Elektromosságtan
Elektrotechnika

Általános áramú hálózatok

Alaptörvények-áttekintés

- Alaptörvények
  - Áram, feszültség, teljesítmény, potenciál
  - Források
  - Ellenállás
  - Kondenzátor
  - Tekercs
- Hálózati egyenletek
- Lineáris időinvariáns hálózatok

Áram, feszültség, teljesítmény, potenciál

- Időben állandó mennyiségek nagybetűvel, időben változók pedig kisbetűvel (pillanatérték) jelölendők

  $i = i(t)$

  $u = u(t)$

  $p = p(t)$

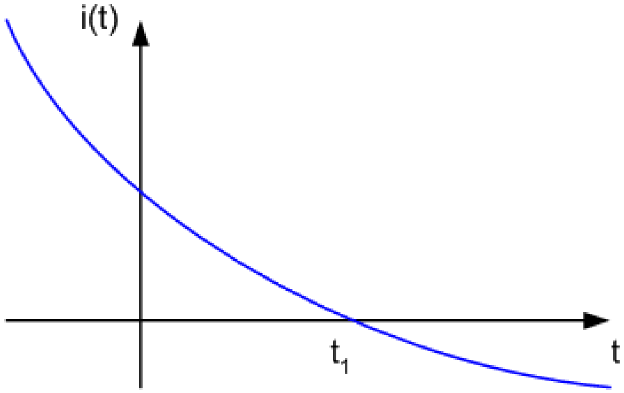
  $\Phi = \Phi(t)$

- Önkényesen megválasztott referenciairány is tartozik a mennyiségekhez, pl az ábrán

  $i(t) > 0$; ha $t < t1$

  $i(t) < 0$; ha $t > t1$

  Amikor $i(t) > 0$, az áram valódi iránya a referenciairánnyal egyező, ha pedig $i(t) < 0$, a valódi irány a referenciairánnyal ellentétes



Kirchoff törvények

- Bármely csomópontra az I áramerősségek előjeles összege minden pillanatban nulla.

$$\sum_{k=1}^{n} I_k(t) = 0$$

- Bármely hurok mentén a feszültségek előjeles összege nulla minden időpontban:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k(t) = 0$$

- Pillanatnyi teljesítmény: p(t) = u(t)·i(t)
- A pillanatnyi teljesítmény pozitív, ha u és i referenciairánya egyező, negatív, ha ellentétes.

Pillanatnyi teljesítmény

- Míg az időben állandó teljesítmény pozitív, vagy negatív a teljes időtartományban, addig az időben változó teljesítmény bizonyos tartományokon lehet pozitív, másutt pedig negatív.
- A kétpólus időnként teljesítményt ad le, máskor teljesítményt vesz fel

I. időtartomány: $t < t1$

$u > 0; i > 0; p = u \cdot i > 0$

fogyasztó

II. időtartomány: $t1 < t < t2$

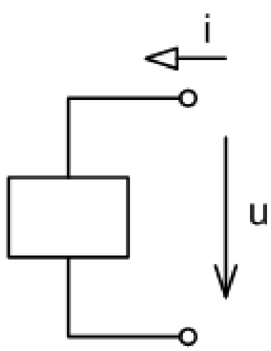
$u > 0; i < 0; p = u \cdot i < 0$

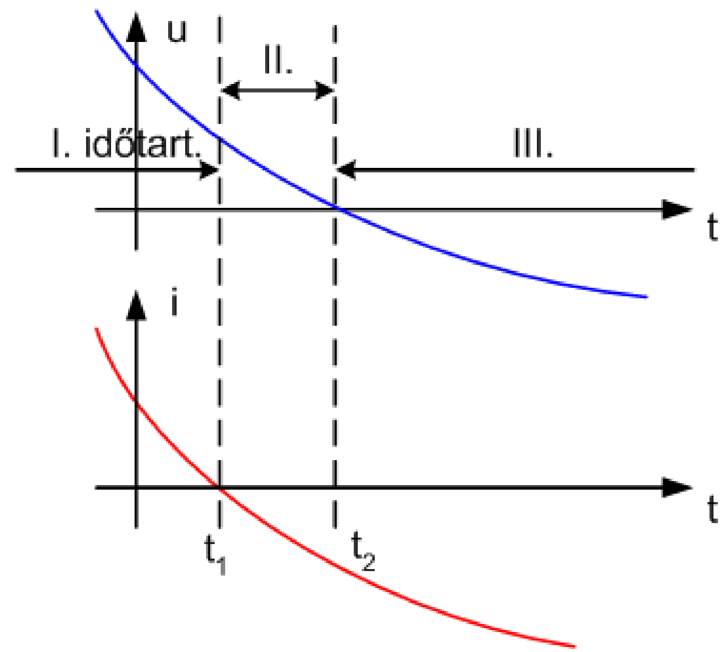
termelő

III. időtartomány: $t2 < t$

$u < 0; i < 0; p = u \cdot i > 0$

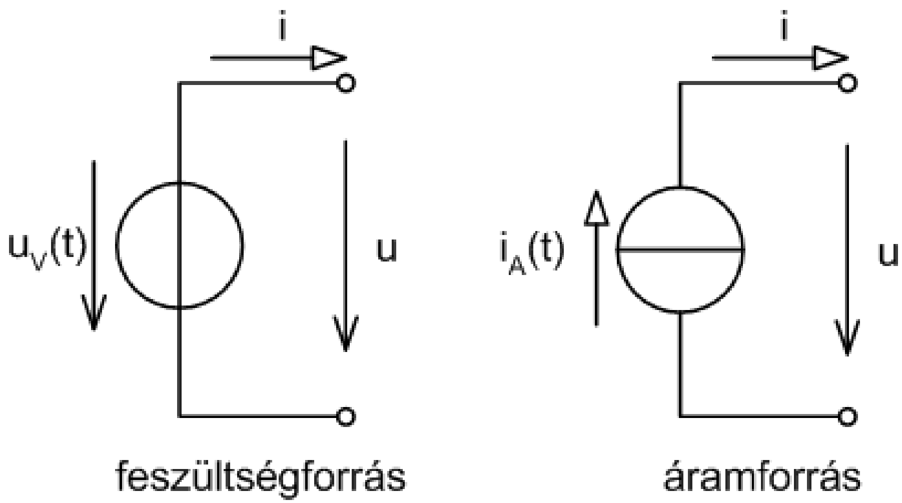
fogyasztó





Források

- Feszültségforrás: olyan kétpólus, amelynek feszültségét - az áramtól függetlenül - meghatározott időfüggvény írja le. A feszültségforrás feszültsége a forrásfeszültség: $u(t) = u_V\ (t)$. Áramát a hozzá csatlakozó kétpólus határozza meg.
- Áramforrás: olyan kétpólus, melynek áramát - a feszültségtől függetlenül - meghatározott időfüggvény írja le. Árama a forrásáram: $i(t) = i_A(t)$. Az áramforrás feszültségét a hozzá csatlakozó kétpólus határozza meg.
- Aktív kétpólus: forrást és belső ellenállást tartalmaz (feszültség és áramgenerátor)
- A generátor forrásfeszültsége, ill. forrásárama az üresjárási feszültség, ill. üresjárási áram



Ellenállás

- A kétpólus ellenállás, ha bármely u(t) és i(t) időfüggvény esetén

  $u(t) = f(i(t))$; vagy $i(t) = h(u(t))$; minden t-re.
- Lineáris ellenállás esetén $u(t) = R \cdot i(t)$, illetve $i(t) = G \cdot u(t)$, ahol R, illetve G a rezisztív kétpólus rezisztanciája, illetve konduktanciája. Ha $R = R(t)$, illetve $G = G(t)$, akkor idővariáns az ellenállás, egyébként időinvariáns.
- Az ellenállás pillanatnyi teljesítménye:

  $p = u\,i = i \cdot f(i)$

  $u \cdot h(u)$

  Lineáris ellenállás esetén $p = u\,i = R\,i^2 = Gu^2$.

  Lineáris időfüggő ellenállás esetén $p = u\,i = R(t)\,i^2 = G(t)\,u^2$.
- Rezisztív hálózatok alapegyenletei:

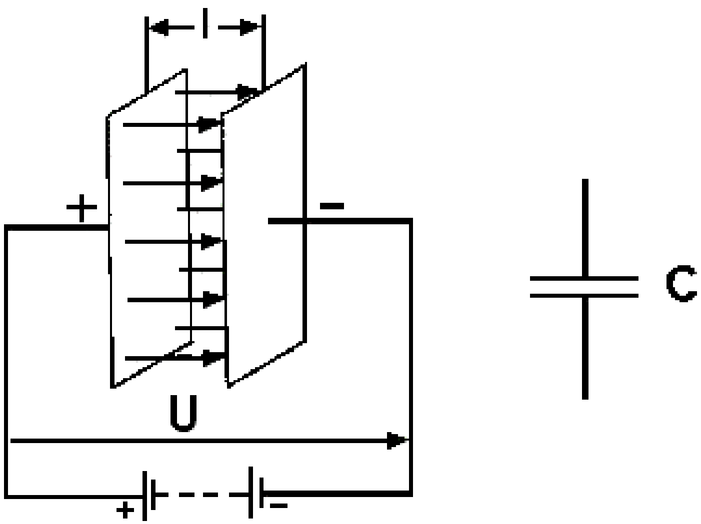
  $\sum i_k = 0$ minden csomópontra,

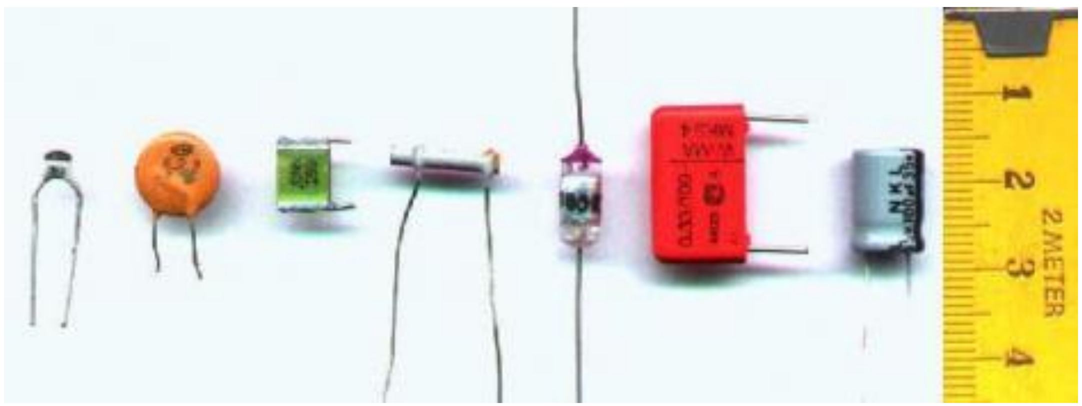
  $\sum u_k = 0$ minden hurokra

  $u_k = f_k(i_k)$; vagy $i_k = h_k(u_k)$ minden ellenállásra

Kondenzátor

- A kondenzátor két, egymás mellett lévő, szigetelőanyaggal elválasztott fémlemezből (vezetőből) áll. A két fémlemezt fegyverzetnek, a szigetelőt dielektrikumnak nevezik.
- C=εA/d, Q=CU





Kondenzátor

- Kondenzátor, vagy kapacitív kétpólus: kapcsolat található a kétpólus feszültsége, és áramának idő szerinti integrálja között.
- Töltés és áram kapcsolata:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad \text{illetve}$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(t')dt' = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} i(t')dt'$$

- Töltés mértékegysége: $[q] = A \cdot s = \text{coulomb} = C$
- Kondenzátor karakterisztikája

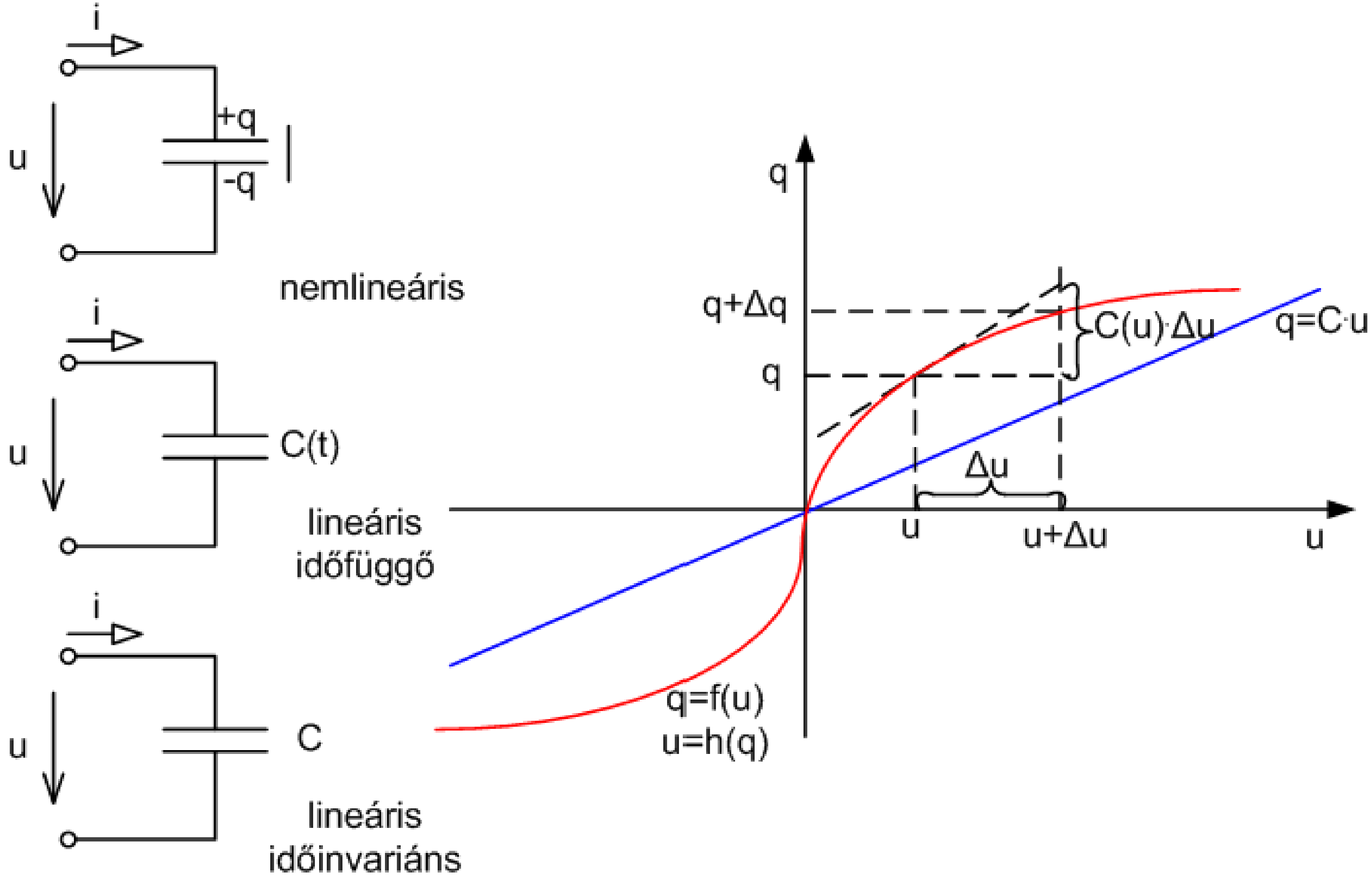
$$q = f(u), \quad \text{vagy} \quad u = h(q)$$

lineáris esetben $q = C \cdot u$, vagy $u = D \cdot q$, ahol

$$C = \text{ kapacitás: } [C] = \frac{C}{V} = \frac{As}{V} = farad = F,$$

$$D = \text{ elaszticitás: } [D] = \frac{V}{C} = \frac{V}{As}$$

Kondenzátor karakterisztikája



Kondenzátor feszültsége és árama

- Lineáris időinvariáns kondenzátor:

$$\begin{aligned} q(t) &= C \cdot u(t), \quad \text{deriválva mindkét oldalt} \\ i(t) &= C \cdot \frac{du(t)}{dt} \end{aligned}$$

ebből

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i(t')dt'$$

- Nemlineáris kondenzátor:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq(u(t))}{dt} = \frac{dq(u)}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

Kondenzátor teljesítménye és energiája

- Teljesítmény: $p(t) = u(t) \cdot i(t) = u(t) \cdot \frac{dq(t)}{dt}$
- A $[t_0, t]$ időintervallumban végzett munka:

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(t')dt' = \int_{t_0}^{t} u(t')\frac{dq(t')}{dt'}dt' = \int_{q(t_0)}^{q(t)} u(q')dq'$$

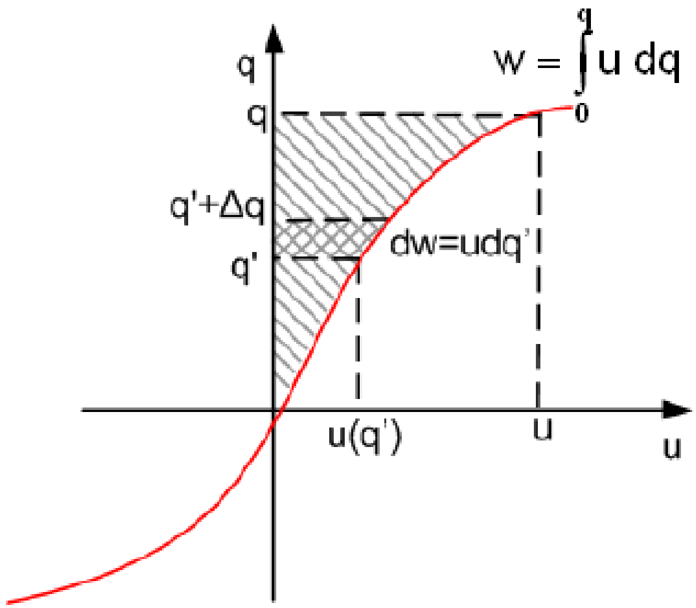
ha az $u(q)$ skalárértékű függvény, akkor $w(t_0, t)$ megadja a kondenzátor energiájának megváltozását

- Mivel $u(q = 0) = 0$, ezért a töltés- és feszültségmentes állapothoz nulla energiát rendelve, a kondenzátor által tárolt energia

$$w(t) = \int_{0}^{q(t)} u(q')dq'$$

- Lineáris időinvariáns kondenzátor esetén $q = C \cdot u$, azaz $dq' = C \cdot du'$, és

$$w(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)$$



Kondenzátorok soros és párhuzamos kapcsolása

- Feltétel: $t = 0$ pillanatban energiamentes kondenzátor
- Párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok:

$$C = C_1 + C_2, \quad \frac{du_1}{dt} = \frac{du_2}{dt} = \frac{du}{dt}$$

$$\text{Kapacitív áramosztó: } i_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} i$$

$$\text{Kapacitív töltésosztó: } u_1 = u_2 = u, \quad q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} q$$

- Sorosan kapcsolt kondenzátorok:

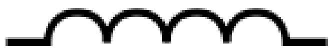
$$C = C_1 \times C_2, \quad i_1 = i_2 = i$$

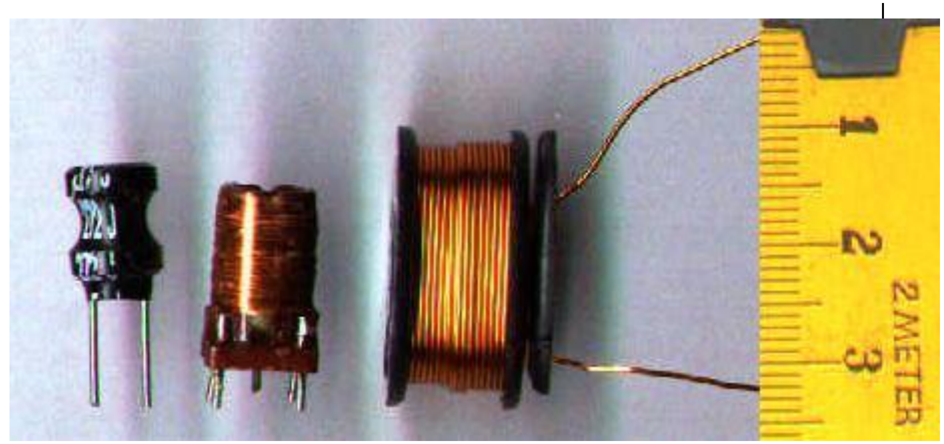
$$\text{Kapacitív feszültségderivált osztó: } \frac{du_1}{dt} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \frac{du}{dt}$$

$$\text{Kapacitív feszültségosztó: } q_1 = q_2 = q, \quad u_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} u$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} = \frac{di}{dt}$$

Induktivitás - tekercs





- A **tekercs** csavarmenet-szerűen tekeredő elektromos vezető. A menetek (és az egymásra feltekert rétegek) között szigetelés van. Lehet vasmagos, vagy légmagos

$$L=\mu_0\mu_r AN^2/l$$

Tekercs

- Induktív kétpólus, vagy tekercs: jelalaktól független kapcsolat van az árama és feszültségének idő szerinti integrálja között
- Fluxus és feszültség kapcsolata:

$$u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}, \quad \text{illetve}$$

$$\Psi(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t')dt' = \Psi(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(t')dt'$$

- Fluxus mértékegysége: $[\Psi] = V \cdot s = \text{weber} = Wb$
- Tekercs karakterisztikája

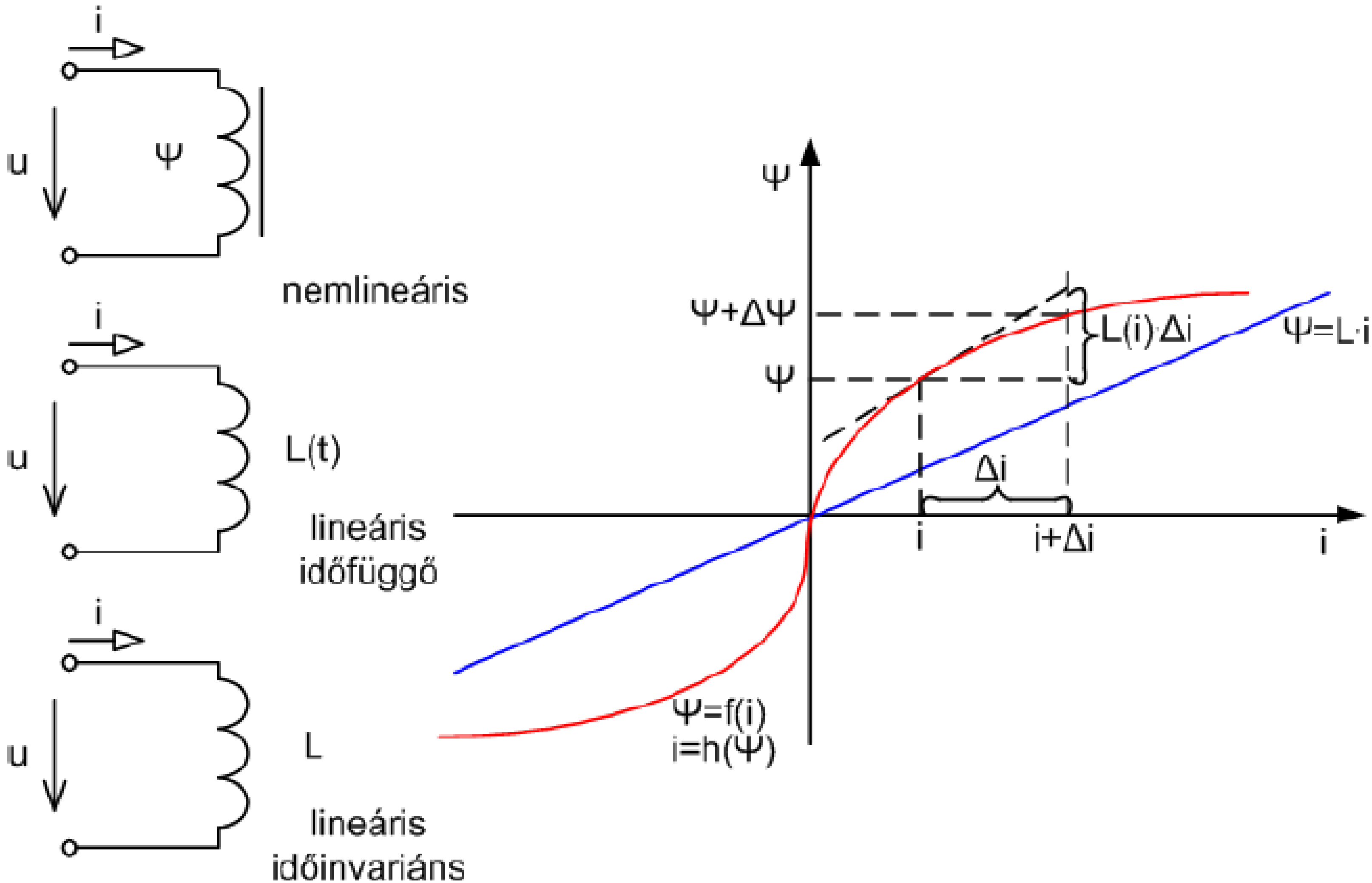
$$\Psi = f(i), \quad \text{vagy} \quad i = h(\Psi)$$

lineáris esetben $\Psi = L \cdot i$, vagy $i = \Gamma \cdot \Psi$, ahol

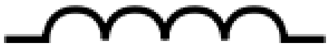
$$L = \text{ induktivitás: } [L] = \frac{Wb}{A} = \frac{Vs}{A} = henry = H,$$

$$\Gamma = \text{reciprok induktivitás: } [\Gamma] = \frac{A}{Wb} = \frac{A}{Vs}$$

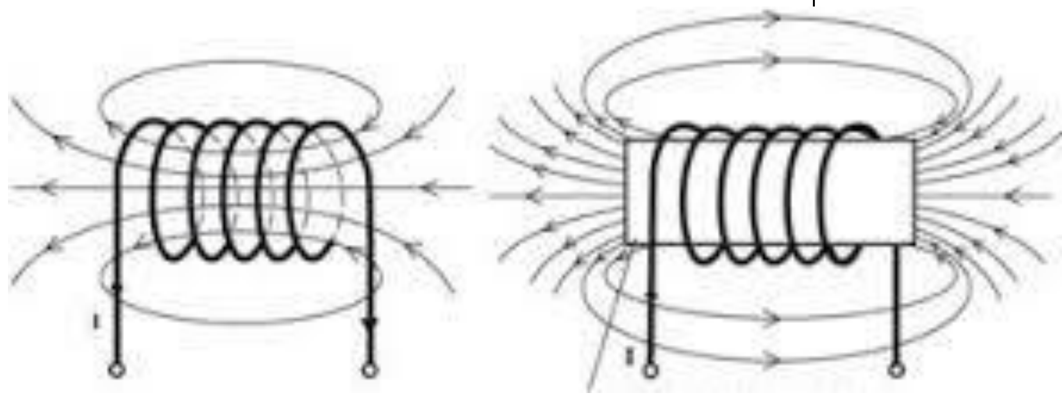
Tekercs karakterisztikája



Tekercs feszültsége és árama



- $\Psi = LI$, $L = \mu_0 \mu_r A N^2 / l$



- Lineáris időinvariáns tekercs:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= L \cdot i(t), \quad \text{deriválva mindkét oldalt} \\ u(t) &= L \cdot \frac{di(t)}{dt} \end{aligned}$$

ebből

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} u(t')dt'$$

Tekercs feszültsége és árama

- Lineáris időinvariáns tekercs:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= L \cdot i(t), \quad \text{deriválva mindkét oldalt} \\ u(t) &= L \cdot \frac{di(t)}{dt} \end{aligned}$$

ebből

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} u(t')dt'$$

- Nemlineáris tekercs:

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi(i(t))}{dt} = \frac{d\Psi(i)}{di} \cdot \frac{di}{dt}$$

Tekercs teljesítménye, energiája

- Pillanatnyi teljesítmény: $p(t) = u(t) \cdot i(t) = i(t) \cdot \frac{d\Psi(t)}{dt}$
- A $[t_0, t]$ időintervallumban végzett munka:

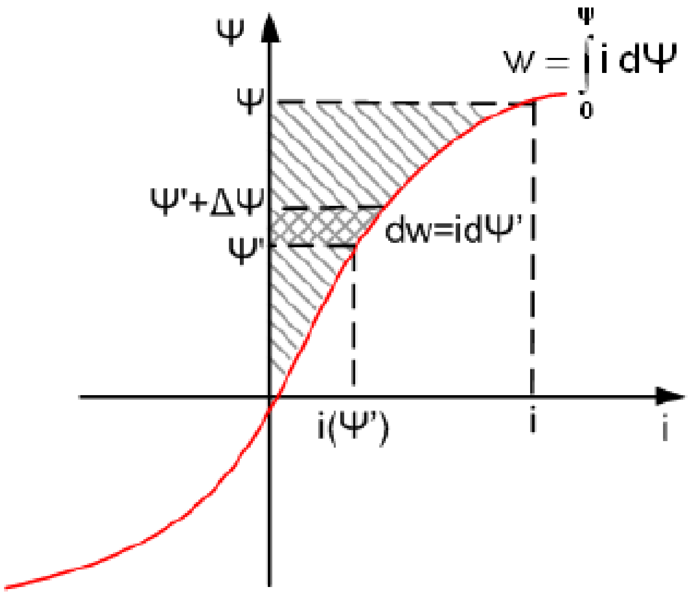
$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(t')dt' = \int_{t_0}^{t} i(t')\frac{d\Psi(t')}{dt'}dt' = \int_{\Psi(t_0)}^{\Psi(t)} i(\Psi')d\Psi'$$

  ha az $i(\Psi)$ skalárértékű függvény, akkor $w(t_0, t)$ megadja a tekercs energiájának megváltozását
- Mivel $i(\Psi = 0) = 0$, ezért a töltés- és feszültségmentes állapothoz nulla energiát rendelve, a tekercs által tárolt energia

$$w(t) = \int_{0}^{\Psi(t)} i(\Psi')d\Psi'$$

- Lineáris időinvariáns tekercs esetén $\Psi = L \cdot i$, azaz $d\Psi' = L \cdot di'$, és

$$w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$



Tekercsek soros és párhuzamos kapcsolása

- Feltétel: $t = 0$ pillanatban energiamentes tekercs
- Párhuzamosan kapcsolt tekercsek:

$$L = L_1 \times L_2, \quad u_1 = u_2 = u$$

$$\text{Induktív áramderivált osztó: } \frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{di}{dt},$$

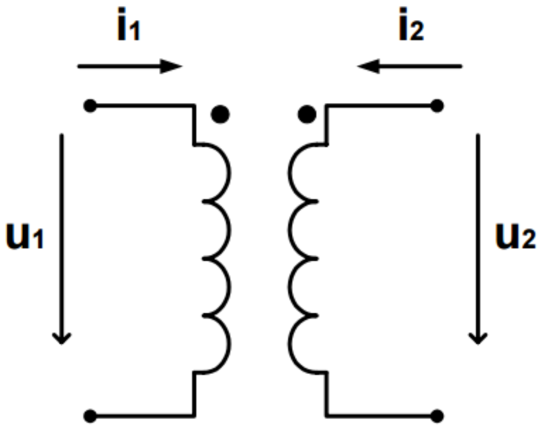
- Sorosan kapcsolt tekercsek:

$$L = L_1 + L_2, \quad \frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} = \frac{di}{dt}$$

$$\text{Induktív feszültségosztó: } u_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} u$$

Csatolt tekercsek

- Az egyik tekercs fluxusa a másik tekercs áramától is függ



$$U_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}, \quad \Phi_1 = f_1(i_1) + f_{12}(i_2)$$

Lineáris esetben :

$$U_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$U_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Áttekintés

- Alaptörvények
- Hálózati egyenletek
  - Kirchoff-törvények
  - Az egyenletek teljes rendszere
  - Kezdeti és kiindulási értékek
  - A hálózat regularitása és rendszáma
  - Az állapotváltozók
- Lineáris időinvariáns hálózatok

Kirchoff-törvények

A csomóponti és hurokegyenletek érvényesek általános áramú hálózatokra is

$$\sum_{k=1}^{r} i_k = 0, \quad r = n - 1 \text{ csomópontra}$$

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = 0, \quad m = b - r \text{ hurokra}$$

ahol n *a csomópontok száma,* b *az ágak száma, az egyenletek száma összesen* $m + r = b$.

Az egyenletek teljes rendszere

Ha a hálózat b ágat tartalmaz, akkor az ismeretlenek száma $2b$: b feszültség és b áram. A Kirchoff-törvények b számú egyenletet szolgáltatnak, a hiányzó b egyenletet az *ágtörvények* adják.
A Kirchoff-törvényekből és az ágtörvényekből származó egyenletek alkotják együtt az egyenletek teljes rendszerét.

- Feszültségforrás:
$$u_k = u_{V_k}$$
- Áramforrás:
$$i_k = i_{A_k}$$
- Ellenállás:

lineáris időinvariáns: $u_k = R_k i_k$ vagy $i_k = G_k u_k$

lineáris időben változó: $u_k = R_k(t) i_k$ vagy $i_k = G_k(t) u_k$

nemlineáris: $u_k = f_k(i_k)$ vagy $i_k = h_k(u_k)$

Az egyenletek teljes rendszere

- Kondenzátor:

lineáris időinvariáns: $i_k = C_k \frac{du_k}{dt}$

lineáris időben változó: $i_k = \frac{d}{dt}[C_k(t)u(k)] = C_k \frac{du_k}{dt} + \frac{dC_k}{dt} u_k$

nemlineáris: $i_k = \frac{dq_k}{dt}$ vagy $q_k = f_k(u_k)$ vagy
$u_k = h_k(q_k)$ vagy $i_k = C_k(u_k) \frac{du_k}{dt}$

- Tekercs:

lineáris időinvariáns: $u_k = L_k \frac{di_k}{dt}$

lineáris időben változó: $u_k = \frac{d}{dt}[L_k(t)i(k)] = L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{dL_k}{dt} i_k$

nemlineáris: $u_k = \frac{d\Psi_k}{dt}$ vagy $\Psi_k = f_k(i_k)$ vagy
$i_k = h_k(\Psi_k)$ vagy $u_k = L_k(i_k) \frac{di_k}{dt}$

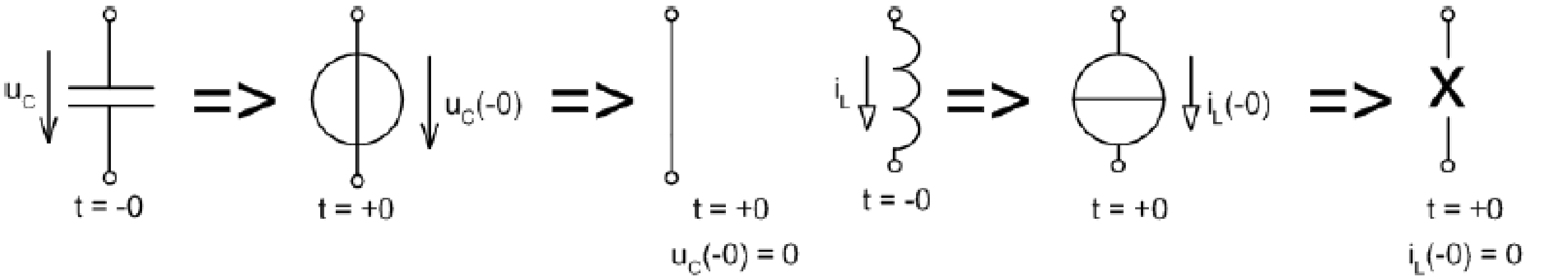
Kezdeti és kiindulási értékek

- Kezdeti érték:
$$u(+0) = \lim_{t\to 0} u(t), \quad t > 0$$
$$i(+0) = \lim_{t\to 0} i(t), \quad t > 0$$
- Kiindulási érték:
$$u(-0) = \lim_{t\to 0} u(t), \quad t < 0$$
$$i(-0) = \lim_{t\to 0} i(t), \quad t < 0$$
- Korlátos mennyiségeket tételezünk fel: kondenzátor töltése és tekercs fluxusa. Ez azt jelenti, hogy kezdeti és kiindulási értékük megegyezik.
$$q(+0) = q(-0), \quad \Psi(+0) = \Psi(-0)$$
- Különben $\frac{dq}{dt} = i$, és $\frac{d\Psi}{dt} = u$ miatt végtelen áramok és feszültségek jelennének meg
- Ebből $u_C(+0) = u_C(-0)$ és $i_L(+0) = i_L(-0)$ is teljesül

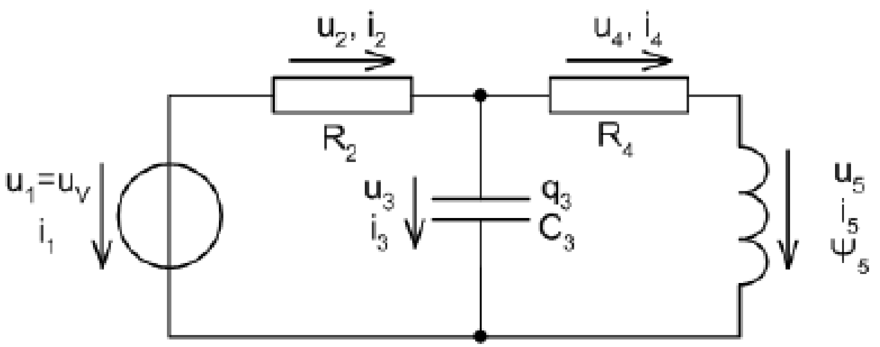
A $q(t)$, $\Psi(t)$, illetve $u_C(t)$ és $i_L(t)$ függvényeknek folytonosnak kell lenniük, nem lehet ugrás $t = 0$-ban.

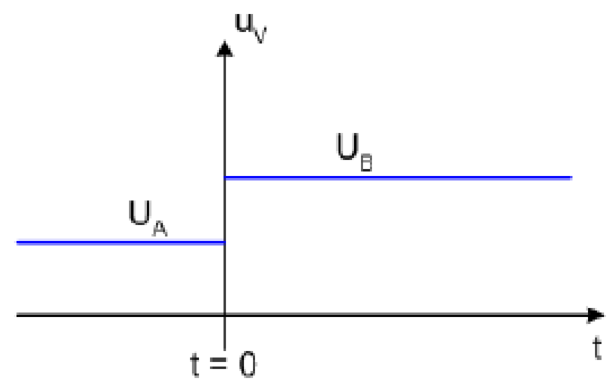
Kezdeti és kiindulási értékek

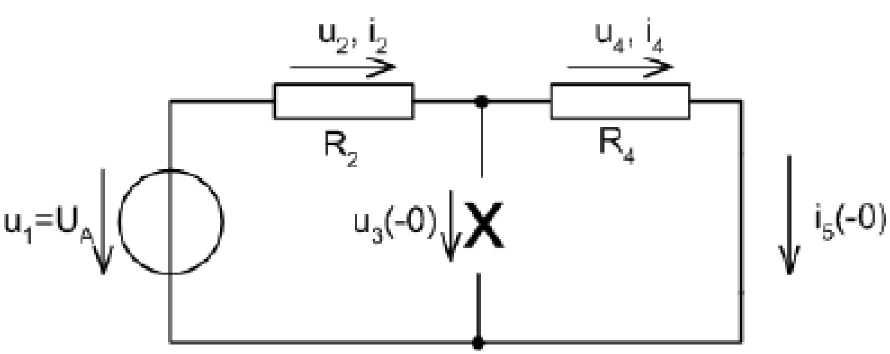
- A $t = 0$ időpillanatban a kondenzátor egy $u_C(-0)$ forrásfeszültségű feszültségforrásnak tekinthető
- A $t = 0$ időpillanatban a tekercs egy $i_L(-0)$ forrásáramú áramforrásnak tekinthető
- A $t = +0$ időpillanatban a hálózat olyan egyenáramú hálózattal helyettesíthető, amely a kondenzátorokat és tekercseket helyettesítő fiktív forrásokon és az $u_V(+0)$ forrásfeszültségű és $i_A(+0)$ forrásáramú valódi forrásokon kívül csak ellenállásokat tartalmaz.
- Spec. eset: $u_C(-0) = 0$ és $i_L(-0) = 0$, ekkor a kondenzátor rövidzárral ($u_C(+0) = 0$), a tekercs pedig szakadással ($i_A(+0) = 0$) helyettesíthető.

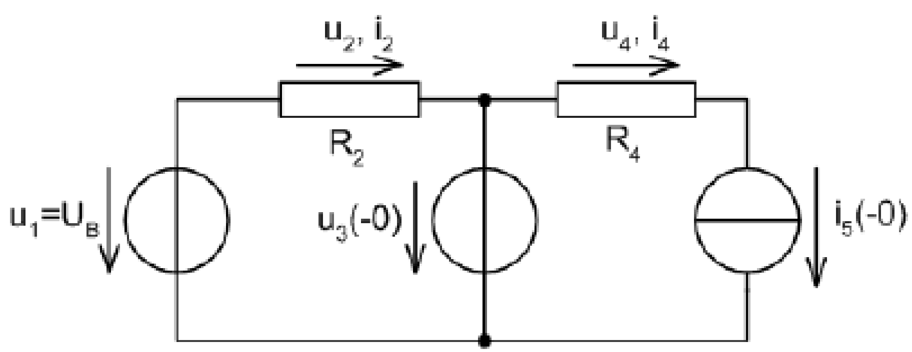


Példa

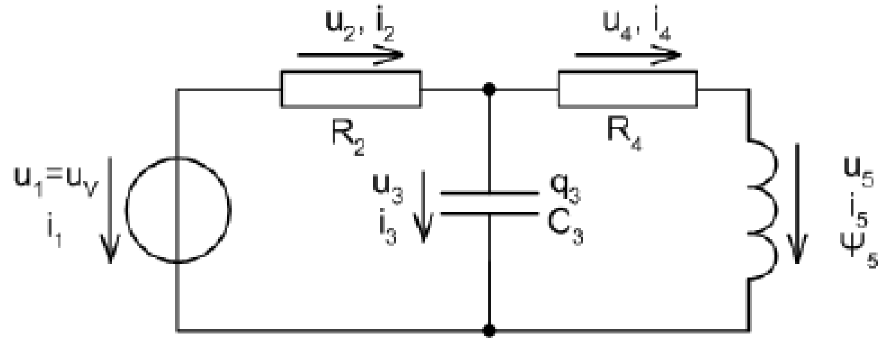

u_2, i_2
u_4, i_4
R_2
R_4
$u_1=u_V$
i_1
u_3
i_3
q_3
C_3
u_5
i_5
ψ_5


u_V
U_B
U_A
$t = 0$
t


u_2, i_2
u_4, i_4
R_2
R_4
$u_1=U_A$
$u_3(-0)$
$i_5(-0)$


u_2, i_2
u_4, i_4
R_2
R_4
$u_1=U_B$
$u_3(-0)$
$i_5(-0)$

Példa



- Kiindulási értékek

$$u_3(-0) = \frac{R_4}{R_2 + R_4} U_A, \quad i_5(-0) = \frac{1}{R_2 + R_4} U_A$$

- Kezdeti értékek:

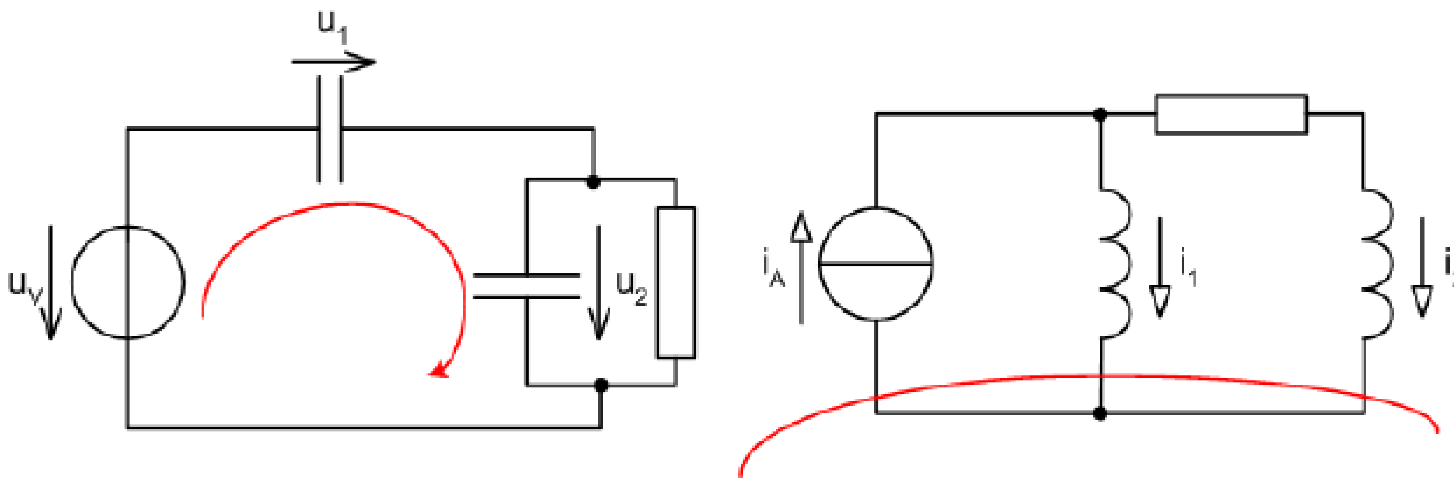
$$u_3(+0) = u_3(-0), \quad i_5(+0) = i_5(-0)$$

- Kondenzátor áramának kezdeti értéke:

$$\begin{aligned} u_2(+0) &= u_v(+0) - u_3(+0) = U_b - \tfrac{R_4}{R_2+R_4} U_A \\ i_3(+0) &= G_2 \cdot u_2(+0) - i_5(+0) = G_2 \cdot (U_b - U_A) \end{aligned}$$

A hálózat regularitása és rendszáma

- Reguláris hálózat: korlátos gerjesztések esetén minden változó korlátos marad véges időkre.
- Egyenáramú hálózatok esetében ez azt jelenti, hogy feszültségforrások nem alkothatnak hurkot, áramforrások pedig vágatot
- Általános áramú hálózatok esetében pedig azt, hogy a hálózat nem tartalmazhat csak feszültségforrásokból és kondenzátorokból álló (V+C) hurkot, illetve csak áramforrásokból és tekercsekből álló (A+L) vágatot:

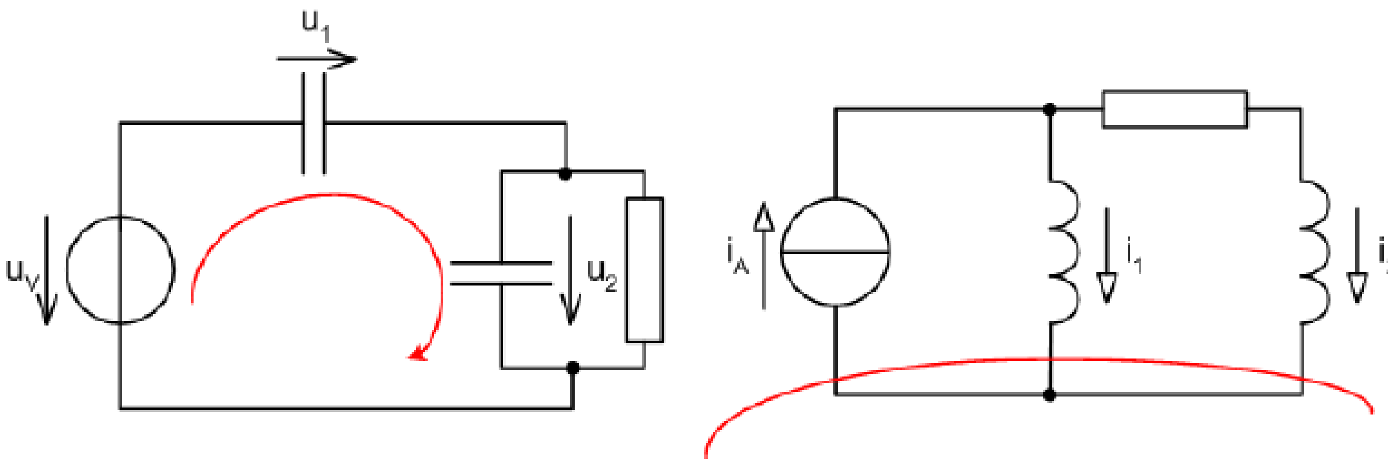


A hálózat regularitása és rendszáma

- Reguláris hálózat gráfjában mindig található normál fa: olyan fa, amelyben a feszültségforrásoknak és a kondenzátoroknak megfelelő ágak faágak, az áramforrásoknak és tekercseknek megfelelő ágak pedig kötőágak.
- Reguláris hálózat N rendszáma az energiatárolók számával egyezik meg:

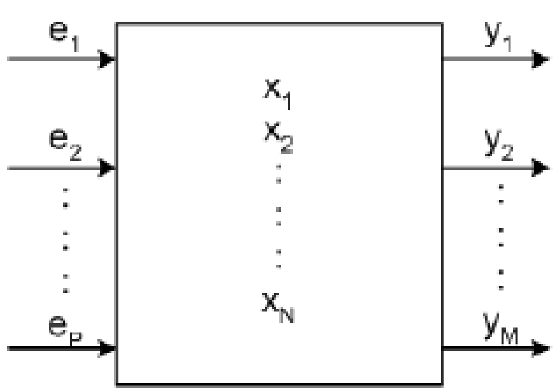
$$N = b_C + b_L$$

ahol b_C a hálózatban található kondenzátorok száma, b_L a hálózatban található tekercsek száma.



Az állapotváltozók

- A hálózat a környezetéből érkező hatásokra ($e_1, \ldots, e_P$ gerjesztések) reagál ($y_1, \ldots, y_M$ válaszokat ad)
- A gerjesztések a forrásfeszültségek és forrásáramok, a válaszok pedig a minket érdeklő feszültségek és áramok.
- Állapotváltozók ($x_1, \ldots, x_N$): belső változók, amelyek valamely t_1 időpillanatbeli $x_1(t_1), \ldots, x_N(t_1)$ értékére
  1. a t_1-beli állapot és a gerjesztések ismeretében bármely t_2-beli állapot ($t_2 > t_1$) meghatározható
  2. a t_1-beli állapot és a gerjesztések ismeretében meghatározhatók a rendszer válaszai



- Az állapotváltozók elsőrendű differenciálegyenleteknek tesznek eleget:

$$\frac{x_i(t)}{dt} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_N;\; e_1, e_2, \ldots, e_P;\; t), \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

- A válaszok az állapotok és a gerjesztések, valamint az idő függvényeként fejezhetők ki:

$$y_j(t) = \gamma_j(x_1, x_2, \ldots, x_N;\; e_1, e_2, \ldots, e_P;\; t), \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

- Mátrix-vektoros alak:

$$\begin{array}{rcl} \frac{d\underline{x}}{dt} & = & \underline{\varphi}(\underline{x}, \underline{e}, t) \\ \underline{y} & = & \underline{\gamma}(\underline{x}, \underline{e}, t) \end{array}, \quad \text{ahol}$$

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_P \end{bmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \underline{\varphi} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^P \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \\ \underline{\gamma} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^P \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M \end{array}$$

- Mivel $\underline{e}$ ismert, csak $\underline{x}$ és t a független változók. A hálózat állapottér modellje:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{x}}{dt} &= \underline{f}(\underline{x}, t), && \leftarrow \text{állapotegyenlet} \\ \underline{y} &= \underline{g}(\underline{x}, t), && \leftarrow \text{kimeneti egyenlet} \end{aligned}$$

- Ha a hálózat lineáris és időinvariáns, akkor a hálózat állapottér modellje is lineáris:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\underline{x}}{dt} &= \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{e} \\ \underline{y} &= \underline{\underline{C}} \cdot \underline{x} + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{e} \end{aligned}\right. , \quad \text{ahol}$$

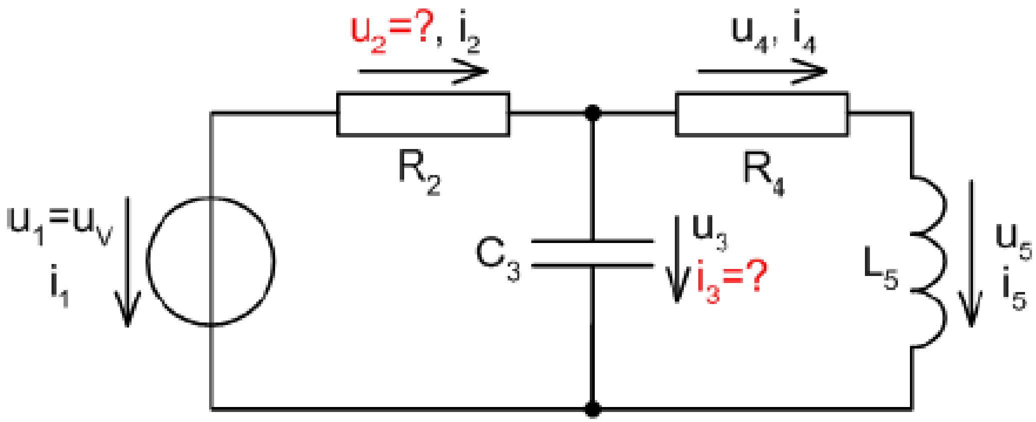
$$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{N \times P}, \quad \underline{\underline{C}} \in \mathbb{R}^{M \times N}, \quad \underline{\underline{D}} \in \mathbb{R}^{M \times P}$$

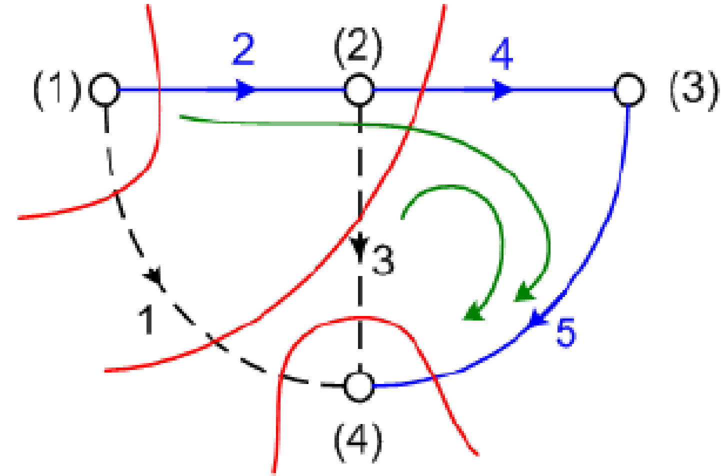
- $\underline{f}$-et és $\underline{g}$-t, illetve az $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{D}}$ mátrixok értékeit a hálózat struktúrája, illetve az ágtörvények határozzák meg.
- Reguláris hálózatok állapotváltozói a a kondenzátorok töltése, illetve a tekercsek fluxusa, mivel ezek folytonos mennyiségek.
- Lineáris időinvariáns hálózatok esetében a kondenzátorok feszültségei és a tekercsek áramai is tekinthetők állapotváltozóknak.

Állapottérmodell felírása

1. Felírjuk a hálózati egyenletek teljes rendszerét
2. A kondenzátorok áramát $\frac{dq}{dt}$ illetve $C \cdot \frac{du_C}{dt}$ alakban, a tekercsek feszültségét $\frac{d\Psi}{dt}$ illetve $L \cdot \frac{di_L}{dt}$ alakban fejezzük ki.
3. A hálózati egyenleteket úgy rendezzük, hogy az állapotváltozókat $(q_k, u_{C_k}, \Psi_k, i_{L_k})$ és a gerjesztéseket ismertnek tekintjük, az összes többi változót pedig ismeretlennek.
4. Az egyenletrendszert megoldjuk

Állapottérmodell felírása





- A hálózati egyenletek teljes rendszere $2b$, azaz 10 egyenletből áll

- Kirchoff-egyenletek:

$$i_1 + i_2 = 0$$
$$i_1 + i_3 + i_4 = 0$$
$$-i_1 - i_3 - i_5 = 0$$
$$-u_1 + u_2 + u_4 + u_5 = 0$$
$$-u_3 + u_4 + u_5 = 0$$

- Ágtörvények:

$$u_1 = u_V$$
$$u_2 = R_2 \cdot i_2$$
$$i_3 = C_3 \cdot \frac{du_3}{dt}$$
$$u_4 = R_4 \cdot i_4$$
$$u_5 = L_5 \cdot \frac{di_5}{dt}$$

Állapottérmodell felírása

- Állapottér modell

$$\begin{bmatrix} \frac{du_3}{dt} \\ \\ \frac{di_5}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C_3} & -\frac{1}{C_3} \\ \\ \frac{1}{L_5} & -\frac{R_4}{L_5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ \\ i_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2 C_3} \\ \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_V$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \\ \frac{1}{R_2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ \\ i_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \cdot u_V$$

Áttekintés

- Alaptörvények
- Hálózati egyenletek

- Lineáris időinvariáns hálózatok
  - A hálózategyenletek megoldása
  - A tranziens összetevő
  - A stacionárius összetevő
  - A teljes megoldás
  - Néhány elsőrendű hálózat
  - Néhány másodrendű hálózat

A hálózategyenletek megoldása

- Adottak
  - Állapotegyenlet (elsőrendű lineáris differenciálegyenlet)

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{e}(t)$$

  - Az állapotváltozókra vonatkozó kezdeti feltételek:

$$\underline{x}(+0) = \underline{x}(-0)$$

  - Kimeneti egyenlet (algebrai egyenlet)

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{x}(t) + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{e}(t)$$

Lineáris állandó együtthatós differenciál-egyenletrendszer megoldása

- A homogén differenciálegyenlet $\underline{x}(t) = \underline{x}_{\mathrm{tr}}(t)$ megoldása, ami N határozatlan állandót tartalmaz
$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t), \qquad \underline{e}(t) = \underline{0}$$
Ez a tranziens összetevő, ami a források nélküli hálózat folyamatait írja le. Ezek akkor vannak jelen, ha a hálózat energiát tárolt (kondenzátor kiindulási feszültsége, tekercs kiindulási árama). Ez az energia a hálózat veszteségein hővé alakul, azaz:
$$\lim_{t\to\infty} x_{\mathrm{tr}}(t) = 0$$
- Az inhomogén differenciálegyenlet egy $\underline{x}_{\mathrm{st}}(t)$ partikuláris megoldása (stacionárius összetevő)
- A differenciálegyenlet általános megoldása:
$$\underline{x}(t) = \underline{x}_{\mathrm{st}}(t) + \underline{x}_{\mathrm{tr}}(t) \qquad \left(\lim_{t\to\infty} x(t) = x_{\mathrm{st}}(t)\right)$$
- A határozatlan állandók az $\underline{x}(-0) = \underline{x}(+0)$ kezdeti feltételekből számolhatók.

A tranziens összetevő – Elsőrendű hálózat

- Egyetlen energiatárolót tartalmaz $\longrightarrow$ egy állapotváltozója van

$$\frac{dx_{\mathrm{tr}}(t)}{dt} = A \cdot x_{\mathrm{tr}}(t)$$

- Megoldás általános alakja:

$$x_{\mathrm{tr}}(t) = M \cdot e^{\lambda t}$$

- λ meghatározása:

$$\lambda \cdot M \cdot e^{\lambda t} = A \cdot M \cdot e^{\lambda t} \qquad \longrightarrow \lambda = A$$

- Mivel a tranziens nullához tart:

$$\lambda = A = -\delta = -\frac{1}{T}$$

ahol δ a csillapítási tényező, és T az időállandó,

$$T = \frac{1}{\delta} > 0$$

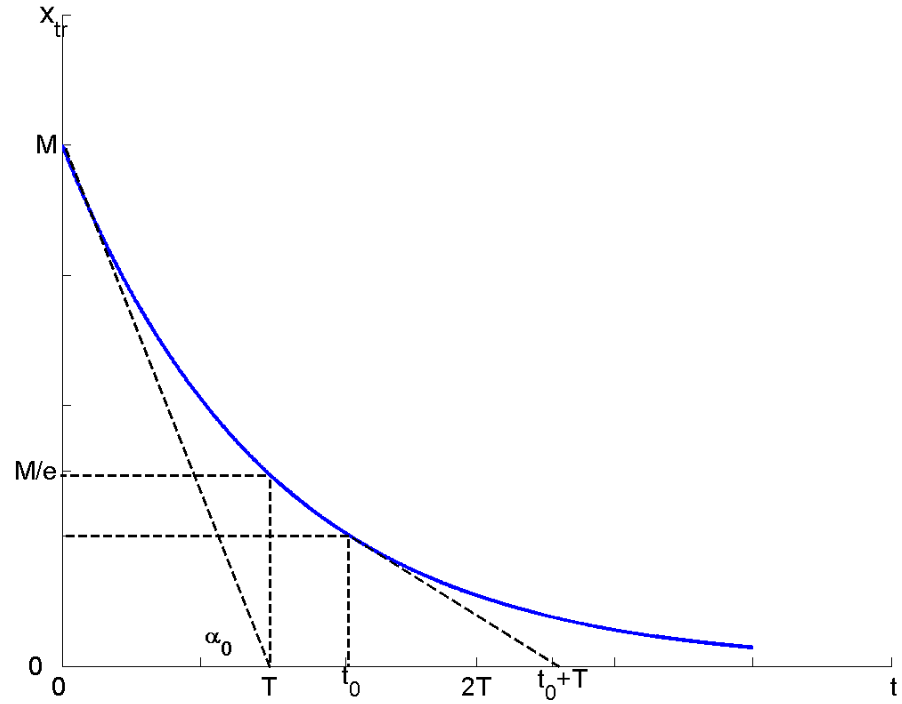
A tranziens összetevő – Elsőrendű hálózat

T időállandó értelmezése:

- a tranziens T idő alatt e-ed részére csökken

$$x_{\mathrm{tr}}(T) = M \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \cdot x_{\mathrm{tr}}(0) \approx 0.368 \cdot x_{\mathrm{tr}}(0)$$

- a kezdeti érintő $t = T$ helyen metszi az időtengelyt



A tranziens összetevő - Másodrendű hálózat

- Két energiatárolót tartalmaz $\rightarrow$ két állapotváltozó jellemzi

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= A_{11} \cdot x_1(t) + A_{12} \cdot x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= A_{21} \cdot x_1(t) + A_{22} \cdot x_2(t) \end{aligned}$$

- Megoldás általános alakja:

$$x_1(t) = M_1 \cdot e^{\lambda t}, \qquad x_2(t) = M_2 \cdot e^{\lambda t}$$

- Visszahelyettesítve, és $e^{\lambda t}$-vel egyszerűsítve:

$$\begin{aligned} (A_{11} - \lambda) \cdot M_1 + A_{12} \cdot M_2 &= 0 \\ A_{21} \cdot M_1 + (A_{22} - \lambda) \cdot M_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Nemtriviális megoldás:

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2; \; \underline{v}_{\lambda_1}, \underline{v}_{\lambda_2}$$

- λ_1, λ_2: az A mátrix sajátértékei, $\underline{v}_{\lambda_1}, \underline{v}_{\lambda_2}$: a λ_1, λ_2-hez tartozó sajátvektorok

A tranziens összetevő - Másodrendű hálózat

A megoldás alakja:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ egyszeres valós sajátértékek:

$$\underline{x}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \underline{v}_{\lambda_1} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \underline{v}_{\lambda_2}$$

- $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \mathrm{j}\omega$ komplex konjugált sajátérték pár ($\underline{v}_\lambda = \underline{a} \pm \mathrm{j}\underline{b}$):

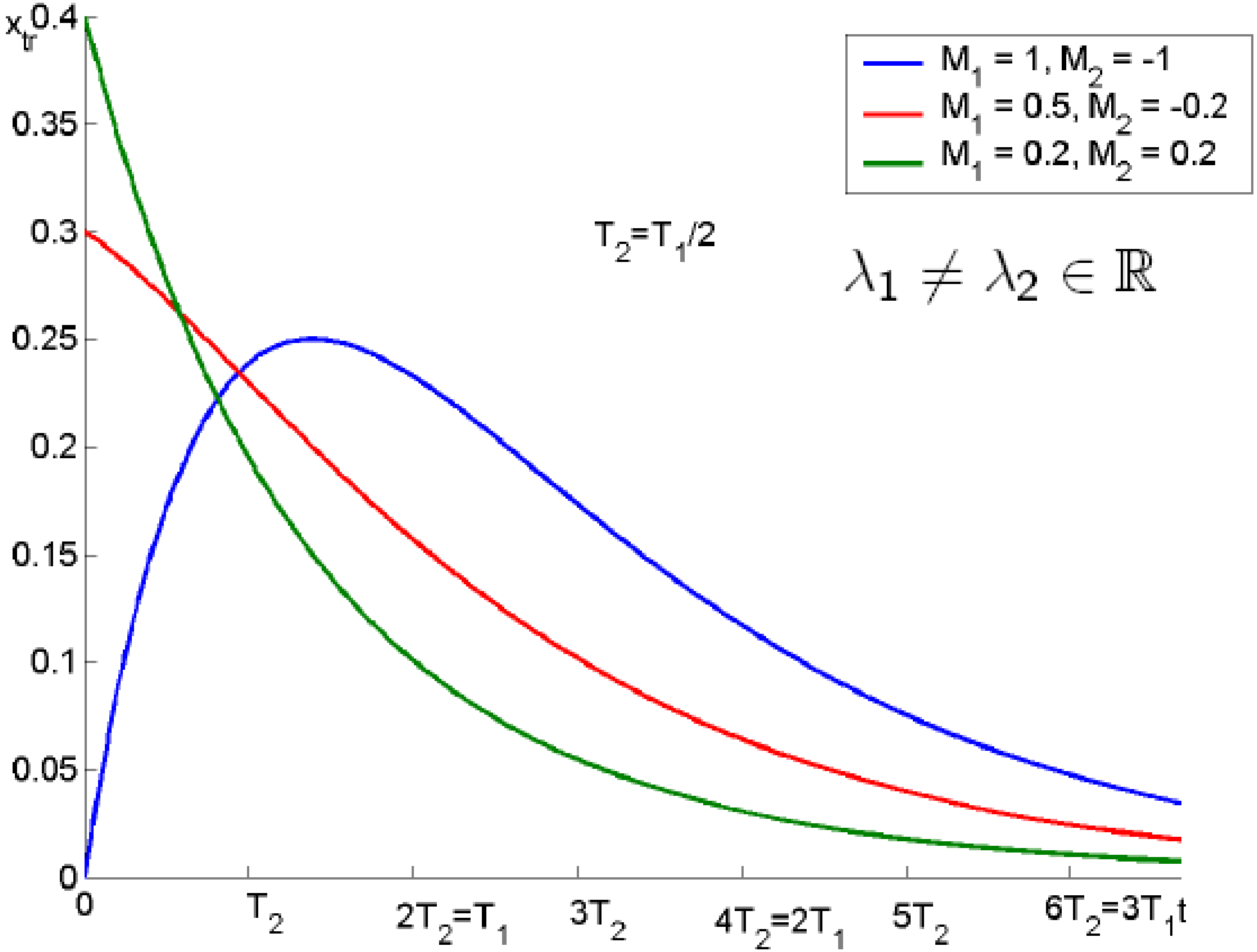
$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= c_1 \cdot e^{-\delta t} \cdot (\underline{a} \cdot \cos(\omega t) - \underline{b} \cdot \sin(\omega t)) + \\ & \quad c_2 \cdot e^{-\delta t} \cdot (\underline{a} \cdot \sin(\omega t) + \underline{b} \cdot \cos(\omega t))\end{aligned}$$

- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ többszörös (kétszeres) valós sajátértékek:

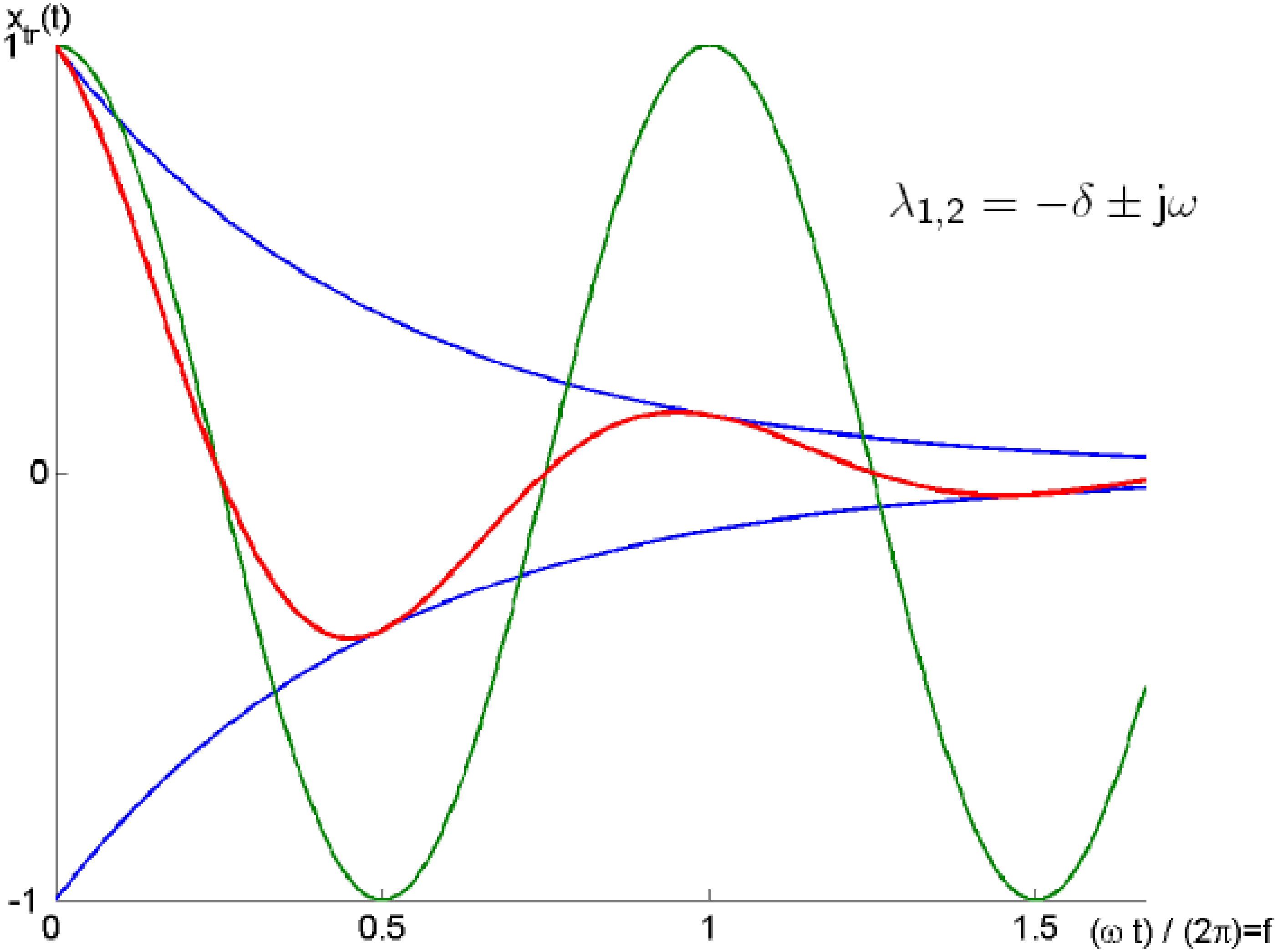
$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= c_1 \cdot e^{\lambda t} \cdot \underline{v}_\lambda + \\ & \quad c_2 \left(t \cdot e^{\lambda t} \cdot \underline{v}_\lambda + e^{\lambda t} \cdot \underline{\eta}_\lambda \right)\end{aligned}$$

$\underline{\eta}_\lambda$ általánosított sajátérték ($(\underline{A} - \lambda \underline{I})\underline{\eta} = \underline{v}$ megoldása)

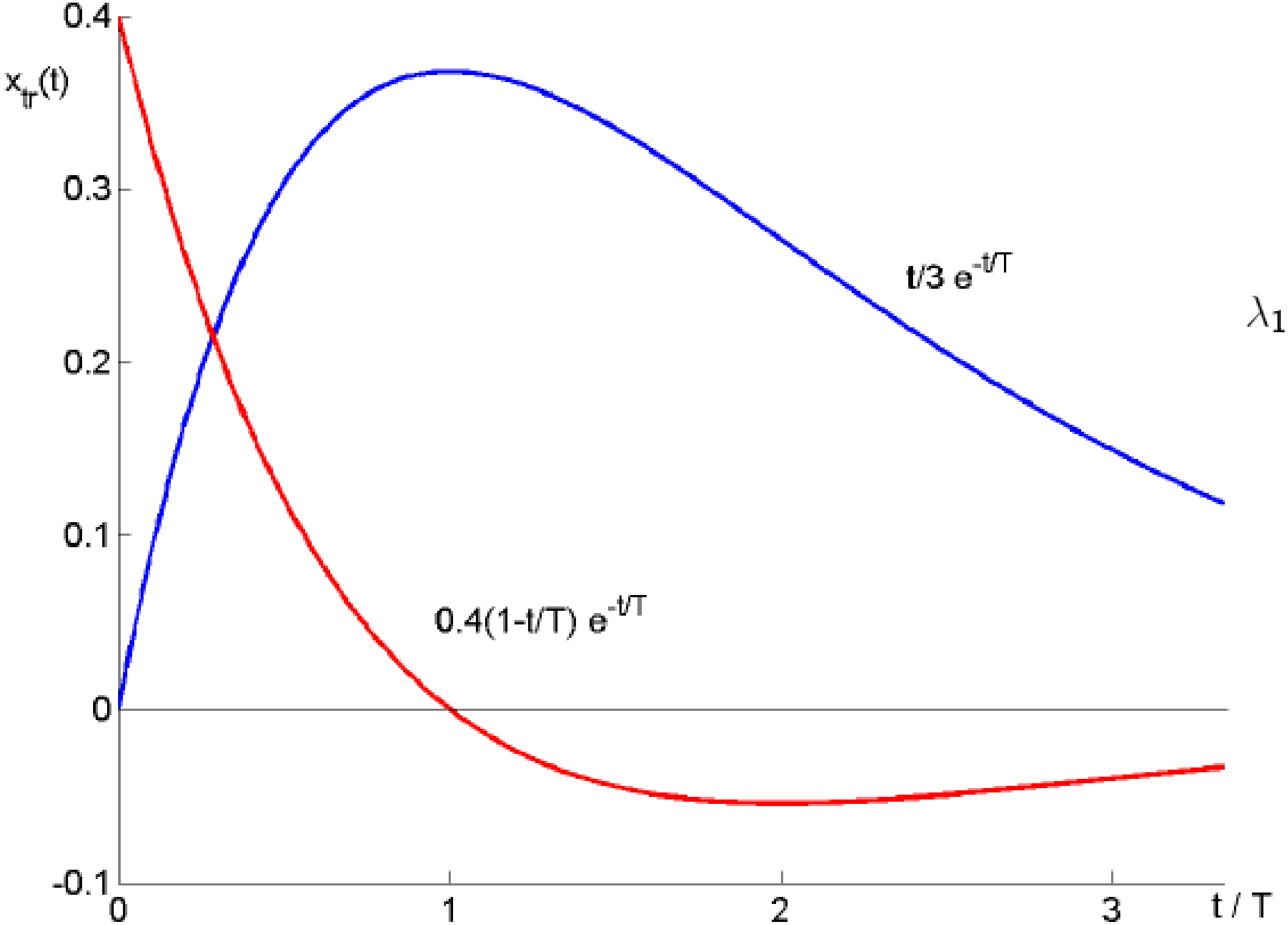
A tranziens összetevő - Másodrendű hálózat



A tranziens összetevő - Másodrendű hálózat



A tranziens összetevő - Másodrendű hálózat



$$\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

A tranziens összetevő - Magasabbrendű hálózat

- N-edrendű állapotegyenlet

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{N} A_{ik} \cdot x_k(t), \qquad i = 1, \ldots, N$$

- Megoldás alakja:

$$x_i(t) = M_i \cdot e^{\lambda t}$$

- Karakterisztikus egyenlet:

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \cdot \underline{\underline{I}}_N) = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_N; \; \underline{v}_{\lambda_1}, \ldots, \underline{v}_{\lambda_N}$$

A stacionárius összetevő

- Állandósult állapotbeli viselkedés
- Állandó forrásmennyiségek: a kondenzátorokon nem folyik áram (szakadás), a tekercseken nem esik feszültség (rövidzár), így a hálózat csak forrásokat és ellenálláasokat tartalmaz.
- Ha a forrásmennyiségek időfüggők, akkor egy inhomogén differenciálegyenlet rendszert kell megoldani
  - Laplace-transzformáció
  - próbafüggvény módszere

A teljes megoldás

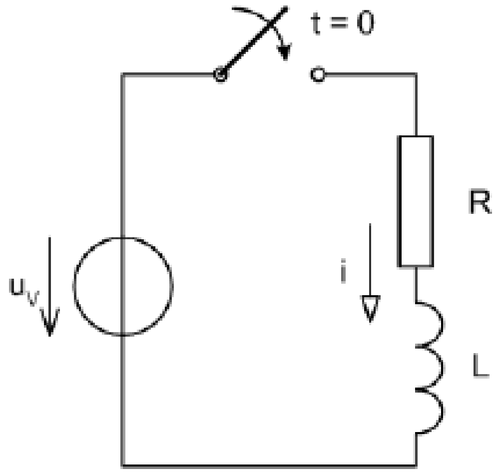
- Az általános megoldás a stacionárius összetevő és a tranziens összetevő összegeként áll elő:

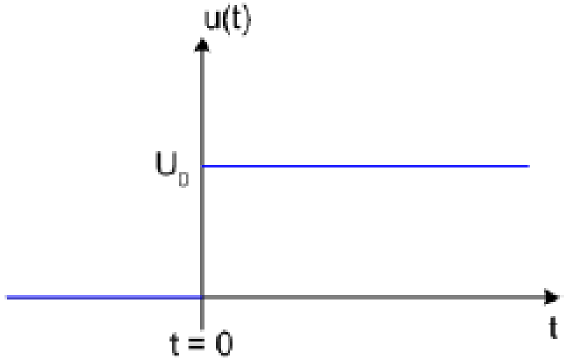
$$\underline{x}(t) = \underline{x}_{\mathrm{st}}(t) + \underline{x}_{\mathrm{tr}}(t)$$

- A tranziens összetevő tartalmaz N határozatlan állandót, amelyet az N számú kezdeti érték alapján határozhatók meg:

$$x_i(+0) = x_{\mathrm{st}_i}(0) + x_{\mathrm{tr}_i}(0), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Soros RL-kör





$$u_V = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot i + \frac{1}{L} \cdot u_V$$

$$\lambda = -\frac{R}{L} \quad \longrightarrow \quad \delta = \frac{R}{L}, \quad T = \frac{L}{R}$$

Soros RL-kör

- Tranziens összetevő:

$$i_{\mathrm{tr}}(t) = k \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = k \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

- Stacionárius összetevő:

$$i_{\mathrm{st}}(t) = \frac{U_0}{R}$$

- Teljes megoldás:

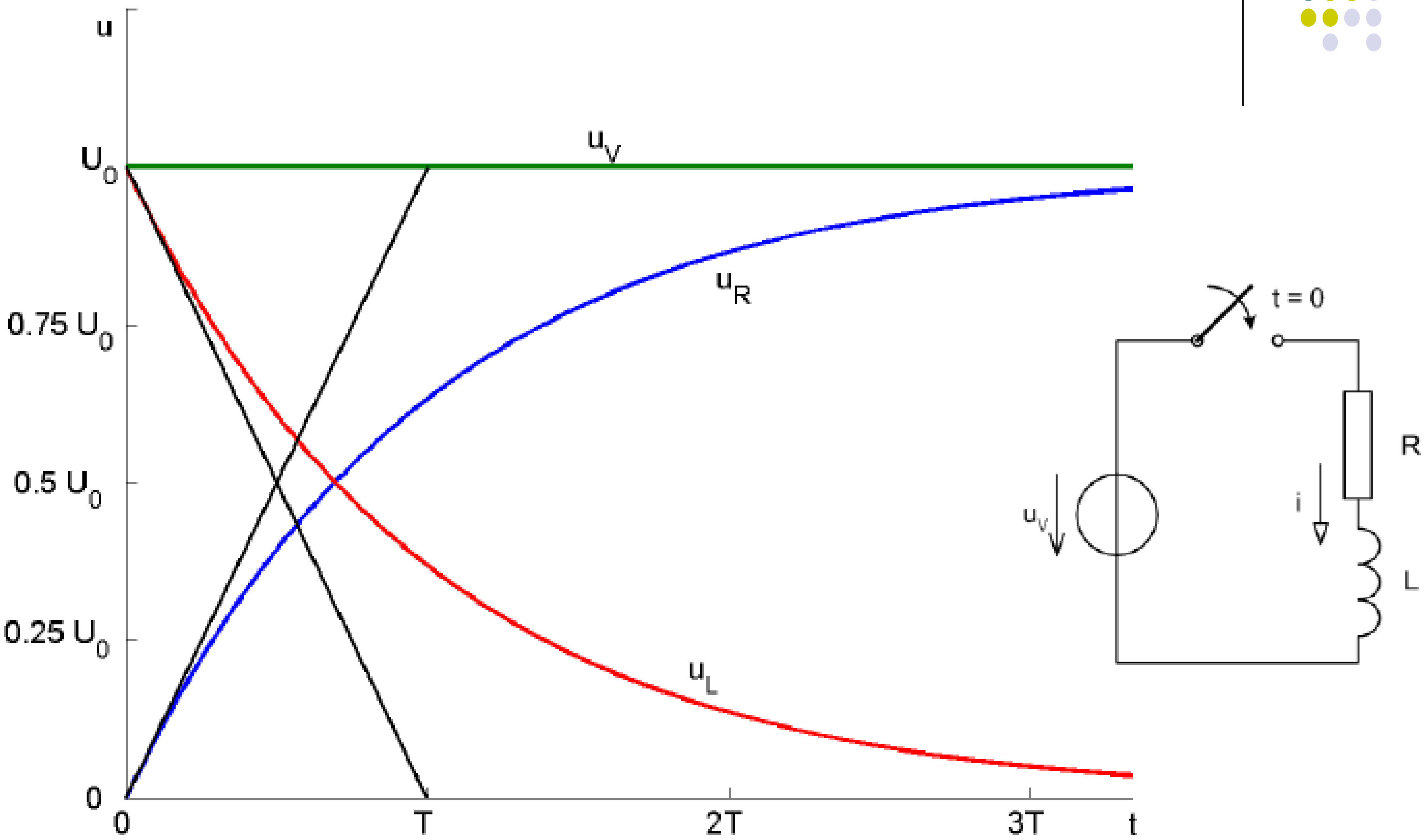
$$i(t) = \frac{U_0}{R} + k \cdot e^{-\frac{R}{L}t}, \qquad i(-0) = 0 \quad \rightarrow \quad k = -\frac{U_0}{R}$$

$$i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

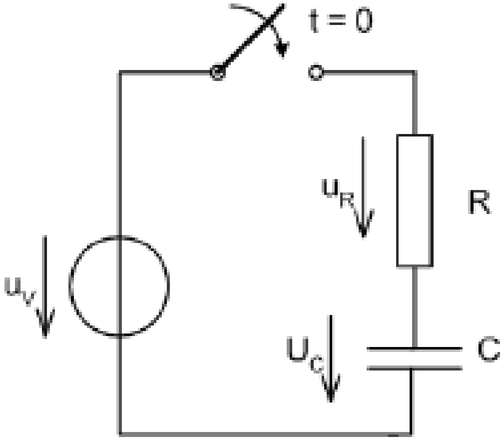
- Feszültségek:

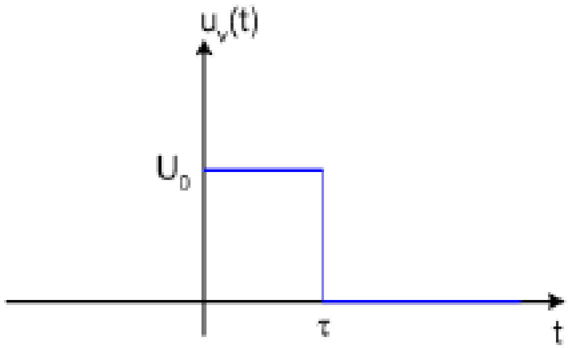
$$\begin{aligned} u_R(t) &= R \cdot i(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \\ u_L(t) &= U_0 - u_R(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

Soros RL-kör



Soros RC-kör (feltöltött kondenzátorral)





$$u_V = RC \cdot \frac{du}{dt} + u$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot u + \frac{1}{RC} \cdot u_V$$

$$\lambda = -\frac{1}{RC} \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{1}{RC}, \quad T = RC$$

Külön-külön a $[0, \tau]$ és a $[\tau, \infty)$ intervallumokon

Soros RC-kör, 0 < t ≤τ

- Tranziens összetevő:

$$u_{\mathrm{tr}}(t) = k_1 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} = k_1 \cdot e^{-\frac{t}{T}}, \qquad 0 < t \leq \tau$$

- Stacionárius összetevő:

$$u_{\mathrm{st}}(t) = U_0, \qquad 0 < t \leq \tau$$

- Kezdeti feltétel:

$$u(+0) = U_0 + k_1 = u(-0) = U_C$$

$$k_1 = U_C - U_0$$

- Teljes megoldás $0 < t < \tau$:

$$u(t) = U_0 + (U_C - U_0) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}, \qquad 0 < t \leq \tau$$

Soros RC-kör, τ < t < ∞

- Tranziens összetevő:

$$u_{\mathrm{tr}}(t) = k_2 \cdot e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} = k_2 \cdot e^{-\frac{(t-\tau)}{T}}, \qquad \tau < t < \infty$$

- Stacionárius összetevő:

$$u_{\mathrm{st}}(t) = 0, \qquad \tau < t < \infty$$

- Kezdeti feltétel:

$$u(\tau+0) = k_2 = u(\tau-0) = U_0 + (U_C - U_0) \cdot e^{-\frac{\tau}{RC}}$$

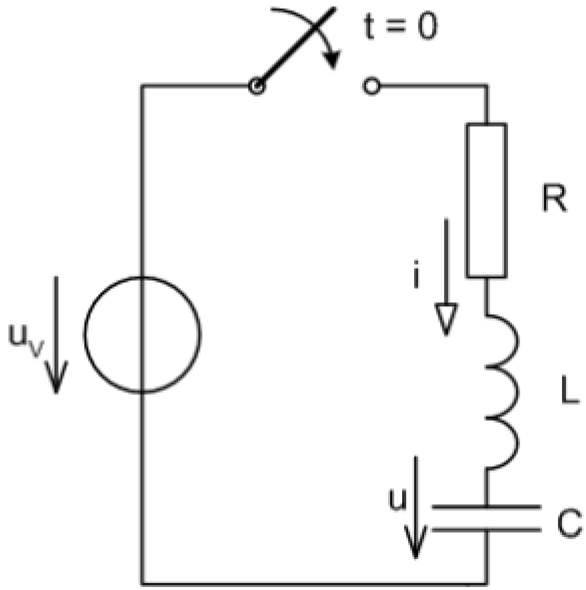
- Teljes megoldás $\tau < t < \infty$:

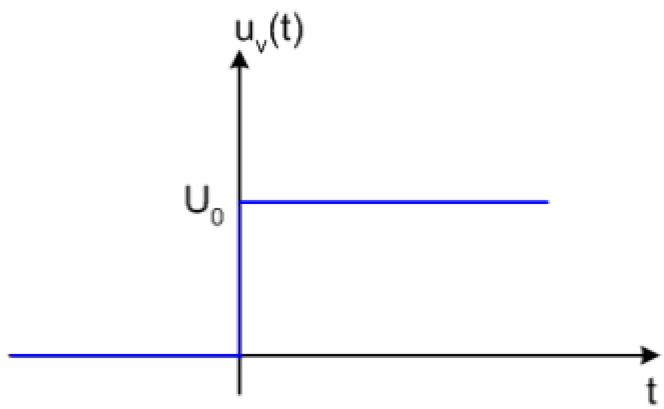
$$u(t) = \left[U_0\left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}}\right) + U_C \cdot e^{-\frac{\tau}{RC}}\right] \cdot e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}$$

- Az ellenálláson fellépő feszültség $u_R = u_V - u$:

$$u_R(t) = \begin{cases} -(U_C - U_0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, & 0 < t \leq \tau \\ -\left[U_0\left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}}\right) + U_C \cdot e^{-\frac{\tau}{RC}}\right] \cdot e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}, & \tau < t < \infty \end{cases}$$

Soros rezgőkör





- Állapotváltozók a tekercs i árama és a kondenzátor u feszültsége
- Az állapotegyenlet:

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{1}{C} \cdot i \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L} \cdot u - \frac{R}{L} \cdot i + \frac{1}{L} \cdot u_V
\end{aligned}
$$

Soros rezgőkör

- A tranziens összetevők alakja:

$$u_{\mathrm{tr}}(t) = k_1 \cdot e^{\lambda t}, \qquad i_{\mathrm{tr}}(t) = k_2 \cdot e^{\lambda t}$$

- A homogén diffegyenletbe helyettesítve:

$$\lambda \cdot C \cdot k_1 - k_2 = 0, \qquad k_1 + (\lambda \cdot L + R) \cdot k_2$$

- A sajátértékek:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{(2L)^2} - \frac{1}{LC}}$$

- Stacionárius összetevők:

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{st}}(t) &= U_0 \\ i_{\mathrm{st}}(t) &= 0 \end{aligned}$$

- Mivel $k_{2i} = \lambda_i \cdot C \cdot k_{1i}, \quad i = 1, 2$
- Általános megoldás:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 + k_{11} \cdot e^{\lambda_1 t} + k_{21} \cdot e^{\lambda_2 t} \\ i(t) &= \lambda_1 \cdot C \cdot k_{11} \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \cdot C \cdot k_{21} \cdot e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Soros rezgőkör

- Kezdeti feltételek:

$$u(+0) = 0, \qquad i(+0) = 0$$

- Ebből:

$$\begin{aligned} k_{11} + k_{12} &= -U_0 \\ \lambda_1 \cdot C \cdot k_{11} + \lambda_2 \cdot C \cdot k_{12} &= 0 \end{aligned}$$

- Ebből a megoldás:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \left[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right] \\ i(t) &= \frac{U_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \right] \end{aligned}$$

- Relatív csillapítási tényező:

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Soros rezgőkör

- Relatív csillapítási tényező:
  - $\zeta > 1$ - túlcsillapított rezgőkör
  - $\zeta < 1$ - csillapított rezgőkör
  - $\zeta = 1$ - kritikus csillapítás
- Túlcsillapított eset ($\zeta > 1$)

$$\delta_{1,2} = -\lambda_{1,2} = \frac{R}{2L} \mp \sqrt{\frac{R^2}{(2L)^2} - \frac{1}{LC}} = \frac{\zeta \mp \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\sqrt{LC}}$$

az időállandók:

$$T_{1,2} = \frac{1}{\delta_{1,2}} = \frac{\sqrt{LC}}{\zeta \mp \sqrt{\zeta^2 - 1}} \approx \sqrt{LC}\zeta^{-1}\left(1 \pm \sqrt{1 - \zeta^{-2}}\right)$$