, 2009. május 20.
munkaidő: 160 perc

1. (10 pont) Határozza meg az AB, BC, és az AC kapcsok között mérhető R_{AB}, R_{BC}, és R_{AC} ellenállások értékét!



Megoldás:

A belső háromszög átalakítása csillaggá: $R_\Delta = 5 + 7 + 10 = 22\ \Omega$

$$R_{20} = \frac{5 \cdot 10}{22} = 2.27\ \Omega, \quad R_{30} = \frac{7 \cdot 10}{22} = 3.18\ \Omega, \quad R_{10} = \frac{5 \cdot 7}{22} = 1.59\ \Omega$$

(3 pont)

A kapott csillagot visszaalakítva háromszöggé: $R_Y = 3.166\ \Omega$

$$R_{12} = 53.4\ \Omega, \quad R_{23} = 50.53\ \Omega, \quad R_{13} = 17.22\ \Omega$$

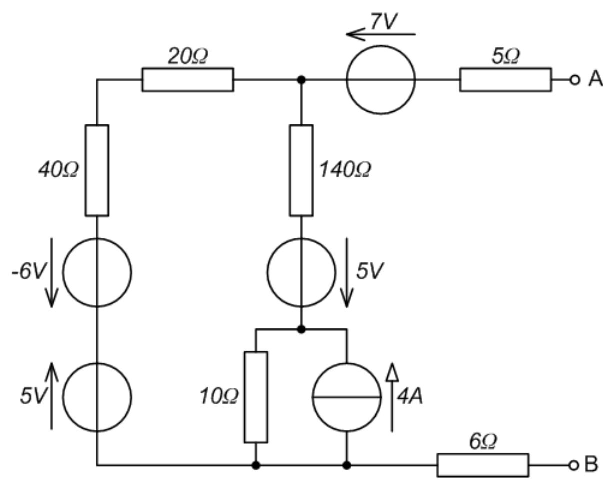
(3 pont)

Ebből a keresett ellenállások:

$$\begin{aligned} R_{AB} &= 6.96 \times (10.94 + 9.7) = \underline{\underline{5.203\ \Omega}} \\ R_{AC} &= 10.94 \times (6.96 + 9.7) = \underline{\underline{6.602\ \Omega}} \\ R_{BC} &= 9.7 \times (6.96 + 10.94) = \underline{\underline{6.289\ \Omega}} \end{aligned}$$

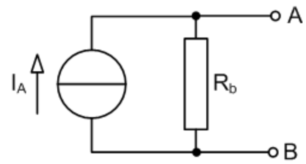
(4 pont)

2. (12 pont) Helyettesítse az ábrán látható AB kétpólust Norton-ekvivalensével!



Megoldás:

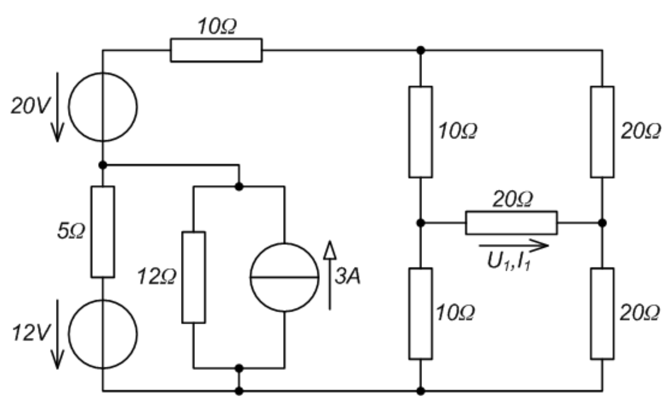
Áramgenerátorral kell helyettesíteni. Ehhez a kétpólus belső ellenállására és a rövidzárási áramára van szükség.



$$R_b = 5 + (40+20) \times (140+10) + 6 = \underline{\underline{53.86\ \Omega}} \qquad \text{(4 pont)}$$

$$\begin{aligned} I_A \quad = \quad & (-6-5) \cdot \tfrac{(140+10)\times(5+6)}{(140+10)\times(5+6)+20+40} \cdot \tfrac{1}{5+6} \\ & +5 \cdot \tfrac{(20+40)\times(5+6)}{(20+40)\times(5+6)+140+10} \cdot \tfrac{1}{5+6} \\ & +4 \cdot \tfrac{10}{10+140+(20+40)\times(5+6)} \cdot \tfrac{20+40}{20+40+5+6} \\ & +7 \cdot \tfrac{1}{5+6+(20+40)\times(140+10)} = -0.146 + 0.0265 + 0.212 + 0.13 = \\ = \quad & \underline{\underline{222.5\ mA}} \end{aligned} \qquad \text{(8 pont)}$$

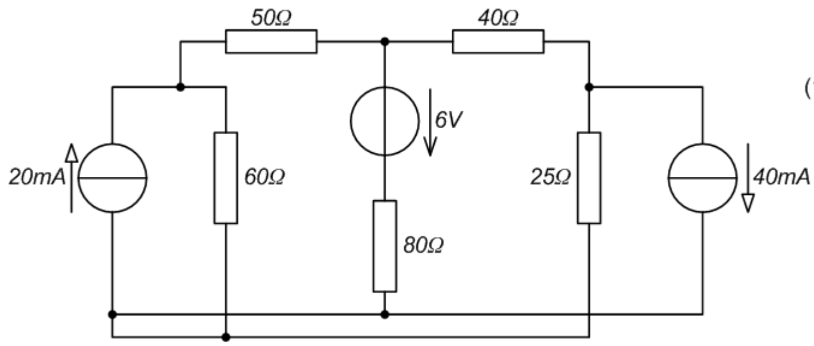
3. (10 pont) Határozza meg az I_1 áram és U_1 feszültség előjeles értékét!

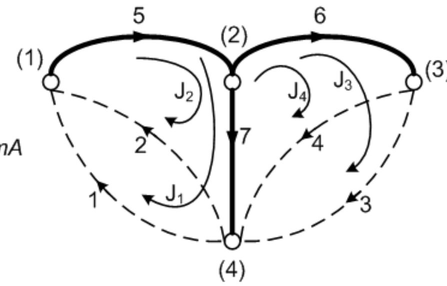


Megoldás:

Mivel a hálózat jobb oldalán az ellenállások egy kiegyenlített hidat alkotnak ($10 \cdot 20 = 10 \cdot 20$), ezért $\underline{\underline{I_1 = 0\ A}}$ és $\underline{\underline{U_1 = 0\ V}}$. (10 pont)

4. (15 pont) A hurokáramok módszere alkalmazásával határozza meg az ágáramok előjeles értékét a gráfon jelölt referenciában!





Megoldás:

Négy darab hurokegyenlet plusz kettő:

$$
\begin{aligned}
I: \quad & J_1(80+50)+J_2(80+50)+J_3(-80)+J_4(-80) &= -6+U_{20mA} \\
II: \quad & J_1(80+50)+J_2(80+50+60)+J_3(-80)+J_4(-80) &= -6 \\
III: \quad & J_1(-80)+J_2(-80)+J_3(80+40)+J_4(80+40) &= 6+U_{40mA} \\
IV: \quad & J_1(-80)+J_2(-80)+J_3(80+40)+J_4((80+40+25) &= 6 \\
& J_1 &= 0.02 \\
& J_3 &= 0.04
\end{aligned}
$$

(5 pont)

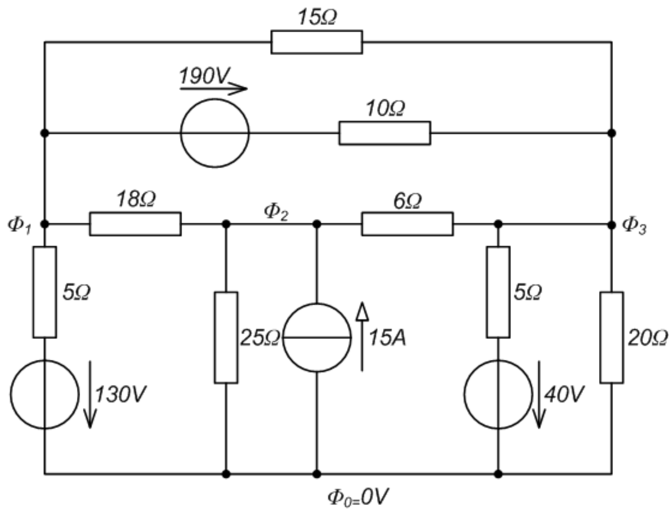
J_1 és J_3 behelyettesíthető, II és IV egy kétismeretlenes egyenletrendszer (J_2, J_4)-ben. Ebből $J_1 = 20\ mA$, $J_2 = -26\ mA$, $J_3 = 40\ mA$, $J_4 = 4.7\ mA$, és az ágáramok:

(5 pont)

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{I_1}} &= J_1 = \underline{\underline{20\ mA}} \\
\underline{\underline{I_2}} &= J_2 = \underline{\underline{-26\ mA}} \\
\underline{\underline{I_3}} &= J_3 = \underline{\underline{40\ mA}} \\
\underline{\underline{I_4}} &= J_4 = \underline{\underline{4.7\ mA}} \\
\underline{\underline{I_5}} &= J_1 + J_2 = \underline{\underline{-6\ mA}} \\
\underline{\underline{I_6}} &= J_3 + J_4 = \underline{\underline{44.7\ mA}} \\
\underline{\underline{I_7}} &= J_1 + J_2 - J_3 - J_4 = \underline{\underline{-50.7\ mA}}
\end{aligned}
$$

(5 pont)

5. (11 pont) A csomóponti potenciálok módszere alkalmazásával határozza meg az áramforrás teljesítményének előjeles értékét termelői referenciában!



Megoldás:

Felírható 3 csomóponti törvény:

$$
\begin{aligned}
I: &\quad \tfrac{\Phi_1-130}{5}+\tfrac{\Phi_1-\Phi_2}{18}+\tfrac{\Phi_1-\Phi_3-190}{10}\,\tfrac{\Phi_1-\Phi_3}{15} &= 0\\
II: &\quad \tfrac{\Phi_2-\Phi_1}{18}+\tfrac{\Phi_2}{25}-15+\tfrac{\Phi_2-\Phi_3}{6} &= 0\\
III: &\quad \tfrac{\Phi_3-\Phi_1}{15}+\tfrac{\Phi_3-\Phi_1+190}{10}+\tfrac{\Phi_3-\Phi_2}{6}+\tfrac{\Phi_3-40}{5}+\tfrac{\Phi_3}{20} &= 0
\end{aligned}
\qquad \text{(4 pont)}
$$

Ebből a potenciálok értékei

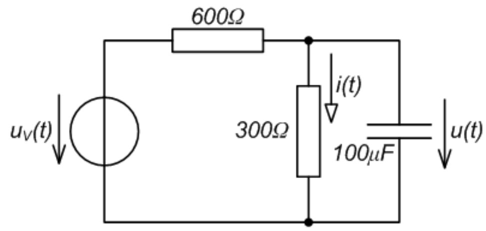
$$\Phi_1 = 146.33\ V,\quad \Phi_2 = 125.6\ V,\quad \Phi_3 = 58.83\ V,$$

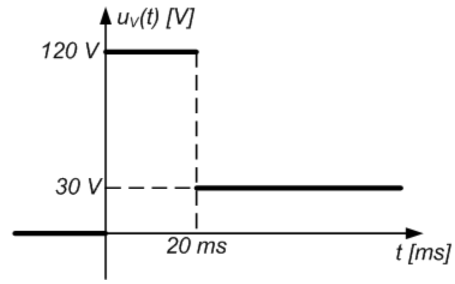
(4 pont)

Az áramforrás feszültsége $U = \Phi_2 - \Phi_0 = 125.6\ V$, a teljesítménye pedig

$$\underline{\underline{P = U \cdot 15 = 1884\ W}} \qquad \text{(3 pont)}$$

6. (15 pont) Határozza meg a kondenzátor feszültségének időfüggvényét a $(0, \infty)$ időintervallumon!





Megoldás:

R_b, illetve T meghatározása:

$$R_b = 600 \times 300 = 200\ \Omega, \quad T = C \cdot R_b = 20\ ms \qquad \text{(2 pont)}$$

A kondenzátor feszültségének értéke $t = 0\pm$-ban, illetve stacionárius értéke:

$$\begin{aligned} u(0-) = u(0+) &= 0\ V \\ u_{STAC} &= 120 \cdot \tfrac{300}{300+600} = 40\ V \end{aligned} \qquad \text{(3 pont)}$$

Mivel elsőrendű a hálózat, ezért $u(t)$ alakja $u(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} + B, \quad t \geq 0.$

$$\begin{aligned} u(0+) &= A + B = 0\ V \\ u_{STAC} &= B = 40\ V \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= -40\ V \\ B &= 40\ V \end{aligned}$$

Tehát $u(t) = \left(-40 \cdot e^{-\frac{t}{20ms}} + 40\right) V, \quad 0 \leq t \leq 20\ ms$ (2 pont)

A kondenzátor feszültségének értéke $t = 20\ ms\pm$-ban, illetve $t \to \infty$-ben:

$$\begin{aligned} u(20ms-) = u(20ms+) &= 25.28\ V \\ u(\infty) &= 30 \cdot \tfrac{300}{300+600} = 10\ V \end{aligned} \qquad \text{(3 pont)}$$

$u(t)$ alakja most $u(t) = A \cdot e^{-\frac{t-20ms}{T}} + B, \quad 20\ ms \leq t < \infty.$

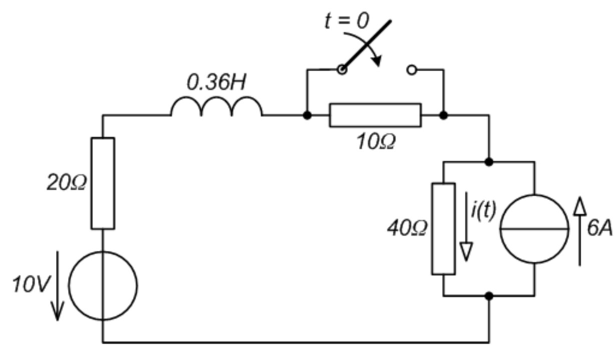
$$\begin{aligned} u(20ms+) &= A + B = 25.28\ V \\ u(\infty) &= B = 10\ V \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 15.28\ V \\ B &= 10\ V \end{aligned} \qquad \text{(2 pont)}$$

Összegezve:

$$\underline{\underline{u(t) = \begin{cases} \left(-40 \cdot e^{-\frac{t}{20ms}} + 40\right) V, & 0 \leq t \leq 20\ ms \\ \left(15.28 \cdot e^{-\frac{t-20ms}{20ms}} + 10\right) V, & 20\ ms \leq t < \infty \end{cases}}}, \quad \underline{\underline{i(t) = \frac{u(t)}{300\ \Omega}}} \qquad \text{(3 pont)}$$

7. (14 pont) Az ábrán látható hálózatban már beállt az állandósult állapot, amikor a $t = 0$

pillanatban zárjuk a kapcsolót. Határozza meg a 40 Ω-s ellenállás áramának időfüggvényét a $(0, \infty)$ időintervallumon!



Megoldás:

R_b, illetve T meghatározásához a kapcsolás utáni pillanatot vesszük figyelembe:

$$R_b = 40 + 20 = 60\ \Omega, \quad T = \frac{L}{R_b} = 6\ ms$$

(4 pont)

Az i áram $t = 0\pm$-beli értéke, illetve a $t \to \infty$-ben felvett értéke:

$$\begin{aligned}
i(0-) &= 10 \cdot \tfrac{40}{20+10+40} \cdot \tfrac{1}{40} + 6 \cdot \tfrac{20+10}{20+10+40} = 2.71\ A \\
i_L(0-) &= 10 \cdot \tfrac{1}{20+10+40} - 6 \cdot \tfrac{40}{40+10+20} = -3.286\ A \\
i(+0) &= 6 + i_L(0\pm) = 2.71\ A \\
i(\infty) &= 10 \cdot \tfrac{1}{20+40} + 6 \cdot \tfrac{20}{20+40} = 2.166\ A
\end{aligned}$$

(6 pont)

Mivel elsőrendű a hálózat, ezért $i(t)$ alakja $i(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} + B, \quad t \geq 0$.

$$\begin{aligned}
i(+0) &= A + B = 2.71\ A \\
i(\infty) &= B = 2.166\ A
\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}
A &= 0.55\ A \\
B &= 2.166\ A
\end{aligned}$$

Tehát $\underline{\underline{i(t) = \left(0.55 \cdot e^{-\frac{t}{6ms}} + 2.166\right) A, \quad t \geq 0}}$

(4 pont)

8. (13 pont) Határozza meg az alábbi lineáris differenciálegyenletnek a kezdeti feltételt kielégítő megoldását!

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$\det(\lambda \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = 0$ -ból a sajátértékek $\lambda_1 = 0$, és $\lambda_2 = 2$, (3 pont)

$(\lambda \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})\underline{v} = \underline{0}$ -ból a sajátvektorok pedig

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(5 pont)

A megoldás általános alakja:

$$\underline{x}(t) = c_1 \cdot \underline{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \underline{v}_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 1$ és $c_2 = 0$, azaz

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

(5 pont)